arXiv:2303.02253v2 [math.CO] 9 Dec 2023

辫子拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式

Luis Ferroni 和 Matt Larson

Abstract. 我们为由 A_{n-1} 型辫子配置产生的拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式给出一种组合解释，由此也解释了该辫子配置倒数平面的交叉上同调贝蒂数。此外，我们证明了这一结果的等变版本。关键的组合对象是一类由串并联网络产生的拟阵。由此，我们证明了 Elias、Proudfoot 和 Wakefield 关于辫子拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式最高次项系数的猜想，并给出了其 Kazhdan–Lusztig 多项式及 Z-多项式的显式生成函数。

1. Introduction

1.1. **概述。** 自 1979 [KL79], 以来，Coxeter 群中 Bruhat 区间的 Kazhdan–Lusztig 多项式已从多个角度得到广泛研究。它们在表示论、代数几何和组合学中发挥着核心作用。Kazhdan–Lusztig 多项式理论的一个显著特点是，它可以推广，以阐释数学多个领域中的深刻现象。Stanley 在 [Sta92], 提出了一种影响深远的推广，由此产生了如今所称的 Kazhdan–Lusztig–Stanley (KLS) 多项式。关于详细综述，请参见 [Pro18] 。除了前述 Coxeter 群中 Bruhat 区间的情形之外，还有其他重要的整系数多项式族也包含在 KLS 理论之中。值得注意的是，以单纯多面体的 g-向量为系数的多项式就是一种 KLS 多项式。著名的单纯多面体 g- 定理由 Billera–Lee [BL80] 和 Stanley [Sta80] 给出了 g-多项式的系数必须满足的不等式。

我们考虑另一个源自拟阵的 KLS 多项式实例。拟阵可以视为数学和计算机科学中两种普遍概念的统一抽象：线性无关与贪心算法。Elias、Proudfoot 和 Wakefield 在 [EPW16] 中开启了对拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式的研究。这一理论在 Braden、Huh、Matherne、Proudfoot 和 Wang [BHM+20] 解决 Dowling–Wilson 猜想的过程中发挥了关键作用。

在上述三种情形中，即 Coxeter 群中的 Bruhat 区间、单纯多面体以及拟阵，KLS 多项式都可以通过相对简单的递推关系来定义。所得多项式的系数均为非负数，但相应的证明都需要借助霍奇理论中的复杂工具。例如，单纯多面体的 g-多项式的非负性可由 Hard Lefschetz 定理 [Sta80]推出；在 Coxeter 群的情形中，Elias 和 Williamson 的证明为 Soergel 双模建立了霍奇理论的一种形式 [EW14]；而在拟阵的情形中，核心要素则是 Braden、Huh、Matherne、Proudfoot 和 Wang 为拟阵交叉上同调的一种变体建立的霍奇理论的一种形式[BHM+20]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：05B35, 05A15, 55N33, 20C30, 13D40。

从整体上看这三种证明，可以将这三类多项式的非负性视为它们是 Hilbert–Poincar´e 多项式这一事实的结果。换言之，系数的非负性源于它们是某些适当向量空间的维数这一事实。然而，如何为这些系数找到组合解释，仍是一个悬而未决且尚未得到广泛解决的问题。

拟阵最基本的例子源自图的圈拟阵。完全图K_n 具有 n 个顶点的情形，在理论的诸多重要进展中一直居于核心地位。完全图的圈拟阵称为编织拟阵。为编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式寻找公式和算法，最终促成了其他对象的引入，其中一些如今已成为拟阵奇异霍奇理论的核心，该理论由 [BHM+20]提出。

编织拟阵 K_n 的平坦格是分拆格 Π_n，即集合 $\{1,\dots,n\}$ 的所有划分按粗化关系排序所得的偏序集。众所周知，分拆格与数学其他领域中出现的各种对象密切相关。例如，$M_{0,n+1}$（即带有 $n+1$ 个标记点的复射影直线的模空间）的分层由 Π_n 中的某些链索引。

本文的核心结果为所有编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式的系数提供了组合解释。此外，我们还将为一个称为 Z-多项式的相关对象给出解释。我们所提供的解释出人意料地具体：编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式的系数以及 Z-多项式，都计数由串并联网络产生的拟阵。此外，我们对系数的组合描述还为比 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式精细得多的不变量提供了解释；这些不变量将拟阵的对称性纳入考量（等变Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式）。

这带来了许多相关应用，例如可以写出显式（但较为复杂）的生成函数，从而能够显式计算这些多项式，绕过其定义递归。此外，我们的主要结果使我们得以解决 Elias、Proudfoot 和 Wakefield 提出的一个猜想。该猜想断言，K_{2n} 的 Kazhdan–Lusztig 多项式的首项系数满足一个神秘的公式。下面还将介绍一些需要更技术性讨论的其他推论。

1.2. **拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式。** 如前所述，Elias、Proudfoot 和 Wakefield 在 [EPW16]中引入的主要对象是拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式。为了陈述其精确定义，我们将采用 Proudfoot、Xu 和 Young [PXY18], 以及 Braden 和 Vysogorets[BV20]所采用的另一种方法。确切地说，他们证明了存在一种唯一的方式，为每个无环拟阵 M 关联一个多项式 $P_{\mathsf{M}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$，使其满足以下性质：

(i) 如果 $\operatorname{rk}(\mathsf{M}) = 0$，则 $P_{\mathsf{M}}(t) = 1$。(ii) 如果 $\operatorname{rk}(\mathsf{M}) > 0$，则 $\deg P_{\mathsf{M}}(t) < \frac{1}{2}\operatorname{rk}(\mathsf{M})$。(iii) 对于每个拟阵 M，多项式

$$Z_{\mathsf{M}}(t) = \sum_{F \in \mathcal{L}(\mathsf{M})} t^{\operatorname{rk}(F)} P_{\mathsf{M}/F}(t)$$

是回文的，次数为秩。

[1] A polynomial $f(t)$ is *palindromic* if $f(t) = t^d f(t^{-1})$, where $d = \deg f$.

这里，$\mathcal{L}(M)$ 是 M 的平坦格。多项式 $P_M(t)$ 称为 M 的*Kazhdan– Lusztig* 多项式，而多项式 $Z_M(t)$ 称为 M 的*Z* 多项式。不难证明，上述三个性质唯一确定了 $P_M(t)$ 和$Z_M(t)$。

拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式具有显著的性质。例如，拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z- 多项式的系数均为非负数，而 Z-多项式的系数是单峰的 [BHM+20，定理 1.2]。当且仅当 $P_M(t) = 1$ [EPW16，命题 2.14]，M 的平坦格是模的。Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z- 多项式被猜想为实根的，见 [GPY17b，猜想 3.2]以及 [PXY18，猜想 5.1]。文献中有大量工作致力于研究特定类别拟阵的这些多项式，例如均匀拟阵 [GLX+21、GX21、余秩为 2 [的拟阵 19], FS22], 、稀疏铺砌拟阵 [LNR21、FV22], 以及铺砌拟阵 [FNV22]。

当拟阵 M 由线性子空间 $L \subseteq \mathbb{C}^n$ 实现时，M 的 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式都具有代数几何解释。M 的 Z-多项式是 L in $(\mathbb{P}^1)^n$ 的闭包的交叉上同调的 Poincar´e 多项式，而 Kazhdan–Lusztig 多项式则是点 $(\infty, \dots, \infty)$ 在 $(\mathbb{P}^1)^n$ 上的交叉上同调茎的 Poincar´e 多项式。等价地，Kazhdan–Lusztig 多项式是 M 的（仿射）倒数平面的交叉上同调的 Poincar´e 多项式：该倒数平面是 L 在 $\mathbb{A}^n$ 上经过克雷莫纳变换后的像的闭包。这证明了当 M 可实现时，系数非负；对于任意拟阵，系数非负性由 Braden、Huh、Matherne、Proudfoot 和 Wang [BHM+20] 通过将这一对 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式的描述组合化而证明。

当子群 Γ 在 $\mathfrak{S}_n$ 上的作用保持 $L \subseteq \mathbb{C}^n$时，Γ就作用在 $(\mathbb{P}^1)^n$ 中 L 的闭包的交叉上同调上，也作用在 L的倒数平面的交叉上同调上。通过取 Γ-等变 Poincar´e 多项式，我们可以构造 Kazhdan–Lusztig 多项式和 Z-多项式的相应版本，其系数属于 Γ的虚表示环 VRep(Γ)。这可以推广到所有带有有限群作用的无环拟阵：对于群 Γ 在无环拟阵[2] M上的每个作用 $\Gamma \curvearrowright$M，都存在唯一一种方式，将其对应到多项式$P^\Gamma_M(t) \in$ VRep(Γ)$[t]$，使得

(i) 若 rk(M) $= 0$，则 $P^\Gamma_M(t) =$ tr 为平凡表示。(ii) 若 rk(M) > 0，则 deg $P^\Gamma_M(t) < \frac{1}{2}$rk(M)。(iii) 对每个 M，多项式

$$Z^\Gamma_M(t) = \sum_{[F] \in \mathcal{L}(M)/\Gamma} t^{\mathrm{rk}(F)} \operatorname{Ind}^\Gamma_{\Gamma_F} P^{\Gamma_F}_{M/F}(t)$$

是一个度为 rk(M) 的回文多项式。

这里，Γ_F 是 F 的稳定子，而$\mathcal{L}(M)/\Gamma$表示M 的平坦格 Γ作用下的商。多项式 $P^\Gamma_M(t)$ 称为等变 *Kazhdan–Lusztig* 多项式，而 $Z^\Gamma_M(t)$ 称为等变 Z-多项式。参见 [GPY17a，命题21]。

1.3. **编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 理论。** 如上所述，第 n 个辫子拟阵 K_n 是与 n 个顶点上的完全图相对应的图拟阵；因此，对称群 $\mathfrak{S}_n$ 通过置换该完全图的顶点作用于 K_n

[2]拟阵上的群作用是指在底集上的一种作用，该作用将平坦映射为平坦。

。第 n 个辫子拟阵的秩为 $n-1$。第 n 个辫子拟阵由垂直于 A_{n-1} 型根的超平面辫子配置实现。

辫子拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式已得到广泛研究，包括等变和非等变的情形。对于其他图拟阵，例如由一个含 n 条边的圈 $\mathsf{U}_{n-1,n}$ [PWY16]，轮图和扇图 [LXY22]，部分锯齿图 [BV20]，以及刺鞭图 [Ged17、XZ19]，，其 Kazhdan–Lusztig 多项式都有相当简单的公式。

对辫子拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式缺乏了解，推动了该理论中的许多重要进展。例如，[PXY18]的作者指出，他们引入拟阵 -多项式的“主要动机”是计算辫子拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式。

利用定义计算 $P_{\mathsf{K}_n}(t)$ 和 $Z_{\mathsf{K}_n}(t)$ 通常是一项计算量很大的任务。Karn 和 Wakefield 在 [KW19] 中给出了 $P_{\mathsf{K}_n}(t$的系数的显式（即非递归）表达式，但该表达式相当复杂。实际上，计算 $P_{\mathsf{K}_n}(t)$ 和 $Z_{\mathsf{K}_n}(t)$ 目前已知最快的方法，是采用 [PXY18推导出的递推关系（推论 4）。2]。

的 $\mathfrak{S}_n$等变 Kazhdan–Lusztig 多项式K_n 也已有研究。在[GPY17a]，中，作者计算了 $P^{\mathfrak{S}_n\mathsf{K}_n}(t)$ 的一次项，并给出了一个函数方程，该方程由 $P^{\mathfrak{S}_n\mathsf{K}_n}(t)$ 的生成函数满足。在 [PY17]，中，作者运用表示稳定性的工具研究了 $P^{\mathfrak{S}_n\mathsf{K}_n}(t)$；这些方法使他们得以部分描述生成函数的极点，并限定可能出现的 $\mathfrak{S}_n$ 不可约表示。关于这些结果的加强，参见 [Tos22]。

Elias、Proudfoot 和 Wakefield 最初提出的另一项猜想 [EPW16，A 节] 断言，$P_{\mathsf{K}_{2n}}(t)$ 的首项系数等于以 $2n-1$ 个节点构成的带标号三角仙人掌图的数量。在本文发表之前，这一猜想不仅一直未能得到解决；关于如何为$P_{\mathsf{K}_{2n-1}}(t)$ 的首项系数或其他系数提出类似的命题，也仍是一个开放问题。

定理 1.1 为所有 下列多项式的系数 $P_{\mathsf{K}_n}(t)$ 和 $Z_{\mathsf{K}_n}(t)$ 提供了具体的组合解释，适用于所有 n。

1.4. **主要结果**。 如果一个拟阵不包含拟串并联拟阵作为拟阵子式，则称其为$\mathsf{U}_{2,4}$ 或K_4。等价地，拟阵是拟串并联的，当且仅当它是环、余环以及底集大小至少为 2 的串并联拟阵的直和（这些拟阵在第2.1节定义）。我们的第一个主要定理如下。

定理 1.1 令 $A(n,r)$ 表示所有底集为 $[n]$ 、秩为 r 的拟串并联拟阵的集合，并令 $S(n,r)$ 表示简单拟串并联拟阵的集合。那么

$$[t^i]\, P_{\mathsf{K}_n}(t) = |\mathcal{S}(n-1, n-1-i)|,$$
$$[t^i]\, Z_{\mathsf{K}_n}(t) = |\mathcal{A}(n-1, n-1-i)|.$$

事实上，我们将从一个更强的结果推导出上述结论。我们给出所有编织拟阵相对于 $\mathfrak{S}_n$ 的任意 $\mathfrak{S}_{n-1}$ 子群的等变 Kazhdan–Lusztig 多项式和等变 Z 多项式的描述。

定理 1.2 选择 $\mathfrak{S}_n$的一个 $\mathfrak{S}_{n-1}$ 子群。则

(i) $\mathfrak{S}_{n-1}$-等变 *Kazhdan–Lusztig* 多项式 K_n 的 t^i 系数由 $\mathfrak{S}_{n-1}$ 在 $S(n-1, n-1-i)$上的置换表示给出。(ii) $\mathfrak{S}_{n-1}$-等变 Z-多项式 K_n 的 t^i 系数由 $\mathfrak{S}_{n-1}$ 在 $A(n-1, n-1-i)$上的置换表示给出。

我们的主要结果以及交叉上同调的庞加莱对偶和 Hard Lefschetz 定理直接推出，按秩编列的 ´拟串并联拟阵数量序列 $[n]$是单峰的。更进一步，根据 γ，它是一个 [FMSV22，定理 18] 给出的

我们还利用定理 1.1 证实了 [EPW16，A 节] 中关于 $P_{\mathsf{K}_{2n}}(t)$ 首项系数的猜想；参见命题 2.11。在 [PY17，注 63]，中，Proudfoot 和 Young 指出，该猜想表明，i的第个系数的生成函数存在一个特定极点 $P_{\mathsf{K}_n}(t)$。我们还给出了 $P_{\mathsf{K}_{2k+1}}(t)$ 首项的表达式；参见命题 2.13。

由于研究与（准）串并联拟阵相关的若干对象是枚举组合学中的一个反复出现的问题，我们能够为编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 和 Z-多项式给出显式（但复杂的）生成函数。特别地，这为研究编织拟阵的贝蒂数的渐近性以及交叉上同调的总维数提供了另一种工具，参见下文注 2.15。

2. Background

在全文中，我们将假定读者熟悉拟阵的基本性质。特别是，我们主要遵循 Oxley [Oxl11]中的记号和术语。

2.1. **串并联拟阵**。 串并联拟阵是拟阵中的一个重要族，在图论和电网络理论中广泛存在。鉴于来自图论和枚举组合学的各种来源以“串并联”之名定义了相似但不同的对象，我们将遵循 [Oxl11第 5 节4]，对拟阵理论中这一主题的基本术语和背景作一番回顾。

在构造这些拟阵时，有两种操作发挥着重要作用。假设 M 和 M′ 分别是定义在 E 和 E' 上的拟阵。若存在一个元素 $e \in E'$，它属于 M′中的一个大小为 2 的回路，且满足 $\mathrm{M}' \setminus e = \mathrm{M}$，则称 M′ 是 M 的并联扩张。对偶地，若存在一个元素 $e \in E'$，它属于 M′ 中的一个大小为 2 的余回路，且满足 $\mathrm{M}'/e = \mathrm{M}$，则称 M′ 是 M 的串联扩张。特别要注意，若取 $\mathrm{M} = \mathrm{U}_{1,1}$ 和 $\mathrm{M}' = \mathrm{U}_{2,2}$，，那么 M′ 不是M 的串联扩张。

根据定义，串并联拟阵是指通过有限次（也可以是零次）串联或并联扩张[3]，由单个环或单个余环得到的拟阵。根据这些拟阵的定义，我们可以得出以下初等结论。

- 串并联拟阵是连通拟阵。
- 底集大小至少为 2 的串并联拟阵 M 的秩，等于从 $\mathrm{U}_{1,2}$ 构造 M 时所进行的串联扩张次数加 1。

[3]这遵循 Oxley 的约定。特别是，底集大小至少为 2 的所有串并联拟阵，实际上都是从拟阵 $\mathrm{U}_{1,2}$ 开始，通过串联扩张和平行扩张得到的。

Brylawski 的一篇经典论文 [Bry71]确立了以下一系列等价关系，Oxley 也在 [Oxl82定理 2 中重新表述了这些关系。1]。

命题 2.1 ([Bry71，定理 7。6]) 设 M 是一个拟阵。以下各项等价。

(i) M是串并联拟阵。(ii) M $\cong U_{0,1}$ 或 $\beta(M) = 1$。(iii) M 是连通的，且不包含任何与K_4 或$U_{2,4}$同构的拟阵子式。

这里 $\beta(M)$ 是由 β-不变量， 由 M 引入，Crapo [Cra67]。注意， $\beta(M) = \beta(M^*)$ 当 M $\ncong U_{0,1}, U_{1,1}$ 时成立。另一方面，根据定义或上述结果可知，M 是串并联拟阵，当且仅当 M^* 是串并联拟阵——即使在 M 是环或余环的情况下也是如此。

(A) 串并联拟阵在秩为 k的 $[n]$ 上

$k\backslash n =$	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2		0	1	6	25	90	301
3			0	1	25	290	2450
4				0	1	90	2450
5					0	1	301
6						0	1
7							0

(B) 秩为 k的 $[n]$ 上的拟串并联拟阵

$k\backslash n =$	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	7	15	31	63	127
2		1	7	35	155	651	2667
3			1	15	155	1365	10941
4				1	31	651	10941
5					1	63	2667
6						1	127
7							1

TABLE 1. 串并联拟阵与拟串并联拟阵的计数。

例 2.2 利用串并联拟阵的递归定义可以验证，在 6 个元素、秩为 3 的串并联拟阵中，恰有 4 个同构类。它们分别由图 1 中所示的图诱导。请注意，四个拟阵中的第一个与 $[6]$，个拟阵同构，第二个与 $[6]$，个拟阵同构，最后两个各自与 $[6]$ 个拟阵同构。这些总计为 $20 + 180 + 45 + 45 = 290$ 个底集为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$、秩为 3 的串并联拟阵（见表 1）。

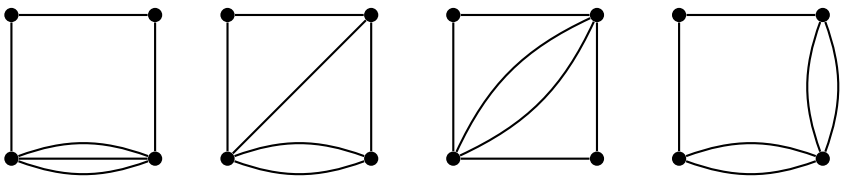

FIGURE 1. 秩为 3 的 $[6]$ 上的串并联拟阵同构类。

命题 2.3 令 $C(n,k)$ 表示底集为 $[n]$ 、秩为k的串并联拟阵集合。那么，双变量生成函数

$$C(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |\mathscr{C}(n,k)| \frac{x^n}{n!} y^k,$$

由下式给出

$$C(x,y) = x(y+1) + y \int \left[\left(\frac{1}{y} \log(1+xy) + \log(1+x) - x \right)^{\langle -1 \rangle} \right] dx. \tag{1}$$

这里，符号 $\langle -1 \rangle$ 表示括号内函数关于变量 x的复合逆函数，也就是说，将 y 视为常数。

证明。 上述公式中 $y = 1$的情形可归结为文献中广泛研究的一个经典问题；参见 [Sta99，习题 5 的解答。40] 以及其中提及的参考文献。我们关注的情形基本上已由 Drake 在其博士论文[Dra08的例 1.5 中处理。1]借助拉格朗日反演定理的组合解释，他建立了一个生成函数，用于按照串联扩张的数量统计带标号边底集上的“串并联网络”。具体而言：

$$\left(\frac{1}{\alpha} \log(1+\alpha x) + \frac{1}{\beta} \log(1+\beta x) - x \right)^{\langle -1 \rangle} = x + (\alpha+\beta)\frac{x^2}{2!} + (\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2)\frac{x^3}{3!} + (\alpha^3 + 25\alpha^2\beta + 25\alpha\beta^2 + \beta^3)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

对 $\alpha = y$ 和 $\beta = 1$ 取积分后，我们得到：

$$\int \left(\frac{1}{y} \log(1+xy) + \log(1+x) - x \right)^{\langle -1 \rangle} dx = \frac{x^2}{2!} + (y+1)\frac{x^3}{3!} + (y^2 + 6y + 1)\frac{x^4}{4!} + (y^3 + 25y^2 + 25y + 1)\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

我们需要稍作修正：乘以 y，再加上 $x(y+1)$。项$x(y+1)$来自考虑底集大小为 1 的两个拟阵。它们之所以没有出现在 Drake 的公式中，是因为按照他对“串并联网络”的定义——即等价关系下的括号表达式——这两个拟阵会对应于“空”表达式。□

注 2.4 我们不知道如何化简（1）。值得指出的是，使用反函数原函数的公式并不能消去积分符号。另一方面，利用朗伯 W-函数也可以推导出同样复杂的表达式。

2.2. **拟串并联拟阵**。 尽管串并联拟阵在取对偶后仍属于该类，但对直和或拟阵子式运算并不封闭。解决这一问题的最佳方式是引入拟串并联拟阵这一类。

定义 2.5 设 M 是一个拟阵。若 M 的所有连通分支都是串并联拟阵，则称 M 为拟串并联拟阵。

尽管“拟串并联拟阵”这一名称是新出现的，但这类拟阵其实早已在文献中出现[4]。

命题 2.6 设 M 是一个拟阵。以下各项等价：

(i) M是一个拟串并联拟阵。(ii) M^* 是一个拟串并联拟阵。(iii) M 不含任何与 K_4 或 $U_{2,4}$同构的拟阵子式。(iv) M是一个二元拟阵。(v) M是一个正则拟阵。(vi) M 的分支宽度小于或等于2。

上述结果本质上是对 [Oxl11，定理 10.4 的重述。8] 以及 [Oxl11，命题 14.2。6] 对于未定义的术语，请参阅 Oxley 的著作。

例 2.7 在 4 个元素、秩为 2 的拟串并联拟阵中，恰有 6 个同构类。它们见图 2。在 $\{1,2,3,4\}$ 上与这些拟阵分别同构的不同拟阵的数量，对于上排从左到右的三个拟阵，依次为 6、12 和 6；对于下排的三个拟阵，则依次为 4、3 和 4。这相当于 $6+12+6+4+3+4=35$ 底集为 $\{1,2,3,4\}$ 且秩为 2 的拟串并联拟阵（见表 1）。

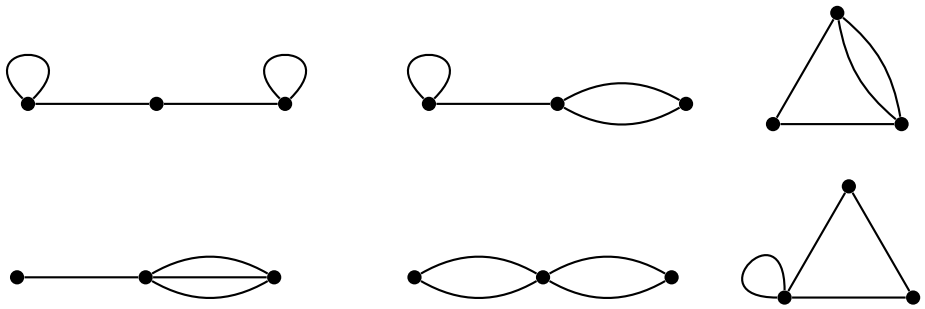

FIGURE 2. 秩为 [4]的拟串并联拟阵的同构类。

组合学中一个反复出现的主题，是从枚举连通标号结构转向枚举所有标号结构（无论其是否连通）。特别是，指数生成函数理论对此很有用。此外，就我们关注的情形而言，方程（1）枚举了所有连通的拟串并联拟阵。若要枚举所有拟串并联拟阵，利用一种标准技巧（见 [Sta99，第 5 节。1]或 [FS09，第 148]页），只需将此函数与一个指数函数复合。

命题 2.8 令 $A(n,k)$ 表示所有定义在 $[n]$ 上、秩为 k 的拟串并联拟阵的集合。那么，双变量生成函数

$$A(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} |\mathscr{A}(n,k)|\frac{x^n}{n!}\,y^k,$$

[4]事实上，Seymour [Sey95] 把我们所称的“拟串并联拟阵”称为“串并联拟阵”。我们再次强调，本文遵循 Oxley 的惯例。

由下式给出

$$A(x,y) = \exp(C(x,y)), \tag{2}$$

其中 $C(x,\ y)$ 如方程（1）所示给出。

2.3. **简单拟串并联拟阵**。在定理1.1 的陈述中发挥作用的最后一类拟阵，是简单拟串并联拟阵。

回顾一下，拟阵 M 若无环且不包含大小为 2 的回路，则称其为简单的。两个（可以相同的）元素 $i,\ j$ 若它们不是环且 $\mathrm{rk_M}(\{i,j\}) = 1$，则称为平行的。M 的底集被划分为称为平行类的子集；这些子集是由彼此平行的元素组成的极大子集。M 的化简记为 M，它是定义在 M 的平行类集合上的拟阵，其秩函数为

$$\mathrm{rk}_{\overline{\mathsf{M}}}(S) = \mathrm{rk}_{\mathsf{M}}\left(\bigcup_{T\in S} T\right) \text{ for any S.}$$

例 2.9 在 7 个元素、秩为 4 的简单拟串并联拟阵中，恰有两个同构类。它们如图3所示。共有 630 个拟阵与左侧的拟阵同构，右侧拟阵则有 105 个。这些合计为 [7] 个秩为 4 的简单拟串并联拟阵（见表 [7] 2）。

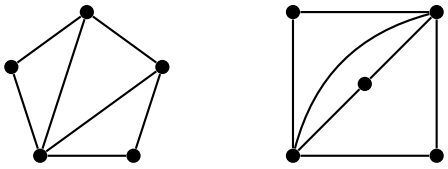

FIGURE 3. 秩为 4 的简单拟串并联拟阵在 [7] 上的同构类。

命题 2.10 若 $n > 1$，则 $[n-1]$ 上的简单拟串并联拟阵的秩大于 $\binom{n-1}{2}$。

证明。我们可以将问题归约为底集非空的简单（连通）串并联拟阵情形。接着，由以下观察即可得出结论：为了通过对 $\mathrm{U}_{1,1}$，依次进行串联扩张和平行扩张得到简单拟阵，串联扩张的次数至少要与平行扩张的次数相同。□

现在我们研究秩尽可能小的简单拟串并联拟阵。我们先讨论底集大小为奇数的情形。根据命题 2.10，秩为 k 且底集为 $[2k-1]$ 的简单拟串并联拟阵是连通的，因此是串并联拟阵。三角仙人掌图是指一种连通图，其中每条边都恰好属于一个圈，且该圈为三角形。

命题 2.11 在 $[2k-1]$ 上具有秩k 的简单串并联拟阵与顶点集为 $[2k-1]$ 的三角仙人掌之间存在双射。

在给出这个双射之前，我们先观察到，三角仙人掌图和秩为 k 的简单串并联拟阵都是通过归纳构造的。三角仙人掌图中的三角形呈树状排列，因此每个至少含有三个

(A) 秩为 k、基于 $[n]$的简单拟串并联拟阵

$k\backslash n=$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2		1	1	0	0	0	0	0
3			1	5	15	0	0	0
4				1	16	175	735	0
5					1	42	1225	16065
6						1	99	6769
7							1	219
8								1

TABLE 2. 简单拟串并联拟阵的计数。

个顶点的三角仙人掌图都包含一个至少有两个度为 2 的顶点的三角形。删除这两个顶点后，得到一个底集较小的三角仙人掌图。每个定义在 k上、秩为 $[2k-1]$且满足 $k \geq 2$ 的简单串并联拟阵，都是秩为 $k-1$ 、底集大小为 $2k-2$的串并联拟阵的串联扩张。根据命题2.10，这样的拟阵不可能是简单拟阵，因此它是定义在底集大小为 $k-1$ 上、秩为 $2k-3$的简单串并联拟阵的并联扩张。

证明。 对于定义在 $[2k-1]$ 上、秩为 k 的简单串并联拟阵 M，我们关联图T(M)，其顶点集为 $[2k-1]$，若 $\{a,b\}$ 包含在 M 的某个三元回路中，则边为 $(a,\ b)$。注意，若在 $i \in [2k-1]$ 处对$\tilde{}$M 进行并联扩张，再进行串联扩张以得到 M，则我们会在 T(M) 中添加一个三角形，其顶点为 $i,\ 2k$ 和 $2k+1$。特别地，$\sim T$(M) 通过归纳法是一个三角仙人掌图。

对于顶点集为 $[2k-1]$ 的三角仙人掌图 G，我们构造一个图：对于 G 中每个顶点为 $\{a,b,c\}$ 的三角形，添加一条边为 $\{a,b,c\}$ 的三角形，使其边集为 $[2k-1]$。这样的图存在，源于三角仙人掌的归纳结构。取该图的图拟阵，得到一个拟阵 $S(G)$。注意，若 G 是通过向顶点集大小为 $2k-3$ 的三角仙人掌 G' 添加一个三角形而得到的，那么 $S(G)$ 可由 $S(G')$ 先进行一次并联扩张、再进行一次串联扩张得到。由归纳法可知，$S(G)$ 与图的选择无关，且是一个秩为 k 的简单串并联拟阵。同样，由归纳法可得 $T(S(G)) = G$。为验证 $S(T(\mathrm{M})) = \mathrm{M}$，我们再次利用这两种构造都与串并联拟阵和三角仙人掌的归纳结构相容这一事实。□

在 [BL18], 中，作者证明了顶点集为 $[2k-1]$的三角仙人掌的数量为 $(2k-3)!!(2k-1)^{k-2}$。因此，我们得到以下结果，它与定理1.1 一起证明了 [EPW16，A 节]中提出的一个猜想。

推论 2.12 在 $[2k-1]$ 上，秩为 k 的简单拟串并联拟阵的数量等于 $(2k-3)!!(2k-1)^{k-2}$。

令 E_k 为定义在 $[2k]$上的秩为 $k+1$ 的简单串并联拟阵的数量。那么 $(E_0,\ E_1,\ \ldots\ldots) = (0,\ 1,\ 75,\ 9345,\ 1865745,\ 554479695,\ 231052877055,\ 128938132548225,\ \ldots\ldots)$。

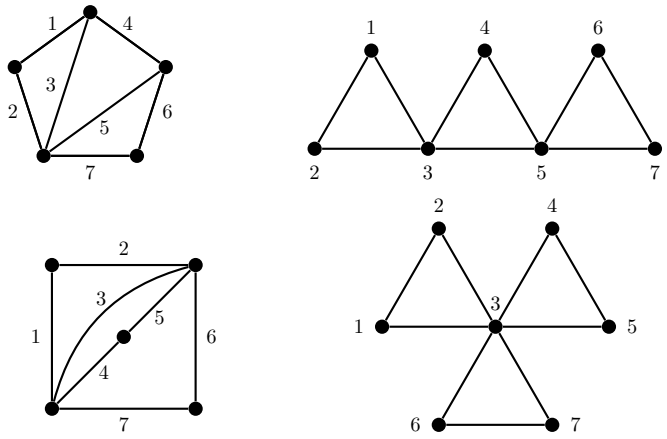

FIGURE 4. 底集为 [7] 、秩为 4 的两个简单串并联拟阵及其对应的三角仙人掌。

我们不知道 E_k的简洁表达式； E_k 可能有较大的素因子。证明定理 1.1之后，下面的结果将给出 $P_{\mathsf{K}_{2k+1}}(t)$ 的首项关于 E_k的表达式。

命题 2.13 底集为 $[2k]$ 、秩为 $k+1$ 的简单拟串并联拟阵的数量等于

$$E_k + \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{k-1}\binom{2k}{2a+1}(2a-1)!!(2k-2a-3)!!(2a+1)^{a-1}(2k-2a-1)^{k-a-2}.$$

证明。 由命题 2.10可知，底集大小为 $2k$ 、秩为 $k+1$ 的简单拟串并联拟阵至多有两个连通分支。只有一个连通分支的拟阵数量恰为 E_k。若有两个连通分支，则命题 2.10 表明，其中一个连通分支的大小必须为 $2a+1$，秩为$a+1$，其中 a；另一个连通分支的大小必须为 $2(k-a)-1$，秩为 $k-a$。因此，由命题 2.11可得所需结果。 □

设 $\mathscr{F}$ 是拟阵同构类的一个族。记 $\mathscr{F}^{\mathrm{simp}}$ 和 $\mathscr{F}^{\mathrm{loop}}$ 分别为 $\mathscr{F}$ 中所有简单拟阵和所有无环拟阵构成的子类。令$|\mathscr{F}(n,\ k)|$ 表示底集为 $[n]$ 、秩为 k 且同构类属于 $\mathscr{F}$ 的拟阵数量；对于 $\mathscr{F}^{\mathrm{simp}}$ 和 $\mathscr{F}^{\mathrm{loop}}$，也作类似定义。

用 $[\mathrm{M}]$ 表示拟阵 M 的同构类。假设 $[\mathrm{U}_{0,\ 0}] \in \mathscr{F}$，并且$\mathscr{F}$ 具有如下性质：当且仅当拟阵 M 的化简[M]的同构类属于$\mathscr{F}$ 时， $[\mathrm{M}]$ 才属于$\mathscr{F}$ 。这个温和的假设使我们能够建立以下基本关系：

$$|\mathscr{F}(n,k)| = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}|\mathscr{F}_{\mathrm{loop}}(i,k)|,$$

$$|\mathscr{F}_{\mathrm{loop}}(n,k)| = \sum_{i=k}^{n}\left\{{n \atop i}\right\}|\mathscr{F}_{\mathrm{simp}}(i,k)|,$$

其中 $\left\{{n \atop i}\right\}$ 表示第二类斯特林数。注意，所有拟串并联拟阵的同构类构成的族$\mathscr{A}$ 满足这一条件。

命题 2.14 设 $S(n,k)$ 表示秩为 k、定义在 $[n]$ 上的所有简单拟串并联拟阵的集合。那么，双变量生成函数

$$S(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{S}(n,k)| \frac{x^n}{n!}\, y^k,$$

由下式给出

$$S(x,y) = \frac{1}{x+1} A(\log(x+1), y) - 1, \tag{3}$$

其中 $A(x,\ y)$ 如公式 (2) 所给出。

证明。 这是以下事实的形式推论：

$$|\mathcal{A}(n,k)| = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=k}^{i} \left\{ {i \atop j} \right\} |\mathcal{S}(j,k)|.$$

可以用生成函数来表示这个表达式。更准确地说，可得到：

$$A(x,y) = e^{-x}\, S(e^x - 1, y).$$

使用变量替换 $u = \log(x+1)$ 即可得到该陈述的结论。 □

注 2.15 关于枚举与（准）串并联拟阵密切相关的各种对象，已有大量文献。Moon 的工作中 [Moo87], 得到了单变量级数 $C(x,1)$（定义见方程（1））通项的渐近估计。特别地，可以运用标准技巧，得到级数 $A(x,1)$ 和 $S(x,1)$ 系数的渐近估计。注意，定理 1.1 表明，这些级数的系数由 Z- 多项式和 Kazhdan–Lusztig 多项式给出，且二者均在 $t = 1$处取值。特别地，这为交叉上同调的总维数提供了渐近性，其中包括K_n及其在空平坦处的茎。

3. Proof of the main results

$\mathbf{K}_n$ 的平坦与 $[n]$的划分构成双射：由 $[n] = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$给出的划分 Q ，对应于平坦 F_Q；该平坦对应的子图由所有满足两个顶点都属于 S_i 中某个 i的边组成。收缩 $\mathbf{K}_n/F_Q$ 的化简是定义在 $[k]$上的编织拟阵，其中 $[k]$是 Q中的部分。 $\mathfrak{S}_n$ 中 F_Q 的稳定子是保持 Q不变的置换集合。

命题 3.1 设 Γ 是作用在一个无环拟阵上的群。那么，Γ 中固定所有平行类的子群 N 是正规子群，并且 $P^{\Gamma}\mathsf{M}(t)$ 是由$\mathrm{VRep}(\Gamma/N)[t]$对 $P^{\Gamma/N}\ \mathsf{M}\ (t)$作拉回所得。

—

证明。 拟阵的任一自同构都会将平行类映射到平行类，因此存在一个从 Γ 到平行类集合上的对称群的映射，其核为 N。

第二部分由对底集大小作归纳法，以及拟阵的简化不会改变其平坦格这一事实得出。□

现在我们证明定理1.2，由此可推出定理1.1 。我们的策略是利用以下观察（例如参见 [BHM+20，推论 A。5]）：设 Γ 是一个有限群

作用于拟阵 M 上，并设 $P^\Gamma(t) \in \mathrm{VRep}(\Gamma)$ 是一个次数小于 $\frac{1}{2}\mathrm{rk}(\mathsf{M})$ 的多项式。假设

$$Z^\Gamma(t) := P^\Gamma(t) + \sum_{\varnothing \neq [F] \in \mathscr{L}(\mathsf{M})/\Gamma} t^{\mathrm{rk}(F)} \operatorname{Ind}_{\Gamma_F}^{\Gamma} P_{\mathsf{M}/F}^{\Gamma_F}(t)$$

是回文的。因此 $Z^\Gamma(t) = Z_{\mathsf{M}}^\Gamma(t)$ 且 $P^\Gamma(t) = P_{\mathsf{M}}^\Gamma(t)$。

定理 1.2 的证明。 我们对 n 进行归纳。令 $\Gamma = \mathfrak{S}_{n-1}$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 中固定n的子群。令 $P^\Gamma \in \mathrm{VRep}(\Gamma)[t]$ 为秩为 $n-1-i$、定义在 $[n-1]$上的简单拟串并联拟阵之置换表示的生成函数，并令 Z^Γ 为秩为 $n-1-i$、定义在 $[n-1]$上的拟串并联拟阵之置换表示的生成函数。由命题 2.10，P^Γ的度小于 $\frac{n-1}{2}$。由于拟串并联拟阵的对偶仍是拟串并联拟阵，Z^Γ 是回文的。因此，只需证明

$$Z^\Gamma(t) = P^\Gamma(t) + \sum_{\varnothing \neq [F] \in \mathscr{L}(\mathsf{K}_n)/\mathfrak{S}_{n-1}} t^{\mathrm{rk}(F)} \operatorname{Ind}_{\Gamma_F}^{\Gamma} P_{\mathsf{K}_n/F}^{\Gamma_F}(t). \tag{4}$$

令 $Q = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$ 为 $[n]$ 的一个划分，其中有 $n \in S_i$，并令 M 为定义在 $[k] \setminus i$ 上、秩为 $k-1-j$ 的简单拟串并联拟阵。Γ_{F_Q} 对逐个固定 K_n/F_Q 的每个平行类的正规子群取商后，是 $\mathfrak{S}_{[k]\setminus i}$的一个子群。令 V_{M} 为从 $\mathfrak{S}_{[k]\setminus i}$到 Γ_{F_Q} 的置换表示（作用于与 M 同构的、定义在 $[k] \setminus i$ 上的拟阵集合）的拉回。由归纳法和命题3.1，V_{M} 是 $[t^j]P^{\Gamma_{F_Q}}{}_{\mathsf{K}_n/F_Q}(t)$ 的一个直和项。M 的稳定子是 Γ_{F_Q} 中 M 的自同构群的原像。

令 M 表示定义在 $[n-1]$ 上的拟阵，其环集为 $S_i \setminus n$，每个 S_ℓ 都是一个平行类（$\ell \neq i$），且化简为 M。M 的自同构群是 Γ_{F_Q} 中 M 的自同构群的原像，因此将 V_{M} 归纳到 $\mathfrak{S}_{n-1}$ 可识别为作用于与 M 同构的、定义在 $[n-1]$ 上的拟阵集合的置换表示，其中这些拟阵。注意，$\mathrm{rk}(F_Q) + k - 1 - j = n - 1 - j$，因此作用于与 M 同构的、定义在 $[n-1]$ 上的拟阵集合的置换表示，作为一个直和项出现在度 $n-1-\mathrm{rk}(\mathsf{M})$ 中。此外，每个拟串并联拟阵要么是简单拟阵，要么化简为定义在更小底集上的简单拟串并联拟阵，这证明了 (4)。□

作为主要结果的推论，我们可以使用命题 2.8 和2.14 中所描述的生成函数来计算 Z-多项式以及编织拟阵的 Kazhdan–Lusztig 多项式。

推论 3.2 由方程 $A(x, y)$ 和 $S(x, y)$ 定义的双变量生成函数 (2)和 (3) 满足

$$n![x^n]\, A(x,y) = Z_{\mathsf{K}_{n+1}}(y),$$
$$n![x^n]\, S(x,y) = y^n P_{\mathsf{K}_{n+1}}(1/y).$$

网站[5]上附有一小段实现这两个生成函数的 SAGE 代码。

[5]可在 https://sites.google.com/view/ferroniluis/home/research 访问，也可以点击此处。

Acknowledgments

作者感谢在线整数数列百科全书 [Slo18] 在整个项目期间提供的宝贵帮助。我们感谢审稿人认真细致的审阅和有益的意见。第一作者获瑞典研究理事会资助，资助号为 2018-03968。第二作者获 NDSEG 奖学金资助。

References

[BHM+20] Tom Braden、June Huh、Jacob P. Matherne、Nicholas Proudfoot 和 Botong Wang, *Singular Hodge theory for combinatorial geometries*, arXiv:2010.06088v3, 2020 年。1、2、3、12[BL80] Louis J. Billera 和 Carl W. Lee, *Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors ofsimplicial polytopes*, 《美国数学学会通报》（新系列）2（1980），第 1 期，181–185。1[BL18] Maryam Bahrani 和 J´er´emie Lumbroso, *Enumerations, forbidden subgraph characterizations and the split-decomposition* **25** 2018 4, 4 47, , 《电子组合学杂志》45 10（），第 期，论文编号 。。[Bry71] Thomas H. Brylawski, *A combinatorial model for series-parallel networks*, 《美国数学学会汇刊》154（1971），1–22。6[BV20] Tom Braden 和 Artem Vysogorets, *Kazhdan-Lusztig polynomials of matroids under deletion* **27** 2020 1, 1 17, 17 2, 4 , 《电子组合学杂志》（），第 期，论文编号 。。[Cra67] Henry H. Crapo, *A higher invariant for matroids*, 《组合理论杂志》2（1967），406–417。6[Dra08] Brian Drake, *An inversion theorem for labeled trees and some limits of areas under lattice paths* 2008, 7 , [16] *The Kazhdan–Lusztig polynomial of a* ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，博士论文（Ph.D.）–布兰代斯大学。EPW Ben Elias、Nicholas Proudfoot 和 Max Wakefield, *matroid* **299** 2016 36 70 1, 2, 3, 4, 5, 10 , 《高等数学》（），–。[14] EW Ben Elias 和 Geordie Williamson, *The Hodge theory of Soergel bimodules*, 《数学年刊》（2 **180** 2014 3, 1089 1136 1）（），第 期，–。FMSV Luis Ferroni、Jacob P. Matherne、[22] Matthew Stevens 和 Lorenzo Vecchi, *Hilbert-Poincaréseries of matroid Chow rings and intersection cohomology*, arXiv:2212.03190v2，2022 年。5[FNV22] Luis Ferroni、George D. Nasr 和 Lorenzo Vecchi, *Stressed hyperplanes and Kazhdan-Lusztiggamma-positivity for matroids*, 《国际数学研究通知》IMRN（2022），rnac270。3[FS09] Philippe Flajolet 和 Robert Sedgewick, *Analytic combinatorics*, 剑桥大学出版社，剑桥，2009 年。8[FS22] Luis Ferroni 和 Benjamin Schr¨oter, *Valuative invariants for large classes of matroids*, arXiv:2208.04893v2，2022 年。3[FV22] Luis Ferroni 和 Lorenzo Vecchi, *Matroid relaxations and Kazhdan-Lusztig non-degeneracy*, 《代数组合学》5（2022），第 4 期，745–769。3[Ged17] Katie R. Gedeon, *Kazhdan-Lusztig polynomials of thagomizer matroids*, 《电子组合学杂志》24（2017），第 3 期，论文编号 3.12，10。4[GLX+21] Alice L. L. Gao、Linyuan Lu、Matthew H. Y. Xie、Arthur L. B. Yang 和 Philip B. Zhang, *The Kazhdan-Lusztig polynomials of uniform matroids*, 《应用数学进展》122（2021），论文编号 102117，24。3[GPY17a] Katie Gedeon、Nicholas Proudfoot 和 Benjamin Young, *The equivariant Kazhdan-Lusztig polynomial of a matroid* **150** 2017 267 294 3, 4 , 《组合理论杂志》[17] *Kazhdan–Lusztig polynomials of matroids: a survey of results and conjectures* A辑（），–。GPY b, , S´em。Lothar。Combin。 **78** 2017 80, 12 3 B（），文章 。GX Alice L. L. Gao 和 Matthew H. Y. Xie, [21] *The inverse Kazhdan-Lusztig polynomial of amatroid*, 《组合理论杂志》B辑 151（2021），375–392。3[KL79] David Kazhdan 和 George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, 《数学发明》53（1979），第 2 期，165–184。1[KW19] Trevor K. Karn 和 Max D. Wakefield, *Stirling numbers in braid matroid Kazhdan-Lusztigpolynomials*, 《应用数学进展》103（2019），1–12。4[LNR21] Kyungyong Lee、George D. Nasr 和 Jamie Radcliffe, *A combinatorial formula for Kazhdan-Lusztig polynomials of sparse paving matroids* **28** 2021 4, , 《电子组合学杂志》（），第 期，论文编号 4.44，29。3

[LXY22] Linyuan Lu、Matthew H. Y. Xie 和 Arthur L. B. Yang, *Kazhdan-Lusztig polynomials of fan matroids, wheel matroids, and whirl matroids*, 《组合理论杂志》A辑 192（2022），论文编号 105665，62。4[Moo87] John W. Moon, *Some enumerative results on series-parallel networks*, 《随机图 '85》（波兹南，1985），北荷兰数学研究丛书，第 144 卷，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1987 年，第 199–226 页。12[Oxl82] James G. Oxley, *On Crapo's beta invariant for matroids*, 《应用数学研究》66（1982），第 3 期，267–277。6[Oxl11] James Oxley, *Matroid theory*, 第二版，《牛津数学研究生教材》，第 21 卷，牛津大学出版社，牛津，2011 年。5、8[Pro18] Nicholas Proudfoot, *The algebraic geometry of Kazhdan-Lusztig-Stanley polynomials*, 《EMS 数学科学综述》5（2018），第 1–2 期，99–127。1[Pro19], *Equivariant Kazhdan-Lustzig polynomials of q-niform matroids*, 《代数组合学》2（2019），第 4 期，613–619。3[Pro21], *Equivariant incidence algebras and equivariant Kazhdan-Lusztig-Stanley theory*, 《代数组合学》4（2021），第 4 期，675–681。3[PWY16] Nicholas Proudfoot、Max Wakefield 和 Ben Young, *Intersection cohomology of the symmetric reciprocal plane* **43** 2016 1, 129 138 4 , 《代数与组合学杂志》（ ），第 期，–。[PXY18] Nicholas Proudfoot、Yuan Xu 和 Ben Young, *The Z-polynomial of a matroid*, 《电子组合学杂志》25（2018），第 1 期，论文编号 1.26，21。2、3、4[PY17] Nicholas Proudfoot 和 Ben Young, *Configuration spaces ^{op}-modules and Kazhdan-Lusztig polynomials of braid matroids* , FS, , **23** 2017 813 832 4, 5 《纽约数学杂志》（ ），–。[Sey95] P. D. Seymour, *Matroid minors*, 《组合学手册》，第 1、2 卷，Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，1995 年，第 527–550 页。8[Slo18] Neil J. A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, 《美国数学学会会刊》65（2018），第 9 期，1062–1074。14[Sta80] Richard P. Stanley, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, 《数学进展》35（1980），第 3 期，236–238。1[Sta92], *Subdivisions and local h-vectors*, 《美国数学学会杂志》5（1992），第 4 期，805–851。1[Sta99], *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, 《剑桥高等数学研究丛书》，第 62 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999 年，附有 Gian-Carlo Rota 撰写的前言及 Sergey Fomin 撰写的附录 1。7、8[Tos22] Philip Tosteson, *Categorifications of rational Hilbert series and characters of FSop modules*, 《代数与数论》**16** 2022 10, 2433 2491 4 （ ），第 期，–。XZ Matthew [19] H. Y. Xie 和 Philip B. Zhang, *Equivariant Kazhdan-Lusztig polynomials ofthagomizer matroids*, 《美国数学学会会议录》147（2019），第 11 期，4687–4695。4

(L. Ferroni) Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology, Stock-holm, Sweden*Email address*: ferroni@kth.se

(M. Larson) Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, USA
Email address: mwlarson@斯坦福.edu