arXiv:2303.02256v1 [math.CV] 3 Mar 2023

有界对称域上近全纯函数的加权 Bergman 核

MIROSLAV ENGLIˇS、EL-HASSAN YOUSSFI 和 GENKAI ZHANG

Abstract. 我们确定了 Shimura 意义下有界对称域上近全纯函数空间的标准加权 Bergman 核。这也给出了“全纯不变多解析”函数空间中类似核的描述——这类函数是球上普通多解析函数的一种推广，从全纯不变性的角度来看，似乎是最恰当的推广。在这两种情形中，这些核都可表示为某些球函数，等价地，也可表示为 Heckman-Opdam 超几何函数；此外，基于对低秩情形的研究，我们提出了一个猜想，探讨其中一些函数与 Faraut-Koranyi 超几何函数之间的关系。最后，我们还对紧厄米对称空间建立了类似结果，并给出了以多变量雅可比多项式表示的显式公式。

1. Introduction

设 Ω 是 $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$ 中的不可约有界对称域，采用其 Harish-Chandra 实现，并以 p 表示其属，以 $h(z, w)$ 表示相应的约当三重行列式；它是 $\mathbb{C}^d$ 上关于 z 和 $\overline{w}$ 的全纯多项式。Ω 上的标准加权 Bergman 空间是由以下函数组成的空间：

$$A_\nu(\Omega) \equiv A_\nu := L^2(\Omega, d\mu_\nu) \cap \mathcal{O}(\Omega) \tag{1}$$

Ω 上所有关于该测度平方可积的全纯函数

$$d\mu_\nu(z) := h(z, z)^{\nu - p}\, dz, \tag{2}$$

其中 dz 表示 Lebesgue 测度。众所周知，当且仅当 $\nu > p - 1$ 时， A_ν 非平凡；在这种情况下， A_ν 具有一个再生核——加权 Bergman 核——其表达式为

$$K_\nu(z, w) = c_\nu h(z, w)^{-\nu}, \tag{3}$$

其中 $c_\nu = 1/\mu_\nu(\Omega)$ 是一个可以明确计算的常数。

对于任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(\Omega)$，即 Ω 上所有双全纯自映射构成的群，约当三重行列式满足以下变换规则

$$h(\phi z, \phi w) = \frac{h(a, a)h(z, w)}{h(z, a)h(a, w)}, \qquad a = \phi^{-1}0. \tag{4}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：32M15；次要分类：46E22、53C35。
Key words and phrases. 近全纯函数、多解析函数、Bergman 核、有界对称域。M. Engliˇs 的研究得到 GAˇCR 21-27941S 号资助，以及 RVO 对 IˇCO 67985840 的资助。G. Zhang 的研究得到瑞典研究理事会（VR）2018-03402 和 2022-02861 号资助。

（我们通常只写 ϕz ，而不写 $\phi(z)$ 。）由此可知，黎曼度量

$$ds^2 = -\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 \log h(z,z)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \tag{5}$$

在 Aut(Ω) 作用下保持不变。现在回顾一下，一般而言，对于任意带有 K¨ahler 度量 $ds^2 = \sum_{j\text{的 Kahler 流形 }\Omega,\ k} g_{j\overline{k}}\, dz_j\, d\overline{z}_k$，由 Peetre [PZ], 引入的不变柯西-黎曼算子$\overline{D}$是一个从函数到全纯向量场的映射，其定义为

$$\overline{D} f = (\overline{D} f)^j \frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad (\overline{D} f)^j = g^{\overline{l}j} \overline{\partial}_l f,$$

这里我们开始采用爱因斯坦求和约定，并且为简便起见写作 $\overline{\partial}_l := \partial/\partial \overline{z}_l$；也就是说，它是 $\overline{\partial}$ 算子与黎兹引理的组合，后者将 (0,1)-形式与全纯向量场对应起来。这里 $g^{\overline{k}j}$ 是 $g_{j\overline{k}}$的逆矩阵。可以迭代这一构造，并对 $m = 1$、2、.....，令

$$(\overline{D}^m f)^{k_m \dots k_1} = g^{\overline{l}_m k_m} \overline{\partial}_{l_m} \dots g^{\overline{l}_2 k_2} \overline{\partial}_{l_2} g^{\overline{l}_1 k_1} \overline{\partial}_{l_1} f.$$

事实证明，张量场 ($\overline{D}^m f$ $k_1 \ \dots \ k_m)^{k_m \dots k_1}$关于指标 、 、 PZ 是对称的，而且实际上与关于厄米联络 [En][ ], $f^{/k_1 \dots k_m}$的逆变导数重合。 m阶柯西-黎曼空间 $\mathcal{N}^m$ [EZ], , 或称为阶数为 m的近全纯函数空间，按定义是 $\overline{D}^m$的核:

$$\mathcal{N}^m(\Omega) \equiv \mathcal{N}^m := \{f \in C^\infty(\Omega) : \overline{D}^m f = 0 \text{ on } \Omega\}.$$

另一种定义出自 Shimura [Shi]: $\mathcal{N}^m$ 是 Ω 上所有函数构成的向量空间，这些函数在局部可写成关于导数 $\partial_j \Psi$ 的次数为 $< m$ 的多项式，其系数为全纯函数，其中 Ψ 是 K¨ahler 度量的一个（局部）势函数，即 $g_{j\overline{k}} = \overline{\partial}_k \partial_j \Psi$。（该空间不依赖于局部势函数 Ψ 的选取。）关于这两个定义等价性的证明，参见例如 [EZ] 中的命题7。

上述构造尤其适用于我们的有界对称域 Ω，其配备不变度量 (5)，并具有全局 K¨ahler 势函数 $\Psi(z) = -\log h(z,z)$。仿照 (1)，我们可以考虑近全纯函数的加权 Bergman 空间

$$\mathcal{N}^m_\nu := L^2(\Omega, d\mu_\nu) \cap \mathcal{N}^m. \tag{6}$$

当然，若 $m = 1$，则对任意 ν，都有 $\mathcal{N}^1 = \mathcal{O}(\Omega)$ 和 $\mathcal{N}^1_\nu = A_\nu$。

对于最简单的有界对称域 $\Omega = \mathbf{B}^d$，即 $\mathbf{C}^d$, $d \geq 1$ 的单位球，约当三重行列式简单地表示为 $h(z,w) = 1 - \langle z, w\rangle$，因此$\Psi_j = \frac{\overline{z}_j}{1-|z|^2}$。于是，$\mathbf{B}^d$ 上的 m 阶近全纯函数恰好是 $(1-|z|^2)^{-1}\overline{z}$ 中次数为 $\leq m-1$ 的多项式，且具有全纯系数。换言之，

$$\mathcal{N}^m(\mathbf{B}^d) = (1-|z|^2)^{1-m} \mathcal{P}^m(\mathbf{B}^d), \tag{7}$$

其中， $\mathcal{P}^m(\mathbf{B}^d)$ 按定义由 $(1-|z|^2)^{m-1-|\alpha|}\overline{z}^\alpha$ 的所有线性组合构成，系数为全纯系数；这里， $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 是长度为 $|\alpha|$ 的多重指标: $= \alpha_1 + \dots + \alpha_d < m$；也就是说，简单验证可知， $\mathcal{P}^m(\mathbf{B}^d)$ 由所有关于 $\overline{z}$、次数为 $\leq m-1$ 的多项式构成，其系数为全纯系数。（事实上，在一个

方向上，$(1-|z|^2)^{m-1-|\alpha|}\overline{z}^{\alpha}$ 显然是关于 $\overline{z}$、次数为 $m-1$ 的多项式，且其系数为全纯系数；而在另一个方向上，

$$\begin{aligned}\overline{z}^{\alpha} &= (|z|^2+(1-|z|^2))^{m-1-|\alpha|}\overline{z}^{\alpha}\\ &= \sum_{j=0}^{m-1-|\alpha|}\binom{m-1-|\alpha|}{j}|z|^{2j}(1-|z|^2)^{m-1-|\alpha|-j}\overline{z}^{\alpha}\\ &= \sum_{|\beta|<m-1-|\alpha|}\binom{m-1-|\alpha|}{\beta}z^{\beta}(1-|z|^2)^{m-1-|\alpha+\beta|}\overline{z}^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

是一个由带有全纯系数的 $(1-|z|^2)^{m-1-|\gamma|}\overline{z}^{\gamma}$ 线性组合。）因此，空间 $\mathcal{P}^m(\mathbf{B}^d)$ 无非就是球上众所周知的 m-解析函数空间，许多作者都曾对其进行研究。该空间的再生核

$$L^2(\mathbf{B}^d,(1-|z|^2)^s\,dz)\cap\mathcal{P}^q(\mathbf{B}^d),\qquad s>-1,$$

最近由第二作者 [You] 求得，为

$$P^q_{s+d+1}(z,w):=\frac{\Gamma(q+s+d)}{\pi^d\Gamma(q+s)}\frac{(1-\langle w,z\rangle)^{q-1}}{(1-\langle z,w\rangle)^{q+s+d}}P^{(d,s)}_{q-1}(1-2|\phi_z w|^2),\tag{8}$$

其中，$P^{(d,s)}_n$表示次数为 n、参数为 d、s 的 Jacobi多项式，而ϕ_z ∈Aut($\mathbf{B}^d$) 是将 z 与原点互换的 $\mathbf{B}^d$ 的双全纯自映射。回到一般的有界对称域 Ω，类比于 (7)，我们由此定义 Ω 上 m 阶不变多解析函数空间为

$$\mathcal{P}^m(\Omega)\equiv\mathcal{P}^m:=h(z,z)^{m-1}\mathcal{N}^m,\tag{9}$$

并考虑相应的加权 Bergman 空间

$$\mathcal{P}^m_\nu:=L^2(\Omega,d\mu_\nu)\cap\mathcal{P}^m.\tag{10}$$

本文旨在求出空间 $\mathcal{N}^m_\nu$ 和 $\mathcal{P}^m_\nu$ 的再生核 N^m_ν 和 P^m_ν，从而推广公式 (3)（对应于 $m=1$）和 (8)（对应于 $\Omega=\mathbf{B}^d$）。

从抽象层面来看，答案由群表示论给出，更具体地说，是由 Ω 的自同构群 Aut(Ω) 的单位连通分支 G 上某些表示的 Plancherel公式给出。也就是说，由于 $\overline{D}^m f$ 是一个张量，可知通过复合进行的作用 G 保持空间 $\mathcal{N}^m$ 不变；换言之，

$$f\longmapsto f\circ\phi^{-1},\qquad f\in\mathcal{N}^m,\ \phi\in G,$$

是 G 在 $\mathcal{N}^m$ 上的一个表示。结合 μ_ν 的变换规则，

$$d\mu_\nu(\phi z)=\Big|\frac{h(a,a)^{\nu/2}}{h(z,a)^{\nu}}\Big|^2\,d\mu_\nu(z),\qquad a=\phi^{-1}0,\ \phi\in G,\tag{11}$$

该规则由（4）可得，这意味着

$$f\longmapsto\frac{h(a,a)^{\nu/2}}{h(z,a)^{\nu}}\,f\circ\phi^{-1},\qquad a=\phi 0,\ \phi\in G,\tag{12}$$

是 $\mathcal{N}^m_\nu$上的 G 的一个射影酉表示。根据第三位作者 [Zh3] 的一个结果，对于每个 $m=1$, 2, ..., $\mathcal{N}^m_\nu$都可分解为不可约分量的正交直和，这些分量可识别为某些所谓的相对

G的离散级数表示。最后，将 Shi- meno [Shm], 的一个一般 Plancherel公式应用于这些表示，可知这些不可约分量在原点处的再生核必为 $\phi_{\lambda,\ell}$的常数倍，其中 G 是参数为 ℓ （描述该表示，实际上为 $\ell=\nu$）、权为 λ （与每个不可约分量唯一对应）的球函数。由此，再生核 N_ν^m可表示为有限项之和，每一项都包含球函数。（对于 $\Omega=\mathrm{B}^d$这一特例，该表达式已在 [Zh1]中得到。）

借助现有的多变量特殊函数理论（例如参见 Anker [Ank]），球函数 $\phi_{\lambda,\ell}$ 也可以表示为 Heckman-Opdam 超几何函数，或者，如果愿意，也可以表示为 Debiard [De1] （以及许多其他作者）的多变量雅可比多项式。例如，刚才提到的 [Zh1]关于 B^d 的结果可写为

$$N_{s+d+1}^m(z,w)=k_{s+d+1}^m(|\phi_w z|^2)$$

with

$$k_{s+d+1}^m(t):=\sum_{l=0}^{m-1}c_l(s)\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-l,l-s-1\\ d\end{matrix}\Big|\frac{t}{t-1}\Big), \tag{13}$$

其中

$$c_l(s)=\frac{(s-2l+1)\Gamma(s+d+1-l)d}{\pi^d l!\Gamma(s-l+2)},$$

而 ${}_2F_1$ 是普通的（高斯）超几何函数。另一方面，由（8）可将 P_{s+d+1}^m 和 N_{s+d+1}^m 表示为单个 Jacobi 多项式$P^{(d,\,s)}_{m-1}$。比较这两种表达式（推导出具体细节后）可得等式

$$(1-t)^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}c_l(s+2q-2)\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-l,l-s-2q+1\\ d\end{matrix}\Big|\frac{t}{t-1}\Big)=\frac{\Gamma(q+s+d)}{\pi^d\Gamma(q+s)}P_{q-1}^{(d,s)}(1-2t). \tag{14}$$

直接证明这个（正确的）公式颇有意思（参见下文引理 33）；注意

$$P_n^{(d,s)}(1-2t)=\binom{n+d}{d}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n,n+1+s+d\\ d+1\end{matrix}\Big|t\Big). \tag{15}$$

对秩 2 和秩 3 有界对称域进行明确的计算机计算表明，与前面描述的秩 1 情形类似，即使对于一般的有界对称域，核 N_ν^m和 P_ν^m在某些情况下也不仅可以表示为涉及 Heckman-Opdam 超几何函数的有限项之和，实际上还可以表示为某个单一特殊函数的常数倍，即带有特定参数的 Faraut和Koranyi [FK] 超几何函数。我们提出了一个关于此事的猜想，并给出由此可推得的一些结果；后者包括两类超几何函数之间的关系，以及 Helgason [He 定理 V.4.5]的推广。该定理实际上描述了复射影空间 $\mathbf{C}P^d$上某个径向函数空间的再生核。

本文结构如下。第2节介绍有界对称域所需的背景知识。第3节列出关于核 N_ν^m 和 P_ν^m的一些基本事实，并讨论径向近全纯函数，

这些内容与后文相关。第4节给出用球函数和 Heckman-Opdam 超几何函数表示 N_ν^m的表达式。第5节介绍对特定有界对称域所进行的计算，以及由此得到的前述猜想。最后一节，即第6节，也简要讨论紧厄米对称空间的对偶情形。

2. Prerequisites on bounded symmetric domains

在本文余下部分中，Ω 将表示其 Harish-Chandra 实现中的一个 $\mathbf{C}^d$ 上的不可约有界对称域（即 Cartan域）。我们用 G 表示由 Ω 的所有双全纯自映射构成的群 Aut(Ω) 的单位连通分支，并用 K 表示 G 中原点 $0 \in \Omega$ 的稳定子。于是， K 恰由保持 Ω 的 $\mathbf{C}^d$ 上的酉映射构成，并且 Ω 与陪集空间 G/K 同构。我们还分别用 r、a、b 和 p 表示 Ω 的秩、特征重数和属，从而

$$p = (r-1)a + b + 2, \qquad d = \frac{r(r-1)}{2}a + rb + r. \tag{16}$$

若 $b = 0$，则称 Ω 为管型域。

不可约有界对称域由 E. Cartan 完全分类。这类域有四个无穷级数，此外还有两个分别位于 $\mathbf{C}^{16}$ 和 $\mathbf{C}^{27}$ 中的例外域。为便于后文参考，我们列出一张表，简要描述这些域，并给出相应的 r、a、b、p 和 d 的取值。符号 O 表示八元数除代数。

域的描述

I_{mn}	$Z \in \mathbf{C}^{m\times n}$: $\|Z\|_{\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^m} < 1$ $r = m$, $a = 2$, $b = n-m$, $p = n+m$, $d = mn$	$n \geq m \geq 1$
II_n	$Z \in I_{nn}$, $Z = Z^t$ $r = n$, $a = 1$, $b = 0$, $p = n+1$, $d = \frac{1}{2}n(n+1)$	$n \geq 2$
III_m	$Z \in I_{mm}$, $Z = -Z^t$ $r = [\frac{m}{2}]$, $a = 4$, $b = 2(m-2r)$, $p = 2m-2$, $d = \frac{1}{2}m(m-1)$	$m \geq 5$
IV_n	$Z \in \mathbf{C}^{n\times 1}$, $\|Z^tZ\| < 1$, $1 + \|Z^tZ\|^2 - 2Z^*Z > 0$ $r = 2$, $a = n-2$, $b = 0$, $p = d = n$	$n \geq 5$
V	$Z \in \mathbf{O}^{1\times 2}$, $\|Z\| < 1$ $r = 2$, $a = 6$, $b = 4$, $p = 12$, $d = 16$	
VI	$Z \in \mathbf{O}^{3\times 3}$, $Z = Z^*$, $\|Z\| < 1$ $r = 3$, $a = 8$, $b = 0$, $p = 18$, $d = 27$	

单位球 $\mathbf{B}^d = I_{1d}$ 是唯一的秩 1 有界对称域，也是唯一边界光滑的有界对称域。

对于 $x \in \Omega$， ϕ_x 表示交换 x与原点的（唯一）测地对称，即

$$\phi_x \circ \phi_x = \mathrm{id},\ \phi_x(0) = x,\ \phi_x(x) = 0, \tag{17}$$

且 ϕ_x 只有一个孤立不动点。（事实上， ϕ_x 只有一个不动点，即 0 与 x 之间的测地中点。）注意，根据定义

K 可立即得出，任意 $\phi \in G$ 都具有 $\phi = \phi_x k$ 的形式，其中 $k \in K$ 且 $x \in \Omega$。（事实上，$x = \phi(0)$。）

已知环境空间 $\mathbf{C}^d =: Z$ 具有 Jordan-Banach $*$-三元组系统的结构（简称 JB*-三元组），其中 Ω 为开单位球。也就是说，存在一个 Jordan三元组乘积

$$\{\cdot,\cdot,\cdot\} : Z \times Z \times Z \to Z, \qquad x, y, z \mapsto \{x, y, z\},$$

（关于 x、z 线性且对称，关于 y反线性），使得

$$\Omega = \{z \in Z : \|\{z, z, \cdot\}\| < 1\}.$$

此外，若对 x、$y \in Z$采用记号，

$$D(x, y) = \{x, y, \cdot\} : Z \to Z,$$
$$Q(x) = \{x, \cdot, x\} : Z \to Z,$$

那么对于每个 $x \in \Omega$，$D(x, x)$ 都是厄米的且具有非负谱，而 $iD(x, x)$ 是一个三重导子。线性算子

$$B(x, y) = I - 2D(x, y) + Q(x)Q(y) \tag{18}$$

在 Z 上称为 Bergman算子。

若 $D(x, y) = 0$，则称两个向量 x、$y \in Z$ 正交（在 Jordan理论意义下）；若 $\{v, v, v\} = v$，则称向量 $v \in Z$为三幂等元。对于任意三幂等元 v，环境空间可作 Peirce分解

$$Z = Z_0(v) \oplus Z_{1/2}(v) \oplus Z_1(v) \tag{19}$$

为以下正交分量

$$Z_{j/2}(v) := \{z \in Z : D(v, v)z = \frac{j}{2}z\}.$$

（这里的正交仅指在 $\mathbf{C}^d$ 中关于内积的正交，而非三重积意义下的正交。）每个 $Z_{j/2}(v)$ 都是 Z 的子三重系统，而 $Z_1(v)$ 在乘积 $x \circ y = \{xvy\}$ 下构成 JB*- 代数，其单位元为 v，对合为 $z^* = \{vzv\}$。若 $\dim Z_1(v) = 1$，则称三幂等元 v 为极小。任意一组两两正交的极小三幂等元 $e_1, \ldots, e_r$ 的极大集合称为 Jordan 标架；其基数 r 与标架的选取无关，且等于 Ω 的秩 r。对于任意 Jordan 标架 $e_1, \ldots, e_r$，同上可得联合 Peirce分解

$$Z = \bigoplus_{0 \le i \le j \le r} Z_{ij} \tag{20}$$

with

$$Z_{ij} = \{z \in Z : D(e_k, e_k)z = \frac{\delta_{ik} + \delta_{jk}}{2} \ \forall k = 1, \ldots, r\}. \tag{21}$$

给定任意一个 Jordan 标架 e_1，....., e_r——我们从现在起选定并固定其中一个——任何 $z \in Z$ 都有一个极分解

$$z = k(t_1 e_1 + \cdots + t_r e_r) \tag{22}$$

其中 $k \in K$和 $t_1 \ge t_2 \ge \cdots \ge t_r \ge 0$；称为 z的奇异数的数值 $t_1, \ldots, t_r$是唯一确定的，但 k 未必如此（若所有 t_j 互不相同，则它是唯一确定的）。此外，$z \in$属于 Ω 当且仅当 $t_1 < 1$，$z \in \partial$属于 Ω 当且仅当 $t_1 = 1$，而 z属于 Ω 的 Shilov边界 ∂_e 当且仅当 $t_1 = \cdots = t_r = 1$；也就是说，当且仅当 $z = ke$，其中 $e = e_1 + \cdots + e_r$是一个极大三重幂等元。

由于 Jordan三重积在 K 下保持不变（即 $\{kx, ky, kx\} = k\{x, y, z\} \forall k \in K$），由 (21) 可立即得出，在分解 (20) 下，Bergman算子 $B(z, z)$（其中 z 如 (22) 所示）由下式给出

$$B(z,z)|_{Z_{ij}} = (1-t_i^2)(1-t_j^2)I|_{Z_{ij}} \tag{23}$$

（其中 $t_0 := 0$）。

存在唯一的多项式 $h(x, y)$，定义在 $\mathbf{C}^d \times \mathbf{C}^d$ 上，在 x 中全纯、在 y 中反全纯，并且具有 K 不变性，即

$$h(kx, ky) = h(x, y) \qquad \forall k \in K,$$

且满足

$$h(z,z) = \prod_{j=1}^{r} (1-t_j^2) \quad \text{for } z \text{ as in (22)}.$$

已知 $h(x, y)$ 是不可约的，在 x 以及 $\overline{y}$ 中的次数均为 r，并且 $h(x, 0) = h(0, x) = 1 \ \forall x \in \mathbf{C}^d$；此外，$h(x, y)^p = \det B(x, y)$。进一步地，测度

$$h(z,z)^{\nu-p}\, dz \tag{24}$$

当且仅当 $\nu > p-1$ 时是有限的，而相应的加权 Bergman 核——即 Ω 上关于 (24) 可平方积分的所有全纯函数空间的再生核——等于

$$K_\nu(x,y) = c_\nu h(x,y)^{-\nu} \tag{25}$$

其中

$$c_\nu = \frac{\Gamma_\Omega(\nu)}{\pi^d \Gamma_\Omega(\nu - \frac{d}{r})}. \tag{26}$$

这里 Γ_Ω 是 Gindikin-Koecher Gamma函数

$$\Gamma_\Omega(\nu) := \prod_{j=1}^{r} \Gamma\Big(\nu - \frac{j-1}{2}a\Big).$$

在极坐标 (22) 下，测度 (24) 的形式为

$$\int_\Omega f(z)\, h(z,z)^\nu\, dz = \quad c_\Omega \int_{[0,1]^r} \int_K f(k \sum_{j=1}^{r} \sqrt{t_j} e_j)\, dk\, d\mu_{b,\nu,a}(t), \tag{27}$$

其中$d\mu_{b,\ \nu,\ a}$ 是 Selberg测度

$$d\mu_{b,\nu,a}(t) := \prod_{j=1}^{r} (1-t_j)^{\nu-p} \prod_{j=1}^{r} t_j^b \prod_{1 \le i < j \le r} |t_i - t_j|^a\, dt, \tag{28}$$

其中 $dt \equiv dt_1 \ldots dt_r$。这里，$dk$ 是（紧）群 K上的归一化Haar测度，并且

$$c_\Omega = \frac{\pi^d \Gamma(\frac{a}{2}+1)^r}{\Gamma_\Omega(\frac{ra}{2}+1)\Gamma_\Omega(\frac{d}{r})}. \tag{29}$$

令 P 表示 $\mathbf{C}^d$ 上所有（全纯）多项式构成的向量空间。我们在 P 上赋予 Fock（或 Fischer）内积

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_F &:= \pi^{-d}\int_{\mathbf{C}^d} f(z)\,\overline{g(z)}\,e^{-|z|^2}\,dz \\ &= (f(\partial)g^*)(0) = (g^*(\partial)f)(0),\end{aligned} \tag{30}$$

其中

$$g^*(z) := \overline{g(\overline{z})}.$$

这使 P 成为一个预希尔伯特空间，而作用

$$f \mapsto f\circ k^{-1}, \qquad k\in K,$$

是 K 在 P 上的酉表示。W. Schmid [Sch] 的一项深刻成果表明，这个表示具有无重数分解，分解为不可约表示

$$\mathbf{P} = \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbf{P}_{\mathbf{m}}$$

其中 m 遍历所有签名，即满足 $m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_r \ge 0$ 的 r-元组 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathbf{Z}^r$。$\mathbf{P}_\mathbf{m}$ 中的多项式是次数为 $|\mathbf{m}| := m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ 的齐次多项式；特别地，$\mathbf{P}_{(0)}$ 是常数，$\mathbf{P}_{(1)}$ 是线性多项式。因此，Ω 上任意全纯函数都可分解为 $f = \sum_\mathbf{m} f_\mathbf{m}$, $f_\mathbf{m} \in \mathbf{P}_\mathbf{m}$，这细化了通常的齐次展开。

由于空间 $\mathbf{P}_\mathbf{m}$ 是有限维的，因此它们必然具有再生核：存在定义在 $\mathbf{C}^d \times \mathbf{C}^d$上的多项式 $K_\mathbf{m}(x,y)$，它们关于 x和 $\overline{y}$是全纯的，使得对每个 $f \in \mathbf{P}_\mathbf{m}$ 和 $y \in \mathbf{C}^d$,

$$f(y) = \langle f, K_\mathbf{m}(\cdot, y)\rangle_F. \tag{31}$$

根据空间 $\mathbf{P}_\mathbf{m}$ 的定义，还可知核 $K_\mathbf{m}(x,y)$ 是K-不变的。

由表示论中的舒尔引理可知，对于 P 上任意K-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，当 $\mathbf{m} \ne \mathbf{n}$ 时，$\mathbf{P}_\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{P}_\mathbf{n}$ 正交；而在每个 $\mathbf{P}_\mathbf{m}$上，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$成比例。特别地，对于内积

$$\langle f,g\rangle_\nu := c_\nu \int_\Omega f(z)\,\overline{g(z)}\,d\mu_\nu(z) \qquad (\nu > p-1),$$

（其中 c_ν 如（25）所示），对于任意 $f_\mathbf{m} \in \mathbf{P}_\mathbf{m}$ 和 $g_\mathbf{n} \in \mathbf{P}_\mathbf{n}$,

$$\langle f_\mathbf{m}, g_\mathbf{n}\rangle_\nu = \frac{\langle f_\mathbf{m}, g_\mathbf{n}\rangle_F}{(\nu)_\mathbf{m}} \tag{32}$$

（参见 [FK]），其中 $(\nu)_\mathbf{m}$ 为广义升阶乘符号

$$(\nu)_\mathbf{m} := (\nu)_{m_1}(\nu - \tfrac{a}{2})_{m_2}\ldots(\nu - \tfrac{r-1}{2}a)_{m_r};$$

here

$$(\nu)_k := \nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1) \qquad \Big(= \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} \text{ if } \nu \ne 0, -1, -2, \ldots,\Big)$$

是普通升阶乘符号。

关系式 (32) 的一个推论是 Faraut-Koranyi 公式

$$h(x,y)^{-\nu} = \sum_{\mathbf{m}} (\nu)_{\mathbf{m}} K_{\mathbf{m}}(x,y) \tag{33}$$

联系式（25）中的再生核 K_ν 与式（31）中的再生核 $K_{\mathbf{m}}$。

如前所述，点 $e = e_1 + \cdots + e_r$ 属于 Ω 的 Shilov边界$\partial_e\Omega$。群 K 在 $\partial_e\Omega$ 上传递作用，因此 $\partial_e\Omega = \{ke, k \in K\} \simeq K/L$，其中 L 是 e 在 K 中的稳定子。每个 Peter-Weyl空间 $\mathbf{P_m}$ 都包含唯一的满足归一化条件 $\phi_{\mathbf{m}}(e) = 1$ 的 L-不变多项式 $\phi_{\mathbf{m}}$。有时，我们将 $\phi_{\mathbf{m}}(t_1e_1 + \cdots + t_re_r)$ 简写为 $\phi_{\mathbf{m}}(t_1, \ldots, t_r)$。这些球面多项式 $\phi_{\mathbf{m}}$ 满足 $\phi_{(0)} \equiv 1$,

$$\phi_{(m_1+1, m_2+1, \ldots, m_r+1)}(t_1, \ldots, t_r) = t_1 \cdots t_r \, \phi_{\mathbf{m}}(t_1, \ldots, t_r), \tag{34}$$

并且通过以下公式与再生核 $K_{\mathbf{m}}$ 相关:

$$K_{\mathbf{m}}(x,e) = \frac{d_{\mathbf{m}}}{(d/r)_{\mathbf{m}}} \phi_{\mathbf{m}}(x), \tag{35}$$

其中 $d_{\mathbf{m}} := \dim \mathbf{P_m}$。已知后一个维数由公式给出（[Up2], 引理 2.5 和 2.6）

$$d_{\mathbf{m}} = \frac{(d/r)_{\mathbf{m}}}{(q_\Omega)_{\mathbf{m}}} \, \pi_{\mathbf{m}}$$

其中

$$q_\Omega := \frac{r-1}{2} a + 1 \tag{36}$$

and

$$\pi_{\mathbf{m}} := \prod_{1 \le i < j \le r} \frac{m_i - m_j + \frac{j-i}{2} a}{\frac{j-i}{2} a} \, \frac{(\frac{j-i+1}{2} a)_{m_i - m_j}}{(\frac{j-i-1}{2} a + 1)_{m_i - m_j}}. \tag{37}$$

因此，我们可将 (35) 改写为

$$K_{\mathbf{m}}(x,e) = \frac{\pi_{\mathbf{m}}}{(q_\Omega)_{\mathbf{m}}} \, \phi_{\mathbf{m}}(x). \tag{38}$$

将最后一个公式与 [FK，引理 3.2] 这一事实结合起来

$$K_{\mathbf{m}}(\textstyle\sum_j t_j e_j, \sum_j s_j e_j) = K_{\mathbf{m}}(\sum_j t_j s_j e_j, e),$$

于是得到

$$K_{\mathbf{m}}(k\textstyle\sum_j t_j e_j, k\sum_j t_j e_j) = \frac{\pi_{\mathbf{m}}}{(q_\Omega)_{\mathbf{m}}} \, \phi_{\mathbf{m}}(t_1^2, \ldots, t_r^2). \tag{39}$$

多项式 $\phi_{\mathbf{m}}$ 还可借助参数为 λ 的 Jack对称多项式 $J_{\mathbf{m}}^{(\lambda)}$作出组合解释（参见 [MD], 第 VI 章第 10 节）：即

$$\phi_{\mathbf{m}}(t_1, \ldots, t_r) = j_{\mathbf{m}}^{-1} \, J_{\mathbf{m}}^{(2/a)}(t_1, \ldots, t_r), \tag{40}$$

其中

$$j_{\mathbf{m}} := J_{\mathbf{m}}^{(2/a)}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}) = \Big(\frac{2}{a}\Big)^{|\mathbf{m}|} \Big(\frac{ra}{2}\Big)_{\mathbf{m}}. \tag{41}$$

在下文中，我们通常会省略上标（$2/a$）。

回顾一下，在任意带单位元 v、乘法 $x\circ y$ 的 Jordan 代数 J 中，如果元素 x 存在（必唯一的）逆元 $y=:$ 满足 $x\circ y=v$ 和 $x^2\circ y=x$ 的 x^{-1}，则称其为可逆元。在 Jordan 代数由三幂等元 v 所对应的 $J=Z_1(v)$ 形式、且该三幂等元属于 JB*-三元组 Z 的特殊情形下，$z\in J$ 的可逆性等价于算子 $Q(z)$ 在 J 上的可逆性以及 $z^{-1}=Q(z)^{-1}Q(v)z$。特别地，求逆是在 J 上的一个有理映射，可以（例如参见 [Up2，第 4] 章）写成如下精确（即约化）形式：$z^{-1}=p(z)/N(z)$，其中 $p:\ J\to J$ 是一个推广了矩阵伴随的多项式，而 $N:\ J\to\mathbb{C}$ 是一个称为该 Jordan 代数的行列式多项式或 Koecher范数的多项式。特别地，固定 Z 的一个 Jordan 标架 e_1，...，e_r，上述结论适用于 Jordan 代数 $Z_1(e_1+\cdots+e_j)$、$1\le j\le r$；我们将相应的行列式多项式记为 N_j，并通过定义 $N_j(z):=N_j(P_1^{(j)}(z))$ 将它们延拓到整个 Z 上，其中 $P_1^{(j)}$ 是根据 Peirce分解（19）给出的从 Z 到 $Z_1(e_1+\cdots+e_j)$ 的典范投影。对于一个符号 $\mathbf{m}$，与 $\mathbf{m}$ 相关联的锥多项式 $N^{\mathbf{m}}$ 是

$$N^{\mathbf{m}}:=N_1^{m_1-m_2}N_2^{m_2-m_3}\cdots N_r^{m_r}. \tag{42}$$

特别地，

$$N^{\mathbf{m}}\Big(\sum_{j=1}^r t_je_j\Big)=\prod_{j=1}^r t_j^{m_j}.$$

于是，每个多项式空间 $\mathbf{P_m}$ 都由 $N^{\mathbf{m}}\circ k$、$k\in K$ 张成。特别地，锥多项式与球多项式之间的关系为

$$\phi_{\mathbf{m}}(z)=\int_L N^{\mathbf{m}}(lz)\,dl,$$

其中，dl 表示 L 上的归一化Haar测度。

本节内容的标准参考文献包括 [Ar], [Lo], [FK], 或 [Up2]。

3. Radial nearly holomorphic functions

以下关系揭示了近全纯再生核 N_ν^m 与不变多解析再生核 P_ν^m 之间的联系，这一关系是初等的。

命题 1. $P_\nu^m(z,w)=h(z,z)^{m-1}h(w,w)^{m-1}N^m_{\nu+2(m-1)}(z,w)$.

证明。根据其定义 (9)，映射

$$T:f(z)\longmapsto h(z,z)^{m-1}f(z)$$

是从 $\mathcal{N}^m$ 到 $\mathcal{P}^m$的一个双射。由 (2) 可知，对于任意 $\nu\in\mathbb{R}$，T显然从 $L^2(\Omega,d\mu_\nu)$ 到 $L^2(\Omega,d\mu_{\nu-2(m-1)})$ 是等距映射。因此，若 $\{e_j(z)\}_j$ 是$\mathcal{N}^m_{\nu+2(m-1)}$的标准正交基，则 $\{h(z,z)^{m-1}e_j(z)\}_j$ 将是 $\mathcal{P}^m_\nu$的标准正交基。回忆一下用标准正交基表示再生核的熟知公式

$$K(z,w)=\sum_j e_j(z)\overline{e_j(w)}, \tag{43}$$

断言得证。 □

我们也很容易得到 $N_\nu^m(z,w)$ 的变换公式。

命题 2. 对任意 $\phi \in \mathrm{Aut}(\Omega)$,

$$N_\nu^m(z,w) = \frac{h(a,a)^\nu}{h(z,a)^\nu h(a,w)^\nu} N_\nu^m(\phi z, \phi w), \qquad a := \phi^{-1}0. \tag{44}$$

特别地,

$$N_\nu^m(z,w) = h(z,w)^{-\nu} N_\nu^m(\phi_w z, 0). \tag{45}$$

证明。由于 $\overline{D}^m f$ 是张量，而 ϕ 只是坐标变换，因此核 $\mathcal{N}^m$ of$\overline{D}^m$ 在复合 $f \mapsto f\circ\phi$ with ϕ 下自动保持不变。正如引言中已经指出的，由此可知，测度 $d\mu_\nu$ 的变换公式 (11)（而该公式又是约当三重行列式的变换规则 (4) 与测度 $d\mu_0$ 在 Aut(Ω) 下不变这一事实共同推出的）表明，算子 (12) 在 $\mathcal{N}_\nu^m$ 上酉作用。再次运用公式 (43)，即可得到

$$N_\nu^m(z,w) = \frac{h(a,a)^\nu}{h(z,a)^\nu h(a,w)^\nu} N_\nu^m(\phi^{-1} z, \phi^{-1} w), \qquad a := \phi 0.$$

将 ϕ 替换为 ϕ^{-1} 得到 (44)，再在 (44) 中取 $\phi = \phi_w$ 得到 (45)。 □

推论 3. $P_\nu^m(z,w) = h(w,z)^{m-1} h(z,w)^{1-m-\nu} P_\nu^m(\phi_w z, 0)$。

证明。结合前两个命题。 □

因此，我们已将确定 N_ν^m和 P_ν^m的问题归结为求出原点处的再生核 $N_\nu^m(z,0)$。注意，由 (44) 可知，

$$N_\nu^m(kz,0) = N_\nu^m(z,0) \qquad \forall k \in K,$$

与前文一样， K 是 $0 \in \Omega$ 在 $G = \mathrm{Aut}(\Omega)_0$ 中的原点稳定子；换言之， $N_\nu^m(\cdot,0)$ 是一个径向函数。现在我们来确定径向近全纯函数。

回顾一下，若按定义，Bergman算子 (18) 在 $\mathbb{C}^d$ 上可逆，则称元素 $z \in \mathbb{C}^d$ 关于另一元素 $w \in \mathbb{C}^d$ 准可逆；此时拟逆 z^w 定义为

$$z^w := B(z,w)^{-1}(z - Q(z)w).$$

注意， z^w 关于 z 全纯，关于 w 反全纯。由于 $\det B(z,w) = h(z,w)^p$ 在 $\Omega \times \Omega$ 上不为零，因此拟逆 z^w 特别地对所有 $z, w \in \Omega$ 都有定义。根据 [Zh3 的公式 (3.2) 和命题 3.1], ，首先有 $\overline{D} = B(z,z)\overline{\partial}$，此外

$$\partial\Psi = \overline{z}^{\overline{z}} = B(\overline{z},\overline{z})^{-1}(\overline{z} - Q(\overline{z})\overline{z}), \tag{46}$$

其中与前文一样， $\partial\Psi$ 表示 K¨ahler 势$\Psi(z) = -\log h(z,z)$ 的导数向量 $\partial_j \Psi$ 。

命题 4。 $\mathcal{N}^m$ 中的径向函数恰好由以下形式的函数组成:

$$p(z, z^z), \tag{47}$$

其中， $p(z,w)$ 是关于 z、$\overline{w} \in \mathbb{C}^d$ 的多项式，在每个自变量中的次数均为 $< m$，并且按以下意义具有 K-不变性:

$$p(kz, kw) = p(z,w) \qquad \forall k \in K. \tag{48}$$

因此， $\mathcal{N}^m$ 中的径向函数是 $K_{\mathbf{m}}(z, z^z)$ 的线性张成，其中$|\mathbf{m}| < m$。

证明。根据 (46) 和近全纯函数的定义，任意 $f \in \mathcal{N}^m$ 都具有如下形式

$$f(z) = p(z, z^z),$$

其中 $p(z,w)$ 关于 $z \in \Omega$ 全纯，且是 $\overline{w}$ 中次数为 $< m$ 的多项式。由于 K 中的元素都是 Jordan 三重自同构，对于任意$k \in K$，我们有 $kz^{kw} = k(z^w)$，因此

$$f(kz) = p(kz, k(z^z))$$

具有相同的 p。因此， f 是径向的，当且仅当

$$p(z, z^z) = p(kz, kz^{kz}) \qquad \forall z \in \Omega, \forall k \in K.$$

最后一个等式意味着，对于任意固定的 $k \in K$，关于 $z, w \in \Omega$ 的两个全纯函数 $p(z, \overline{w}^z)$ 和 $p(kz, k\overline{w}^{kz})$ 在反对角线 $z = \overline{w}$ 上相等。根据众所周知的唯一性原理 [BM，命题 II.4.7]，，它们必定对所有 z, w 都相等。由于对每个固定的 $z \in \Omega$，Ω 在映射 $w \mapsto \overline{w}^z$ （非恒定的反全纯映射）下的像是一个非空开集，且 p 关于第二个变量是多项式，实际上，对所有 $z \in \Omega$ 和 $y \in \mathbb{C}^d$，都有 $p(z,y) = p(kz, ky)$，从而证明了（48）。现在，根据舒尔引理 [AE，命题 2]，众所周知，满足（48）的函数 p 由 $K_{\mathbf{m}}(z,w)$ 张成，其中 m 遍历所有签名。由于 $K_{\mathbf{m}}(z,w)$ 关于 z 和 $\overline{w}$ 都是齐次的，次数为 $|\mathbf{m}|$ ，命题得证。□

根据上一个命题，我们可以将确定 $N_\nu^m(\cdot, 0)$ 的问题，化归为确定某个定义在 $\mathbb{R}^r$ 上的对称多项式空间在 0 处的再生核（其中 r 与前文一样，表示 Ω 的秩）。首先，记 $\mathcal{R}_\nu^m$ 为 $\mathcal{N}_\nu^m$ 中所有径向函数构成的子空间，并令 $R_\nu^m(z,w)$ 为其再生核。那么

$$N_\nu^m(\cdot, 0) = R_\nu^m(\cdot, 0). \tag{49}$$

事实上，根据再生核的定义， $R_\nu^m(\cdot, 0)$ 是 $\mathcal{R}_\nu^m$ 中唯一一个能对 $\mathcal{R}_\nu^m$ 的所有元素在 0 处取值进行再现的元素。现在，$N_\nu^m(\cdot, 0)$ 甚至能对 $\mathcal{N}_\nu^m$ 的所有元素在 0 处取值进行再现，而且它属于 $\mathcal{R}_\nu^m$（因为它是径向的）。因此，根据唯一性，(49) 得证。

其次，空间 $\mathcal{R}_\nu^m$ 可以显式地描述如下。为方便记号，对于一个 r 元组 $t = (t_1, \ldots, t_r)$，记 $\in \mathbb{R}_+^r$,

$$t^b := \prod_{j=1}^r t_j^b, \qquad (1-t)^\nu := \prod_{j=1}^r (1-t_j)^\nu, \qquad \sqrt{t} = t^{1/2},$$

$$\frac{t}{1-t} := \Big(\frac{t_1}{1-t_1}, \ldots, \frac{t_r}{1-t_r}\Big), \qquad dt := dt_1 \ldots dt_r,$$

等等，并令 $d\rho_{b,\ \nu,\ a}$ 为修正后的 Selberg测度

$$d\rho_{b,\nu,a}(t) := c_\Omega\, t^b (1+t)^{-\nu} \prod_{1 \le i < j \le r} |t_i - t_j|^a \, dt. \tag{50}$$

最后，若 $e_1, \ldots, e_r$是一个固定的 Jordan 标架，我们将用 te 简记 $t_1 e_1 + \cdots + t_r e_r$。令 $\mathcal{S}^m$ 为所有次数为 $< m$ 、含有 r个变量的对称多项式所构成的向量空间，记

$$\mathcal{S}_\nu^m := \mathcal{S}^m \cap L^2(\mathbf{R}_+^r, d\rho_{b,\nu,a}),$$

并令 $S_\nu^m(x,y)$ 为 $\mathcal{S}_\nu^m$ 的再生核。

命题5. 映射 V 从 $\mathcal{S}^m$ 到 Ω 上函数的映射由下式给出

$$Vf(k\sqrt{t}e) := f\Big(\frac{t}{1-t}\Big), \qquad k \in K,\ t \in [0,1]^r, \tag{51}$$

是从 $\mathcal{S}^m$ 到 $\mathcal{N}^m$ 中径向函数的一个双射。此外， V 将 $\mathcal{S}^m_\nu$ 酉地映到 $\mathcal{R}^m_\nu$，并且

$$R^m_\nu(\cdot,0) = VS^m_\nu(\cdot,0). \tag{52}$$

证明。令 $z = k\sqrt{t}e$ 为 $z \in \Omega$ 的极分解。由公式 (23) 给出的 $B(z,z)$ 在皮尔斯子空间上的作用（以及 $Q(z)$ 的类似作用公式），可得

$$z^z = k\frac{\sqrt{t}}{1-t}e.$$

因此

$$K_{\mathbf{m}}(z,z^z) = K_{\mathbf{m}}(k\sqrt{t}e, k\tfrac{\sqrt{t}}{1-t}e) = K_{\mathbf{m}}(\tfrac{t}{1-t}e, e).$$

如第 2 节所见，这除一个常数因子外，正是将 Jack 对称多项式 $J_{\mathbf{m}}(\frac{t}{1-t})$ 中的 r 个变量取值为 $\frac{t}{1-t}$ 后所得的结果。由于 $J_{\mathbf{m}}$, $|\mathbf{m}| < m$ 张成了次数为 $< m$ 的所有对称多项式，根据前述命题， $\mathcal{N}^m$ 中的径向函数恰好是形如 Vf 的函数，其中 V 如 (51) 所示，且 f 是次数为 $< m$ 的对称多项式。这就证明了第一个断言。

至于第二个断言，由 (27) 可得

$$\|Vf\|^2_{L^2(d\mu_\nu)} = c_\Omega \int_{[0,1]^r} \Big|f\Big(\frac{t}{1-t}\Big)\Big|^2 d\mu_{b,\nu,a}(t). \tag{53}$$

作变量替换 $t_j = \frac{x_j}{1+x_j}$, $x \in \mathbf{R}^r_+$ 后，我们得到

$$\frac{t}{1-t} = x, \qquad dt = (1+x)^{-2}\,dx, \qquad t^b = x^b(1+x)^{-b},$$
$$(1-t)^{\nu-p} = (1+x)^{p-\nu}, \qquad t_i - t_j = \frac{x_i - x_j}{(1+x_i)(1+x_j)},$$

由此，利用 (16) 直接计算可得

$$c_\Omega\, d\mu_{b,\nu,a}(t) = d\rho_{b,\nu,a}(x). \tag{54}$$

根据 (53)，第二个断言即得证。

最后，结合一般公式 (43)（分别应用于 $\mathcal{S}^m_\nu$和 $\mathcal{R}^m_\nu$）以及上述变量替换 $x = \frac{t}{1-t}$下点$t = 0$ 对应于 $x = 0$这一事实，即可得到 (52)。□

我们将迄今为止的结果总结如下，作为本节的主要结论。

定理 6. 空间 $\mathcal{N}^m_\nu$和 $\mathcal{P}^m_\nu$的再生核 N^m_ν和 P^m_ν分别为

$$N^m_\nu(z,w) = h(z,w)^{-\nu} N^m_\nu(\phi_z w, 0),$$
$$P^m_\nu(z,w) = \frac{h(z,z)^{m-1}h(w,w)^{m-1}}{h(z,w)^{\nu+2m-2}} N^m_{\nu+2m-2}(\phi_w z, 0),$$

其中

$$N^m_\nu(k\sqrt{t}e, 0) = S^m_\nu(\tfrac{t}{1-t}, 0),$$

其中， S^m_ν是关于测度（50）的 $\mathbf{R}^r_+$ 上次数为 $< m$ 的对称多项式 L^2 空间的再生核。

证明。结合命题1、2、4和5以及公式（49）。 □

我们以一个简单的观察结束本节，该观察涉及空间 $\mathcal{N}_\nu^m$ 和 $\mathcal{P}_\nu^m$ 的非平凡性。

引理7. 多项式 P 属于 $L^2(\mathbb{R}_+^r, d\rho_{b,\nu,a})$，当且仅当它关于每个变量的次数都小于 $(\nu - p + 1)/2$。

证明. 令 n_1 为 $P(x)$ 关于变量 x_1 的次数；因此，关于变量 x_1 的首项为 $p_1(x')x_1^{n_1}$，其中关于变量 $r-1$ 的多项式 $p_1(x_2, \dots, x_r)x' =$ 不恒为零。因此， p_1 的零点集是 $\mathbb{R}^{r-1}$ 中一个余维至少为 1 的簇；于是我们可以选取一个闭球 Q （半径为正且有限），使其完全包含于 $\{y \in \mathbb{R}^{r-1} : y_j \neq y_k$ ，对所有 $j \neq k\}$ 都成立，且 $|p_1| > 0$ 在 Q 上成立。设 $R := 1 + \sup\{\|y\| : y \in Q\}$。那么，如果 $P \in L^2(\mathbb{R}_+^r, d\rho_{b,\nu,a})$，积分

$$\int_R^\infty \int_Q |P(x_1, x')|^2 \, d\rho_{b,\nu,a}(x_1, x')$$

必须是有限的。然而，由于我们对 Q 和 R 的选择，被积函数为 $\asymp x_1^{2n_1}$（关于 x' 一致），而测度为 $\asymp x_1^{b-\nu+(r-1)a} \, dx$ （关于 x' 一致）。因此， x^{2n_1+}（ $r-1$ $a+b-\nu$ ）必须在无穷远处可积，这意味着 $2n_1 + (r-1)a + b - \nu = 2n_1 + p - 2 - \nu < -1$，或 $n_1 < (\nu - p + 1)/2$。类似地，对于 $P(x)$ 关于变量 x_j、 $j = 1$、.....、 r 的次数 n_j，有 $n_j < (\nu - p + 1)/2$。

反过来，设 $P(x) = x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$，且对所有 j 都有 $n_j < (\nu - p + 1)/2$。再次作变量替换 $x = t/(1-t)$，可知 P 关于 $c^{-1} \, \Omega \, d\rho_{b,\nu,a}$ 的 L^2-范数等于

$$\int_{[0,1]^r} \prod_{j=1}^r \left(t_j^{2n_j+b} (1-t_j)^{\nu-p-2n_j} \right) \prod_{1 \le i < j \le r} |t_i - t_j|^a \, dt.$$

被积函数中的第二项有界（不超过 1），而第一项恰好给出单变量积分的乘积

$$\int_0^1 t_j^{2n_j+b} (1-t_j)^{\nu-p-2n_j} \, dt_j,$$

由于 $2n_j + b > -1$ 和 $\nu - p - 2n_j > -1$，这些积分是有限的。 □

命题8. (a) $\mathcal{N}_\nu^m \neq \{0\}$ 当且仅当 $\nu > p - 1$，且 $\mathcal{P}_\nu^m \neq \{0\}$ 当且仅当 $\nu > p + 1 - 2m$。

(b) $\mathcal{N}_\nu^m \setminus \mathcal{N}_\nu^{m-1} \neq \{0\}$ 当且仅当存在一个符号 $\mathfrak{m}$，使得 $|\mathfrak{m}| = m - 1$ 和 $m_1 < \frac{\nu-p+1}{2}$.(c) 实际上， $K_{\mathfrak{m}}(z, z^z) \in \mathcal{N}_\nu^m$ 当且仅当 $|\mathfrak{m}| < m$ 和 $m_1 < \frac{\nu-p+1}{2}$.

证明. (a) 若 $\mathcal{N}_\nu^m \neq \{0\}$ ，则其再生核不恒为零；根据最后一个定理，这又等价于 $N_\nu^m(\cdot, 0) \not\equiv 0$ 和 $S_\nu^m(\cdot, 0) \not\equiv 0$。因此， $\mathcal{S}_\nu^m$ 包含一个非零多项式 $p(x)$（甚至存在一个在原点处不为零的多项式）。根据最后一个引理，必有 $\nu - p + 1 > 0$，或 $\nu > p - 1$。

反之，如果 $\nu > p - 1$，那么 $\mathcal{N}_\nu^1 = A_\nu$ 是非平凡的（它包含 Ω 上的所有有界全纯函数），因此 $\mathcal{N}_\nu^m \supset \mathcal{N}_\nu^1$ 也是如此。

这就证明了关于 $\mathcal{N}_\nu^m$ 的断言；关于 $\mathcal{P}_\nu^m$ 的断言则由命题 1 得出。

(b) 按照与（a）部分证明相同的论证， $\mathcal{N}_\nu^m \setminus \mathcal{N}_\nu^{m-1} \neq \{0\}$ 当且仅当 $\mathcal{S}_\nu^m$ 包含一个多项式 P，其总次数为 $m-1$，且在每个变量中的次数为 $< \frac{\nu-p+1}{2}$。若 x^α（其中 α 为一个多重指标）是最高次数齐次分量中的任意一个单项式

，则将 α按非递增顺序重新排列，即可得到所需的符号 $\mathbf{m}$。

(c) 这与 (b) 部分的证明方式相同，因为 V map$K_{\mathbf{m}}(z,z^z)$ 映射为 Jack 多项式 $J_{\mathbf{m}}(x)$ 的一个（非零）常数倍，而 $J_{\mathbf{m}}(x)$ 等于下式的对称化（记 $x^{\mathbf{m}}:=x_1^{m_1}\dots x_r^{m_r}$）：

$$x^{\mathbf{m}}+\sum_{\mathbf{n}<\mathbf{m}} c_{\mathbf{mn}}x^{\mathbf{n}} \tag{55}$$

其中求和遍及按字典序小于 $\mathbf{m}$ 的（某些）签名 $\mathbf{n}$；参见 Mcdonald [MD，公式 (10.13)]。□

推论 9。 $\mathcal{R}_\nu^m=\operatorname{span}\{K_{\mathbf{m}}(z,z^z):\ |\mathbf{m}|<m,\ m_1<\frac{\nu-p+1}{2}\}$。

特别地，若 q 表示满足下列条件的非负整数

$$q<\frac{\nu-p+1}{2}\le q+1,$$

then

$$\mathcal{R}_\nu^m=\operatorname{span}\{K_{\mathbf{m}}(z,z^z):|\mathbf{m}|<m\}\qquad \textit{if } m\le q+1, \tag{56}$$

$$\mathcal{R}_\nu^m=\operatorname{span}\{K_{\mathbf{m}}(z,z^z):m_1\le q\}\qquad \textit{if } m\ge rq+1. \tag{57}$$

这意味着，对于 $m\ge rq+1$, $\mathcal{R}_\nu^m$，因此 $\mathcal{N}_\nu^m$ 等于 $\mathcal{N}_\nu^{rq+1}$——也就是说，空间 $\mathcal{N}_\nu^m$“稳定”下来，不再随 m 增大（固定 ν）。同样，对于所有 $m\ge rq+1$，若 $2q-1<\nu-p\le 2q+1$，则 $N_\nu^m(z,w)=N_\nu^{rq+1}(z,w)$。

注 10. 我们在此指出，显然，

$$\mathcal{N}^1\subset\mathcal{N}^2\subset\mathcal{N}^2\subset\dots,$$

除非秩 $r=1$，否则 $\mathcal{P}^m$ 不存在这样的包含关系。更具体地说，对于$r>1$，函数 $\mathbf{1}$（常数 1）属于 $\mathcal{P}^1$，但不属于任何 $\mathcal{P}^m$, $m\ge 2$。事实上， $\mathbf{1}\in\mathcal{P}^m\iff h(z,z)^{1-m}\in\mathcal{N}^m$，由式 (9) 可得；而根据命题 4，后者等价于

$$(1-t)^{1-m}=\sum_{|\mathbf{m}|<m} c_{\mathbf{m}}\phi_{\mathbf{m}}(\tfrac{t}{1-t})$$

其中系数为 $c_{\mathbf{m}}$。再次转到 $x=\frac{t}{1-t}$，这可转化为

$$(1+x)^{m-1}=\sum_{|\mathbf{m}|<m} c_{\mathbf{m}}\phi_{\mathbf{m}}(x). \tag{58}$$

但根据 Faraut-Koranyi 公式 (33)，左侧等于

$$\sum_{\mathbf{n}}(1-m)_{\mathbf{n}}\frac{\pi_{\mathbf{n}}(-1)^{|\mathbf{n}|}}{(q_\Omega)_{\mathbf{n}}}\phi_{\mathbf{n}}(x).$$

由于 $\phi_{\mathbf{m}}$ 线性无关，式 (58) 只有在以下条件下才能成立

$$(1-m)_{\mathbf{n}}=0\qquad \text{whenever } |\mathbf{n}|\ge m.$$

然而，对于 $\mathbf{n}=(m-1,1)$，有 $(1-m)_{\mathbf{n}}=(-1)^m(m-1)!(m-1+\frac{a}{2})$，其值非零。因此，对于 $m\ge 2$，若 $r>1$，则 $\mathbf{1}\notin\mathcal{P}^m$。□

4. Spherical functions

任意 $g \in G$ 都可唯一地写成 $g = k\phi_w$ 的形式，其中 $w = g^{-1}0 \in \Omega$，$k \in K$，而 ϕ_w 是交换 0 与 w 的测地反射 (17)。由此可得复雅可比行列式的公式

$$J_g(z) = \det k \cdot (-1)^d \frac{h(w,w)^{p/2}}{h(z,w)^p}, \tag{59}$$

这表明射影表示 (12) 实际上无非是

$$f \longmapsto J_{\phi^{-1}}^{\nu/p} \cdot f \circ \phi^{-1}, \qquad \phi \in G.$$

为了使其不仅成为射影表示，而且成为真正的表示（当 ν/p 不是 ˜ ˜整数时），需要从 G 转到其万有覆盖 G。G中的元素可以看作 G 中的元素 g，并附带对 $\log J_g$的一致选择。算子

$$U_g^{(\nu)} : f \longmapsto J_{g^{-1}}^{\nu/p} \cdot f \circ g^{-1}, \qquad g \in \widetilde{G}, \tag{60}$$

于是定义了 $\widetilde{G}$ 在 $L^2(\Omega\ d\mu_\nu)$上的一个（真正的，而不仅仅是射影的）酉表示；˜ ˜ ˜并且有 $\Omega = G/K$，其中 K是 K 在覆盖映射 ˜ ˜$G \to G$下的原像，即 K 的万有覆盖，也是 $0 \in$在 G中的稳定子。（实际上还˜有 $K \cong K \times$R，但我们不需要这一事实。）

利用 (60)，可以将 $L^2(\Omega\ d\mu_\nu)$ 识别为 $L^2(\widetilde{G}/Z(\widetilde{G}))$ 的一个子空间，即关于 $\widetilde{G}$上适当归一化的哈尔测度，在 $\widetilde{G}$ 模去其中心 $Z(\widetilde{G})$所得商空间上的L^2 空间。具体而言，对于 $f \in L^2(\Omega\ d\mu_\nu)$，在 $\widetilde{G}$上定义的函数 $f^\#$ 为

$$f^\#(g) := f(g0) J_g(0)^{-\nu/p}, \qquad g \in \widetilde{G}, \tag{61}$$

满足

$$(U_g^{(\nu)} f)^\# = f^\# \circ g^{-1} \tag{62}$$

（即，映射 $f \mapsto f^\#$ 将表示（60）与 $\widetilde{G}$ 在 $L^2(\widetilde{G})$ 上的左正则表示交织起来），并且

$$f^\#(gk) = f^\#(g) J_k^{-\nu/p}, \qquad g \in \widetilde{G},\ k \in \widetilde{K}. \tag{63}$$

（注意，$J_k \equiv J_k(0)$ 是一个常数函数，因此我们将只写 J_k，而不写 $J_k(0)$ 或 $J_k(z)$。）此外，$f \mapsto f^\#$ 是从 $L^2(\Omega\ d\mu_\nu)$ 到 $L^2(\widetilde{G}/Z(\widetilde{G}))$ 中满足变换规则（63）的所有函数构成的子空间 $L^2(\widetilde{G}, \nu)$ 上的酉同构；映射 $f \mapsto f^\#$ 的逆映射由 $F \mapsto F^\flat$给出，其中

$$F^\flat(g0) := F(g) J_g(0)^{\nu/p} \tag{64}$$

（右端仅取决于 $g0$，这是由（63）保证的）。有关所有这些事实的证明，请参见 [DOZ] 中的命题 2.1。（注意：[DOZ]，中第 2 节的第一个公式存在印刷错误，其中的 τ_ν 应为 $\tau_{-\nu}$。）

利用上述对应关系，(62) 不保持不变为 注意，Ω 上的空间函数，即满足对所有 $z \in \Omega$ 和 $k \in K$，$f(kz) = f(\{v6)$ 的函数，对应于 $\widetilde{G}$ 上满足以下条件的函数：$f^\#$

$$f^\#(k'gk) = J_{k'}^{-\nu/p} f^\#(g) J_k^{-\nu/p}, \qquad g \in \widetilde{G},\ k, k' \in \widetilde{K}. \tag{65}$$

这样的函数称为 ν-球面函数。

空间 $L^2(\widetilde{G},\nu)$ 的表示论由 Shi- meno [Shm] 发展起来（其记号 $\tau_{-\ell}(k)$ 对应于我们的 $J_k^{-\nu/p}$ ）。（注意，在 $L^2(\widetilde{G},\nu)$ 与 $L^2(\widetilde{G},-\nu)$ 之间存在一个 $\widetilde{G}$-等变同构，因此我们总可以假设 $\nu>0$ 正如我们起初所取的那样。）具体而言，设 $G=KAN$ 是 G 的 Iwasawa 分解，并设 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{k}$、$\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{a}$ 分别为 G（以及 G）、K（以及 K）、AN 和 A 的李代数，从而 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解，而 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的极大阿贝尔子空间。对于 $g\in G$，令 $H(g)$ 表示 $\mathfrak{a}$（A 的李代数）中由 $g\in K\exp H(g)N$ 唯一确定的元素。类似地，令 $\kappa(g)\in\widetilde{K}$ 由 $g\in\kappa(g)AN$ 唯一确定。对于 $\lambda\in\mathfrak{a}^{*\mathbf{C}}$，即 $\mathfrak{a}$ 的对偶空间 $\mathfrak{a}^*$ 的复化，定义类型为 ν 的球函数 ϕ_λ、ν 为

$$\phi_{\lambda,\nu}(g):=\int_{\widetilde{K}/Z(\widetilde{G})} e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}J^{\nu/p}_{k^{-1}\kappa(g^{-1}k)}\,dk, \tag{66}$$

其中，$Z(G)$表示 G的中心，dk 是商空间 $K/Z(G)$上的不变测度，且总质量为 1，$\rho\in\mathfrak{a}^*$ 是正根半和（见下文（72））。于是，$\phi_{\lambda,\nu}$ 是 G上的一个 ν-球函数，并将 G 上的 ν-球函数 f 的球傅里叶变换 f 定义为

$$\hat{f}(\lambda):=\int_{\widetilde{G}/Z(\widetilde{G})} f(g)\phi_{-\lambda,-\nu}(g)\,dg,\qquad \lambda\in\mathfrak{a}^{*\mathbf{C}}. \tag{67}$$

这个定义在例如 f 模 $Z(G)$紧支撑时是有意义的。[Shm] 的主要结果指出，存在一个反演公式

$$f(g)=\int_{\bigcup_{j=0}^{r} D_{\nu,j}+i\mathfrak{a}^*_{\Theta_j}} \hat{f}(\lambda)\phi_{\lambda,\nu}(g)\,d\gamma(\lambda)$$

其中，$D_{\nu,\,j}$ 和$\mathfrak{a}^*_{\Theta_j}$ 是 $\mathfrak{a}^*$ 中的某些超平面系，$d\gamma$ 是其上的某种测度；此外，还存在相应的普朗歇尔定理。详情见 [Shm] 中的定理 6.7 和 6.8。$D_{\nu,\,j}$ 和$\mathfrak{a}^*_{\Theta_j}$ 在 $\mathfrak{a}^*$中的余维均为 j；特别地，对于 $j=r$，$\mathfrak{a}^*_{\Theta_r}=\{0\}$ 和

$$D_{\nu,r}=\{\lambda_{\mathbf{m}}:\mathbf{m}\text{ is a signature with }m_1<\tfrac{\nu-p+1}{2}\} \tag{68}$$

其中

$$\lambda_{\mathbf{m}}:=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\beta_j,\qquad \lambda_{r+1-j}=p-1-\nu-(j-1)a+2m_j. \tag{69}$$

（这里，β_1、……、$\beta_r\in\mathfrak{a}^*$ 是 Ω 的根系中的长根；见下文。）因此，$D_{\nu,\,r}$ 是 $\mathfrak{a}^*$ 中的一个有限离散集。此外，$d\gamma$ 上的普朗歇尔测度 $d\gamma$ 在 $D_{\nu,\,r}+i\mathfrak{a}^*_{\Theta_r}=D_{\nu,\,r}$ 上简化为仅由狄拉克质量构成的测度，每个 $\lambda=\lambda_{\mathbf{m}}$ 处的权重为 $d_r(\lambda,\nu)$。这里，$d_r(\lambda,\nu)$ 由一个涉及 Γ 函数的显式表达式给出；参见 [Shm] 中的 (4.18)、(4.19)、(4.21) 和 (6.18)。总之，由此可知，对于每个签名 m，由 $\phi_{\lambda_{\mathrm{m}},\,\nu}$ 的 $\widetilde{G}$-平移在 $L^2(\widetilde{G})$ 中张成的空间 $\mathcal{A}^{\mathrm{m}}_{\nu}(\widetilde{G})$ 是 $L^2(G)$ 的一个不可约直和项；当 m 变化时，这些直和项彼此正交。这类直和项称为 G 的相对离散级数表示。注意，由 (68) 可知，只有满足 $m_1<\frac{\nu-p+1}{2}$ 的签名 m 才会出现（特别地，如果 $\nu\le p-1$，则不存在相对离散级数表示）。

Let

$$\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\Omega) := \{F^{\flat} : F \in \mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\widetilde{G})\}$$

˜ 是 Ω 上与 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(G)$ 通过 (64) 对应的函数空间。接下来， [Zh3] 的核心结果是， $\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\Omega)$ 实际上是一个阶数为 |m| 的近全纯函数空间，并且随着 m 变化，这些空间穷尽所有近全纯函数。具体而言，令 $N^{\mathbf{m}}$ 为 (42) 中 Ω 上的锥多项式；于是可以将其与拟逆 (46) 复合，得到 Ω 上的函数 $N^{\mathbf{m}}(\overline{z}^{\overline{z}})$。根据 [Zh3], 中的定理 4.7，由 $U_{(\nu)_g}$ $N^{\mathbf{m}}(\overline{z}^{\overline{z}})$（ $g \in \widetilde{G}$）张成的空间与 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\Omega)$ 相同。

最后，仿照 [Zh1], 第3节开头的论证，由 Shi- meno 的 Plancherel公式可知，空间 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\Omega)$ 的再生核 $A^{\mathbf{m}}_{\nu}(z,w)$ 在 $w = 0$ （即原点）处可简单表示为球函数乘以适当的常数：

$$A^{\mathbf{m}}_{\nu}(z,0) = d_r(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)\phi^{\flat}_{\lambda_{\mathbf{m}},\nu}(z). \tag{70}$$

综上所述，我们由此得到了以下结果。

定理 11. 原点处的近全纯再生核 N^m_{ν} 由下式给出

$$N^{\mathbf{m}}_{\nu}(z,0) = \sum_{\substack{|\mathbf{m}|<m \\ m_1<\frac{\nu-p+1}{2}}} d_r(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)\phi^{\flat}_{\lambda_{\mathbf{m}},\nu}(z), \tag{71}$$

其中 $d_r(\lambda,\nu)$ $\phi_{\lambda,\ \nu}$ 以及 $\lambda_{\mathbf{m}}$ 如上所述。

我们在此指出，实际上 $d_r(\lambda,\nu) = \|\phi_{\lambda,\ \nu}\|^{-2}_{L^2\ (\tilde{G})}$ ，参见 [Shm] 中的注 6.9。

最后，我们回顾球函数$\phi_{\lambda,\ \nu}$与Heckman和Opdam的超几何函数 [HS, PartI] 之间的关系。采用记号 $\mathfrak{g}$ 表示 G的李代数，令 Σ 为这一对$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$的限制根系。那么 Σ 是BC型根系，即具有如下形式

$$\Sigma = \{\pm\tfrac{1}{2}\beta_j, \pm\beta_j, \pm\tfrac{1}{2}(\beta_j \pm \beta_k),\ 1 \le j,k \le r,\ j \ne k\},$$

其中 $\{\beta_j\}_j$是 $\mathfrak{a}^*$的某个基。这里，短根 $\pm\frac{1}{2}\beta_j$的重数为$m_S = 2b$，长根 $\pm\beta_j$ 的重数为 $m_L = 1$，中根$\frac{1}{2}(\pm\beta_j \pm \beta_k)$的重数为 $m_M = a$；若 $b = 0$，则短根实际上不存在（若 $r = 1$，则中根实际上不存在）。正根为 $\frac{1}{2}\beta_j$、 β_j、 $j = 1$、.....、 r以及 $\frac{1}{2}(\beta_j \pm \beta_k)$、 $1 \le k < j \le r$；因此，正根半和为

$$\rho = \sum_{j=1}^{r} \frac{b+1+(j-1)a}{2}\,\beta_j. \tag{72}$$

现在，令 $F(\lambda, \mathbf{k}_{\nu}, \cdot)$ 为参数 $\lambda \in \mathfrak{a}^{*\mathbf{C}}$ 对应于根系 2Σ （重数为 $\mathbf{k}_{\nu}$ ）的 Heckman-Opdam 超几何函数，其定义如下：

$$\mathbf{k}_{\nu,S} = \frac{m_S}{2} - \nu = b - \nu, \qquad \mathbf{k}_{\nu,L} = \frac{m_L}{2} + \nu = \frac{1}{2} + \nu, \qquad \mathbf{k}_{\nu,M} = \frac{m_M}{2} = \frac{a}{2}, \tag{73}$$

分别对应于 Σ 的短根、长根和中根的“倍根”。那么对于˜任意 $g \in A \subset G$ ，我们有

$$\phi_{\lambda,\nu}(g) = h(g0,g0)^{-\nu/2}F(\lambda,\mathbf{k}_{\nu},g). \tag{74}$$

参见 [HS，第 5.2 定理。2]（另请参见 [Shm] 中的注记 3.8）。进一步注意到，根据 [HS，（4.4.10）]（另请参见 [Shm] 中的注记 5.12），如果 λ 是一个主权（即对于 α Σ 的所有正根，$\frac{\langle\lambda\,\alpha\rangle}{\langle\alpha}{}_{,,\alpha\rangle}\in$N），那么

$$F(\lambda,\rho_\nu,\mathbf{k}_\nu,\cdot)=c(\lambda+\rho_\nu,\mathbf{k}_\nu)P(\lambda,\mathbf{k}_\nu,\cdot), \tag{75}$$

其中 ρ_ν由 (72) 给出，只需将 b替换为 $b+\nu$；而 $P(\lambda,\mathrm{k}_\nu,\cdot)$ 是多变量雅可比多项式（参见 Debiard [De1], [De2]）。这里，$c(\lambda,\mathrm{k})$ 是 Harish-Chandra 的广义c函数，其线丛参数为 ν（参见 [Shm] 中的 (3.15) 或 [HS]中的 (3.4.3)）。

结合 (71)、(74) 和 (72) 以及定理 6，我们还可以用球函数、Heckman-Opdam 超几何函数或多变量雅可比多项式来表示不变多解析再生核 P_ν^m 以及空间$\mathcal{S}_\nu^m$上的再生核 S_ν^m，其中$\mathcal{S}_\nu^m$是 R_+^r 上的对称多项式空间。细节从略。

例 12. 对于 $\Omega=\mathrm{B}^d$，即 C^d中的单位球，有 $r=1, b=d-1, a$ 未定义，$p=d+1$ 且 $h(z,w)=1-\langle z,w\rangle$。群 $G=SU(1,n)$ 的元素可与复矩阵 $(n+1)\times(n+1)$ $\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C^t & D\end{smallmatrix}\right)$相对应，其中 $A\in\mathrm{C},B,C\in\mathrm{C}^{1\times n}$ 且 $D\in\mathrm{C}^{n\times n}$，其作用为 $z\mapsto(Az+B)(Cz+D)^{-1}$，其中 $z\in\mathrm{B}^d$写作行向量。李代数 $\mathfrak{a}$ 等于 $\mathrm{R}H$，其中

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0^{1\times(n-1)} & 0\\ 0^{(n-1)\times1} & 0^{(n-1)\times(n-1)} & 0^{(n-1)\times1}\\ 0 & 0^{1\times(n-1)} & 1\end{pmatrix},$$

并定义 $\beta\in\mathfrak{a}^*$为 $\beta(H)=2$根系由 $\Sigma=\{\pm\frac12\beta,\pm\beta\}$给出。我们有

$$\exp(tH)=\begin{pmatrix}\cosh t & 0^{1\times(n-1)} & \sinh t\\ 0^{(n-1)\times1} & I^{(n-1)\times(n-1)} & 0^{(n-1)\times1}\\ \sinh t & 0^{1\times(n-1)} & \cosh t\end{pmatrix},$$

因此 $|\exp(tH)0|=|\tanh t|$ 且

$$\cosh t=h(\exp(tH)0,\exp(tH)0)^{-1/2}. \tag{76}$$

球函数 $\phi_{\lambda,\ \nu}$ 由（[Shm，（8.2）和（8.3）]）给出

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda,\nu}(\exp tH)&=(\cosh t)^{-\nu}{}_2F_1\Big(\tfrac{d-\nu+\lambda}{2},\tfrac{d-\nu-\lambda}{2}\Big|-\sinh^2t\Big)\\ &=(\cosh t)^{\nu}{}_2F_1\Big(\tfrac{d+\nu+\lambda}{2},\tfrac{d+\nu-\lambda}{2}\Big|-\sinh^2t\Big),\end{aligned} \tag{77}$$

也就是说，由（64）和（76），并且由于 $J_{\exp tH}(0)=\cosh^{-p}t$,

$$\begin{aligned}\phi^\flat_{\lambda,\nu}(z)&=(1-|z|^2)^{\nu}{}_2F_1\Big(\tfrac{d-\nu+\lambda}{2},\tfrac{d-\nu-\lambda}{2}\Big|\frac{|z|^2}{|z|^2-1}\Big)\\ &={}_2F_1\Big(\tfrac{d+\nu+\lambda}{2},\tfrac{d+\nu-\lambda}{2}\Big|\frac{|z|^2}{|z|^2-1}\Big),\end{aligned}$$

其中 ${}_2F_1$ 是高斯超几何函数；在右侧，我们将 $\lambda(H)$ 简写为 λ。利用 ${}_2F_1$ [BE, §2.1 (22)] 中的标准变换公式,

$${}_2F_1\Big(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\Big|z\Big)=(1-z)^{-a}{}_2F_1\Big(\begin{matrix}a,c-b\\ c\end{matrix}\Big|\frac{z}{z-1}\Big)=(1-z)^{-b}{}_2F_1\Big(\begin{matrix}c-a,b\\ c\end{matrix}\Big|\frac{z}{z-1}\Big), \tag{78}$$

这也可以写成

$$\begin{aligned}\phi^{\flat}_{\lambda,\nu}(z) &= (1-|z|^2)^{\frac{d+\lambda+\nu}{2}}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}\frac{d+\lambda+\nu}{2},\frac{d+\lambda-\nu}{2}\\ d\end{matrix}\Big|\,|z|^2\Big)\\ &= (1-|z|^2)^{\frac{d-\lambda+\nu}{2}}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}\frac{d-\lambda+\nu}{2},\frac{d-\lambda-\nu}{2}\\ d\end{matrix}\Big|\,|z|^2\Big).\end{aligned}$$

元素 $\lambda_{\mathbf{m}}\in\mathfrak{a}^*$、$\mathbf{m}=(m_1)$ 由 $\lambda_{\mathbf{m}}=\lambda_1\frac{\beta}{2}$ 给出，其中 $\lambda_1=2m_1+d-\nu$,$m_1\in\mathbb{Z}$, $0\le m_1<\frac{\nu-d}{2}$。相应的空间 $\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\mathbb{B}^d)$ 由函数 $\overline{z}_1^{m_1}(1-|z|^2)^{-m_1}$ 在作用 (12) 下的 G-平移张成，见 Zh3 第 5] 节 [，并且与 Zh1 第 116–117] 页的正交补 $\mathcal{N}^{m_1+1}_{\nu}\ominus\mathcal{N}^{m_1}_{\nu}$ [一致。$\mathcal{A}^{\mathbf{m}}_{\nu}(\mathbb{B}^d)$ 在原点处的再生核由 (71) 给出，其中

$$d_1(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)=\frac{(\nu-d-2m_1)\pi^{-d}\Gamma(d+m_1)\Gamma(\nu-m_1)}{m_1!\Gamma(d)\Gamma(\nu-d+1-m_1)},$$

这与 Zh1 第3节第 116] 页底部的结果完全一致。（请注意，Zh1] 中公式 (1.5) 有一处印刷错误：分子中的 $\Gamma(\alpha+1+d)$ 应为 $\Gamma(\alpha+1+d-l)$。此外，那里球函数的标记方式也有所不同：我们的 $\phi_{\lambda,\nu}$ 对应于 Zh1] 中的 $[\phi_{i\lambda,\nu}$。）

根据 [Op，第 90]，页，BC根系的 Heckman-Opdam 超几何函数$_1$ 给出为

$$F(\lambda,\mathbf{k},\exp tH)={}_2F_1\Big(\begin{matrix}\frac{d+\nu+\lambda}{2},\frac{d+\nu-\lambda}{2}\\ d\end{matrix}\Big|\,-\sinh^2 t\Big),$$

鉴于 (76)，这与 (74) 和 (77) 完全一致。

最后，当秩为一时，(75) 恰好化为 (15)，因此对于 $m-1<\frac{\nu-p+1}{2}$

$$\begin{aligned}N^m_{\nu}(z,0) &= \sum_{m_1=0}^{m-1} d_1(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m_1,d-\nu+m_1\\ d\end{matrix}\Big|\,\frac{|z|^2}{|z|^2-1}\Big)\\ &= \sum_{m_1=0}^{m-1} d_1(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)(1-|z|^2)^{-m_1}\,{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m_1,\nu-m_1\\ d\end{matrix}\Big|\,|z|^2\Big)\qquad \text{by (78)}\\ &= \sum_{m_1=0}^{m-1} d_1(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)\frac{(1-|z|^2)^{-m_1}}{\binom{m_1+d-1}{d-1}}P^{(d-1,\nu-d-2m_1)}_{m_1}(1-2|z|^2),\end{aligned}$$

从而恢复了 (13) 及其用 Jacobi 多项式表述的改写形式。

由定理 6 可知，$L^2(\mathbb{R}_+,c_{\mathbf{B}^d}t^{d-1}(1+t)^{-\nu}\,dt)$ 中所有次数为 $<m$ 的多项式子空间在原点处的再生核等于

$$S^m_{\nu}(x,0)=\sum_{0\le m_1<\min(m,\frac{\nu-d}{2})} d_1(\lambda_{(m_1)},\nu)\;{}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m_1,d-\nu+m_1\\ d\end{matrix}\Big|\,-x\Big),\tag{79}$$

其中各个加项实际上彼此正交。 □

5. Faraut-Koranyi hypergeometric functions

想到定理 6，我们回到子空间 $\mathcal{S}^m_{\nu}$ 中 $L^2(\mathbb{R}^r_+,d\rho_{b,\nu,a})$ 内次数为 $<m$ 的对称多项式的再生核 $S^m_{\nu}(x,y)$。由命题 4 和 5，函数

$$K_{\mathbf{m}}(xe,e),\qquad |\mathbf{m}|<m,\ m_1<\tfrac{\nu-p+1}{2},\tag{80}$$

张成 $\mathcal{S}_\nu^m$。下面这个简单事实——实质上概括了标准的 Gram-Schmidt 正交化过程——说明了如何从任意基中提取再生核。

命题 13. 设 $\mathcal{H}$ 是一个有限维函数希尔伯特空间，其基 $\{f_j\}$（不一定正交）。记 $\mathbf{U}(x)$ 为列向量 $(f_j(x))_j$。那么 $\mathcal{H}$ 的再生核为

$$K_{\mathcal{H}}(x,y) = \mathbf{U}(y)^* \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}(x), \tag{81}$$

其中 $\mathbf{G} = (\langle f_j, f_k\rangle_{\mathcal{H}})_{j,k=1}^{\dim \mathcal{H}}$，是基 $\{f_j\}_j$的格拉米矩阵。

证明. 设 $\{e_l\}_l$ 是 $\mathcal{H}$ 的标准正交基，并设 $e_l = \sum_j c_{lj} f_j$ 是 e_l用 f_j的线性组合表示的式子。记 C为矩阵 $(c_{lj})_{l,\ j=1}^{\dim \mathcal{H}}$。由

$$\delta_{lm} = \langle e_l, e_m\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j,k} c_{lj}\overline{c_{mk}}\langle f_j, f_k\rangle_{\mathcal{H}} = (C\mathbf{G}C^*)_{lm}$$

可知 $C\mathbf{G}C^*$ 是单位矩阵；也就是说，$\mathbf{G} = (C^*C)^{-1}$。因此，由 (43)

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{H}}(x,y) &= \sum_l e_l(x)\overline{e_l(y)} = \sum_{l,j,k} c_{lj} f_j(x)\overline{c_{lk} f_k(y)} \\ &= \mathbf{U}(y)C^*C\mathbf{U}(x) = \mathbf{U}(y)\mathbf{G}^{-1}\mathbf{U}(x), \end{aligned}$$

从而证明了所述结论。 □

对于基 (80)，当 m 和 r 取较小值时，格拉米矩阵 $\mathbf{G}$ 原则上很容易显式计算。例如，对于 $r = 2$，从

$$(1-t)^n = h(te,e)^n = \sum_{\mathbf{m}:m_1\le n} (-n)_{\mathbf{m}} K_{\mathbf{m}}(te,e), \qquad n = 0,1,2,\dots,$$

递归地读出 $(-n)_{(n,m_2)}K_{(n,m_2)}(te,e)$，将其作为 $(1-t)^n$ 中次数为 $n+m_2$ 的齐次分量：

$$\begin{aligned} K_{(0)} &= \mathbf{1}, \qquad K_{(1)} = t_1 + t_2, \qquad K_{(1,1)} = \frac{2t_1t_2}{a+2}, \\ K_{(2,0)} &= \frac{t_1^2+t_2^2}{2} + \frac{at_1t_2}{a+2}, \qquad K_{(2,1)} = \frac{2t_1t_2(t_1+t_2)}{a+4}, \\ K_{(2,2)} &= \frac{2t_1^2t_2^2}{(a+2)(a+4)}, \qquad \dots . \end{aligned}$$

（为简洁起见，我们省略了参数 (te,e)。）这样，计算 $\mathbf{G}$ 就归结为求下列积分的值

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{q_1} x_2^{q_2} (1+x_1)^{-\nu}(1+x_2)^{-\nu}|x_1-x_2|^a\, dx_1\, dx_2. \tag{82}$$

当 a 为偶数非负整数时，最后一个积分可通过利用二项式定理展开 $(x_1-x_2)^a$，再使用标准公式逐项积分求得

$$\int_0^\infty \frac{x^q}{(1+x)^\nu}\, dx = \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(\nu-q-1)}{\Gamma(\nu)} \equiv B(q+1,\nu-q-1), \qquad -1 < q < \nu-1,$$

计算贝塔积分。结果为 (82) 等于

$$\sum_{j=0}^{a} \frac{(-a)_j}{j!} B(q_1+j+1, \nu-q_1-a-1) B(q_2+a-j+1, \nu-q_2-a-1), \qquad a \in 2\mathbf{N}.$$

令 $\mathrm{U}(x)$ 为列向量 $(K_{\mathbf{m}}(xe,e))_{|\mathbf{m}|<m,\ m_1<(\nu-p+1)/2}$，则可利用 (81) 得到 $S_\nu^m(x,0)$ 的公式。

对于 $a \notin 2\mathbf{N}$，计算 (82) 的一种可行方法是先作变量替换 $x = \frac{t}{1-t}$，这将 (82) 转化为

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 t_1^{q_1} t_2^{q_2} (1-t_1)^{\nu-a-2-q_1} (1-t_2)^{\nu-a-2-q_2} |t_1-t_2|^a \, dt_1 \, dt_2 \\ &\qquad = \int_0^1 \int_0^1 (1-t_1)^{q_1} (1-t_2)^{q_2} t_1^{\nu-a-2-q_1} t_2^{\nu-a-2-q_2} |t_1-t_2|^a \, dt_1 \, dt_2. \end{aligned} \tag{83}$$

暂时引入记号

$$I(\alpha,\beta,\gamma,\delta) := \int_0^1 \int_0^{t_1} (1-t_1)^\alpha (1-t_2)^\beta t_1^\gamma t_2^\delta |t_1-t_2|^a \, dt_2 \, dt_1,$$

(83) 因而等于

$$I(q_1,q_2,\nu-a-2-q_1,\nu-a-2-q_2) + I(q_2,q_1,\nu-a-2-q_2,\nu-a-2-q_1).$$

现在作变量替换 $t_2 = yt_1$，得到

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= \int_0^1 \int_0^1 (1-t_1)^\alpha (1-yt_1)^\beta t_1^\gamma (yt_1)^\delta t_1^a (1-y)^a \, t_1 \, dy \, dt_1 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\beta)_j}{j!} \int_0^1 \int_0^1 (1-t_1)^\alpha (yt_1)^j t_1^\gamma (yt_1)^\delta t_1^a (1-y)^a \, t_1 \, dy \, dt_1 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\beta)_j}{j!} B(\alpha+1, j+\gamma+\delta+a+2) B(a+1, j+\delta+1). \end{aligned} \tag{84}$$

对于 $\beta \in \mathbf{N}$——这正是公式 (83) 中的情形——级数会终止，因此可以得到 (82) 的一个表达式，不过这个公式比上一段中的公式稍显繁琐。

类似地，对于秩 3，回忆一下

$$K_{\mathbf{m}}(te,e) = \frac{\pi_{\mathbf{m}}}{(q_\Omega)_{\mathbf{m}}} \phi_{\mathbf{m}}(te),$$

其中 $\pi_{\mathbf{m}}$ 和 q_Ω 分别由 (37) 和 (36) 给出，而 $\phi_{\mathbf{m}}$ 是与符号 m 对应的球面多项式。再次利用公式 (34)，可以依次读出 $K_{\mathbf{m}}(te,e)$，它是下式中具有相应齐次次数的项

$$(1-t)^n = h(te,e)^n = \sum_{\mathbf{m}: m_1 \le n} (-n)_{\mathbf{m}} \frac{\pi_{\mathbf{m}}}{(q_\Omega)_{\mathbf{m}}} \phi_{\mathbf{m}}(te), \qquad n = 0,1,2,\dots.$$

由此得到（再次省略自变量 te）

$$\phi_{(0)} = \mathbf{1}, \qquad \phi_{(1)} = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}, \qquad \phi_{(1,1)} = \frac{t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3}{3},$$

$$\phi_{(1,1,1)} = t_1t_2t_3, \qquad \phi_{(2)} = \frac{(a+2)(t_1^2+t_2^2+t_3^2)}{3(3a+2)} + \frac{2a(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)}{3(3a+2)},$$

$$\phi_{(2,1)}=\frac{(a+1)(t_1^2t_2+t_1^2t_3+t_2^2t_1+t_2^2t_3+t_3^2t_1+t_3^2t_2)}{3(3a+2)}+\frac{3at_1t_2t_3}{3(3a+2)},$$
$$\phi_{(2,1,1)}=\frac{(t_1+t_2+t_3)t_1t_2t_3}{3},$$
$$\phi_{(2,2)}=\frac{(a+2)(t_1^2t_2^2+t_1^2t_3^2+t_2^2t_3^2)}{3(3a+2)}+\frac{2a(t_1+t_2+t_3)t_1t_2t_3}{3(3a+2)},$$
$$\phi_{(2,2,1)}=\frac{(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)t_1t_2t_3}{3},\qquad \phi_{(2,2,2)}=t_1^2t_2^2t_3^2,\qquad \dots .$$

这样一来，G 的计算再次归结为求值（82）的三变量类比式；对于 $a\in 2\mathbf{N}$，采用同样的“纯手工”方法可再次得到其值为

$$\sum_{j,k,l=0}^{a}\frac{(-a)_j(-a)_k(-a)_l}{j!k!l!}B(q_1+1+j+k,\nu-2a-1-q_1)$$
$$\times B(q_2+1+a-j+l,\nu-2a-1-q_2)$$
$$\times B(q_3+1+2a-k-l,\nu-2a-1-q_3),\qquad a\in 2\mathbf{N}.$$

对于 $a\notin 2\mathbf{N}$，可以像处理（84）那样进行，但结果相当繁琐。完成所有这些计算后，得到以下猜想 .

回顾一下，对于 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{C}$，$\Omega$ 上参数为 α,β,γ 的 Faraut-Koranyi 超几何函数定义为 [FK]

$$ {}_2\mathcal{F}_1^{\Omega}\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\Big|z\Big):=\sum_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}(\beta)_{\mathbf{m}}}{(\gamma)_{\mathbf{m}}}K_{\mathbf{m}}(z,z). \tag{85}$$

这里假设 γ 满足 $(\gamma)_{\mathbf{m}}\neq 0\ \forall\mathbf{m}$。另一种做法是，有时将它们仅视为 $\mathbf{R}_+^r$ [Yan] 上的对称函数：

$$ {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\Big|t\Big):=\sum_{\mathbf{m}}\frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}(\beta)_{\mathbf{m}}}{(\gamma)_{\mathbf{m}}}K_{\mathbf{m}}(te,e), \tag{86}$$

这两种形式之间的关系仅为 ${}_2\mathcal{F}_1^{\Omega}(z)={}_2\mathcal{F}_1(t)$，其中 $z=k\sqrt{t}e$。

猜想 14。设 $m\geq rq+1$，其中 q 是满足 $q<\frac{\nu-p+1}{2}\leq q+1$ 的非负整数。那么，$\mathbf{R}_+^r$ 上原点处的再生核 S_ν^m 为

$$S_\nu^m(x,0)=c_\nu^q\,{}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|-x\Big), \tag{87}$$

其中

$$c_\nu^q=\frac{\Gamma_\Omega(\nu-p-q+2r+b)\Gamma_\Omega(q_\Omega)\Gamma_\Omega(p+q)}{\pi^d\Gamma_\Omega(\nu-p-q+2r-q_\Omega)\Gamma_\Omega(q_\Omega+q)\Gamma_\Omega(p)}. \tag{88}$$

根据 (8)、(15)、定理 6 和 (78)，最后一个猜想对 $r=1$ 成立。计算机也已验证以下情况：

$r=2,\ q\in\{0,1,2\},\ a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ b\in\{0,1,2,3\},\ \nu$ a任意的,
$r=2,\ q=3,\ a\in\{1,2,3,4\},\ b\in\{0,1,2,3\},\ \nu$ arbitrary,
$r=3,\ q\in\{0,1,2\},\ a\in\{2,4\},\ b\in\{0,1,2,3\},\ \nu$ arbitrary,
$r=3,\ q\in\{0,1,2\},\ a=8,\ b=0,\ \nu$ arbitrary,

以及 $r \in \{2,3\}$ 和 $q \in \{0,1,2\}$ 对应的另外几组 a、b 和 ν 的取值。（请注意，上述 r、a、b 的取值尤其包括维数分别为 16 和 27 的两个例外有界对称域。）

注意，猜想的假设，即

$$q-1 < \frac{\nu-p-1}{2} \le q \le \frac{m-1}{r}, \tag{89}$$

恰好对应于推论 9 中“稳定化”核的情形 (57)。如以下示例所示，若没有这一假设，猜想便不成立。

例 15。设 $r=2$、$m=2$ 和 $\nu-p>1$（注意，这对应于推论 9 中的情形 (56)）。因此，空间 $\mathcal{S}^m_\nu$ 由 $K_{(0)}(xe,e) = \mathbf{1}$ 和 $K_{(1)}(xe,e) = x_1+x_2$ 张成。进行上述计算可得

$$\tfrac{1}{C}S^m_\nu(x,0) = K_{(0)} + \frac{(b-\nu+a+3)(2b-2\nu+a+4)}{a^2+(7+4b-2\nu)a+(4b^2-4b\nu+16b-6\nu+14)}K_{(1)}$$

其中 C 是某个常数。（我们省略了 $K_{(0)}$ 和 $K_{(1)}$ 处的自变量 (xe,e)。）显然，右端不具有 ${}_2\mathcal{F}_1$ 的形式。□

在推论 9 中剩下的情形（即 $q+1<m<rq+1$）下，这些核可能比上一个例子中的还要“丑陋”。

根据前面各节的结果，如果猜想成立，将会得到以下推论。

推论 16.（以猜想 14 成立为前提）假设 $m \ge rq+1$，其中 q 是满足 $q < \frac{\nu-p+1}{2} \le q+1$ 的非负整数。那么，原点处的近全纯再生核 N^m_ν 由下式给出

$$N^m_\nu(k\sqrt{t}e,0) = c^q_\nu {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|\frac{t}{t-1}\Big),$$

or

$$N^m_\nu(z,0) = c^q_\nu h(z,z)^{-q}\,{}_2\mathcal{F}^\Omega_1\Big(\begin{matrix}-q,b+\nu-p-q+2r\\ p\end{matrix}\Big|z\Big).$$

证明. 根据定理 6,

$$N^m_\nu(k\sqrt{t}e,0) = S^m_\nu(\tfrac{t}{1-t},0),$$

而（87）给出了第一个公式。第二个公式则由库默尔关系得出（这是普通 ${}_2F_1$ 情形下（78）的对应关系）

$${}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}\Big|t\Big) = (1-t)^{-\alpha}\,{}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma\end{matrix}\Big|\frac{t}{t-1}\Big), \tag{90}$$

见 [Yan，公式（35）]。 □

定理 17。（在猜想 14 成立的前提下）假设 $m \ge rq+1$ 其中 q 是满足 $q < \frac{\nu-p+1}{2} \le q+1$ 的非负整数。那么，采用记号 (73)、(69) 和 (85),

$$\sum_{|\mathbf{m}|:\, m_1\le q} d_r(\lambda_{\mathbf{m}},\nu)F(\lambda_{\mathbf{m}},\mathbf{k}_\nu,g) = h(z,z)^{-q}c^q_{\nu\,2}\mathcal{F}^\Omega_1\Big(\begin{matrix}-q,b+\nu-p-q+2r\\ p\end{matrix}\Big|z\Big) \tag{91}$$

对于具有 $g \in A$ 的 $z = g0$。

证明。由于 $J_g(0) = g(g0,g0)^{p/2}$ 对于 $g \in A$，由 (64) 和 (74) 可得

$$\phi^{\flat}_{\lambda,\nu}(g0) = F(\lambda, \mathbf{k}_\nu, g0).$$

因此，根据 (71)，(91) 的左侧等于 $N^m_\nu(g0,0)$。根据推论 16，后者恰好是 (91) 的右侧。□

注意，对于 $r=1$，(91) 还原了引言中的公式 (14)。

注18。根据 Beerends 和 Opdam 的定理4.2，对于特殊值 [BO]，$F(\lambda, \mathrm{k}_\nu, \cdot)$

$$\lambda = -\alpha \sum_j \beta_j + \rho_\nu, \qquad \alpha \in \mathbf{C},$$

可以表示为

$${}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}\alpha, d/r+\nu-\alpha \\ d/r\end{matrix}\Big| \cdot\Big);$$

然而，(91) 中的 ${}_2\mathcal{F}_1$ 似乎无法化简为这种形式。 □

再次利用定理 6，该猜想还蕴含了不变多亚纯核 $S^m_\nu(x,0)$ 的一个公式。

推论19。（在猜想 14 成立的前提下）设 $m \geq rq+1$，其中 q 是满足 $q < \frac{\nu-p-1}{2} + m \leq q+1$ 的非负整数。那么，原点处的再生核 P^m_ν 为

$$P^m_\nu(z,0) = c^m_{\nu+2m-2} h(z,z)^{m-1-q}\, {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q, b+\nu+2m-2-p-q+2r \\ p\end{matrix}\Big| z\Big).$$

证明。由定理 6，$P^m_\nu(z,0) = h(z,z)^{m-1} N^m_{\nu+2m-2}(z,0)$，结论由推论 16 得出。□

例20。继续上一节中关于 $\Omega = \mathrm{B}^d$ 的例子，对于秩 1，Faraut-Koranyi 超几何函数与通常的高斯超几何函数相同

$${}_2\mathcal{F}^{\mathbf{B}^d}_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta \\ \gamma\end{matrix}\Big| z\Big) = {}_2F_1\Big(\begin{matrix}\alpha,\beta \\ \gamma\end{matrix}\Big| |z|^2\Big).$$

因此，由 (79) 和 (87) 可得，对于 $0 \leq q < \frac{\nu-d}{2} \leq q+1 \leq m$,

$$\sum_{j=0}^{q} d_1(\lambda_{(j)},\nu)\, {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-j, d-\nu+j \\ d\end{matrix}\Big| -x\Big) = c^q_\nu\, {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-q, d+q+1-\nu \\ d+1\end{matrix}\Big| -x\Big).$$

当然，这只不过是换了一种形式的(14)。 □

注 21. 公式 (79) 实际上表明，$d_1(\lambda_{(j)},\nu)\, {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-j, d-\nu+j \\ d\end{matrix}\Big| -x\Big)$是正交补 $\mathcal{S}^j_\nu \ominus \mathcal{S}^{j-1}_\nu$，$0 \leq j < \frac{\nu-d}{2}$ 的再生核（其中 $\mathcal{S}^{-1}_\nu := \{0\}$）。Helgason [He] 中的定理 V.4.5 将最后一个 ${}_2F_1$ 识别为紧对偶 $SU(d+1)/SU(d) = \mathbf{C}P^d$ of B^d 的球函数。□

根据再生性质，猜想 14 等价于

$$\int_{\mathbf{R}_+^r} K_{\mathbf{m}}(xe,e)\ {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|-x\Big)\,d\rho_{b,\nu,a}(x) = \frac{1}{c_\nu^q}\delta_{\mathbf{m},(0)}, \qquad \forall \mathbf{m} \text{ with } m_1 \le q, \tag{92}$$

其中， q 是满足 $q < \frac{\nu-p+1}{2} \le q+1$ 和 $m \ge rq+1$的非负整数。特别取 $m = (0)$ 可得

$$\frac{1}{c_\nu^q} = \int_{\mathbf{R}_+^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|-x\Big)\,d\rho_{b,\nu,a}(x)$$

（以猜想 14 有效为前提）。最后一个积分可以显式求出。

命题 22。

$$\int_{\mathbf{R}_+^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|-x\Big)\,d\rho_{b,\nu,a}(x) = \frac{1}{c_{\nu-q}}\ {}_3\mathcal{F}_2^{\Omega}\Big(\begin{matrix}-q,b+\nu-p-q+2r,d/r\\ p,\nu-q\end{matrix}\Big|e\Big),$$

其中，Faraut-Koranyi 函数 ${}_3\mathcal{F}_2^{\Omega}$的定义与（85）中的类似。

证明。再次进行变量替换 $x = \frac{t}{1-t}$，由（54）和（86）得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}_+^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|-x\Big)\,d\rho_{b,\nu,a}(x)\\
&\quad= c_\Omega\int_{[0,1]^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,-b-\nu+2p+q-2r\\ p\end{matrix}\Big|\frac{t}{t-1}\Big)\,d\mu_{b,\nu,a}(t)\\
&\quad= c_\Omega\int_{[0,1]^r} (1-t)^{-q}\,{}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,b+\nu-p-q+2r\\ p\end{matrix}\Big|t\Big)\,d\mu_{b,\nu,a}(t)\\
&\quad= c_\Omega\int_{[0,1]^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q,b+\nu-p-q+2r\\ p\end{matrix}\Big|t\Big)\,d\mu_{b,\nu-q,a}(t)\\
&\quad= c_\Omega\sum_{|\mathbf{m}|<m}\frac{(-q)_{\mathbf{m}}(b+\nu-p-q+2r)_{\mathbf{m}}}{(p)_{\mathbf{m}}}\int_{[0,1]^r} K_{\mathbf{m}}(te,e)\,d\mu_{b,\nu-q,a}(t).
\end{aligned}$$

如果 $\{\psi_j\}_{j=1}^{d_{\mathbf{m}}}$ 是关于 Fock 范数的 $\mathbf{P_m}$ 的标准正交基，那么由式 (43)，最后一个积分等于

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^r} K_{\mathbf{m}}(\sqrt{t}e,\sqrt{t}e)\,d\mu_{b,\nu-q,a}(t) &= \int_K\int_{[0,1]^r} K_{\mathbf{m}}(k\sqrt{t}e,k\sqrt{t}e)\,d\mu_{b,\nu-q,a}(t)\,dk\\
&= \frac{1}{c_\Omega}\int_\Omega K_{\mathbf{m}}(z,z)\,d\mu_{\nu-q}(z) \qquad \text{by (27)}\\
&= \frac{1}{c_\Omega}\int_\Omega \sum_j |\psi_j(z)|^2\,d\mu_{\nu-q}(z)\\
&= \frac{1}{c_\Omega}\sum_j \|\psi_j\|_{\nu-q}^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c_\Omega} \sum_j \frac{\|\psi_j\|_F^2}{(\nu-q)_{\mathbf{m}} c_{\nu-q}} \qquad \text{by (32)}$$
$$= \frac{d_{\mathbf{m}}}{c_\Omega (\nu-q)_{\mathbf{m}} c_{\nu-q}}.$$

因此,

$$\int_{\mathbf{R}_+^r} {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q, -b-\nu+2p+q-2r \\ p\end{matrix}\Big| -x\Big)\, d\rho_{b,\nu,a}(x)$$
$$= \sum_{|\mathbf{m}|<m} \frac{(-q)_{\mathbf{m}} (b+\nu-p-q+2r)_{\mathbf{m}}}{(p)_{\mathbf{m}}} \frac{d_{\mathbf{m}}}{(\nu-q)_{\mathbf{m}} c_{\nu-q}}$$
$$= \sum_{|\mathbf{m}|<m} \frac{(-q)_{\mathbf{m}} (b+\nu-p-q+2r)_{\mathbf{m}}}{(p)_{\mathbf{m}}} \frac{(d/r)_{\mathbf{m}}}{(\nu-q)_{\mathbf{m}} c_{\nu-q}} K_{\mathbf{m}}(e,e)$$
$$= \frac{1}{c_{\nu-q}}\, {}_3\mathcal{F}_2^\Omega\Big(\begin{matrix}-q, b+\nu-p-q+2r, d/r \\ p, \nu-q\end{matrix}\Big| e\Big),$$

正如所声称的。这里第二个等式由（35）得出。 □

因此，公式（88）给出了这个 ${}_3\mathcal{F}_2$ 函数的一个猜测值。

对于秩 1， $b+\nu-p-q+2r = \nu-q$成立，因此 ${}_3F_2$ 变为 ${}_2F_1$，由 ${}_2F_1\Big(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\Big|1\Big)$ 的标准公式可得（88）。

6. Compact Hermitian symmetric spaces

ˆ 我们现在也考虑厄米对称空间 Ω 的紧致对偶空间，其中最简单的例子是复射影空间 $\mathbf{C}P^d$，它是单位球 $\mathbf{B}^d$ 的紧对偶（特别包括黎曼球面 $\mathbf{C}P^1$，它是单位圆盘的紧对偶）。大多数结果都可通过形式上将 ν替换为 $-\nu$，将 h（z, z）替换为 h（$z, -z$），并将 $\Omega \subset \mathbf{C}^d$替换为开图 $\mathbf{C}^d \subset \hat{\Omega}$ 而得到。我们将简要介绍。

对称空间 $\Omega = G/K$ 有其紧对偶空间 $\hat{\Omega} = \hat{G}/K$，其中 $\hat{G}$ 是一个李代数为 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$的单连通紧李群。$\hat{\Omega}$ 中有一个稠密开子集与 $\mathbf{C}^d$双全纯，因此我们将始终把这个局部坐标图与 $\mathbf{C}^d$ 等同起来。$\hat{G}$ 中原点的稳定子群 K 与有界情形中的相同。对于 $x \in \Omega$，同样存在唯一的测地对称 $\hat{\phi}_x \in \hat{G}$，它交换 x 与原点，即 $\hat{\phi}_x \circ \hat{\phi}_x = \mathrm{id}$，$\hat{\phi}_x(0) = x$，$\hat{\phi}_x(x) = 0$，并且 $\hat{\phi}_x$ 仅有孤立不动点。任意 $g \in G$ 都可以唯一地写成 ˆˆ形式 $g = \phi_x k$，其中 $k \in K$ 且 $x = g0 \in \Omega$。测度

$$d\hat{\mu}_\nu(z) := h(z,-z)^{-\nu-p}\, dz$$

$\mathbf{C}^d \subset \hat{\Omega}$ 上的.....当且仅当 $\nu > -1$ 时有限，并且同样可以考虑这些空间

$$\hat{A}_\nu := L^2(\hat{\Omega}, d\hat{\mu}_\nu) \cap \mathcal{O}(\mathbf{C}^d).$$

ˆˆ A_ν 中的元素能够延拓为 Ω 上的全纯截面，当且仅当 ν 是整数；在本节余下部分中，我们将始终假设这一点。在这种情况下，

$$\hat{A}_\nu = \bigoplus_{\mathbf{m}: m_1 \le \nu} \mathbf{P}_{\mathbf{m}},$$

ˆ并且 A_ν 具有一个再生核，其表达式为

$$\hat{K}_\nu(z,w) = \hat{c}_\nu\, h(z,-w)^\nu, \qquad z,w \in \mathbf{C}^d \subset \hat{\Omega},\ \nu \in \mathbf{N},$$

其中

$$\hat{c}_\nu = \frac{\Gamma_\Omega(\nu+p)}{\pi^d \Gamma_\Omega(\nu+p-\frac{d}{r})}.$$

（这里，与前面一样， p、 r、 a 和 b 分别表示Ω的属、秩和特征重数，它们都与Ω的相应量相同。）根据变换规则

$$h(\hat{\phi}z,-\hat{\phi}w) = \frac{h(a,-a)h(z,-w)}{h(z,-a)h(a,-w)}, \qquad a = \hat{\phi}^{-1}0, \qquad z,w \in \mathbf{C}^d,\ \hat{\phi} \in \hat{G},$$

再次可知，测度 $d\hat{}\mu_0$ 是ˆG-不变的，且ˆΨ(z) := − log h(z, −z) ˆ ˆ是Ω上一个 G-不变黎曼度量的K¨ahler势。因此，我们再次得到相应的柯西-黎曼算子$\overline{D}$，以及Ω上阶数为 m的近全纯函数空间ˆ$\mathcal{N}^m$:= Ker $\overline{D}^m$，还有它们的贝格曼型子空间

$$\hat{\mathcal{N}}_\nu^m := L^2(\hat{\Omega}, d\hat{\mu}_\nu) \cap \operatorname{Ker} \overline{D}^m.$$

ˆ也可以像在有界情形中那样，定义不变多解析函数 $\mathcal{P}^m$ 及其贝格曼型子空间 $\mathcal{P}_\nu^m$。

在极坐标 (22) 中，测度 $d\hat{}\mu_\nu$ 具有如下形式

$$\int_{\hat{\Omega}} f(z)\, d\hat{\mu}_\nu(z) = \quad c_\Omega \int_{\mathbf{R}_+^r} \int_K f(k\sqrt{te})\, dk\, d\hat{\mu}_{b,\nu,a}(t), \tag{93}$$

其中

$$d\hat{\mu}_{b,\nu,a}(t) := t^b (1+t)^{-\nu-p} \prod_{1\le i<j\le r} |t_i - t_j|^a\, dt \tag{94}$$

而 c_Ω 由 (29) 给出。

由上述关于 $h(z,-w)$ 的变换规则，同样可得

$$f \longmapsto \frac{h(a,-a)^{-\nu/2}}{h(z,-a)^{-\nu}} f \circ \hat{\phi}^{-1}, \qquad a = \hat{\phi}0,\ \hat{\phi} \in \hat{G},\ \nu \in \mathbf{N},$$

是ˆG 在ˆ $\mathcal{N}_\nu^m$ 上的射影酉表示。设ˆ$\mathcal{S}^m$ 为 r 个变量中所有次数为 $< m$ 的对称多项式构成的向量空间，记

$$\hat{\mathcal{S}}_\nu^m := \hat{\mathcal{S}}^m \cap L^2([0,1]^r, d\hat{\rho}_{b,\nu,a}),$$

其中

$$d\hat{\rho}_{b,\nu,a}(t) := c_\Omega\, t^b (1-t)^\nu \prod_{1\le i<j\le r} |t_i - t_j|^a\, dt,$$

并令ˆ $S_\nu^m(x,y)$ 为ˆ $\mathcal{S}_\nu^m$ 的再生核。按照上述第3节中的方法，我们得到如下定理 6 的类似结论。

定理 23。（a）对于任意ˆ $\phi \in$ˆG，ˆ $\mathcal{N}_\nu^m$ 的再生核ˆ N_ν^m 满足

$$\hat{N}_\nu^m(z,w) = \frac{h(z,-a)^\nu h(a,-w)^\nu}{h(a,-a)^\nu} \hat{N}_\nu^m(\hat{\phi}z, \hat{\phi}w), \qquad a := \hat{\phi}^{-1}0;$$

特别是，

$$\hat{N}_\nu^m(z,w) = h(z,-w)^\nu \hat{N}_\nu^m(\hat{\phi}_w z, 0).$$

(b) $\hat{\mathcal{N}}^m$ 中的径向函数恰好由以下形式的函数构成

$$p(z,(-z)^z),$$

其中 $p(z,w)$ 是关于 $z,\overline{w}\in\mathbb{C}^d$ 的多项式，在每个自变量中的次数为 $<m$，并且按照 (48) 的意义是 K-不变的。
因此，其中的径向函数 $\hat{\mathcal{N}}^m$ 与 $K_{\mathbf{m}}(z,(-z)^z)$（$|\mathbf{m}|<m$）的线性张成相同。

(c) 映射 $\hat{V}$ 从 $\hat{\mathcal{S}}^m$ 到 $\hat{\Omega}$ 上的函数，定义为

$$\hat{V}f(k\sqrt{x}e):=f\Big(\frac{x}{1+x}\Big),\qquad k\in K,\ x\in\mathbf{R}_+^r,$$

是一个双射，将 $\hat{\mathcal{S}}^m$ 映到 $\hat{\mathcal{N}}^m$ 中的径向函数。此外，$\hat{V}$ 将 $\hat{\mathcal{S}}_\nu^m$ 酉地映到 $\hat{\mathcal{N}}_\nu^m$ 中径向函数构成的子空间 $\hat{\mathcal{R}}_\nu^m$，并且

$$\hat{N}_\nu^m(\cdot,0)=V\hat{S}_\nu^m(\cdot,0).$$

证明。证明与命题 2、4 和 5 的证明相同，故略去。 □

与有界情形不同，对于紧对偶空间，我们可以给出核 $\hat{N}_\nu^m$ 的显式公式，它以多变量雅可比多项式 $P_{(\alpha,\beta,a/2)\mathbf{m}}$ 表示（也称为 Heckman-Opdam 多项式；参见 [HS, 第1节.3]）。回顾 [De3, 第4.b节]，$P_{\mathbf{m}}^{(\alpha,\beta,a/2)}(t)$ 是 $\mathbb{R}^r$ 上的对称多项式，满足

(i) $P_{\mathbf{m}}^{(\alpha,\beta,a/2)}(t)$ 是下列多项式的对称化：

$$t^{\mathbf{m}}+\sum_{\mathbf{n}<\mathbf{m}}c_{\mathbf{mn}}t^{\mathbf{n}} \tag{95}$$

其中求和遍及（某些）相对于字典序小于 $\mathbf{m}$ 的签名 $\mathbf{n}$；并且

(ii) $P_{\mathbf{m}}^{(\alpha,\beta,a/2)}(t)$、$|\mathbf{m}|\geq 0$ 关于测度 $[-1,+1]^r$ 正交

$$(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\prod_{1\leq i<j\leq r}|t_i-t_j|^a\,dt.$$

通过变量替换可知，$P_{\mathbf{m}}^{(\alpha,\beta,a/2)}(1-2t)$ 关于测度 $t^\alpha(1-t)^\beta\prod_{1\leq i<j\leq r}|t_i-t_j|^a\,dt$ 在 $[0,1]^r$ 上正交，其在 $[-1,+1]^r$ 上的范数平方为 $2^{r(r-1)a/2+r\alpha+r\beta+r}$ 乘以在 $[0,1]^r$ 上的范数平方。特别地，令 $\alpha=b$、$\beta=\nu$，我们便得到关于 $d\hat{\rho}_{b,\nu,a}$ 在 $[0,1]^r$ 上的对称多项式的一个正交基。由（43），于是得到以下定理。

$\hat{}$ 定理 24. 对于 $\nu\in\mathbb{N}$，原点处的再生核 S_ν^m为

$$\hat{S}_\nu^m(t,0)=\sum_{|\mathbf{m}|<m}\frac{2^{d+r\nu}P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1)}{\|P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}\|^2}\,P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1-2t). \tag{96}$$

这里的范数平方是在 $[-1,+1]^r$ 上定义的。

我们指出，$P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1)$ 和 $\|P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}\|^2$ 的显式公式均已给出，参见 [HS] 中的定理 3.5.5 和 3.6.6。

例25。对于秩 $r = 1$， $P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}$ 除相差一个常数因子外，就是次数为 n 的普通 Jacobi 多项式 $P_n^{(b,\nu)}$，定义在 $[-1,+1]$ 上：

$$P_{(n)}^{(b,\nu,a/2)}(t) = \frac{2^n}{\binom{2n+b+\nu}{n}} P_n^{(b,\nu)}(t).$$

由公式 [BE2、第10节，8]

$$P_n^{(b,\nu)}(1) = \binom{n+b}{n}, \qquad \|P_n^{(b,\nu)}\|^2 = \frac{2^{b+\nu+1}\Gamma(n+b+1)\Gamma(n+\nu+1)}{n!(2n+b+\nu+1)\Gamma(n+b+\nu+1)},$$

因此我们得到

$$\hat{S}_\nu^m(t,0) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+\nu+1)}{(d-1)!j!^2(d+2j+\nu)\Gamma(d+j+\nu)}\, P_j^{(d-1,\nu)}(1-2t). \quad \square$$

利用定理 23，我们还可以从（96）得到 ˆΩ 上的近全纯再生核 ˆ $N_\nu^m(z,w)$ 关于多变量雅可比多项式的表达式。

ˆ 推论26。对于 $\nu \in \mathbb{N}$，近全纯再生核 N_ν^m 由 ˆ ˆ ˆ $N_\nu^m(z,w) = h(z,-w)^\nu N_\nu^m(\phi_w z, 0)$ 给出，其中

$$\hat{N}_\nu^m(k\sqrt{x}e, 0) = \sum_{|\mathbf{m}|<m} \frac{2^{d+r\nu} P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1)}{\|P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}\|^2}\, P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big).$$

证明。由定理 23 和（96）可直接得到。 $\square$

ˆ 也可以得到不变多解析核 P_ν^m。细节（完全是常规步骤）留给有兴趣的读者。

注27. 注意，在 (96) 中，求和对 m_1 没有限制，这与推论 9 或 (71) 不同；原因当然是，对于 $\nu \in \mathbb{N}$， $d\hat{}\rho_{b,\ \nu,\ a}$ 是 $[0,1]^r$ 上的有限测度，因此相应的 L^2 空间包含所有多项式。尽管如此，如第5节中的做法，我们可以得到紧情形下猜想 14 的以下类比。对于 q， $\nu \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{Q}_\nu^q$ 为 $L^2([0,1]^r,\ d\hat{}\rho_{b,\ \nu,\ a})$ 的子空间，由 $\{K_{\mathbf{m}}(te,\ e) :\ m_1 \le q\}$ 张成，并令 Q_ν^q 为其再生核。那么似乎有

$$Q_\nu^q(t,0) = \hat{c}_\nu^q\ {}_2\mathcal{F}_1\Big(\begin{matrix}-q, \nu+p+q \\ p\end{matrix}\Big| t\Big), \tag{97}$$

其中

$$\hat{c}_\nu^q = \frac{\Gamma_\Omega(p+q)\Gamma_\Omega(p+q+\nu)\Gamma_\Omega(q_\Omega)}{\pi^d\Gamma_\Omega(p)\Gamma_\Omega(q+q_\Omega)\Gamma_\Omega(q+q_\Omega+\nu)}.$$

对于与猜想 14 相同的 r、 q、 a、 b 取值集合，这一点已得到验证。

注意，鉴于 (55) 和 (95)，Jacobi 多项式 $P_{(b,\ \nu,\ a/2)\mathbf{m}}(1-2t)$，其中 $m_1 \le q$，构成了 $\mathcal{Q}_\nu^q$ 的一组正交基，因此再次由 (43) 可得

$$Q_\nu^q(t,0) = \sum_{|\mathbf{m}|:\, m_1 \le q} \frac{2^{d+r\nu} P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1)}{\|P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}\|^2}\, P_{\mathbf{m}}^{(b,\nu,a/2)}(1-2t).$$

因此，式（97）给出了这个和的一个猜测值。 $\square$

最后，我们推导出第4节的对应结果，即紧情形下关于线丛截面 L^2 空间的表示理论——尤其是 [Zh3] 的结果。我们给出推论26的一个表示论证明。

我们按照 [Lo] 中的论述进行。我们考虑 G/K 上的全纯线丛 $\hat{\mathcal{L}}$，

$$\hat{G} \times_{K,\tau} \mathbf{C} \to \hat{\Omega} = \hat{G}/K, \tag{98}$$

其中 $\tau(k) = (\det \mathrm{Ad}(k)|_{\mathfrak{p}^+})^{1/p}$，$k \in K$。这是满足 $\mathcal{L}^p = \mathcal{K}^{-1}$ 的全纯线丛，并且它生成 $\hat{\Omega}$ 的皮卡群；参见 [Lo，7.1-7.11]。这里，$\mathcal{K}^{-1}$是典范线丛的对偶空间。令 $\tau_\nu = \tau^\nu$，其中 ν为任意固定整数，并且与前面一样，我们假设 $\nu \geq 0$。

令$\mathcal{H}(\hat{\Omega}, L^2(\mathcal{L}^\nu))$为线丛 $\mathcal{L}^\nu$ 的 L^2-空间截面。我们对测度进行归一化，使得将截面 $f \in L^2(\hat{\Omega};\ \nu)$ 实现为 $L^2(\hat{G})$ 上的函数是一个等距映射。更确切地说，$L^2(\hat{\Omega};\ \nu)$ 由满足以下条件的 $f \in L^2(\hat{G})$ 构成：

$$\tau_\nu(k) f(gk) = f(g), \qquad k \in K,$$

and

$$\|f\|_\nu^2 = \int_{\hat{G}} |f(g)|^2 \, dg < \infty,$$

其中 dg 是 $\hat{G}$ 上的哈尔测度，且经过归一化，使得 $\int_{\hat{G}} dg = 1$。

空间 $V := \mathbf{C}^d$ 可实现为 $\hat{\Omega}$ 中的一个开子集，我们将把空间 $L^2(\hat{\Omega};\ \nu)$ 实现为 V上的逐点函数。在我们的假设 $\nu \geq 0$ 下，线丛 (98) 的全纯截面空间非零，并且存在一个整体标架 $e_\nu(z)$，其逐点范数为

$$\|e_\nu(z)\|_z^2 = h(z, -z)^{-\nu}.$$

于是，截面 $f \in L^2(\hat{\Omega};\ \nu)$ 可写作 $f = f(z) e_\nu(z)$，其中 V 上的逐点函数满足

$$\|f\|_\nu^2 = \hat{c}_\nu \int_V |f(z)|^2 h(z, -z)^{-\nu} d\mu_0(z), \qquad f = f(z) e_\nu(z),$$

其中

$$d\mu_0(z) = \frac{dz}{h(z, -z)^p}$$

是 $\hat{G}$-不变的（K¨ahler）测度。为避免混淆，我们将由上述范数定义的 L^2-函数 $f(z)$ 空间记作 $L^2(V, \nu)$。作为 $\hat{G}$ 的一个 L^2-空间及酉表示，$L^2(\hat{\Omega};\ \nu)$ 经由此同一化对应于 $= L^2(V, \nu)$。

$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{p}^-$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$的Harish-Chandra分解。我们对 Ω 使用与 $\hat{\Omega}$ 相同的复结构，因此 $\mathfrak{p}^+ = T_{(1,\ 0)\,0}(\hat{\Omega}) \equiv V$是 $\hat{\Omega}$ 处的全纯切空间。令 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$ 为一个Cartan子代数，并令 $\gamma_1 > \cdots > \gamma_r$为 Harish-Chandra 强正交根，使得 γ_1 是 $\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}$ 在 $\mathfrak{p}^+$ 中的最高根。特别地，γ_1 是 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 在 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ 中的最高根。令 $\mathfrak{t}^-$ 为 γ_1、$\cdots$、γ_r的余根所张成的空间，并令 $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^- + \mathfrak{t}^+$ 满足 γ_1、$\cdots$、γ_r在 $\mathfrak{t}^+$上消失。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{k}^{\mathbf{C}} + \mathfrak{p}^-$ 的根空间分解细化为 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = (\mathfrak{p}^+ + \mathfrak{k}^+) + \mathfrak{t} + (\mathfrak{k}^- + \mathfrak{p}^-)$，其中 $\mathfrak{k}^- + \mathfrak{p}^-$ 为负根向量空间，且 $\mathfrak{k}^+ + \mathfrak{k}^- \subset [\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}]$。

L^2-空间 $L^2(\hat{\Omega}\ \nu)$ 分解为

$$L^2(\hat{\Omega},\nu)=\sum_{\mathbf{m}} V_{\nu,\mathbf{m}} \tag{99}$$

其中每个$V_{\nu,\ \mathbf{m}}$ 的最高权在 $\mathfrak{t}^-$ 上的限制为

$$\frac{\nu}{2}+m_1\gamma_1+\cdots+m_r\gamma_r,\qquad \frac{\nu}{2}:=\frac{1}{2}\nu(\gamma_1+\cdots+\gamma_r),$$

其中 m_j 是满足条件的非负整数

$$m_1\geq\cdots\geq m_r\geq 0. \tag{100}$$

当 $\Omega\ =\ G/K$ 不是管型时，这并不能完全确定最高权，还需要一些额外的说明；然而，这些表示中出现在 $L^2(\hat{\Omega}\ \nu)$里的最高权由上述条件唯一确定，参见 [Sci], [Shm], [Zh2]。

回顾定义在.....上的 τ_ν-球函数 $\hat{G}$

$$\tau(k_1)^\nu\tau(k_2)^\nu f(k_1gk_2)=f(g),\qquad g\in\hat{G},\ k_1,k_2\in K.$$

$\hat{}$作为定义在 G 上的函数，每个空间$V_{\nu,\ \mathbf{m}}$ 都包含唯一的 τ_ν-球函数$\Psi_{\nu,\ \mathbf{m}}$其规范化条件为$\Psi_{\nu,\ \mathbf{m}}(e)=1$。我们令

$$\phi_{\nu,\mathbf{m}}(z)=J_g(0)^{-\frac{\nu}{p}}\Psi_{\nu,\mathbf{m}}(g),\qquad g\cdot 0=z,$$

作为 τ_ν-球函数 $\Psi_{\nu,\mathbf{m}}$ 的一种平凡化。特别地，$\phi_{\nu,\mathbf{m}}(z)$ 现在同时具有左不变性和 K-不变性，因此可实现为定义在 $V\subset\Omega$ 上的左 K-不变函数，$\phi_{\nu,\mathbf{m}}(kz)=\phi_{\nu,\mathbf{m}}(z)$，$\phi_{\nu,\mathbf{m}}(0)\ =1$，并且

$$\phi_{\nu,\mathbf{m}}(z)=h(z,-z)^{-\frac{\nu}{2}}\Psi_{\nu,\mathbf{m}}(\hat{\phi}_z).$$

用上述记号，$\phi_{\mathbf{m}}(z)$ 是截面$\Psi_{\nu,\mathbf{m}}$ 相对于标架 $e_\nu(z)$ 的系数。现在，$\phi_{\nu,\mathbf{m}}$ 的正交关系为

$$\begin{aligned}&\hat{c}_\nu\int_V\phi_{\nu,\mathbf{m}}(z)\overline{\phi_{\nu,\mathbf{m}'}(z)}h(z,-z)^{-\nu}d\mu_0(z)\\&=\hat{c}_\nu c_\Omega 2^r\int_{\mathbf{R}_+^r}\phi_{\nu,\mathbf{m}}(x)\overline{\phi_{\nu,\mathbf{m}'}(x)}\prod_{j=1}^r(1+x_j^2)^{\nu-p}\prod_{1\leq j<k\leq r}(x_j^2-x_k^2)^a\prod_{j=1}^r x_j^{2b+1}\,dx_j\\&=\frac{1}{d_{\nu,\mathbf{m}}}\delta_{\mathbf{m},\mathbf{m}'},\end{aligned}$$

其中 $d_{\nu,\mathbf{m}}\ =\ \dim V_{\nu,\mathbf{m}}$ 是 $V_{\nu,\mathbf{m}}$ 的维数（可利用 Weyl维数公式计算）。这些是 Heckman和Opdam 的 Jacobi 多项式。（函数 $\Psi_{\nu,\mathbf{m}}$ 是 Shimeno 针对参数 λ 的特定离散取值所研究的球函数 $\phi_{\lambda,\nu}$；参见 [Shm，注 5.12]。）

特别地，当 $\mathbf{m}\ =(0)$ 时，$V_{\nu,(0)}$ 是由 ν 在 $L^2(\hat{\Omega}\ \nu)$ 中定义的线丛的全纯截面的 Bergman空间。它可实现为次数为 $\leq\nu$ 的全纯多项式空间，其再生核为 $\hat{}\ c_\nu h(z,-w)^\nu$。相应的 Heckman-Opdam 多项式是常数函数 $\phi_{\nu,(0)}(z)=1$。

我们在 $\hat{}\Omega$ 上赋予 $\hat{}G$-不变的（¨ahler）度量，并令 $\overline{D}$ 为相应的不变柯西-黎曼算子。我们利用 $\overline{D}^m$的核来描述分解式 (99)。我们需要一些关于 Shimura 算子在 $V_{\nu,\ \mathbf{m}}$ 上的消失性质的结果，这些结果见 [SaZ]。首先回顾 Shimura

算子，并采用我们当前的表述方式。回顾第 2 节中的 Hua-Schmid 分解

$$\otimes^m V = \sum_{|\mathbf{m}|=m} S^{\mathbf{m}} V$$

对称张量积 $\otimes^m V$ 在 K之下。令 $P_{\mathbf{m}}$ 为相应的¯投影。一般而言， D^m： C^∞(G, K; τ_ν) $\to C^\infty(G, K; \tau_\nu \otimes \otimes^m V)$，与前文一样， V被视为 ˆΩ 在原点 0 处的全纯切空间 $T_{(1,0)\,0}$(ˆΩ)，而 $C^\infty(G, K; \tau_\nu \otimes \otimes^m V)$ 是线丛$\mathcal{L}^\nu \otimes \otimes^m T^{(1,0)}$ 的光滑截面空间，可将其视为定义在 ˆG 上、按 K 变换的函数

$$\tau_\nu(k) \otimes^m \mathrm{Ad}(k) f(gk) = f(g), \qquad g \in \hat{G}.$$

志村算子定义如下

$$L_{\mathbf{m}} = (\bar{D}^{|\mathbf{m}|})^* P_{\mathbf{m}} \bar{D}^{|\mathbf{m}|}.$$

于是有

$$(\bar{D}^{m+1})^* \bar{D}^{m+1} = \sum_{|\mathbf{m}|=m+1} L_{\mathbf{m}}.$$

定理 28。核 Ker $\bar{D}^{m+1}$ 在 L^2(ˆΩ ν) 中恰为以下直和

$$\mathrm{Ker}\, \bar{D}^{m+1} = \sum_{|\mathbf{m}|\le m}^{\oplus} V_{\nu,\mathbf{m}}.$$

特别地，在 L^2(ˆΩ ν) 中，阶数为 $m+1$ 的近全纯截面空间在原点处的再生核为

$$\hat{N}_\nu^{m+1}(z, 0) = \sum_{|\mathbf{m}|\le m} d_{\mathbf{m}} \phi_{\nu,\mathbf{m}}(z).$$

证明。根据舒尔引理，算子 $L_{\mathbf{m}}$ 在 (99) 中的每个不可约分量 $V_{\nu,\mathbf{n}}$ 上都作用为单位算子的非正标量倍数；SaZ 表明，其特征值由 Okounkov多项式给出。更确切地说， $L_{\mathbf{m}}$ 在 $V_{\nu,\mathbf{n}}$ 上的特征值 ¯是关于 $\frac{\nu}{2} + \mathfrak{n} + \rho$的对称多项式 $L_{\mathbf{m}}(\frac{\nu}{2} + \mathfrak{n} + \rho)$，其中 ρ 是 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$中的正根半和。（也可以像上文那样，将 $\frac{\nu}{2}$ 纳入 ρ 的定义¯。）由 SaZ 定理 5.1] 可知，除非 $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$（即对所有 $j = 1, \ldots\ldots, r$），否则 $L_{\mathbf{m}}(\frac{\nu}{2} + \mathfrak{n} + \rho) = 0$。这意味着

$$\sum_{|\mathbf{n}|\le m}^{\oplus} V_{\nu,\mathbf{n}} \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{D}^{m+1})^* \bar{D}^{m+1} = \mathrm{Ker}\, \bar{D}^{m+1}. \tag{101}$$

现在我们证明反向包含，即若 $|\mathfrak{n}| > m$，则 $\bar{D}^{m+1}$ 在 $V_{\nu,\mathbf{n}}$ 上非零。反设 $\bar{D}^{m+1} : V_{\nu,\mathbf{n}} \to 0$。我们采用 SaZ 第3节中的表述来实现 $V_{\nu,\mathbf{n}}$，从而计算 $\bar{D}^{m+1}$的作用。作为 ˆG的酉表示 ($V_{\nu,\mathbf{n}}$, ˆG, $\pi_{\mathbf{n}}$)，空间 $V_{\nu,\mathbf{n}}$ 包含唯一的非零向量 v_ν，使得

$$\pi_{\mathbf{n}}(k) v_\nu = \tau_\nu(k) v_\nu$$

其中， τ_ν 是如上所定义的一维表示。此外，这两个表示 $\tau_{-\nu}$ 和 τ_ν 都出现在$V_{\nu,\mathbf{n}}$中。作为 G上的函数，空间$V_{\nu,\mathbf{n}} \subset$

L^2(ˆΩ ν) $\subset L^2$(ˆG)可得

$$v \in V_{\nu,\mathbf{n}} \mapsto f_v(g) = \langle \pi_{\mathbf{n}}(g^{-1})v, v_{-\nu}\rangle, \qquad f_v \in V_{\nu,\mathbf{n}} \subset L^2(\hat{G}),$$

这里稍微滥用一下记号，我们用同一记号 $V_{\nu,\ \mathbf{n}}$ 既表示 ˆG-表示，也表示函数空间。假设 $\bar{D}^{m+1} : V_{\nu,\ \mathbf{n}} \to 0$尤其意味着 $\bar{D}^{m+1} f_{v_{-\nu}} = 0$，而在 $g = e$ 处取值进一步可得

$$\pi_{\mathbf{n}}(X)v_{-\nu} = 0$$

对所有 $X \in S^{m+1}$(𝔭⁻) 均成立。令 $X = X_1 Y$，其中 $X_1 \in \mathfrak{p}^-$ 是任意的负根向量，且 $Y \in S^{\mathbf{m}}$(𝔭⁻) 是 $\mathfrak{k}^+$ 中具有最低权 –($m_1\gamma_1 + \cdots + m_r\gamma_r$) 的 $S^{\mathbf{m}}$(𝔭⁻)- 最低权向量，其中 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 0$。（所有最低权向量的构造见 [Up1]，但我们不需要其显式形式。）于是有 $\pi_{\mathbf{n}}(X_1)\pi_{\mathbf{n}}(Y)v_{-\nu} = 0$。由于 $v_{-\nu}$ 定义了$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ 的一维表示，因此对于 $X \in \mathfrak{k}^- \subset [\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbf{C}}]$，总有 $\pi_{\mathbf{n}}(X)\pi_{\mathbf{n}}(Y)v_{-\nu} = 0$。换言之，除非 $\pi_{\mathbf{n}}(Y)v_{-\nu}$ 为零，否则它是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$-表示的最低权向量。然而，根据 Hua-Schmid 分解，元素 $\pi_{\mathbf{n}}(Y)v_{-\nu}$ 的最低权为 $-\frac{\nu}{2} - (m_1\gamma_1 + \cdots + m_r\gamma_r)$，$m_1 + \cdots + m_r = m < |\mathfrak{n}|$。但是，空间 $V_{\nu,\mathbf{n}}$ 的最低权为 $-\frac{\nu}{2} - (n_1\gamma_1 + \cdots + n_r\gamma_r)$，因此 $\pi_{\mathbf{n}}(Y)v_{-\nu} = 0$。作用以 $k \in K$ 后，我们得到$\pi_{\mathbf{n}}$(Ad(k)Y)$\pi_{\mathbf{n}}(k)v_{-\nu} = 0$。同样，$v_{-\nu}$ 定义了K 的一维表示，$\pi_{\mathbf{n}}(k)v_{-\nu} = \tau_{-\nu}(k)v_{-\nu}$ 的标量特征为 $\tau_{-\nu}(k)$。因此 $\pi_{\mathbf{n}}$(Ad(k)Y)$v_{-\nu} = 0$。此外，{Ad(k)$Y, k \in K$} 生成不可约表示 $S^{\mathbf{m}}$(𝔭⁻)，故对所有 $X \in S^{\mathbf{m}}$(𝔭⁻)，有 $\pi_{\mathbf{n}}(X)v_{-\nu} = 0$；并且对所有$X \in S^m$(𝔭⁻)，有 $\pi_{\mathbf{n}}(X)v_{-\nu} = 0$。继续这一过程，我们得到 $v_{-\nu} = 0$，矛盾。由此证明了关于 Ker $\bar{D}^{m+1}$ 的断言，进而证明了关于再生核的断言。□

注 29. 正如 [Shm, 注 5.12]中所指出的，在适当的坐标变换下，此处的球函数 $\phi_{\nu,\ \mathbf{m}}$(z) 正是推论26中的 Heckman-Opdam 多项式。因此，定理 28 只是对推论26中展开式的抽象重述，并给出了另一种证明（为方便记号，用 $m + 1$ 替换 m），同时利用维数 $d_{\nu,\ m}$ 解释了这些系数。□

注 30. 如第3节所述，子空间 $V_{\nu,\ \mathbf{m}}$ 也可以用拟逆 ∂log h($z, -z$) 来描述。在局部坐标 $z \in V \subset \Omega$ 中，空间 $V_{\nu,\ \mathbf{m}}$由以下函数构成

$$f(z) = \otimes^m(\partial \log h(z, -z))(F(z))$$

其中 F 是上述最高权表示中丛 $\mathcal{L}^\nu \otimes \otimes^m T^{(1,\ 0)}$的全纯截面。□

注 31. 由上述证明可知，对于任意 n，都存在一个 n′,~|n′| ≤ |n|，使得志村算子在 $V_{\nu,\ \mathbf{n}}^{\sim}$ 上的特征值 $L_{\mathbf{n}'}(\frac{\nu}{2} + \mathfrak{n} + \rho)$ 非零，$L_{\mathbf{n}'}(\frac{\nu}{2} + \mathfrak{n} + \rho) \neq 0$。这可能是一个已知事实，也可以通过对 $L_{\mathbf{n}'}$ 使用 Koornwinder公式（参见 [Ko], [Ok] 和 [SaZ, 定理 5.5]）证明；进而可由此给出 (101) 中反向包含的另一种证明。□

例32. 现在让我们再次对秩一情形作出更具体的说明，即当ˆ $G/K = \mathbf{C}P^d$ 为复射影空间时。在此情形下，使用 $\mathbf{C}P^d$作为 $\mathbf{C}P^d = U(d+1)/U(d)\times U(1)$ 的实现会更加方便。我们将 $U(d + 1)$ 的 Cartan子代数选为对角矩阵，并将其识别为 $\mathbf{R}^{d+1}$，其 Harish-Chandra根为 $\beta = (1, 0, \cdots, 0, -1)$。上述最高权现在为 $(\nu + m, 0, \cdots, -m)$。带参数 ν 的线丛在 $\mathbf{C}P^d =$ 上的截面

$U(d+1)/U(d) \times U(1)$ 可以实现为球面 $S^{2d+1} = U(d+1)/U(d)$ 上的函数，而最高权为 $(\nu+m, 0, \cdots, -m)$ 的表示空间则是由 $(p,q) = (\nu+m, m)$-球谐多项式组成的空间。我们记作$\phi_{\nu,(m)} = \phi_{\nu,m}$。

当 $\nu = 0$，即球面情形时，最高权的形式为 $\mathfrak{m} = m\beta$，其中包含球面多项式

$$\phi_{0,m}(\exp(H)) = {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m, d+m\\ d\end{matrix}\Big|\sin^2\frac{\beta(H)}{2}\Big);$$

参见 [He, 《定理 V.4》5] 以及上面的注 21。对于一般的 $\nu \geq 0$,

$$\phi_{\nu,m}(\exp(tH)) = {}_2F_1\Big(\begin{matrix}d+m+\nu, -m\\ d\end{matrix}\Big|\sin^2 t\Big).$$

参见 [SaZ], [JW]。

根据舒尔正交性，我们有

$$\langle \phi_{\nu,m}, \phi_{\nu,m'}\rangle = \frac{1}{d_{\nu,m}}\delta_{m,m'},$$

其中 $d_{\nu,m}$ 是表示空间 $V_{\nu,m}$的维数。这里的内积给定为

$$\begin{aligned}\langle \phi, \psi\rangle &= \hat{c}_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(\sin^2 t)\overline{\psi(\sin^2 t)}\sin^{2\nu+1}(2t)\sin^{2(d-1)-2\nu}(t)dt\\ &= \hat{c}_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(\sin^2 t)\overline{\psi(\sin^2 t)}\sin^{2\nu}(2t)\sin^{2(d-1)-2\nu}(t)d\sin^2 t\\ &= \hat{c}_\nu \int_0^1 \phi(x)\overline{\psi(x)}(1-x)^\nu x^{d-1}dx.\end{aligned}$$

上面的 τ_ν-球函数为

$$\phi_{\nu,m}(x) = {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m, m+d+\nu\\ d\end{matrix}\Big|x\Big).$$

表示空间 $V_{\nu,m}$ 的维数可利用 Weyl维数公式轻易求得，结果为

$$d_{\nu,m} = \frac{(2m+\nu+d)(m+\nu+1)_{d-1}(m+1)_{d-1}}{d!(d-1)!}.$$

特别是,

$$d_{\nu,0} = \frac{(\nu+d)(\nu+1)_{d-1}}{d!} = \frac{(\nu+1)_d}{d!} = \binom{\nu+d}{d}$$

这恰好是次数为 $\leq \nu$ 的多项式空间 $\mathcal{P}_{\leq\nu}(\mathbb{C}^d)$ 在 $\mathbb{C}^d$ 上的维数；这些多项式实现为 $L^2(\hat{\Omega}, \nu)$ 中的全纯截面。

因此，我们计算的是总和

$$\sum_{m\leq n} d_{\nu,m}\phi_{\nu,m}(x) =$$

$$\sum_{m\leq n} \frac{(2m+\nu+d)(m+\nu+1)_{d-1}(m+1)_{d-1}}{d!(d-1)!}\ {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m, m+d+\nu\\ d\end{matrix}\Big|x\Big).$$

为进行求和，我们使用以下初等观察。

引理 33. 设 $d\mu(x)$ 是 R+ 上的有限博雷尔测度，使得所有多项式在 $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ 中稠密。令 $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$ 为对多项式 $\{x^m\}_{m=0}^{\infty}$ 进行格拉姆–施密特正交化所得到的标准正交基。则重现核 $\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(0)$ 在 0 处的取值为

$$\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(0) = A_n q_n(x)$$

对于某个常数 A_n，其中 $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是由$\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$得到的标准正交基，它属于空间 $L^2(\mathbb{R}_+, d\tilde{\mu})$，其中 $d\tilde{\mu} = x\, d\mu(x)$。

证明。写作 $P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(0)$。我们证明 $P_n(x)$ 与空间 $L^2(\mathbb{R}_+, d\tilde{\mu})$ 中所有多项式 x^m, $0 \le m \le n-1$ 正交。事实上， x^n 和 P_m 在 $L^2(\mathbb{R}_+, d\tilde{\mu})$ 中的内积为

$$\int_0^{\infty} x^m P_n(x) x\, d\mu(x) = \int_0^{\infty} x^{m+1} P_n(x)\, d\mu(x) = x^{m+1}|_{x=0} = 0,$$

因为 $P_n(x)$ 是空间 $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ 中次数为 $\le n$ 和 $0 < m+1 \le n$的多项式在 0 处的再生核。因此 P_n 与 q_n成比例。这就证明了该引理。□

定理 34. 在上述局部平凡化下，利用 $\mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}P^d$ 上的局部框架 e_ν，空间 $\hat{} N_\nu^n(\mathbb{C}P^d)$ 在原点处的再生核 $\hat{} N_\nu^n(z, 0)$ 为

$$\hat{N}_\nu^n(z,0) = \sum_{m\le n} d_{\nu,m}\phi_{\nu,m}(x) = A_n\ {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n, n+d+\nu+2\\ d+1\end{matrix}\Big|x\Big), \quad x = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

其中正的常数 A_n 由下文的 (103) 给出。

证明. 我们使用引理 33。多项式 $\{\phi_{\nu,m}(x)\}$ 构成空间 $L^2((0,1)\ d\mu(x))$ 的正交基，$d\mu(x) = (1-x)^\nu x^{d-1}\, dx$，并且它们与通过对测度 $d\mu(x)$ 施行格拉姆–施密特过程得到的正交基相同。测度 $d\tilde{\mu}(x) = x\, d\mu(x) = (1-x)^\nu x^{d+1}$ 的正交基为 ${}_2F_1\Big(\begin{matrix}-m, m+d+\nu+2\\ d+1\end{matrix}\Big|x\Big)$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{m\le n} d_{\nu,m}\phi_{\nu,m}(x) &= \sum_{m\le n} d_{\nu,m}\phi_{\nu,m}(x)\\ &= A_n\ {}_2F_1\Big(\begin{matrix}-n, n+d+\nu+2\\ d+1\end{matrix}\Big|x\Big)\end{aligned} \tag{102}$$

对于某个常数 A_n。为求出 A_n，我们将 (102) 视为关于 $x \in \mathbb{R}$ 的两个多项式的恒等式。(102) 中 x^n 的首项系数为

$$d_{n,\nu}\frac{(-n)_n(n+d+\nu)_n}{(d)_n n!} = A_n\frac{(-n)_n(n+d+\nu+2)_n}{(d+1)_n n!}.$$

Thus

$$\begin{aligned}A_n &= d_{n,\nu}\frac{(n+d+\nu)_n(d+1)_n}{(n+d+\nu+2)_n(d)_n} = d_{n,\nu}\frac{(n+d+\nu)_n(d+n)}{(n+d+\nu+2)_n d}\\ &= \frac{(2n+\nu+d)(n+\nu+1)_{d-1}(n+1)_{d-1}}{d!(d-1)!}\frac{(n+d+\nu)_n(d+n)}{(n+d+\nu+2)_n d}\\ &= \frac{(n+\nu+1)_{d+1}(n+1)_{n+d-1}}{(2n+d+\nu+1)d!^2}.\end{aligned} \tag{103}$$

□

References

[Ank] J.-P. Anker: *An introduction to Dunkl theory and its analytic aspects*, 《微分方程的分析、代数与几何方面》（G. Filipuk、Y. Haraoka、S. Michalik 编），《数学趋势》，Birkh¨auser，2017 年，第 3–58 页。[Ar] J. Arazy: *A survey of invariant Hilbert spaces of analytic functions on bounded symmetric domains*，《多变量算子理论》（R.E. Curto、R.G. Douglas、J.D. Pincus、N. Salinas 编），《当代数学》185，AMS，普罗维登斯，1995 年，第 7–65 页。[AE] J. Arazy、M. Engli˘s: *Q_p-spaces on bounded symmetric domains*，《J. Funct. Spaces Appl.》6（2008），205–240。[BE] H. Bateman、A. Erd´elyi, *Higher transcendental functions, vol. I*，McGraw-Hill，纽约—多伦多—伦敦，1953 年。[BE2] H. Bateman、A. Erd´elyi, *Higher transcendental functions, vol. II*，McGraw-Hill，纽约—多伦多—伦敦，1953 年。[BO] R.J. Beerends、E.M. Opdam: *Certain hypergeometric series related to the root system BC*，《美国数学学会汇刊》339（1993），581–609。[BM] S. Bochner、W.T. Martin, *Several complex variables*，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1948 年。[De1] A. Debiard: *Système différentiel hypergéométrique et parties radiales des opérateurs invariants des espaces symétriques de type BC_p* 1296, ，《数学讲义》，Springer，纽约—柏林，1988 年，第 42–124 页。[De2] A. Debiard: *Le système différentiel hypergéométrique de type BC et son spectre*，《巴黎科学院报告·数学辑》314（1992），793–796。[De3] A. Debiard: *Opérateurs différentiels d'Euler-Poisson-Darboux gńéralisés et fonctions hypergéométriques de plusieurs variables*，《复分析、调和分析及其应用》，《皮特曼数学研究札记丛书》347，Longman，哈洛，1996 年，第 56–73 页。[DOZ] A.H. Dooley、B. Ørsted、G. ZHANG: *Relative discrete series of line bundles over bounded symmetric domains* **46** 1996 1011 1026 ，《傅里叶研究所年刊》（），–。[En] M. Engli˘s: *The asymptotics of a Laplace integral on a Kähler manifold*，《纯粹与应用数学杂志》528（2000），1-39。[EZ] M. Engli˘s、G. Zhang: *Toeplitz operators on higher Cauchy-Riemann spaces*，《Documenta Math.》22（2017），1081–1116。[FK] J. Faraut、A. Kor´anyi: *Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains* **88** 1990 64 89 ，《泛函分析杂志》（），–。[HS] G. Heckman、H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces* 1994 ，Academic Press，。[He] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*，Academic Press，奥兰多，1984 年。[JW] K. D. Johnson、N. R. Wallach: *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I* **229** 1977 137 173 ，《美国数学学会汇刊》（），–。[Ka] J. Kaneko: *Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials* **24** 1993 1086 1110 ，《SIAM 数学分析杂志》（），–。[Ko] T. Koornwinder: *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit* **72** 2015 27 ，《Lothar 组合学研讨会》B a（），第 [页。] O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*，加利福尼亚大学欧文分校，1977 年。[MD] I.G. MacDonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*（第 2 版），Clarendon Press，牛津，1995 年。[Ok] A. Okounkov: *BC-type interpolation Macdonald polynomials and binomial formula for Koornwinder polynomials* **3** 1998 181 207 ，《变换群》（），–。[Op] E.M. Opdam: *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*，《数学学报》175（1995），75–121。[PZ] J. Peetre、G. Zhang: *Invariant Cauchy-Riemann operators and relative discrete series of line bundles over the unit ball of ^{d}* **45** 1998 387 397 C, 《密歇根数学杂志》（），–。[SaZ] S. Sahi、G. Zhang: *Positivity of Shimura operators*，《数学研究快报》26（2019），587–626。

[Sci] H. Schlichtkrull: *One-dimensional K-types in finite dimensional representations of semisimple Lie groups: A generalization of Helgason's theorem* **54** 1984 ，《斯堪的纳维亚数学杂志》（），279–294。[Sch] W. Schmid: *Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitischen Räumen*，《数学发明》9（1969），61–80。[Shm] N. Shimeno: *The Plancherel formula for spherical functions with a one-dimensional K-type on a simply connected simple Lie group of Hermitian type* **121** 1994 ，《泛函分析杂志》（），330–388。[Shi] G. Shimura， *On a class of nearly holomorphic automorphic forms*，《数学年刊》123（1986），347-406。[Up1] H. Upmeier， *Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces*，《美国数学杂志》108（1986），1–25。[Up2] H. Upmeier， *Toeplitz operators and index theory in several complex variables*，《算子理论：进展与应用》81，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，1996。[Yan] Z. Yan: *A class of generalized hypergeometric functions in several variables*，《加拿大数学杂志》44（1992），1317–1338。[You] E.-H. Youssfi： *Polyanalytic reproducing kernels in* $\mathbb{C}^n$，《复分析协同》7（2021），文章编号28。[Zh1] G. Zhang： *A weighted Plancherel formula II. The case of the ball*，《数学研究》102（1992），103–120。[Zh2] G. Zhang: *Berezin transform on compact Hermitian symmetric spaces*，《数学手稿》97（1998），371–388。[Zh3] G. Zhang: *Nearly holomorphic functions and relative discrete series of weighted* L^2*-spaces on bounded symmetric domains* **42** 2002 207 221 ，《京都大学数学杂志》（），–。

Mathematics Institute, Silesian University in Opava, Na Rybníčku 1, 74601 Opava, Czech Republic 和 Mathematics Institute, Žitná 25, 11567 Prague 1, Czech Republic
Email address: englis@math.cas.czAix-Marseille Université, I2M UMR CNRS 7373, 39 Rue F-Juliot-Curie, 13453 Mar-seille Cedex 13, France*Email address*: el-hassan.youssfi@univ-amu.frMathematical Sciences, Chalmers University of Technology，以及 Mathematical Sci-ences, Göteborg University, SE-412 96 Göteborg, Sweden*Email address*: genkai@chalmers.se