arXiv:2303.02283v1 [cs.DS] 4 Mar 2023

带分离约束的最大二分图匹配

Pasin Manurangsi[1], Erel Segal-Halevi[2] 和 Warut Suksompong[3]

[1]Google Research[2]Ariel University[3]新加坡国立大学

摘要

最大二分图匹配是一项基础的算法问题，可在多项式时间内求解。我们研究其一种自然变体，其中存在间隔约束：一侧的顶点位于一条路径或一个网格上，彼此距离较近的两个顶点不能同时参与匹配。我们证明，即使对于路径，该问题也难以近似，并为路径和网格分别提供了常数因子近似算法。

1 引言

在最大二分图匹配问题中，给定一个二分图，我们的目标是在图中计算一个大小最大的匹配 [Cormen et al., 2009, Sec. 26.3]。这是一个基础性的算法问题，具有无数应用。例如，人们可能希望将公司中的会议室分配给员工群组在某个小时使用——群体与会议室之间的一条边表示该会议室适合该群体，并且希望能为尽可能多的群体进行分配。其他例子包括将学生分配到体育课的时间段——此处，一条边表示相应学生在关联的时间段内有空——或者将观众分配到剧院中的座位——观众与座位之间的一条边意味着该观众认为该座位可以接受。众所周知，最大二分图匹配可以在多项式时间内求解[Hopcroft and Karp, 1973]。

本文考虑最大二分图匹配的一种变体，其中图的一侧具有空间或时间结构，并且存在分离约束，这意味着相对于该结构彼此接近的两个顶点不应同时被匹配。分离约束在上述例子中是现实存在的。事实上，人们可能希望避免分配相邻的会议室，以防止噪声干扰；或者出于社交距离要求，避免将观众安排在相邻座位上。同样，体育教师可能需要在课程之间安排休息时间，以清洁场地或让自己恢复精神。尽管这是经典二分图匹配的一种自然变体，但据我们所知，该问题此前尚未被研究。[1] 即使存在分离约束，我们仍然能够在多项式时间内计算最大匹配吗?

2 预备知识

设 $G = (A, B, E)$ 是一个二分图，其中 A 和 B 是两个顶点独立集，E 是边的集合；具体而言，每条边都连接 A 中的一个顶点和 B 中的一个顶点。设 $a = |A|$ 和 $b = |B|$。我们将在第 3 节假设 B 中的顶点构成一维结构，并在第 4 节假设它们构成二维结构。

[1]与此略有相关的是，Elkind 等人 [2021a,b, 2022] 研究了分离条件下可分（即非离散）资源的分配。

现在，我们列出一些先前研究中的工具，它们将有助于证明我们的结果。对于任意正整数 t，用 $[t]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, t\}$。

最大 k-集合打包。在最大 k-集合打包问题中，给定一个全集 U 以及子集 $S_1, \ldots, S_M \subseteq U$，每个子集的大小均为 k。目标是找到数量最多的两两不相交子集。

定理 1（Cygan [2013], F¨urer 和 Yu [2014]）。对于任意常数 $\varepsilon > 0$ 和 $k \in \mathbb{N}$（其中 $k \geq 2$），存在一个用于最大 k-集合打包的多项式时间 $(\frac{k+1}{3} + \varepsilon)$-近似算法。

我们还将用到以下关于有界度最大 3-集合打包的 APX-困难性。[2]如果每个元素至多出现在 d 个子集中，就称一个实例的度为 d。用 $\mathcal{S}$ 表示子集 $S_1, \ldots, S_M$的集合。

定理 2（例如，Gupta 等人 [2019]）。对于某个常数 $\zeta \in (0, 1/2)$，以下问题是 NP-困难的：给定一个度为 6 的最大 3-集合打包实例（$U, \mathcal{S}$），区分[3]

- (是) 存在 $|U|/3$ 个两两不相交的子集；
- (否) 不存在 $(1 - \zeta)|U|/3$ 个两两不相交的子集。

最大独立集与 d-爪端自由图。回顾一下，图中的独立集是指一个顶点集合，其中任意两个顶点之间都没有边相连。寻找基数最大的独立集是一个众所周知的 NP-困难问题；除非 P $=$ NP [，否则该问题也无法在常数因子内近似（Zuckerman， 2007]）。然而，对于一类称为 d-爪端自由图的图，存在多项式时间常数因子近似算法，我们接下来将对此进行定义。

在图 $H = (V_H, E_H)$ 中，d-爪端由一个中心 $u \in V_H$ 和 d 个爪端 v_1、.....、$v_d \in V_H$ 组成；中心与每个爪端之间都有一条边，但任意一对爪端之间都没有边。（也就是说，对于所有 $i \in [d]$，$\{u, v_i\} \in E_H$；而对于所有 i，$\{v_i, v_j\} \notin E_H$，$j \in [d]$。）如果一个图不含有作为诱导子图的 d-爪端，则称其为 d-爪端自由图。

定理 3（Neuwohner [2021]）。存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得对于任意满足 $d \geq 4$ 的常数 $d \in \mathbb{N}$，都存在一个多项式时间 $(d/2 - \varepsilon)$-近似算法，用于求解 d-爪无关图中的最大独立集。[4]

3 一维

在本节中，我们考虑一维情形，并假设 B 中的顶点位于一条路径上。为方便起见，我们有时会将 B 中的顶点与集合 $[b] = \{1, \ldots, b\}$ 中的数字对应起来。给定一个整数分离参数 $s \geq 0$；不允许同时匹配 B 中间隔少于 s 个顶点的两个顶点。我们将由此得到的问题称为带分离的二分图匹配。注意，规范二分图匹配对应于 $s = 0$ 的情形。

[2]我们指出，定理 2 是 Gupta 等人 [2019], 的引理 4.4 的另一种表述。该引理以将一个 4-正则图划分为顶点不相交三角形的形式给出。将顶点集视为全集 U，并将每个三角形视为由三个顶点组成的集合，即可构造最大 3-集合打包实例。由于图的度为 4，每个元素最多出现在 $\binom{4}{2} = 6$ 个子集中。[3]注意，不失一般性，我们可以假设 $M = |\mathcal{S}| \geq |U|/3$，且 $|U|$ 是 3 的倍数，因为显然，如果 $M < |U|/3$，或者 $|U|$ 不是 3 的倍数，则属于 NO 情况。[4]Cygan 等人 [2013] 提出的拟多项式时间算法，对于任意 $\varepsilon > 0$，都能在 d-爪无关图中求得最大独立集的 $(d/3 + \varepsilon)$-近似解。

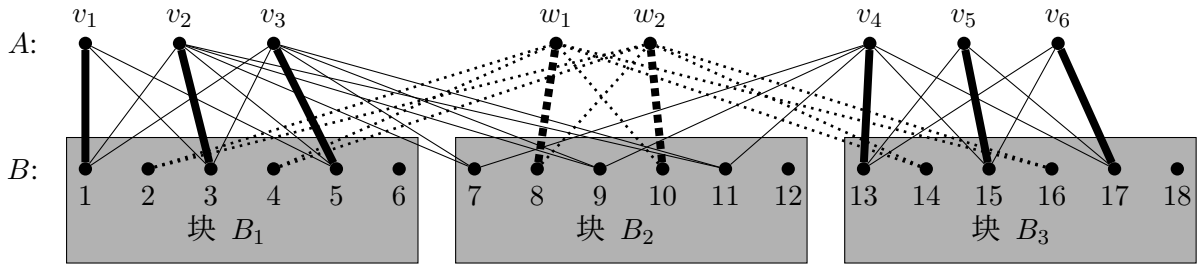

图 1：展示定理 4 中归约的图。在此， $s = 1, u = 6, M = 3, S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{2, 3, 4\}, S_3 = \{4, 5, 6\}$, $b = 18, k = 2$。粗边表示由打包 $\{S_1, S_3\}$ 所诱导的匹配。

3.1 困难性

我们的第一个结果或许令人意外：对于任意 $s \geq 1$，判断是否存在一个涉及 A 中所有顶点的匹配，更不用说求出最大匹配，已经是计算困难的。事实上，我们甚至可以得到一个不可近似性结果。

定理 4。在一维情形中，对于任意固定的 $s \geq 1$，存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得区分以下两种情形是 NP-困难的：

- (是) 存在一个大小为 a 的匹配。
- (否) 每个匹配的大小都小于 $(1 - \varepsilon)a$。

证明。我们通过从最大 3-集合打包进行归约来证明。给定一个度为 6 的最大 3-集合打包实例 $(U = [u], \mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_M\})$，其中 u 是 3 的倍数且 $M \geq u/3$，我们按如下方式构造二分图 $G = (A, B = [b], E)$（见图 1）：

- 设 $b = 3(s + 1)M$ 和 $B = [b]$。对于每个 $i \in [M]$，我们将顶点 $3(s + 1)(i - 1) + 1, \ldots, 3(s + 1)i$ 称为块 B_i；因此，对于每个集合 $S_i \in \mathcal{S}$, B 都有一个包含 $3(s + 1)$ 个顶点的块，它们对应于 S_i。

- 令 $A = \{v_1, \ldots, v_u\} \cup \{w_1, \ldots, w_k\}$，其中 $k := 2(M - u/3)$。
- 对于所有 $i \in [M]$，以及所有 $u \in S_i$，将三个顶点 $3(s + 1)(i - 1) + 1$、$3(s + 1)(i - 1) + s + 2$、$3(s + 1)(i - 1) + 2s + 3 \in B_i$ 连接到顶点 $v_u \in A$。（见图 1 中的实线边。）
- 对于每个 $i \in [M]$，将两个顶点 $3(s + 1)(i - 1) + 2$、$3(s + 1)(i - 1) + s + 3 \in B_i$ 连接到所有顶点 w_1、.....、$w_k \in A$。（见图 1 中的虚线边。）

至此， G的描述完成。显然， G可以在多项式时间内构造。

（完备性）假设存在 $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_{u/3}\}$，使得 S_{i_1}、.....、$S_{i_{u/3}}$ 两两不相交。由于每个 S_i 的大小为 3，这也意味着 $S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_{u/3}} = [u]$。我们按如下方式构造匹配（见图 1 中的粗边）。对于每个 $i \in [M]$:

- 若 $i \in \mathcal{I}$，则将连接 A中与 S_i 的元素对应的顶点的三条边加入匹配，以阻断 B_i。具体而言，令 e_1、e_2、e_3 表示 S_i的元素；加入边（v_{e_1}，$3(s + 1)(i - 1) + 1$）、（v_{e_2}，$3(s + 1)(i - 1) + s + 2$）、（v_{e_3}，$3(s + 1)(i - 1) + 2s + 3$）。
- 如果 $i \notin \mathcal{I}$，则在块 B_i 与顶点 w_j之间添加两条边到匹配中。具体来说，将 $3(s + 1)(i - 1) + 2$、$3(s + 1)(i - 1) + s + 3$ 与 w_1,... , w_k中的任意未匹配顶点进行匹配。

根据构造可知，间隔约束得到了满足。注意，第二步是有效的，因为在 $\mathcal{I}$之外恰有 $M - u/3 = k/2$ 个索引 i；这意味着顶点 $w_1, \ldots, w_k$均已匹配。此外， $S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_{u/3}} = [u]$ 确保顶点$v_1, \ldots, v_u$均已匹配。因此，这是一个大小为 $a = |A|$、分离为 s的匹配。

（可靠性）设 $\varepsilon = \zeta/13$，其中 ζ 如定理 2 所述。假设存在一个大小至少为 $(1-\varepsilon)a$、间隔为 s 的匹配 W。考虑每个块 B_i；注意，间隔约束意味着该块中至多有三个顶点可以被匹配。令 $\mathcal{I}$ 表示索引集合 i，其中 B_i 中恰有三个顶点被匹配。我们有 $(1-\varepsilon)a \le |W| \le 3|\mathcal{I}| + 2(M - |\mathcal{I}|)$。代入 $a = 2M + u/3$ 并重新整理，得到

$$|\mathcal{I}| \ge (1-\varepsilon)\left(2M + \frac{u}{3}\right) - 2M \ge (1-\zeta)\cdot\frac{u}{3},$$

其中，后一个不等式由我们对 ζ 的选择以及集合 U 中每个元素最多出现在 6 个集合中的事实推出（这意味着 $M \le 6u/3 = 2u$）。最后注意，对每个 $i \in \mathcal{I}$，由于块 B_i 中有三个顶点被匹配，这三个顶点必定是 $3(s+1)(i-1) + 1$、$3(s+1)(i-1) + s + 2$、$3(s+1)(i-1) + 2s + 3$。这意味着对所有 $i \in \mathcal{I}$，子集 S_i 两两不相交，因此至少有 $(1-\zeta)u/3$ 个子集两两不相交。

因此，根据定理 2，区分 YES 和 NO 情形确实是 NP-困难的。 □

3.2 近似算法

尽管有定理 4，我们将在下文证明，可以在多项式时间内实现较好的近似。我们从基本情形 $s = 1$开始。对于这种情形，一种简单的 2-近似算法是寻找一个最大基数匹配（不考虑间隔约束），然后从该匹配中移除 B 中的所有奇数顶点或 B 中的所有偶数顶点，具体移除哪一类取决于哪一类的顶点更少。下面给出一种改进的近似算法。

定理 5。在一维情形下，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在一种多项式时间的（$4/3+\varepsilon$）-近似算法，用于计算满足间隔 $s = 1$的 G 最大匹配。

证明。我们按如下方式构造一个最大 3-集合打包实例：

- 令 $U = A \cup \{0, \ldots, b\}$ 为全集。
- 对于每条边 $\{a', b'\} \in E$，其中 $a' \in A$且 $b' \in B$，创建一个子集 $S_{\{a',b'\}} = \{a', b'-1, b'\}$。

注意，分离参数为 1 的 G 的匹配，与 $\{S_e\}_{e\in E}$ 中一组互不相交的集合一一对应。因此，我们可以应用定理 1 中的最大 3-集合打包算法，从而得到所需的 $(4/3+\varepsilon)$-近似。

□

下一个算法的近似比较差，但适用于任意 $s \ge 1$。

定理 6. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得在一维情形下，对于任意固定的 $s \ge 1$，都存在一个多项式时间 $(2-\varepsilon)$-近似算法，用于计算分离参数为 s的 G 的最大匹配。

证明. 我们将问题归约为无 4 爪图中的最大独立集。令 $H = (V_H, E_H)$ 为 $G = (A, B, E)$ 中各边的“冲突图”，定义如下：

- 设 $V_H = E$。
- 对于 $\{a', b'\}$，当且仅当 $a' = a''$或 $|b' - b''| \le s$时，将 $\{\{a', b'\}, \{a'', b''\}\}$ 添加到 E_H。

注意，具有分离参数 s的 G 的匹配与 H的独立集之间存在一一对应关系。我们声称 H 是无 4 爪的。这个结论使我们能够调用定理 3 中的算法，从而立即得到所需结果。

为证明该断言成立，反设 H 中存在一个 4 爪 Ω，由一个中心 $\{a', b'\}$ 和四个爪端 $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}, \{a_3, b_3\}, \{a_4, b_4\}$ 组成。由于中心与每个爪端之间都有一条边，对于每个 $i \in [4]$，以下三个条件中至少有一个成立：(i) $a_i = a'$；(ii) $b_i \in \{b' - s, b' - s + 1, \ldots, b'\}$；(iii) $b_i \in \{b' + 1, \ldots, b' + s\}$。根据鸽巢原理，至少有两个爪端满足这三个条件中的同一个，因此，在 H 中与这两个爪端对应的顶点之间必定有一条边。因此，Ω 不可能是一个 4 爪，断言得证。 □

3.3 精确算法

除了近似之外，另一个有趣的问题是：如果对图 G施加额外的结构限制，我们能否高效地计算精确最大匹配？一种自然的假设是， A 中的每个顶点都与 B中某个区间内的顶点相连——这反映了这样的场景：每个学生只能在连续的某个时间段内参加活动，或者每位观众都认为某一块座位可以接受。我们将证明，这种额外结构确实能让问题得到精确求解，方法是将其归约为一个调度问题。

具有释放时间和截止时间的等长作业。假设给定 n个作业，每个作业的整数长度均为 $p \geq 1$。第 i个作业的整数释放时间为 $r_i \geq 0$ ，整数截止时间为$d_i \geq 1$。子集 $S \subseteq [n]$ 的作业计划是为其中每个 $i \in S$ 指定开始时间 s_i 的列表，并满足约束，即对于每个 $i \in S$， $s_i \geq r_i$ 且 $s_i + p \leq d_i$；对于每一对不同的 i 和 $j \in S$，还需满足 $[s_i, s_i + p) \cap [s_j, s_j + p) = \emptyset$。作业计划的吞吐量是计划中作业的数量。

定理 7（Chrobak 等人 [2021]）。存在一种算法，给定 n 个具有释放时间、截止时间和相同长度的作业，可在 $O(n^5)$ 时间内计算出吞吐量最大的作业计划。

定理 8。在一维情形中，对于任意固定的 $s \geq 1$，如果 A中的每个顶点都与 B中的一个（可能为空）区间内的顶点相连，那么存在一种算法，可在多项式时间内计算出带分离约束 s 的最大匹配。

证明。我们将该问题归约为调度具有释放时间和截止时间的等长作业。具体而言，我们令每个作业的长度为 $p = s+1$。对于每个与非空区间 $x_{a'}, x_{a'} + 1, \ldots, y_{a'} \in B$内顶点相连的顶点 $a' \in A$，我们创建一个释放时间为 $r_{a'} = x_{a'}$、截止时间为$d_{a'} = y_{a'} + p$的作业。注意， G 的一个带分离参数 s的匹配与一组作业的调度[5] 之间存在一一对应关系。因此，对所构造的作业应用定理 7，即可在多项式时间内得到带分离参数 s的最大匹配。 □

3.4 扩展

接下来，我们简要讨论一些扩展这些积极结果的方法。

观众群组。受剧院观众就座这一应用的启发（见第 1 节），可以考虑这样一种情形：观众以大小相同的群组形式出现，每组有 $g \geq 1$ 人。每个群组都必须安排在一个连续的 g 个座位区块中，不同群组的区块之间至少要间隔 s 个座位。定理 6 可以调整后应用于这种情形。在图 G 中，集合 A 中的每个顶点对应一个

[5]不失一般性，我们可以假设作业计划中的开始时间均为整数，因为将每个开始时间向下取整为整数后，作业计划仍然可行。

群组；如果从 b' 开始的 g 个座位区块适合群组 a'，则 $a' \in A$ 与 $b' \in B$ 之间有一条边。当且仅当 $a' = a''$ 或 $b'' \leq b' \leq b'' + g + s - 1$ 或 $b' \leq b'' \leq b' + g + s - 1$ 时，冲突图 H 中包含 E_H 内的边 $\{\{a', b'\}, \{a'', b''\}\}$。与定理 6 的证明一样，该图 H 是无 4 爪的，因此这种情形下也存在一个多项式时间 $(2-\varepsilon)$-近似算法。群组大小可能不同的情形仍未解决。

双侧间隔约束。定理 6 也可以扩展到一种情形，即间隔约束同时应用于图的两侧。在这种情况下，冲突图包含边$\{\{a', b'\}, \{a'', b''\}\}$ 当且仅当 E_H 且 $|a' - a''| \leq s$ 或 $|b' - b''| \leq s$。根据与定理 6 证明类似的论证，该冲突图是无 5 爪的，因此根据定理 3，存在一个多项式时间（$2.5 - \varepsilon$）近似算法。

最大权匹配。定理 6 和定理 8 都可以扩展到带权边的二分图，其中目标是在满足间隔约束的条件下，找到边权总和最大的匹配。定理 6 使用 Neuwohner [2021], 的算法，该算法本身就是为最大权独立集问题设计的。对于定理 8，我们可以使用 Baptiste [1999] 的算法来代替 Chrobak 等人 [2021], 的算法；该算法能够求解等长作业的调度问题，其中作业带有权重，目标是使作业计划中的作业总权重最大化，且所需时间为 $O(n^7)$。

4 二维

本节将重点讨论二维情形，这适用于剧院分配座位等场景。具体而言，我们假设 B 中的顶点构成一个网格，即 $B = [\beta_1] \times [\beta_2]$。

4.1 ℓ_1度量

给定两个点 $p = (p_x, p_y)$ $p' = (p'_x, p'_y) \in \mathbb{R}^2$，它们的 ℓ_1 距离（也称为曼哈顿距离或出租车距离）定义为 $\|p - p'\|_1 := |p_x - p'_x| + |p_y - p'_y|$。间隔约束规定，如果两点 $p, p' \in B$ 之间的 ℓ_1 距离不超过 s，则不能同时匹配这两个点。

为便于以下讨论，对于任意点 $p \in \mathbb{R}^2$ 和实数 $r \geq 0$，令

$$\mathcal{B}(p, r) := \{p' \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - p'\|_1 \leq r\}.$$

此外，令 $p^{\uparrow} = p + (0, r/2)$ $p^{\downarrow} = p - (0, r/2)$ $p^{\rightarrow} = p + (r/2, 0)$，且 $p^{\leftarrow} = p - (r/2, 0)$。我们将使用下述不难验证的恒等式（见图2）：对于任意 $p \in \mathbb{R}^2$ 和实数 $r \geq 0$,

$$\mathcal{B}(p, r) = \mathcal{B}(p^{\uparrow}, r/2) \cup \mathcal{B}(p^{\downarrow}, r/2) \cup \mathcal{B}(p^{\rightarrow}, r/2) \cup \mathcal{B}(p^{\leftarrow}, r/2). \tag{1}$$

定理 9. 存在常数 $\varepsilon > 0$，使得对于任意固定的 $s \geq 1$，在二维情形下，存在一个多项式时间的（$3 - \varepsilon$）近似算法，用于计算在 ℓ_1 度量下分离参数为 s 的 G 的最大匹配。

证明. 与定理 6 的证明类似，我们将问题归约为无 6-爪图中的最大独立集。令 $H = (V_H, E_H)$ 为 G 中各边的“冲突图”，定义如下：

- 令 $V_H = E$。

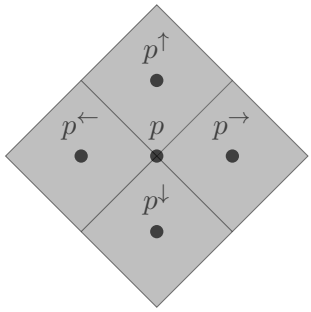

图2：在 ℓ_1 度量中，用四个半径为 $r/2$ 的球覆盖一个半径为 r 的球。

- Add $\{\{a', p'\}, \{a'', p''\}\}$ to E_H if and only if $a' = a''$ or $\|p' - p''\|_1 \le s$.

注意， G 中分离参数为 s 的一个匹配与 H 的一个独立集之间存在一一对应关系。我们声称， H 是 6爪无关的。这个结论使我们可以调用定理 3 中的算法，从而得到所需结果。

为了证明该结论成立，反设 H 中存在一个 6爪 Ω，它由一个中心 $\{a', p'\}$ 和六个爪端 $\{a_1, p_1\}$、……、$\{a_6, p_6\}$ 组成。由于中心与每个爪端之间都有一条边，对于每个 $i \in [6]$，以下两个条件至少有一个成立： $a_i = a'$，或 $p_i \in \mathcal{B}(p', s) = \mathcal{B}(p'^{\uparrow}, s/2) \cup \mathcal{B}(p'^{\downarrow}, s/2) \cup \mathcal{B}(p'^{\rightarrow}, s/2) \cup \mathcal{B}(p'^{\leftarrow}, s/2)$（后一个等式由公式（1）得出）。根据鸽巢原理，必定存在 $i \neq j$，使得两个爪端 $\{a_i, p_i\}$、$\{a_j, p_j\}$ 满足 $a_i = a_j = a'$ 或 $p_i, p_j \in \mathcal{B}(p^*, s/2)$，其中某个 $p^* \in \{p'^{\uparrow}, p'^{\downarrow}, p'^{\rightarrow}, p'^{\leftarrow}\}$。无论哪种情况，都意味着 $\{a_i, p_i\}$ 与 $\{a_j, p_j\}$ 在 H 中之间存在一条边。因此，Ω 不可能是一个 6爪，结论得证。

□

4.2 其他度量

定理 9 仅通过公式（1）使用 ℓ_1 度量；如果能够证明类似的“覆盖”结果，就可以将其推广到其他度量。[6] 形式化地说，对于每个度量 $\mu: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，定义其覆盖数 $\mathrm{covnum}(\mu)$ 为满足以下条件的最小整数 c：对于任意 $p \in \mathbb{R}^2$ 和 $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$，以 p 为中心、半径为 r 的 μ 球（即 $\mathcal{B}_\mu(p, r) := \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \mu(p, q) \le r\}$）都能被 c 个集合覆盖，且每个集合的直径为 μ- r。公式（1）表明，$\mathrm{covnum}(\ell_1) \le 4$：半径为 r 的 ℓ_1 球可以被四个直径为 ℓ_1- r 的集合覆盖。

定理10. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得对于任意度量 μ 和任意固定的 $s > 0$，在二维情形下，都存在一个多项式时间的 $(\mathrm{covnum}(\mu)/2 + 1 - \varepsilon)$-近似算法，用于计算度量 μ 中分离为 s 的 G 的最大匹配。

证明。与定理 9 的证明类似，我们构造冲突图 H，并证明它是 d-无爪图，其中 $d := \mathrm{covnum}(\mu) + 2$。事实上，假设任意顶点 $\{a', p'\} \in H$ 在 H 中与 d 个顶点 $\{a_1, p_1\}, \ldots, \{a_d, p_d\}$ 相邻。如果这些顶点中有两个 $\{a_i, p_i\}, \{a_j, p_j\}$ 满足 $a_i = a_j = a'$，那么它们彼此相邻，因此 $\{a', p'\}$ 不是 d-爪的中心。否则，至少有 $\mathrm{covnum}(\mu)$ 个 $+1$ 顶点 $\{a_i, p_i\}$ 满足 $a_i \neq a'$，这意味着 $p_i \in \mathcal{B}_\mu(p', s)$。根据鸽巢原理，在覆盖 $\mathcal{B}_\mu(p', s)$ 的 $\mathrm{covnum}(\mu)$ 个集合中，至少有两个这样的点 p_i, p_j 同属于一个直径至多为 s 的集合。因此， $\{a_i, p_i\}$ 和 $\{a_j, p_j\}$ 在 H 中相邻，所以 $\{a', p'\}$ 不是 d-爪的中心。

□

定理 9 是定理10的一个特例，因为根据公式（1），$\mathrm{covnum}(\ell_1) \le 4$。

[6] 对于其他度量，我们不要求 s 是整数。

要获得其他度量的结果，我们需要其覆盖数的上界。例如，考虑由 $||p-p'||_\infty$ 定义的 ℓ_∞ 度量：$= \max\{|p_x - p'_x|, |p_y - p'_y|\}$。容易看出，$\text{covnum}(\ell_\infty) \le 4$（将图2旋转 $45°$），因此定理10也给出了该度量的 $(3-\varepsilon)$-近似。对于 ℓ_∞ 的非对称变体，情况也相同；该变体定义为 $\max\{|p_x - p'_x|/w_x, |p_y - p'_y|/w_y\}$，其中 w_x, w_y 为正权重。[7] 对于这种度量，球是一个矩形，可以用四个与原矩形相似、按 $1/2$ 缩放的矩形覆盖。

现在考虑欧几里得度量 ℓ_2，定义为 $||p-p'||_2 := \sqrt{(p_x - p'_x)^2 + (p_y - p'_y)^2}$。~~我们有~~ $\text{covnum}(\ell_2) \le 6$，因为单位圆盘可以用六个 $60°$ 扇区覆盖，每个扇区的直径均为 1。这给出了一个 $(4-\varepsilon)$-近似。

事实上，可以证明，对于每个基于范数的度量 μ，都有 $\text{covnum}(\mu) \le 25$；我们在下文给出这个界的证明。这意味着对于任意此类度量，都有一个 $(13.5-\varepsilon)$-近似算法。

引理11. 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意基于范数的度量 μ，都有 $\text{covnum}(\mu) \le 25$。

证明. 根据三角不等式，每个半径为 $r/2$ 的 μ-球的直径至多为 r。因此，只需证明每个半径为 r 的 μ-球都可以用至多 $25\,\mu$ 个半径为 $r/2$ 的球覆盖。考虑以下为 $\mathcal{B}_\mu(p,r)$ 构造覆盖的贪心过程：

- 初始化 $S := \emptyset$。
- 当 $\mathcal{B}_\mu(p,r) \not\subseteq \bigcup_{p'\in S} \mathcal{B}_\mu(p', r/2)$ 时，将 $\mathcal{B}_\mu(p,r) \setminus \bigcup_{p'\in S} \mathcal{B}_\mu(p', r/2)$ 中任意一点添加到 S。

我们断言，最多向 S 添加 25 个点后，该过程必定停止；由此立即得到 $\mathcal{B}_\mu(p,r)$ 的一个覆盖，其大小至多为 25。

令 v 表示单位 μ-球的体积（即面积）。根据构造，每个新添加到 S 的点与 S 中已有的每个点之间的 μ-距离都大于 $r/2$。因此，根据三角不等式，对于不同的 $p' \in S$，球 $\mathcal{B}_\mu(p', r/4)$ 两两不相交。由此可得[8]

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{p'\in S} \mathcal{B}_\mu(p', r/4)\right) = \sum_{p'\in S} \text{Vol}(\mathcal{B}_\mu(p', r/4)) = |S| \cdot v(r/4)^2. \tag{2}$$

另一方面，同样根据三角不等式，对于所有 $p' \in S$，我们有 $\mathcal{B}_\mu(p', r/4) \subseteq \mathcal{B}_\mu(p, 5r/4)$。因此

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{p'\in S} \mathcal{B}_\mu(p', r/4)\right) \le \text{Vol}(\mathcal{B}_\mu(p, 5r/4)) = (5r/4)^2 \cdot v = 25r^2 v/16.$$

将其与 (2) 结合，我们得到 $|S| \le 25$，如所述。 □

定理 12. 存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得对于任意固定的 $s > 0$ 和任意基于范数的度量 μ，在二维情形下，都存在一个多项式时间 $(13.5-\varepsilon)$-近似算法，用于计算度量 μ 中分离参数为 s 的 G 的最大匹配。

5 未来方向

我们在定理 6、9 和 10 的证明中使用的冲突图 H 比一般的 d-无爪图限制更多，因此，如果进行更有针对性的分析，或许可以改进近似比。

[7]为说明这一度量，考虑一座剧院，其中相邻行之间的距离大于相邻列之间的距离，因此任意一对观众之间都应至少间隔 $\lceil w_x \cdot s \rceil$ 列或 $\lceil w_y \cdot s \rceil$ 行。[8]这里我们利用了 $\mathbb{R}^2$ 中基于范数的度量空间的性质，即 $\text{Vol}(\mathcal{B}_\mu(p,r)) = r^2 \cdot v$。

回到在剧院安排观众就座这一激励性应用（见第 1 节），可以考虑这样一种在线场景：每位观众（或观众群体）必须在下一位观众（或群体）到达之前就座。

带分离约束的匹配是独立代表系（ISR）的一种特殊情形 [Aharoni 等人，2007 年，Haxell, 2011]。给定一个图 $H = (V_H, E_H)$ 和 n 个顶点集合 $V_1, \ldots, V_n \subseteq V_H$，ISR 是从每个 V_i 中至多选取一个顶点，使选出的顶点在 H 中构成一个独立集。带分离约束的匹配实际上是由分离约束诱导的冲突图 H 中的一个 ISR（见定理 6 的证明），其中顶点集合 $V_1, \ldots, V_n$ 定义为 $V_i := \{\{a', b'\} \in E \mid a' = a_i\}$，也就是说，它是与顶点 $a_i \in A$ 相邻的边的集合。关于 ISR 的数学文献主要关注存在性的充分条件，而我们的结果则提供了寻找 ISR 的近似算法。一个有趣的问题是，类似的技术能否用于推导在更一般情形下寻找 ISR 的近似算法。

致谢

本研究部分得到以色列科学基金会（资助编号 712/20）、新加坡教育部（资助编号 MOE-T2EP20221-0001）以及 NUS 创业基金的支持。我们感谢 J´erˆome Lang、Joe Briggs、Anton Petrunin、Saul Rodriguez Martin 和 Noam D. Elkies 提供的宝贵见解。

参考文献

Ron Aharoni、Eli Berger 和 Ran Ziv。带权图中的独立代表系。Combinatorica，27(3)：253–267，2007。

Philippe Baptiste。相等处理时间下单机延迟作业加权数量最小化的多项式时间算法。Journal of Scheduling，2(6)：245–252，1999。

Marek Chrobak、Christoph D¨urr、Wojciech Jawor、Łukasz Kowalik 和 Maciej Kurowski。关于调度等长度作业以最大化吞吐量的说明。CoRR，abs/cs/0410046v2，2021。

Thomas H. Cormen、Charles E. Leiserson、Ronald L. Rivest 和 Clifford Stein。《算法导论》。MIT Press，第三版，2009年。

Marek Cygan。通过有界路径宽度局部搜索改进三维匹配的近似算法。载于第54届 IEEE 计算机科学基础研讨会（FOCS）论文集，第509–518页，2013年。

Marek Cygan、Fabrizio Grandoni 和 Monaldo Mastrolilli。如何出售超边：超匹配分配问题。载于第24届 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，第342–351页，2013年。

Edith Elkind、Erel Segal-Halevi 和 Warut Suksompong。基于极大最小份额的图形化切蛋糕。载于第30届国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集，第161–167页，2021a。

Edith Elkind、Erel Segal-Halevi 和 Warut Suksompong。《保持距离：带间隔的土地划分》。载于第30届国际人工智能联合会议（IJCAI）论文集，第168–174页，2021b。

Edith Elkind、Erel Segal-Halevi 和 Warut Suksompong。《注意差距：带分离的切蛋糕》。人工智能，313:103783，2022。

Martin F¨urer 和 Huiwen Yu。通过局部改进近似 k-集合打包问题。载于第三届国际组合优化研讨会（ISCO）论文集，第 408–420 页，2014 年。Anupam Gupta、Euiwoong Lee、Jason Li、Pasin Manurangsi 和 Michal Wlodarczyk。通过分离子集降低树宽。载于第 30 届 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第 1731–1749 页，2019 年。Penny Haxell。关于组建委员会。《美国数学月刊》，118(9):777–788，2011 年。John E. Hopcroft 和 Richard M. Karp。一种用于二分图最大匹配的 $n^{5/2}$ 算法。《SIAM计算杂志》，2(4):225–231，1973 年。Meike Neuwohner。针对 d-爪自由图中的最大权独立集问题的一种改进近似算法。载于第38届国际计算机科学理论方面研讨会（STACS）论文集，第 53:1–53:20 页，2021 年。David Zuckerman。线性度提取器与最大团和色数的不可近似性。《计算理论》，3:103–128，2007 年。