arXiv:2303.02288v1 [math.GT] 4 Mar 2023

# 一族 $n$-链环的瑟斯顿单位球及其纤维面

JUHUN BAIK 和 PHILIPPE TRANCHID A

ABSTRACT. 我们确定一族 $n$-链环的瑟斯顿单位球，记作 $C(n,\ p)$，其中 $n$ 是链环分支数，$p$ 是扭转数。当 $p$ 严格为正时，我们证明，对于任意 $n$，$C(n,\ p)$的瑟斯顿单位球是一个 $n$ 维余立方体。此外，我们阐明了$C(n,\ p)$为纤维化的条件，并为任意 $p$找到了至少一个纤维面。最后，我们给出 $n \geq 3$时，$C(n,\ -2)$的瑟斯顿单位球面对应的 Teichmüller 多项式。

## 1. INTRODUCTION

设 $M$ 是一个三维流形。为简便起见，我们假设 $M$ 具有环面边界。在其众多开创性著作之一中，[20], W. Thurston 为$M$的第二同调向量空间引入了半范数的概念。更确切地说，设 $[a] \in H_2(M,\ \partial M;\ \mathbb{Z})$是一个整数第二同调类。那么，$[a]$ 可以由若干互不相交的真嵌入曲面 $S_i$之并表示。$[a]$ 的瑟斯顿范数定义为

$$x(a) := \min\{\sum_i \max\{0, -\chi(S_i)\}\}$$

其中的最小值取遍将 $[a]$ 表示为真嵌入曲面的不交并的所有可能方式。若 $M$ 是不可约且无环面的，则该范数进一步扩展为 $H_2$上的范数（$M,\ \mathbb{R}$）。我们有时用 $||\cdot||$ 表示瑟斯顿范数。在同一篇论文中，他证明了关于该范数的单位球（我们将其称为 Thurston 单位球）始终是一个多胞体。尽管这一概念在理论上产生了巨大的影响，但我们似乎只确切知道极少数情况下的 Thurston 单位球。在这方面，一个有趣的问题如下。

**问题**。什么样的多胞体可以作为某个 3 维流形的 Thurston 单位球出现?

Kitayama 在 [13]中已经提出了这个问题。Friedl、L¨uck 和 Tillmann[5]从群及其第一同调的角度对其进行了推广。在 [17], 中，Pacheco-Tallaj、Schreve 和 Vlamis 找出了

*Date*: 2023年3月7日。*Key words and phrases.*瑟斯顿范数、纤维化面、Teichm¨uller 多项式、多胞体。

隧道数一流形的瑟斯顿单位球的形状。关于瑟斯顿范数的最新研究，请参阅 [13]。

本文证明，瑟斯顿单位球可以包含任意高维的高度对称多胞体。我们将研究一族链环补空间的瑟斯顿单位球，记作 $C(n,\ p)$。简而言之，$C(n,\ p)$ 是一个 $n$ 链环；当 $p$ 为正时，第一个分支上有 $p$ 个正半扭转；当 $p$ 为负时，第一个分支上有 $p$ 个负半扭转（见图4）。从某种意义上说，这些链环的补空间是魔术流形的推广；魔术流形是 $C(3,\ 0)$ 的补空间。因此，魔术流形及其性质是值得参考的范例。

在先前的一篇文章中，[2], 两位作者与 Harry Baik 和 Changsub Kim 共同研究了曲面 $S$ 上伪阿诺索夫映射的最小熵与这些映射在 $H_1(S)$ 上的作用之间的关系。为此，$C(n,\ -2)$ 的补空间至关重要。

以下是本文的主要结果。

**定理 1.1**。设 $M(n,p)$ 为链环 $C(n,p)$ 的补空间，其中 $n \geq 3$，并设 $B(n,p)$ 为 $M(n,p)$的 *Thurston* 单位球。假设 $M(n,p)$ 是双曲的。那么

- 如果 $p \geq 1$, $B(n,p)$ 是一个具有顶点$(\pm 1, 0, \cdots, 0)$ $\cdots$、$(0, \cdots, 0, \pm 1)$的 $n$ 维余立方体。（推论 *5.2*）
- 如果 $p = 0$, $B(n,p)$ 是一个 $n$ 维余立方体与两个单纯形的并。（定理 *4.1*）

此外，我们还在每种情形下找到一个纤维面，并确定该纤维面中每个纤维化曲面的拓扑类型。

目前，我们尚无法完整回答 $p < 0$ 的情形。尽管如此，我们仍在 Thurston 单位球中找到了一组点 $V(n,p)$，并猜想它们的凸包（记为 $B(n,p)$）就是整个 Thurston 单位球。利用程序 Tnorm 获得并汇集于附录 B 的计算数据，为这一猜想提供了部分支持。

**猜想 1.** $B(n,p)$ 等于 $C(n,p)$的 *Thurston* 单位范数球，当 $p < 0$ 时。

对于 $p = -2$的情形，我们还成功计算出了 $n$的每个取值所对应的泰希缪勒多项式。

**定理 1.2.**（定理 *7.1*）纤维面 $\mathcal{F}$ 的泰希缪勒多项式 $P$ 为

$$P(x_1, \cdots, x_{n-1}, u) := A - \sum_{k=1}^{n} u a_k A_k$$

其中 $a_1 = 1, a_2 = x_1^{-1}, \cdots, a_n = (x_1 \cdots x_{n-1})^{-1}$, $A := (a_1 - u) \cdots (a_n - u)$ 以及 $A_k = \dfrac{A}{(a_k - u)(a_{k-1} - u)}$，下标为 $k \equiv (mod\ n) + 1$。

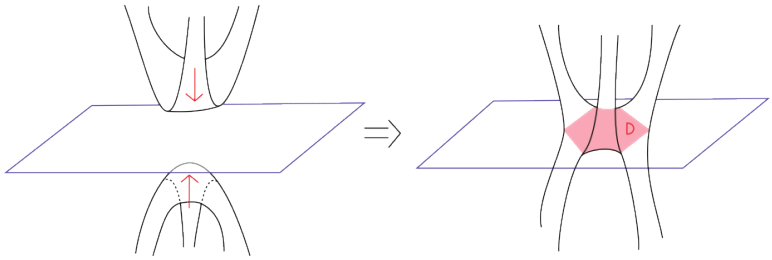


FIGURE 1. 两个曲面的村杉和，此处 $D$ 为一个六边形

**致谢**。 我们感谢 Harry Hyungryul Baik、Chenxi Wu、Dan Margalit、JungHwan Park 和 Livio Liechti 与我们进行了有益的交流。我们还感谢 William Worden 帮助我们安装并使用 Tnorm软件包。

## 2. PRELIMINARY

我们在此汇集将在本文其余部分使用的基本工具。

### 2.1. 村杉和。

David Gabai 在其论文中证明了一些与嵌入曲面的纤维性有关的定理，以及当这些曲面确实纤维化时关于其单值化映射的定理。他经常使用一种称为“村杉和”的几何操作，这是一种在保持其纤维某些性质的同时将曲面粘合在一起的方法。我们先给出这种村杉和的定义。

**定义 2.1** （村杉和， [7]）。 **</style}定向曲面 是两个不同定向曲面 和 的村杉和**，当且仅当

（1） $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 和 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = D$，其中 $D$ 是一个 $2n$边形。（2） $S^3$ 可分割为两个3维球 $B_1$、 $B_2$，满足

- $\Sigma_i \subset B_i$ 对于 $i = 1$，2。
- $B_1 \cap B_2 = S^2$ 并且对于 $i = 1$， $\Sigma_i \cap S^2 = D$ 2。

简单来说，村杉和是一种以交替的方式对两个曲面进行剪切粘贴的方法，因此在粘合区域周围看起来像是有 $2n$ 条腿交替向上和向下延伸。

村杉和的优势在于它既保持纤维性，也保持单值化。更准确地说，Gabai 证明了以下两个定理。

**定理 2.2** (Gabai， [6])。 设 $S$ 是 $S_1$ 和 $S_2$的村杉和。当且仅当 $S_1$ 和 $S_2$ 都是纤维化曲面时，$S$ 是纤维曲面。

**定理 2.3** ([7], 推论 1.4)**.** 假设 $R$ 是 $R_1$ 与 $R_2$ 沿 $\partial R_i = L_i$ 的村杉和，其中 $L_i$ 是一个纤维化链环，其单值化 $f_i$ 分别逐点固定边界 $\partial R_i$。那么 $L = L_1 \cup L_2$ 是一个纤维化链环，其纤维为 $R$

其单值化映射为 $f = f_2' \circ f_1$，其中 $f_i'$ 是由包含映射诱导的 $R$ 上的映射。

利用两个定理，可以通过将较小的纤维曲面粘合在一起构造纤维曲面，同时对单值化映射进行良好的控制。这种构造的一个良好起始块是霍普夫链环，它由两个恰好相互链接一次的圆组成。霍普夫带是霍普夫链环的塞弗特曲面。因此，它是$S^3 - \{$霍普夫链环$\}$的纤维曲面。

**引理 2.4**（霍普夫带的单值化）。霍普夫带是纤维曲面。此外，正（分别为负）霍普夫带的单值化是沿其核心曲线的右手（分别为左手）*Dehn* 扭转。

事实上，[9] Giroux 和 Goodman 证明了，$S^3$ 中的每个纤维化链环都可由平凡结通过沿霍普夫带进行村杉和或村杉差得到。也就是说，霍普夫带是构造 $S^3$中任意纤维化链环的构件。

2.2. **交替纽结/链环的纤维**。设 $L$ 在 $S^3$ 中是一个纤维化链环。一般来说，要确定 $S^3 - L$ 的纤维确实很困难。然而，如果 $L$ 是交替的，塞弗特在 [19] 中展示了如何构造其纤维。我们先回顾交替链环的定义，然后说明塞弗特算法。更多详情请参见 [18]。

**定义 2.5**（交替链环）。设 $L$ 是一个定向链环。$L$ 的交替图是这样一种链环图：沿链环的每个分支行进时，交叉点依次呈现下穿和上穿。若一个链环存在交替图，则称其为交替链环。

**定义 2.6**（塞弗特算法）。设 $L$ 是一个定向链环。塞弗特算法可描述如下。

（1）在每个交叉处切开，再以如下方式粘合：使交叉处附近有2 个分支，如图 *2* 所示。

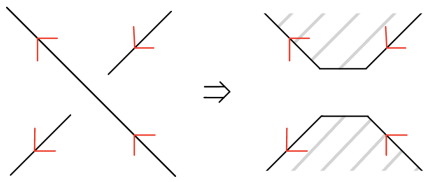

FIGURE 2. Seifert 算法中的交叉剪切与粘贴

(2) 完成所有这些剪切粘贴操作后，我们得到一组互不相交的定向简单闭曲线。每条曲线都围成一个圆盘，

除非其中两条或更多曲线彼此嵌套。在这种情况下，我们可以认为最内侧的曲线略微位于其他曲线上方，并重复这一过程，直到不再有嵌套曲线。然后，对于每个区域，如果它位于边界曲线定向所确定的左侧，就赋予该区域“$+$”号；否则赋予“-”号。请注意，这一结果有时称为棋盘格着色。

(3) 最后，我们用一条扭带在每个交叉处重新连接这些圆盘，扭转方向由原始交叉的方向决定。

该算法的结果是一个曲面 $S$，其（定向）边界为 $L$。

由塞弗特算法得到的曲面称为 $L$ 的塞弗特曲面。链环 $L$ 的亏格定义为：在 $L$ 的补空间中，以 $L$ 为边界的曲面所具有的最小亏格。在 [8] 中，Gabai 证明，若 $L$ 是交替链环，则 $L$ 的亏格等于 $L$ 的塞弗特曲面的亏格。

**定理 2.7** ([8], 定理 4)。设 $L$ 是 $S^3$ 中的一个定向链环。若 $S$ 是对 $L$ 的交替图应用塞弗特算法得到的曲面，则 $S$ 是一个亏格最小的曲面。

这一条件与纤维性密切相关。

**定理 2.8** (定理 4.1.10，见 [10])。设 $S$ 是纤维化链环 $L$的一个塞弗特曲面。以下条件等价。

(1) $S$ 达到最小塞弗特亏格。(2) $S$ 是纤维曲面。

**2.3. 蒂希¨米勒多项式**。蒂希¨米勒多项式 $\theta_F$是纤维面 $\mathcal{F} \subset H^1(M,\mathbb{R})$的一个多项式不变量，它确定了 $\mathcal{F}$中所有纤维的单值化的伸缩因子。与亚历山大多项式类似，蒂希米勒多项式的系数属于群环$\mathbb{Z}(G)$，其中 $G = H_1(M,\mathbb{Z})/$为挠。

这里介绍一种计算蒂希米勒多项式的方法。设$\varphi$: $S \to S$是一个伪阿诺索夫映射，且设 $x = x_1, \cdots x_{n-1}$是一个乘法基，它适用于

$$H = \mathrm{Hom}(H^1(M, \mathbb{Z}^\varphi), \mathbb{Z})$$

，其中 $H^1(M,\ \mathbb{Z})^\varphi$ 是 $\varphi$-不变上同调。注意，我们可以通过在环路上取上同调类的值，构造一个从 $\pi_1(S)$到 $H$ 的自然映射。现在选择一个提升 $\tilde{\varphi}$: $S \to S$，它是 $\varphi$ 在覆盖空间 $S$ 中的提升；该覆盖空间对应于前述映射下的$H$。

令 $M = S \times [0,1]/(p,\ 1) \sim (\varphi(p),\ 0)$ 为 $\varphi$ 的映射环面。那么我们有

$$G = H_1(M,\mathbb{Z})/\operatorname{torsion} = H \oplus \mathbb{Z}$$

令 $u$ 表示 $G$ 的 $\mathbb{Z}$ 分量的生成元，使得 $G$ 由 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 和 $u$ 生成。令 $V$ 和 $E$ 分别为 $S$ 上承载伪阿诺索夫映射 $\varphi$ 的不变列车轨道 $\tau$ 的顶点和边。$V$ 和 $E$ 在 $S$ 中的提升 $V$ 和 $E$ 可分别视为 $\mathbb{Z}(H)$-模。因此，提升 $\tilde{\varphi}$ 在这些 $\mathbb{Z}(H)$-模上分别作用为矩阵 $P_V(x)$ 和 $P_E(x)$。McMullen 在 [15] 中证明，Teichm¨uller 多项式可以通过这两个矩阵计算得到。

**定理 2.9**。 在前述记号下，*Teichm¨uller* 多项式可显式计算如下：

$$\theta_{\mathcal{F}}(x,u) = \frac{\det(uI - P_E(x))}{\det(uI - P_V(x))}$$

## 3. The $n$ chained links and their complements

In [11], Eiko Kin 详细分析了一个称为魔术流形的 3 维流形。该流形具有这样的性质：其 Thurston 单位球的所有面都是纤维化的。她精确确定了所有纤维面，并且对于纤维面中的每个整点，找出了相应单值化的拓扑结构（即确定其亏格和边界分支数）。本节将用于研究魔术 3-流形的技术推广到更一般的链环补空间中的纤维序列。我们研究这些 $n$-chained 链环是否为纤维化的、纤维及其相应单值化的构成，以及各种 $C(n,\ p)$'s 的 Thurston 单位范数球的形状。

**定义 3.1** ($n$-链环)。 *A* $n$-链环是由 $n$ 个链环分支构成、这些分支彼此相连并呈圆形排列的链环。某些分支可能带有自身半扭转。我们总可以将所有这类自身半扭转集中到一个分支上，同时保持扣结形状不变（见图*4*）。这里，扣结一词指相邻两个链环分支之间的一对交叉点。注意，扣结只有2 种可能的形状，并且可以通过沿适当方向进行自身半扭转，将一种形状变为另一种。

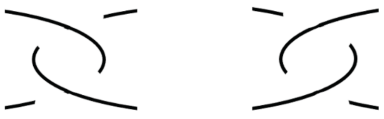

Figure 3. 两种不同类型的交扣，我们将左边的一种称为 a+ *clasp* ，右边的一种称为 $a-$ *clasp*

我们用 $C(n,p)$ 表示这样的 $n$ 链环，其中 $n$ 表示分支数， $p$ 表示半扭转的数量。注意， $p$ 是一个整数，而 $p$ 的正负号表示半扭转的方向。我们选择

正号表示使 $C(n,p)$ 具有交替链环图的扭转方向。

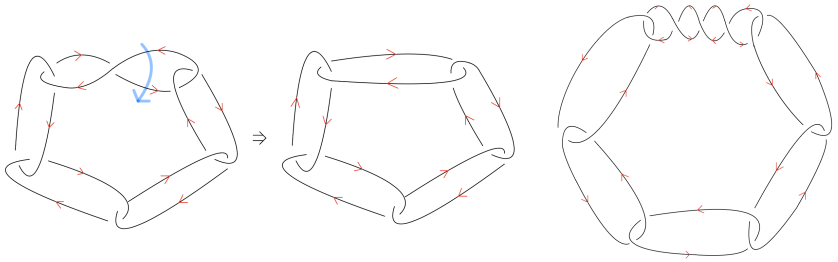

FIGURE 4. $C(5,-1)$ 和 $C(6,3)$。

备注。请注意，任意选择的“夹扣形状”都可以经同伦变形为~另一种选择。如果我们用 $C(n,p)$ 表示与 $C(n,p)$ 相同的链环，但采用不同的夹扣形状，则可以进行 $-n$ 次半扭转，将每个扣结翻转为另一种形状。请记住，$p$ 的符号取决于扣结的形状。由于每次自扭转都是一次同伦移动，我们得到 $\sim C(n,p)\cong C(n,-p-n)$。但是，在定向反转同构下，$C(n,p)$ 与 $C(n,p)$ 同构，因此我们得到 $C(n,p)\cong C(n,-p-n)$。

通常，“最小扭转”的链环是具有最大交替夹扣形状的链环。按照我们的记号，最小扭转的 $n$-链环为 $C(n,-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$。

令 $M(n,p)$ 为 $C(n,p)$ 的一个足够小邻域 $\mathcal{N}(C(n,p))$ 的补空间。例如，$M(3,0)$ 是 magic 3-流形。注意，$\partial\mathcal{N}(C(n,p))$ 是环面的不交并。Neumann 和 Reid 证明了，$M(n,p)$ 是双曲的当且仅当 $n\geq 3$ $\{|n+p|,|p|\}\not\subseteq\{0,1,2\}$。此外，它是纤维化的，这一点由 Leininger [14]证明。更确切地说，Leininger 指出，除 $(n,p)=(2,-1)$ 外，如果 $n\geq -p\geq 0$ $M(n,p)$ 是纤维化的，并给出了实际的纤维。我们稍后会用到这一构造。

现在，我们关注 $M(n,p)$ 的同调。考虑按照图4所示的方式绘制 $C(n,p)$，使顶端链环有 $p$ 个半扭转。然后，我们将顶部链环分支记作 $L_1$，并按顺时针方式将其他分支依次记为 $L_2$，$L_3$，$\cdots L_n$。

每个 $L_i$ 都界定一个两次穿孔圆盘，其穿孔来自 $L_{i-1}$ 和 $L_{i+1}$。我们将这个两次穿孔圆盘记为 $K_i$。注意，$\{[K_i]_{1\leq i\leq n}\}$ 构成了 $H_2(M,\partial M)$ 的一组基。因此我们有

**引理 3.2** ([2], 引理 4.6)。由 [14] 给出的纤维 $S$ 相对于基 $[K_i]$ 的坐标为 $(1,\cdots,1,-1)$ 即，$[S]=[K_1]+\cdots+[K_{n-1}]-[K_n]$。

注意，纤维 $S$ 是一个具有 $n$ 个边界的亏格 1 曲面，因此其欧拉示性数等于 $n$。我们的下一个目标是找出包含 $S$ 的纤维面$\mathcal{F}$。

## 4. Thurston unit ball for $C(n, 0)$

**4.1. Thurston 单位球。** 我们首先陈述本节的主要定理，但只有在建立了所有所需的引理之后，才会证明该定理。不过，主要定理中使用的记号将在整个本节中沿用。

**定理 4.1。** $C$ 的 *Thurston* 单位球 $B_n$ $(n, 0)$ 是以下各部分的并集：

（1）具有如下顶点的 $n$ 维余立方体：$(\pm 1, 0, \cdots, 0)$ $\cdots$、$(0, \cdots, 0, \pm 1)$，以及（2）两个 $n$ 维单纯形，其顶点为 $(1, 0, \cdots, 0)$ $\cdots$、$(0, \cdots, 0, 1)$、$\frac{1}{n-2}(1, \cdots, 1)$，以及其对跖像。

因此，纤维 $\frac{1}{n}(1, \cdots, 1, -1)$ 位于纤维面 $\mathcal{F}$ 中，其顶点为 $(1, 0, \cdots, 0)$ $\cdots$, $(0, \cdots, 1, 0)$, $(0, \cdots, 0, -1)$ 以及 $\frac{1}{n-2}(1, \cdots, 1)$。此外，$B_n$ 的每个面都是纤维面。

这里，$n$ 维余立方体是 $[0, 1]^n$ 的对偶。可以将其视为闭区间 $[-1, 1]$ 的连续悬挂。

此处我们仅指出，该定理推广了 magic 3-流形的情形；其 Thurston 单位球是一个平行四边形，顶点为 $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ 和 $(1, 1, 1)$,$(-1, -1, -1)$。我们观察到

**引理 4.2。** 假设 $\sigma$ 是顶点为 $a_1, \cdots, a_n$ 的 $n$ 维单纯形，且位于纤维面 $\mathcal{F}$ 中。若存在一点 $a \in \sigma$，其瑟斯顿范数 $-\chi(a)$ 等于 1，则 $\sigma$ 是某个纤维面的子集。此时，纤维面 $\mathcal{F}$ 的线性方程为 $\sum_{i=1}^{n} x_i/a_i = 1$。

证明。 证明直接来自瑟斯顿单位球是一个多胞体这一事实。□

与魔术流形的情形一样，我们可以计算 $\mathcal{F}$ 中任意本原点的欧拉示性数。

**推论 4.3。** 点 $e_1, e_2, \cdots, -e_n$ 和 $\frac{1}{n-2}(1, 1, \cdots, 1)$ 的凸包是 $B_n$ 的面 $F$ 的子集。此外，锥 $\mathcal{C} := \mathbb{R}^+ \cdot \mathcal{F}$ 中的任意本原点 $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 对应的 $\alpha$ 的代表元的欧拉示性数为 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n$。

证明。令

$$a_i = \begin{cases} e_i, & 1 \le i \le n-1 \\ -e_n, & i = n \end{cases}$$

以及 $a = \frac{1}{n}(1, \cdots, 1, -1)$。由于我们已经观察到 $na$ 是一个纤维，且 $-\chi(na) = n$，这意味着线性方程 $x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n = 1$ 是纤维面 $\mathcal{F}$ 的支撑超平面方程。将

$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 代入 $x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n$，即可得到 $\alpha$ 的欧拉示性数。□

现在我们准备好证明定理 4.1。

定理 *4.1* 的证明。注意到 $C(n, 0)$ 呈圆形对称，因此点 $p_i := \frac{1}{n}(1, \cdots, 1) - \frac{2}{n}e_i$ 对所有 $1 \le i \le n$ 而言也对应一个纤维。因此，根据推论 4.3，顶点为 $e_1, \cdots, -e_i, \cdots, e_n$ 和 $\frac{1}{n-2}(1, 1, \cdots, 1)$ 的 $n$ 维平行四边形 $P_i$ 是 Thurston 单位球边界的子集。（每个 $p_i$ 都包含于 $P_i$。）但这些 $P_i$ 的并集构成一个闭多胞体，因此它必定包含 Thurston 单位球的边界。□

4.2. **纤维的拓扑类型**。除了了解 Thurston 单位球之外，我们还可以获得关于纤维面 $\mathcal{F}$ 中每个纤维曲面的信息。为了得到给定纤维点代表元的完整拓扑类型，我们将使用 Kin 和 Takasawa 证明的边界公式的一个略作推广的版本，[12]。

**引理 4.4** ([2], 引理 4.9)。假设 $S$ 是 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{C}$ 的一个最小代表。那么 $S$ 的边界数等于 $\sum_{i=1}^{n} \gcd(a_{i-1}+a_{i+1}, a_i)$，其中下标按照 $(i \bmod n) + 1$ 取值。

现在我们聚焦于由[14]给出的各种纤维 $S$的单值化映射。

在 [14], 中，纤维是由 $n+1$ 个 Hopf 带组成的和。根据 Gabai 著名的定理（[7]），给定纤维 $S$ 的单值化等于若干 Dehn 扭转的复合。例如，$M, 0)$ 中 $(1, \cdots, 1, -1)$ 的最小代表 $S$ 具有 $n$ 个垂直 Dehn 扭转，其最后两个的方向与其他扭转不同，之后再进行一个水平 Dehn 扭转。

## 5. Thurston unit ball for $C(n, p)$ with $p > 0$

由于具有 $p > 0$ 的链环 $L = C(n, p)$ 可按我们定义的方式绘制成交替链环图，因此其塞弗特曲面 $S$ 是$L$的最小亏格曲面。

我们将介绍一种简单的算法，利用塞弗特算法计算 $C(n, p)$ 的亏格。

**定理 5.1**。设 $L = C(n, p)$ 具有 $p \ge 1$。对于 $x = (\pm 1, \cdots, \pm 1) \in H_2(M(n, p), \partial \mathcal{N}(L))$ 上的任意符号，$x$ 的瑟斯顿范数为 $n$。

证明。我们将通过明确执行塞弗特算法来证明这一点。首先假设我们任意固定了 $x$ 的每个分支的符号。注意，符号决定了链环每个分支的定向。令 $L$ 为定向与 $x$ 相对应的链环。设想将链环 $L$ 画成圆形，使扭结部分位于顶部（如图 4 所示）。将扭结链环标记为 $L_1$，然后按顺时针方向继续标记。

我们开始应用该算法，先处理与 $L_1$ 相关的交叉。通过塞弗特算法，我们得到 $p-1$ 圆，以及由半扭转产生的圆两侧的两条

（未完成）弧。现在，关注右侧的弧和下一个链环 $L_2$。

若 $L_1$、$L_2$ 的符号一致，则塞弗特算法会产生一个圆，而弧仍未闭合。否则，塞弗特算法会将弧连接起来，最终形成一个圆，并在 $L_2$ 的右侧生成另一条弧。

如此归纳进行，我们得到 $n+p$ 个圆，其数量不受链环符号的影响。由于图中相互缠绕的次数等于 $2n+p$，我们得出 $S$ 的亏格为

$$\text{Genus of } S = \frac{2+(2n+p)-(n+p)-n}{2} = 1$$

根据 Gabai 定理，它是给定链环的最小亏格曲面（采用我们在开头固定的特定定向）。因此，$S$ 是给定 $x$ 和 $||x|| = n$ 的一个最小代表。□

上述引理表明，$M \cong M$（$n$、$p$）的 Thurston 单位球是一个 $n$ 维余立方体。

**推论 5.2**。 $M(n,\ p)$ 在 $p \geq 1$ 下的 *Thurston* 单位球是一个 $n$ 维余立方体，其顶点为 $(\pm 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\ \cdots,\ (0,\ \cdots,\ 0,\ \pm 1)$。

证明。令 $e_i$为 $Z^n \cong H_2(M(n,\ p)\ \partial M(n,\ p))$ 的典范基。由于 $e_i$ 由一个两穿孔圆盘表示，因此它位于 Thurston 单位球上。根据上述定理，我们知道 $(\pm 1/n,\ \cdots,\ \pm 1/n)$ 也位于单位球上。对于每个 $(\pm 1/n,\ \cdots,\ \pm 1/n)$，它都是典范基（取适当符号）的凸组合。因此我们得出结论，$\{\pm e_i\}_{1\leq i\leq n}$ 的凸包恰好是 Thurston 单位球。□

**5.1. 判定纤维面**。 结合定理 4.1 和推论 5.2，我们知道 $C(n,\ p)$ 在 $p \geq 0$ 下的 Thurston 单位球的形状。接下来，我们要研究哪些面是纤维化面。

我们将曲面 $S(n,\ p)_x$ 记为在给定定向 $x = (\pm 1,\ \cdots,\ \pm 1)$ 下，按照定理 5.1 中的过程在 $C(n,\ p)$ 处得到的曲面。它的亏格为 1，有 $n$ 个穿孔。

选择一个扣结。如果该扣结处两个链环的定向一致，那么扣结处会出现新的圆盘和一条带。两个半扭转会将它们连接起来。也就是说，Hopf 带在该处进行村杉和。

如果两个链环的定向不一致，则选择其中一个链环并进行半扭转，使它们在扣结处的定向局部一致。在这种情况下，会与一个 Hopf 带进行村杉和，并带有一个半扭转，如图5所示。

用 $H_2(M(n,\ p)\ \partial M(n,\ p))$ 的语言来说，在对每个竖直霍普夫带进行拆分（Murasugi）后，给定定向的符号变化可以解释为若干次半扭转。此外，我们在[1]中引入了一个有用的引理。

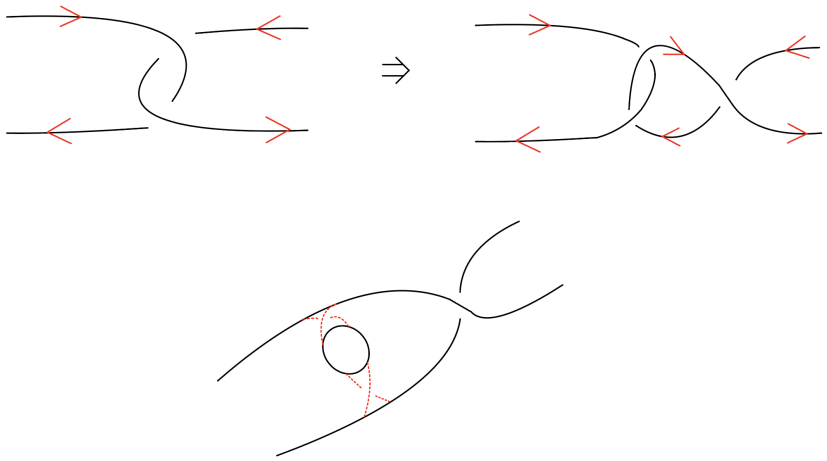

FIGURE 5. （Murasugi）在定向不同的情况下将 Hopf 带解和。注意，所得扭转与夹扣形状对应的正向半扭转相容。

**引理 5.3** （见 [1]中的例 3.1）。 设 $L$ 是一个带有如下定向的（2， $2n$）环面链环：其塞弗特曲面为一个全扭转环带。那么，当且仅当 $|n| = 1$时， $L$ 是纤维化的。每种情形都是一个正/负 *Hopf* 带。

注意，若两个链环分支的定向平行，则 $(2, 2n)$-环面链环是纤维化的。然而，在我们的情形中这种情况不可能发生，因为它们的定向继承自同一个链环分支，因此必定相反。

我们将所有观察总结为以下定理，分为两种情况。回想一下， $p$ 是 $L_1$ 上的半扭转数。

**定理 5.4** ($p$ 为偶数)。 设 $p$ 为非负偶数。对于给定的定向 $x = (\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$，记 $s$ 为符号变化的次数。即， $s = \sum_{=}^{n} \delta_{-1\, x_i x_i\ _1}$。

*Then* $S(n, p)_x$ *is fibered if and only if* $(p, s) = (0, 2), (2, 0)$.

证明。 如前所述，每当出现 Hopf 带的 Murasugi 和时，我们都会将其分解。因此，剩下的是一条扭转带，其边界是一个 $(2, p + s)$ 环面纽结。根据引理 5.3，当且仅当 $p + s = 2$ 时，它是纤维化的，由此证明得证。□

**定理 5.5** ($p$ 为奇数)。 设 $p$ 为非负奇整数，且 $x$、 $s$ 的定义与上文相同。那么 $S(n, p)_x$ 是纤维化的，当且仅当 $(p, s) = (1, 0)$。

证明。 与 $p$ 为偶数的情形相比，唯一的区别在于最后的消和过程。由于存在奇数个半扭转，顶端链环 $L_1$ 的最左部分和最右部分并不重合。因此，消和过程结束后，剩余部分是一个扭转带，其边界是一个（2， $p + s + 1$）-环面

纽结。根据引理 5.3，当且仅当 $p+s+1=2$ 和（$p$， $s$）$=(1, 0)$ 是唯一解时，它是纤维化的。□

注意，$x=\frac{1}{n}(\pm 1, \cdots, \pm 1)$ 是 $\pm e_i$ 的重心，具有这种定向的纤维性意味着各个面的纤维性。因此，结合 [14] 中的定理，我们得到以下推论。

**推论 5.6 (** $C(n、p)$ 的纤维性。链环 $C(n,p)$ 是纤维化的，当且仅当 $-n-2 \leq p \leq 2$。此外，$C(n, 0)$ 的 *Thurston* 单位球的每个面都是纤维面。相比之下， $C(n,1)$和 $C(n, 2)$仅有 2 个纤维面包含 $(1、1、\cdots、1)$ 及其对径点。

证明。对于 $p=0$，根据定理 5.4 $S(n, 0)$，$x$ 是纤维化的，当且仅当 $x$ 只有一个 $-1$ 项，其余项全为 1，或者是其对径点。根据推论 4.3，每个 $x_i$ 都位于不同的纤维面中，因此 $C(n, 0)$ 的 Thurston 单位球的每个面都是纤维面。

假设 $p=1$ 或 $p=2$。根据定理 5.4 和 5.5， $S(n, p)_x$ 是纤维化的，当且仅当 $x=(1, \cdots, 1)$ 或 $(-1, \cdots, -1)$。根据推论 5.2，只有 2 个面的支撑平面为 $\sum_{i=1}^{n} x_i=\pm 1$。□

## 6. Thurston unit ball for $C(n,p)$ with $p<0$

在 [14] 中，Leininger 证明了对于 $0 \leq p \leq n$， $C(n, -p)$ 是纤维化的。本节将探讨带负扭转的 $n$ 链环补空间的 Thurston 单位球的形状。假设有一个 $n$ 链环 $C(n, -p)$，并且像之前一样为每个链环分支编号。注意，我们可以消去所有负扭转。消去 $L_1$ 上的负扭转后，我们的链环变成了一个没有扭转的链环。不过，在此过程中，扣结的形状可能会发生变化。消去 $L_1$ 上所有扭转后，我们以循环方式重新设定各个 $L_i$ 的定向，并且对每个 $i=1, \cdots, n$，定义 $e_i \in H_2(M(c, p), \partial M(c, p); \mathbb{Z})$ 为由 $L_i$ 围成并定向的两次穿孔圆盘。见图8。

每个链环分支有 2 个交扣，现在可能是 $+$ 扣结或 $-$ 扣结。由于只有在解开一个负扭转时才会出现 $-$ 扣结，因此解开所有扭转后， $-$ 扣结的数量等于 $|p|$ 。我们将 $C(n, p)$ 的形状向量定义为。

**定义 6.1**。设 $n \geq 4$ 和 $-\lfloor n/2 \rfloor \leq p<0$。$C(n,p)$ 的形状向量是一个 $n$元组，其中每个条目或者是 $+$，或者是 $-$。第 $i$ 个条目记录链环分支 $L_i$ 和 $L_{i+1}$之间扣结的形状。对于每个 $L_i$，如果 $L_{i_1}$ 与 $L_i$ 之间的扣结是 $\alpha$ 形状扣结，且 $L_i$ 与 $L_{i+1}$之间的扣结是一个 $\beta$ 形状扣结，我们就称 $L_i$ 具有扣结形状$(\alpha, \beta)$，其中 $\alpha$、$\beta \in \{+,-\}$。

注意，任何形状向量中 $-$ 条目的数量都等于 $|p|$。

设 $L_i$ 具有 $-$ 形状， $L_{i-1}$ 具有 $+$形状，且 $L_{i+1}$。下面是我们可以对每个 $L_i$ 执行的 2 种同痕操作。

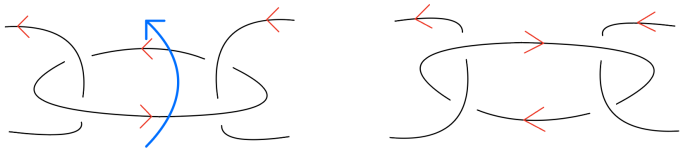

FIGURE 6. 翻转

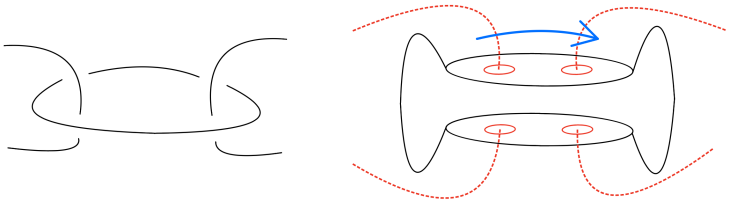

FIGURE 7. 全扭转。

(1) 翻转：我们翻转 $L_i$，使得 $+$ 扣结变为 $-$ 扣结，反之亦然。因此，翻转会交换形状向量中的第（$i-1$）项和第 $i$ 项。(2) 整扭转：存在一个由 $L_i$ 界定的两点穿孔圆盘 $D$，其第二同调类为 $e_i$。在 $D$ 处切开 $M(n, p)$。在切片处，有 $D$ 的 2 个副本，记为 $D_1$，$D_2$。现在，在将 $D_1$ 或 $D_2$ 旋转 360 度后，重新粘合 $D_1$ 和 $D_2$。

现在我们有如下命题。

**命题6.2**。设 $n \geq 4$。假设 $L_i$ 具有 $(+,-)$ 或 $(-,+)$ 夹扣形状。那么 $(1,\cdots,1) - e_i \in H_2(\underbrace{M(c,p)}\partial M(c,p);\mathbb{Z})$ 可用一个 $(n-1)$-$n$ 穿孔球面作为代表，因此其瑟斯顿范数等于$n-3$。

证明。对 $L_i$ 施加一次全扭转后，连续的两个链环分支 $L_{i-1}$ 和 $L_{i+1}$ 形成一个扣结（其形状取决于全扭转的方向）。如果忽略 $L_i$，那么其余链环分支就形成一个由 $n-1$ 个分支组成的链环。对所有分支采用正定向应用塞弗特算法，所得塞弗特曲面 $S$ 是一个 $n-1$ 穿孔球面。由于该曲面 $S$ 不以 $L_i$ 作为其边界分支，$S$ 是 $M$（$n$，$p$）中的嵌入曲面。由于它没有亏格，这是该同调类的瑟斯顿范数最小代表。□

从 $C(n, -1)$ 开始。经过一次解扭转后，我们得到一个具有形状向量 $(-, +, \cdots, +)$ 的 $n$-链环。根据命题6.2，$\frac{1}{n-3}(1, 0, 1, \cdots, 1)$ 是瑟斯顿范数等于 1 的一个点。如果我们翻转 $L_2$，那么形状向量

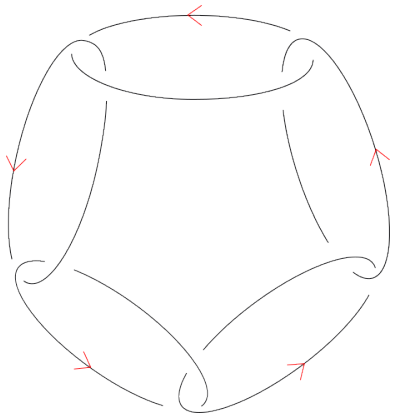

FIGURE 8. $C(5,\ -2)$。注意，每个链环分支的定向都以循环方式重新指定。从顶部链环分支开始，我们按顺时针方向将各分支标记为 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_5$。

就变为 $(+,\ -,\ +,\ \cdots,\ +)$。现在我们可以对 $L_3$ 进行一次全扭转，然后使用与命题6.2证明中相同的方法，推得点 $(1,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ 也在单位球面上。注意，这次第二个分量上有一个 $-1$。简言之，当 0 坐标向右移动一步时，也会引入一个负号。因此，通过这一过程，我们在单位球面上总共得到 $2n$ 个点，即

$$(1,0,1,\cdots,1),(1,-1,0,1,\cdots,1),\cdots,(1,-1,\cdots,-1,0) \text{ and } (0,-1,\cdots,-1)$$

及其对径点。

现在考虑 $C(n,\ -2)$。形状向量包含两个 $-$ 项。我们可以对两个链环分支 $L_i$ 和 $L_j$ 施加一次全扭转，这两个分支两侧的交扣不同；但若 $L_i$ 和 $L_j$ 是相邻的链环分支，则不能这样做。在这种情况下，新点中会出现两个零项，因此它表示一个带有 $n-2$ 个穿孔的球面。因此，它的瑟斯顿范数为 $n-4$。另请参见图8和图9。

因此，我们得到以下推论。

**推论6.3**。 按照上述过程，我们得到一组：$= V(n,p)$ 位于瑟斯顿范数单位球面上的点。$V$ 中的每个点都可通过翻转链环分支并进行全扭转得到。翻转操作会将0项移至下一个坐标。$V$中的所有点$(x_1,\cdots,x_n)$ 都具有以下性质。

(1) 存在一个整数 $N$，使得 $N\times x_i\in\{-1,0,1\}$。这样的 $N$ 对应于它的瑟斯顿范数。(2) 没有两个相邻项都等于0。

令 $B:=B(n,p)$ 为 $V\cup\{\pm e_i\}$的凸包。那么 $B$ 包含于瑟斯顿范数单位球中。

我们描述了各种 $B(n,\ p)$'s 的拓扑性质。

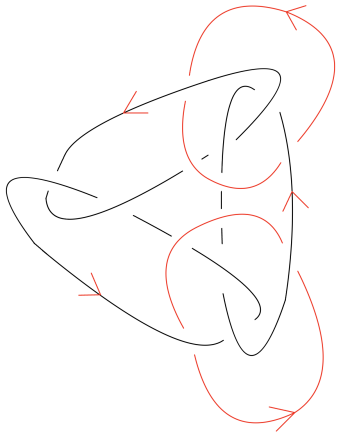

FIGURE 9. 经过两次整扭转，一次在 $L_1$ 上，一次在 $L_3$ 上，我们得到上面的链环。注意，(0，1，0，1，1)由 $S_{0,\,3}$ 表示，它是由 $L_2$，$L_4$，$L_5$ 所围成的 3 个圆盘的定向和得到的。

**命题6.4.** 设 $C(n,p)$ 是一个负扭转的 $n$-链环。任取 $1 \le i \le n$，并收集 $V(n,p) \cup \{\pm e_i\}$ 中满足 $x_i = 0$ 的所有点。这些点的凸包构成一个$(n-1)$维多胞体，并包含于 $B(n-1,p+1)$ 与 $B(n-1,p)$的并集中。

证明。 翻转一些链环分支后，我们可以假设 $L_i$ 具有夹扣形状（$-$，$+$）。在 $L_i$ 上进行一次全扭转，并暂时忽略 $L_i$。那么剩余的链环分支构成一个新链环，它同构于 $C(n,\ p+1)$ 或 $C(n,\ p)$，具体取决于扭转方向。（更准确地说，如果全扭转在 $L_{i-1}$ 和 $L_{i+1}$ 之间形成负向夹扣形状，就会产生 $C(n,\ p+1)$，反之亦然。）对于 $V(n,\ p)$ 或 $V(n,\ p+1)$ 中的任意点，在第 $i$ 个分量处补入 0 后，它就成为瑟斯顿范数单位球上的一个点。此外，这样的点仅通过一次全扭转即可得到，因此它属于 $V(n,\ p)$。

□

多胞体 $B$ 的某些面实际上是瑟斯顿单位球的面。我们介绍另一种同痕操作，适用于两侧具有相同夹扣形状的链环分支。

**定义6.5 (挤压)。** 假设 $L_i$ 具有夹扣形状$(+,+)$ 或$(-,-)$。在两侧分别进行半扭转，使每个扣结改变其形状。我们称此操作为挤压链环 $L_i$。

**定理6.6。** 设 $n \ge 4$ 和 $C(n,p)$ 是一个负扭转的 $n$链链环。存在一个纤维面包含通过挤压其中一个链环分支所得到的纤维。

证明。 我们将采用归纳法。在此证明中，每次全扭转操作后，扣结都将呈现 $+$ 形状。

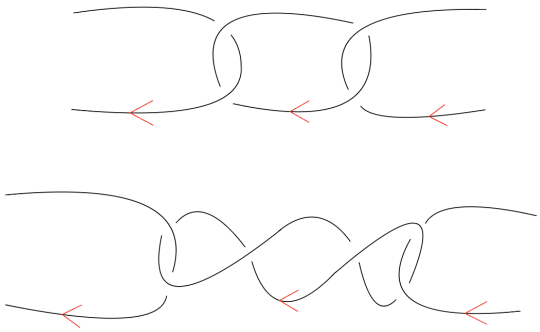

FIGURE 10. 中间的链环分支呈 $(-,-)$ 形。挤压后，扣结的形状变为 $(+,+)$，并带有一个被挤压的链环分支。

**(1)** $p=-1$。任取一点 $q$ in $V$，以及一个具有夹扣形状（$+,+$）的链环分支 $L_i$。 $q$中恰有一个 0 项。设其索引为 $k$。根据命题6.4， $C$（$n,p$）的 Thurston 范数单位球在 $x_k=0$ 处的切片必定包含 $B$（$n-1,0$）与 $B$（$n-1,-1$）的并集。在 $B$（$n-1,0$）中选取一个面。由于其形状向量的各项全为 $+$ （或 $-$）， $L_k$ 中的任意链环分支都具有（$+,+$）形状（或（$-,-$）形状）。我们选择 $L_i$，但不选 $i=k-1$, $k,k+1$，然后对其进行挤压。反转 $L_i$的定向后，（$1,\cdots,1,\cdots,0,\cdots,1$）便是由一个水平 Hopf 带与 $n-1$个竖直霍普夫带作村杉和所表示的第 $i$ 个第 $k$ 个。因此， $x=\frac{1}{n-1}(1,\cdots,\underbrace{-1,\cdots,0}_{\cdots},1)$ 位于 $i$ 个第 $k$ 个 $C$（$n,-1$）的单位球面上。现在，凸组合 x : $=\frac{n-1}{n}\times x+\frac{1}{n}\times e_k$为 $\frac{1}{n}$（$1,\cdots,\underbrace{-1,\cdots,1}_{i}$）。第 $i$ 个仍然是纤维，因为我们谨慎地选择了 $i$，使得即使撤销全扭转，挤压操作仍然有效。注意，由于该点位于 $n+1$ 个顶点的凸包中，包含 x 的面是纤维面。

**(2)** $\lfloor n/2\rfloor\leq p\leq -2$。根据归纳假设，我们已经在 $C$（$n-1,p+1$）的面上得到了挤压纤维。见图11。因此，只需证明撤销全扭转后，这种挤压操作仍然有效。但由于 $|p+1|$ 严格小于 $\lfloor n/2\rfloor$，总存在一个形状为（$+,+$）或（$-,-$）的链环分支。因此，除链环分支附近的全扭转外，撤销其余全扭转，即可得到包含挤压纤维的纤维面。

□

该定理意味着， $B(n,\ p)$ 中的大多数面实际上都是 Thurston 单位范数球的纤维面。本节最后提出一个问题并作一些评论。

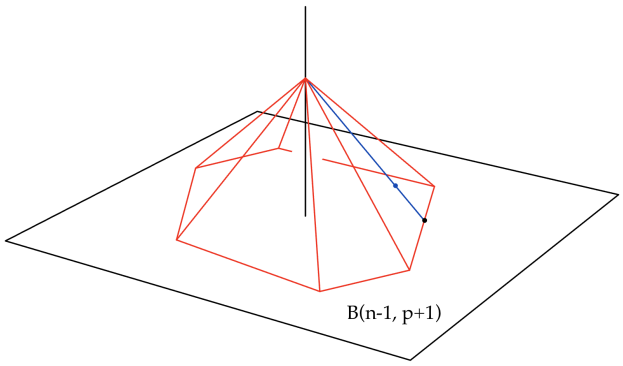


FIGURE 11. 垂直轴为 $x_k$ 坐标，与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 正交。 $V(n-1,p+1)$ 的凸包位于底部，并以顶点 $x_k = 1$ 为顶点取锥。蓝点是通过挤压得到的纤维。

**问题 1.** 当 $p < 0$ 时， $B(n,p)$ 是否等于 $C(n,p)$的 *Thurston* 范数单位球?

据我们所知，答案是肯定的。我们感谢 William Worden 以及程序 Tnorm [21]，它帮助我们计算并验证了这些定理。我们在附录 B 中提供了由 Tnorm 计算的、各种 $C(n,p)$'（至 $n \leq 6$ ）的 Thurston 单位法球所有顶点的表格。

正如我们已经提到的， $C(n,p)$ 对于 $0 \leq -p \leq n$ 是纤维化的。赋予适当的符号后，Leininger 的纤维曲面坐标为 $(1,\cdots,1)$，亏格为 1，且有 $n$ 个穿孔。由于典范基的每个向量 $e_i$ 都表示一个两次穿孔圆盘，我们可以推知存在一个纤维面 $\mathcal{F}$，其中包含由这些 $\{e_i\}$ 张成的标准 $(n-1)$ 单纯形。此外，利用引理 4.2 以及与推论 4.3 证明中类似的方法，我们可以得到，$(x_1,\cdots,x_n)$ 中所有分量均为正的任一本原点的欧拉示性数都等于 $\sum_{i=1}^{n} x_i$。我们在附录 B 中提供了 $p < 0$ 情形的一些计算。在剩余部分，我们将讨论 $C(n,-2)$ 的特殊情形，在这种情形下可以进行更明确的计算。

## 7. TEICHMÜLLER POLYNOMIAL FOR ONE FIBERED FACE OF $C(n,-2)$

本节将明确计算 $C(n,-2)$ 的一个纤维面对应的 Teichm¨uller 多项式。令 $M_n$ 为链环 $C(n,-2)$ 的外部补空间。将对 $C(n,-2)$ 执行塞弗特算法所得的曲面记为 $S_n$。若上下文中不重要，我们有时会省略下标 $n$ 。由于 $M_n$ 是 $C(n,-2)$ 的补空间，第二同调 $H_2 = H_2(M_n, \partial M_n; \mathbb{Z})$ 是秩为 $n$ 的自由阿贝尔群，其典范基由链环分支的子午线构成。由此可知，$S_n$ 是一个具有 $n$ 个边界的亏格一曲面，其在 $H_2$ 中的坐标为 (1，1，$\cdots$，1)。由于 $S_n$ 是

一个水平 Hopf 带与 $n$ 个竖直霍普夫带的村杉和，因此它是一个纤维。根据 Gabai 定理，这个纤维化的单值化 $\varphi_n$ 是沿 Hopf 带的核心曲线作 Dehn 扭转的复合。

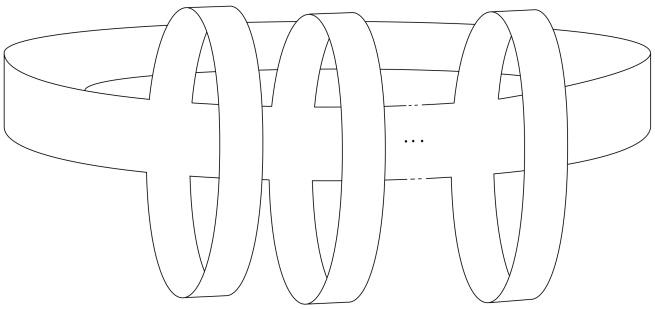

FIGURE 12. $C(n,-2)$的塞弗特曲面，其中水平带是一个正 Hopf 带，每条垂直带都是一个负 Hopf 带。这里我们省略了本应位于每条带上的全扭转，因为它们对后续计算没有影响。

因此，若按图 12 所示放置 $S_n$ ，则单值化 $\varphi_n$ 是先进行向下的 $n$ 垂直多重扭转，随后沿水平带核心作左 Dehn 扭转的复合。按照[3]和 [15], 中的方法，我们现在计算与 Thurston 单位球上包含纤维 $(1,\cdots,1)$ 的纤维面相对应的 Teichm¨uller 多项式。

如第 2.3 节所述，我们首先需要计算 $H=\text{Hom}\,(H^1(S,\mathbb{Z})^{\varphi},\mathbb{Z})^{\tilde{}}$，然后理解 $\varphi_n$ 的提升 $\tilde{\varphi}_n$ 如何作用于覆盖空间 $S_n$ 。该覆盖空间 $S_n$ 的覆盖变换群为 $H$ 。在此情形下，正如 [3], 所指出的，群 $H$恰好等于 $\varphi_n$ 不变的第一同调群 $H_1(S_n:\mathbb{Z})^{\varphi_n}$ 。我们选取$c_0,\cdots,c_n$作为 $H_1(S_n;\mathbb{Z})$的一组基，其中 $c_0$是与水平带核心对应的曲线，而 $c_1,\cdots,c_n$是与垂直带核心对应的曲线， $c_1$ 是最左侧的一条， $c_n$ 是最右侧的一条。于是， $H_1(S_n:\mathbb{Z})^{\varphi_n}$ 是 $H_1(S_n;\mathbb{Z})$中由下列列向量生成的子空间

$$B_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

˜现在我们需要弄清楚覆盖空间 $S_n$ 是什么，以及 $\tilde{\varphi}_n$ 如何作用于其上。同样，所有细节都见于 [3], ，因此这里不再赘述，而是对最简单的非平凡例子˜，即 $M_3 = C(3, -2)$，作一些图示说明。在此情形下，覆盖空间 $S_n$ 已明确绘于图14中。

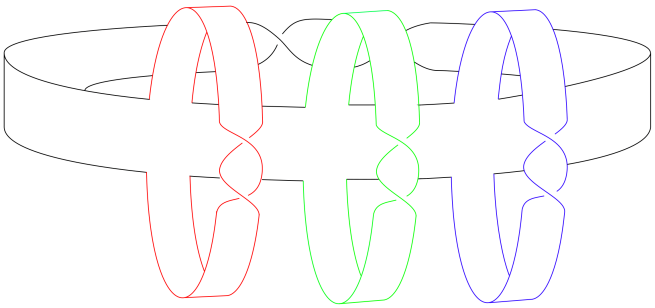

FIGURE 13. $S_3$，与链环 $C(3, -2)$ 相关的纤维

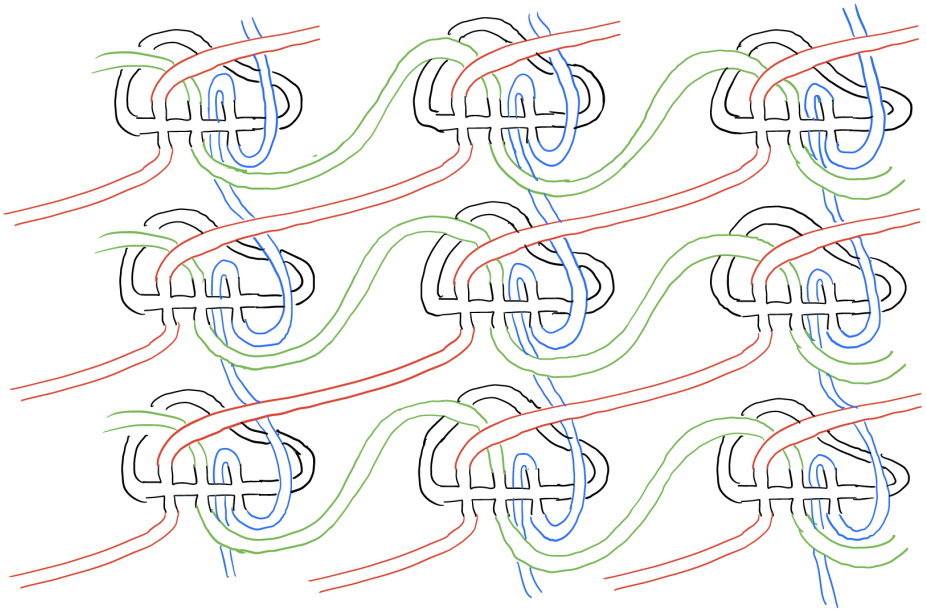

FIGURE 14. 伽罗瓦覆盖 $\tilde{S}_3$ ，其覆盖变换为 $H$

˜设 $T$ 是表示 $\tilde{\varphi}_n$ 在 $S_n$上的 $H$-模作用的矩阵。由于单值化 $\varphi_n$ 是一次水平 Dehn 扭转与 $n$次水平 Dehn 扭转的复合，我们可以将矩阵 $T$ 分解为 $T_V$ 和 $T_H$。这些矩阵表示垂直多重扭转的提升以及˜次水平 Dehn 扭转在 $S$上的作用。注意，这些矩阵的元素属于$\mathbb{Z}[G]$，其中 $G$ 是 $\widetilde{S}$的覆叠变换，与 $\mathbb{Z}^{n-1}$同构。

按照我们的约定， $T_V$， $T_H$ 是 $2n \times 2n$ 矩阵，其元素如下所示；

$$T_V = \begin{bmatrix} (x_1 \cdots x_{n-1})^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_1 \cdots x_{n-2})^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 & x_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x_1 \cdots x_{n-1})^{-1} & 0 & 0 & \cdots & (x_1 \cdots x_{n-1})^{-1} \end{bmatrix}$$

$$T_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

我们用 $n \times n$ 的 4 个分块矩阵对这些矩阵进行分块，为简便起见记作

$$T_V = \begin{bmatrix} D_s & 0 \\ D & D \end{bmatrix} \qquad T_H = \begin{bmatrix} I & \mathbf{1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

其中， $D_s$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其对角元素与 $D$ 相同，只是向右移动了一位；$\mathbf{1}$ 是一个全部由 1 填充的矩阵。

通过 [15], 可以得到 Teichm¨uller 多项式:

$$P(x_1, \cdots, x_{n-1}, u) := \frac{\det(T_V T_H - uI)}{\det(D - uI)}$$

其余计算见附录 A。令 $a_k$ 为 $D$的第 $k$个对角线元素。例如， $a_1 = 1$, $a_2 = x_1^{-1}$， $\cdots$， $a_n = (x_1 \cdots x_{n-1})^{-1}$。于是我们有如下公式。

**定理 7.1 (**特伊希米勒¨多项式**)**。 纤维面 $\mathcal{F}$ 的特伊希米勒多项式 $P$ 为

$$P(x_1, \cdots, x_{n-1}, u) := A - \sum_{k=1}^{n} u a_k A_k$$

其中 $A:=(a_1-u)\cdots(a_n-u)$ 且 $A_k=\dfrac{A}{(a_k-u)(a_{k-1}-u)}$，下标$k\equiv(mod\ n)+1$。

流形 $M_n$ 同时可以看作链环补空间，并且具有纤维化。

这两种观点都在 $H_2=H_2(M_n,\ \partial M_n;\mathbb{Z})$ 上导出自然坐标。

对于 Teichm¨uller 多项式而言，有时使用来自链环补空间观点的坐标会更加方便。例如，如果我们想利用 Teichm¨uller 多项式计算纤维的单值化的伸缩因子，而该纤维在由链环分支给出的基下的坐标为 (1，1，$\cdots$，1)。

我们计算出的 Teichm¨uller 多项式使用的是来自纤维化观点的基。因此，我们需要找出从一个基变换到另一个基的显式坐标变换。

我们先明确记号。由链环补空间给出的基记为 $y_1$，$\cdots$，$y_n$，其中 $y_1$ 对应于具有自扭转的链环补空间。若将 $M_n$ 的纤维化的单值化记为$\varphi_n$，则相应的基 $X$为 $u$，$x_1$，$\cdots$，$x_{n-1}$，其中 $x_i$构成 $\varphi_n$ 不变上同调的一组基，而 $u$ 对应于悬挂流。我们还令 $a_0$，$\cdots$，$a_{n-1}$为 $H^1(S_n,\ \mathbb{Z})$ 的典范基。根据上述计算，我们已经知道 $x_i=a_1-a_{i+1}$。此外，正如图15所示，我们看到 $a_i=y_i-y_{i+1}$，其中指标一如既往地模 $n$ 取值。最后，对应于悬挂流的基元素 $u$ 被映射为 $y_1$。

总而言之，坐标变换为

$$\begin{gathered}u\to y_1\\ x_1\to y_1-y_3\\ x_2\to y_1-y_2+y_3-y_4\\ \vdots\\ x_{n-2}\to y_1-y_2-y_{n-1}+y_n\\ x_{n-1}\to -y_2+y_n\end{gathered}$$

因此，在基 $X$ 下坐标为 (1，1，$\cdots$，1) 的纤维，其像在基 $Y$ 下的坐标为 (0，0，$\cdots$，0，1)。于是，将 Teichm¨üller 多项式专门化到点 $p=$(0，0，$\cdots$，0，1) 后，得到

$$(1-u)^n-nu(1-u)^{n-2}=(1-u)^{n-2}(1-(n+2)u+u^2)$$

简单计算可知，该多项式的最大根为$\frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}$。

## Appendix A. Proof of Theorem 7.1

在本附录中，我们完成第7节中 Teichm¨uller 多项式的计算。

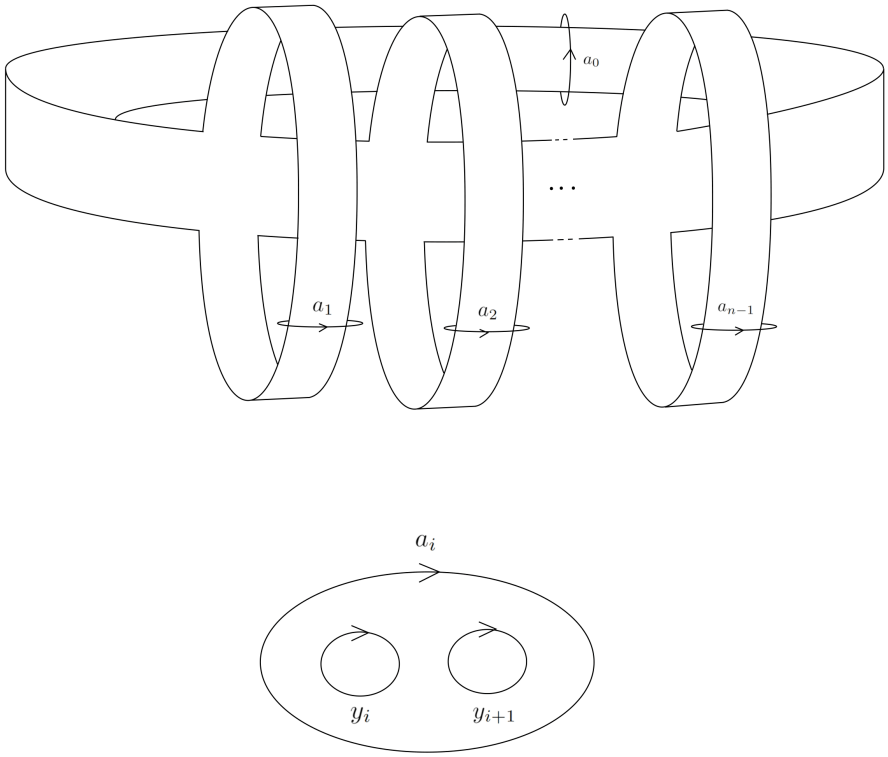


FIGURE 15. 带有$a_i$几何表示的曲面 $S_n$ 。底部展示了 $a_i$与链环分量之间的关系，因为 $a_i$、 $y_i$ 和 $y_{i+1}$ 总是围成一个圆盘 $M_n$

我们需要计算分块矩阵的行列式，因此使用以下引理。

**引理 A.1.** 设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 为一个分块矩阵，其中 $A$、 $D$ 为方阵。那么 $M$ 的行列式为$\det(A)\det(A-BD^{-1}C) = \det(D)\det(D-CA^{-1}B)$。进一步假设，若 $C$ 与 $D$ 可交换，则$\det(M) = \det(AD-BC)$。

矩阵 $T_V T_H - uI$ 可以表示为如下分块矩阵,

$$T_V T_H - uI = \begin{bmatrix} D_s - uI & D_s \cdot \mathbf{1} \\ D & D \cdot \mathbf{1} + D - uI \end{bmatrix}$$

通过进行一些行化简，我们可以简化该矩阵:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -DD_s^{-1} & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D_s - uI & D_s \cdot \mathbf{1} \\ D & D \cdot \mathbf{1} + D - uI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_s - uI & D_s \cdot \mathbf{1} \\ uDD_s^{-1} & D - uI \end{bmatrix}$$

这种操作不会影响行列式，并且现在底部的两个分块矩阵均为对角矩阵，因此它们可交换。于是我们可以应用引理 A.1 来计算行列式

$$\begin{aligned}\det(T_V T_H - uI) &= \det((D_s - uI)(D - uI) - uD_s \cdot \mathbf{1} \cdot DD_s^{-1}) \\ &= \det(D_s((D_s - uI)(D - uI) - u\mathbf{1} \cdot D)D_s^{-1}) \\ &= \det((D_s - uI)(D - uI) - u\mathbf{1} \cdot D)\end{aligned}$$

令 $B_k := (a_{k-1} - u)(a_k - u)$，其中指标模 $n$ 取值。则矩阵 $(D_s - uI)(D - uI) - u\mathbf{1} \cdot D$ 为

$$\begin{bmatrix} B_1 - ua_1 & -ua_1 & \cdots & -ua_1 \\ -ua_2 & B_2 - ua_2 & \cdots & -ua_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ua_n & -ua_n & \cdots & B_n - ua_n \end{bmatrix}$$

注意，$n \times n$ 矩阵 $[m_{ij}]$ 的行列式公式为

$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$$

我们按照每个求和项 $m_{1、\sigma(1)} \cdots m_{n、\sigma(n)}$ 所包含的对角线元素数量进行分类。只有一项包含 $n$ 个对角线元素，即 $(B_1 - ua_1) \cdots (B_n - ua_n)$。将其视为关于 $u$ 的多项式，记为 $f(u)$。不存在包含 $n-1$ 个对角线元素的项。现在考虑包含 $n-2$ 个对角线元素的项。如果该项缺少第 $i$ 和第 $j$ 个对角线元素，那么它必为 $-u^2 a_i a_j (B_1 - ua_1) \cdots (B_n - ua_n)/(B_i - ua_i)(B_j - ua_j)$。注意，符号为负，因为置换 $\sigma$ 为 $(i、j)$，其符号为负。由于该项抵消了对角线乘积中 $u^2$ 的每一项，将这些项相加后，$f(u)$ 中不再含有 $u^2$ 项。重复这一过程，$f(u)$ 仅含常数项和一次项，以及关于 $u$ 的 $u^n$ 项。

行列式公式中有很多 $u^n$ 项，但它们会相互抵消，因为这只是 $u\mathbf{1} \cdot D$ 的行列式。因此，我们得出给定矩阵的行列式为

$$P'(u) = B_1 \cdots B_n - u(\sum_{k=1}^{n} B_1 \cdots B_n / B_k)$$

该公式可由 $P'$ 除以 $\det(D - uI)$ 得出。

## Appendix B. Some calculations of $C(n, p)$ with $p < 0$

本节给出我们对一些$C(n,\ p)$ $p < 0$的计算结果和顶点表。

我们感谢 William Worden 及其论文 [4]，以及名为'Tnorm'的程序，它们帮助我们验证了定理。Tnorm 能够计算给定链环补空间的 Thurston 单位球的顶点。在本节的表格中，我们列出了这些顶点（形式为$\pm e_i$'的顶点除外）及其代表元的拓扑类型。因此，

表格左列是顶点的坐标，右列是第二同调群中代表这些顶点的相应曲面。

| $C(4,\ -1)$ | |
|---|---|
| $\pm(1,\ 0,\ 1,\ 1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(1,\ -1,\ 0,\ 1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(1,-1,-1,0)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(0,\ -1,\ -1,\ -1)$ | $S_{0,3}$ |

| $C(5,-1)$ | | $C(5,-2)$ | |
|---|---|---|---|
| $\pm\ (1/2,0,1/2,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ | $\pm(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(1/2,-1/2,0,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ | $\pm(0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm\ (1/2,-1/2,-1/2,0,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ | $\pm(1,0,-1,0,1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(1/2,-1/2,-1/2,-1/2,0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ | $\pm(1,0,-1,-1,0)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(0,-1/2,-1/2,-1/2,-1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ | $\pm(1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0)$ | $S_{0,3}$ |

| $C(6,-1)$ | |
|---|---|
| $\pm\ (1/3,\ 0,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |
| $\pm\ (1/3,-1/3,0,1/3,1/3,1/3)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |
| $\pm(1/3,-1/3,-1/3,0,1/3,1/3)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |
| $\pm\ (1/3,-1/3,-1/3,-1/3,0,1/3)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |
| $\pm\ (1/3,-1/3,-1/3,-1/3,-1/3,0)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |
| $\pm(0,-1/3,-1/3,-1/3,-1/3,-1/3)$ | $\frac{1}{3}S_{0,5}$ |

| $C(6,-2)$ | |
|---|---|
| $\pm(0,1/2,0,1/2,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (1/2,0,-1/2,0,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (1/2,\ -1/2,\ 0,\ -1/2,\ 0,\ 1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(1/2,-1/2,1/2,0,-1/2,0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(0,1/2,-1/2,-1/2,0,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (1/2,\ 0,\ -1/2,\ -1/2,\ -1/2,\ 0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(0,1/2,-1/2,0,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(1/2,0,-1/2,-1/2,0,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(1/2,-1/2,0,-1/2,-1/2,0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |

| $C(6,-3)$ | |
|---|---|
| $\pm(0,1/2,1/2,0,1/2,1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(1/2,0,-1/2,1/2,0,-1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (1/2,-1/2,0,1/2,-1/2,0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(0,-1/2,1/2,0,1/2,-1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (-1/2,0,1/2,1/2,0,-1/2)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm\ (1/2,1/2,0,-1/2,-1/2,0)$ | $\frac{1}{2}S_{0,4}$ |
| $\pm(0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)$ | $S_{0,3}$ |
| $\pm(-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$ | $S_{0,3}$ |

## References

[1] S. Baader 和 C. Graf。s

3 *Expositiones Mathematicae* 34 4 423 435, 中的纤维链环。,
2016
（）：–。[2] H. Baik、J. Baik、C. Kim 和 P. Tranchida。穿孔曲面上的伪阿诺索夫映射的拓扑熵与映射环面的同调。 *Glasnik matematički*, 57 2 291 312, 2022（）：–。[3] R. Billet 和 L. Liechti。纤维交错链环的 Teichm

¨ *Osaka* uller 多项式。,
*Journal of Mathematics* 56 4 787 806, 2019
（）：–。[4] D. Cooper、S. Tillmann 和 W. Worden。通过旋转正规浸入研究瑟斯顿范数。
*arXiv preprint arXiv:2109.04498*, 2021。[5] S. Friedl、W. L

¨ *Breadth in contemporary* uck 和 S.
*topology* 102 57 77, 2016
Tillmann。群与多胞体。, ：–。[6] D. Gabai。村杉和是一种自然的几何运算。
*Amer. Math. Soc.*, ：–。[7] D.
*Contemp. Math.* 20 131 143, 1983
Gabai。村杉和是一种自然的几何运算 II。 *Contemp. Math*, 44 93 100, 1985：–。[8] D. Gabai。交替链环的亏格。
*Duke mathematical journal* 53 3 677 681, , （）：–。
1986
[9] E. Giroux 和 N. Goodman。关于三维流形中开放书分解的稳定等价。 *Geometry & Topology*, 10(1):97–114, 2006。[10] A. Kawauchi。 *Survey on knot theory*。Springer Science & Business Media, 1996。[11] E. Kin。magic 3-流形上纤维化的单值化动力学。
*arXiv preprint arXiv:1412.7607*, 2014。[12] E. Kin 和 M. Takasawa。具有小熵的伪Anosov辫群与 magic 3-流形。 *arXiv preprint arXiv:0812.4589*, 2008。[13] T. Kitayama。瑟斯顿范数综述。载于 *In the Tradition of Thurston II*. *Geometry and Groups* 149 199 2022 , 第 – 页。

Springer, 。[14] C. J. Leininger。Whitehead链环一个分支上的手术是虚纤维化的。 *Topology*, 41(2):307–320, 2002。[15] C. T. McMullen。纤维化 3 维流形的多项式不变量与叶状结构的 Teichm¨uller 测地线。载于 *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 第 33 卷, 第 519–560 页。Elsevier, 2000。 *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*W. D. Neumann 和 A. W. Reid。双曲流形的算术性。载于 *Topology'90*, 第 273–310 页。de Gruyter, 2011。 *Topology'90*N. Pacheco-Tallaj、K. Schreve 和 N. G. Vlamis。隧道数为一的流形的瑟斯顿范数。 *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 28(09):1950056, 2019。[18] D. Rolfsen。 *Knots and links*, 第 346 卷。American Mathematical Soc., 2003。[19] H. Seifert。 ¨关于纽结的亏格。 *Mathematische Annalen* 110 1 571 592, , （）：–。
1935
[20] T. William。三维流形同调的一个范数。 *Mem. Amer. Math. Soc*, 339 99 130, 1986：–。[21] W. Worden。Tnorm（计算机软件）。 *Available at* `https://pypi.org/project/tnorm` *Version 1.0.4 (Jan 24, 2022)* , 。

Juhun Baik, Department of Mathematical Sciences, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, South Korea
*Email address*: jhbaik@kaist.ac.kr

Philippe Tranchida, Universié Libre de Bruxelles, Département de Matématiques, C.P.216-Algèbre et Combinatoire Boulevard du Triomphe 1050 Bruxelles , „Belgium*Email address*: tranchida.philippe@gmail.com