arXiv:2303.02294v1 [math.MG] 4 Mar 2023

曲率约束下的反等周问题

Kostiantyn Drach 和 Kateryna Tatarko

Abstract. 本文解决了λ-*convex* 体类中的若干反等周问题，即边界上每一点的曲率都不小于某个 $\lambda > 0$的凸体。

我们对 $\mathbb{R}^3$ Borisenko 提出的一个猜想给出了肯定的回答。该猜想指出， λ-*convex lens*, 即两个半径为 $1/\lambda$的球的交集，是所有给定表面积的 λ-凸体中体积 *minimizer*的唯一凸体。

此外，我们还证明了一个 *reverse inradius inequality*：在任意维数的常曲率模型空间中，我们证明，在所有给定表面积的 λ-凸体中， λ-凸透镜体（在非零曲率空间中有适当定义）具有最小的内切球。这解决了 Bezdek 关于 $\mathbb{R}^n$中等周球多面体的最小内切半径的猜想。

Contents

1. 引言 2 1.1. 经典与反等周问题 2 1.2. 曲率约束下的反等周问题 2 1.3. λ-凸体的反内切半径不等式 4 1.4. 论文结构 5 2. 一些背景知识 6 2.1. 模型空间中的全脐超曲面 6 2.2. λ-凸体 7 2.3. λ-凸多胞体及其性质 8 2.4. 内切球及其性质 10 2.5. $\mathbb{R}^n$ 中的内平行体及其性质 14 3. $\mathbb{R}^3$ 中反向等周不等式的证明（定理 A）16 3.1. 步骤 I： K 是一个 λ-凸多胞体 16 3.2. 步骤 II：一般情形 23 4. 反内切半径不等式的证明（定理 B）24 4.1. 化归为一个等价命题（定理 C）24 4.2. 定理 C 的证明（假设关键断言成立）25

Keywords: λ-凸性；反向等周不等式；内切半径。*2020 Mathematics Subject Classification:* 52A30, 52A38（主要）；52A27, 52A40, 52B60（次要）。第一作者获得欧洲研究理事会高级资助“SPERIG”（#885707）的支持；第二作者部分获得加拿大自然科学与工程研究理事会发现基金，编号为2022-02961，的支持。

4.3. 关键断言的证明 27附录 A. λ-凸曲线在 $\mathbb{R}^2$中的反向等周不等式，再探讨 31附录 B. 透镜体与纺锤体：一场渐近竞争 34参考文献 38

1. Introduction

1.1. **经典与反等周问题**。

给定表面积时，什么形状的物体体积最大？

这个经典的等周问题已在各种各样的背景下得到研究、推广和解决，例如在常曲率空间中等（参见例如 [Ro]）。例如，在 n维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中，它导出以下基本不等式：

The Classical Isoperimetric Inequality. 设 $n \geqslant 2$。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个表面积为 $|\partial K|$、体积为 $|K|$的区域，并设 $B \subset \mathbb{R}^n$ 是一个球。若 $|\partial K| = |\partial B|$，则$|K| \leqslant |B|$，且等式成立当且仅当 K 是一个球。

同时，还可以提出以下<样式 id='1'>反等周问题</样式>：

What body has the smallest volume for a given surface area?

<样式 id='1'>近年来，反等周问题受到了广泛关注。注意，对于给定的表面积，</样式> n<样式 id='4'>维体积可以任意小（可以想象一个扁平薄饼，即一个细长区域）。因此，按原表述，反等周问题有一个平凡解。在其著名的工作中，Ball</样式> [<样式 id='7'>Bal1</样式><样式 id='9'>，</样式><样式 id='11'>Bal</样式>2]<样式 id='14'>通过将问题限制在凸体的仿射类中，克服了这一问题。在此背景下，该问题变得并非平凡，Ball 证明了以下结论：</样式>

The Reverse Isoperimetric Inequality due to Ball. 设 $n \geqslant 2$. 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个凸体，$T \subset \mathbb{R}^n$ 为一个正则单形。那么存在 K' 的一个仿射像 K，使得 $|\partial K'| = |\partial T|$ 且 $|K'| \geqslant |T|$。

Barthe 后来解决了 Ball 反向等周不等式的等号情形[Ba]。我们指出，对于经典等周问题，极值对象是球；而对于反向问题，情况则不再如此。

1.2. **曲率约束下的反等周问题**。本文采用一种不同的方法，将反等周问题限制在满足一致曲率约束的凸体类中。具体来说，我们要求凸体的边界不能过于平坦，也不能过于弯曲，具体含义如下。

设 K 是常曲率为$c \in \mathbb{R}$、 $n \geqslant 2$的 n维模型空间 $M^n(c)$中的一个凸体。若存在 $\lambda > 0$，使得相对于边界∂K 的内法向量，主曲率 k_i、 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$满足

$$k_i(p) \geqslant \lambda \quad \text{for each point } p \in \partial K.$$

如果 K 的边界不光滑，那么上述界限应按屏障意义理解，我们将在定义2.1 (另见图 2)中给出精确定义。类似地， K称为 λ-凹的，如果不等式

$$\lambda \geqslant k_i(p) \geqslant 0$$

在每一点 $p \in \partial K$处，对每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$均成立。

结果表明，在常曲率空间中，对于 λ-凸体和 λ-凹体，反等周问题是适定的，并且存在非平凡解。本文将重点研究该问题在欧几里得空间中的情形。尽管λ-凹性与 λ-凸性的概念看起来互为对偶，但针对这两类体求解反等周问题的进展并不一致。

对于 λ-凹体，在 $\mathbb{R}^n$中，反等周问题已由 Chernov 和本文作者在 [CDT], 中彻底解决，文中作为一系列反向拟曲率积分不等式的一部分，证明了以下尖锐结果：

The Reverse Isoperimetric Inequality for λ-concave Bodies （[CDT]）。设 $n \geqslant 2$。设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 λ-凹体，且 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 λ-香肠体，即两个半径为 $1/\lambda$的球的凸包。若 $|\partial K| = |\partial S|$，则 $|K| \geqslant |S|$，且等式成立当且仅当 K是一个 λ-香肠体。

后来， [SY] 采用不同的技巧给出了这一结果的另一种证明（另见 [Na] ，其中给出了较弱版本不等式的一种简洁证明）。

关于 λ-凸体在 $\mathbb{R}^n$，$n \geqslant 2$的反等周问题，人们所知甚少。以下猜想由 Borisenko 提出（见 [CDT]）：

猜想 （ λ-凸体的反向等周不等式）。 设 $n \geqslant 2$。设$K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 λ-凸体，并设 $L \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 λ-凸透镜体，即两个半径为 $1/\lambda$ 的球的交集（见图*1*）。若 $|\partial K| = |\partial L|$, 则 $|K| \geqslant |L|$，且等式成立当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体。

对于 $n = 2$，该猜想在 [BD2] 中得到证实（另一种证明见 [FKV] ）。随后在 [BD3、Dr1、Bor] 中取得的进一步进展，完全解决了所有二维常曲率空间及其自然推广中的一个类似猜想（例如，曲率下有界的 Alexandrov空间；另见 [CFP]，其中在 $\mathbb{R}^2$ 的不等式基础上附加了关于凸性的假设）。对于 $n \geqslant 3$，迄今仅在 $\mathbb{R}^3$ 中取得了部分进展，其中该猜想在一类受限的旋转曲面上得到了证实 [Dr3]。

本文中，我们完全解决了 $\mathbb{R}^3$ 中的 Borisenko 猜想。我们的主要结果是

定理 A （ λ-凸体在 $\mathbb{R}^3$ 中的反向等周不等式）。 设 $K \subset \mathbb{R}^3$为一个 λ-凸体，且 $L \subset \mathbb{R}^3$ 为一个 λ-凸透镜体。若 $|\partial K| = |\partial L|$，则 $|K| \geqslant |L|$.此外，当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等式成立。

为证明定理A，我们采用了 Nazarov [Naz]的一些思想。我们的方法不同于 [Dr3], ，后者使用最优控制理论和庞特里亚金极大值原理来求解相应的约束优化问题。我们的证明也可以

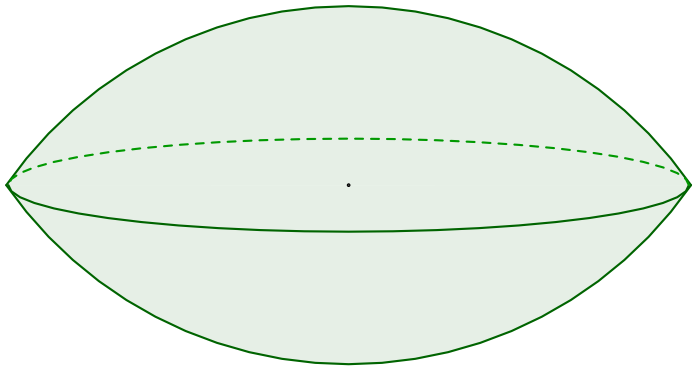

FIGURE 1. λ凸透镜体（或 UFO体）。

推广到 $\mathbb{R}^2$，正如我们在附录A中所展示的那样。这为 [BD2]中的结果提供了另一种证明。

回想一下，凸体的内切半径是包含在该凸体内的最大球的半径。作为第A 定理证明的副产品，我们在第3节建立了不等式$r(K) \geqslant r(L)$，它联系了一个 $r(K)$和 $r(L)$的 λ-凸体 $K \subset \mathbb{R}^3$ 及满足$L \subset \mathbb{R}^3$ 的透镜体 $|\partial K| = |\partial L|$。这是一个反内切半径不等式。作为本文的第二个主要结果（见第1.3节），我们证明，同一不等式在任意维数的所有常曲率空间中均成立。特别是，这表明 Borisenko 猜想可能对 $n \geqslant 4$成立。

我们还请读者参阅 [HTr、Ga]，其中探讨了非凸情形下带曲率约束的反等周问题，并取得了一些阶段性进展。（在非凸情形下，该问题并不总是有定义良好的解。例如，在 $\mathbb{R}^2$中，存在一个常数 $a > 0$，使得对于任意大的 $\ell > 0$，都存在一个区域D，其面积为 a，且 ∂D 是一条长度为 ℓ、曲率为 $|k| \leqslant 1$的简单闭曲线。）

1.3. **关于 λ-凸体的反内切半径不等式**。秉承第1.1节讨论的思路，我们可以提出以下问题：

给定表面积，哪种凸体的内切半径最大？

在 $\mathbb{R}^n$中，答案是球，而且它是唯一具有这一性质的体。这是一项经典结果，可直接由以下事实推出：内切球的表面积不大于其所内切的凸体的表面积。反过来的问题

对于给定的表面积，哪种凸体的内切半径最小？

对于常曲率空间中的 λ-凸体，它定义良好且存在非平凡解；而对于一般凸体，情况并非如此。

对于欧几里得平面（即曲率为零的常曲率空间）中的二维 λ-凸体，Milka [Mi2] 证明了，λ-凸透镜体在

给定边界长度下具有最小内切半径。很久以后，这一结果被推广到曲率下有界的二维亚历山大罗夫空间中的任意 [Dr4] -凸域，从而解决了二维情形下的这一问题。最近，Bezdek [Be1] 证明了，在所有 λ-凸体中，$\mathbb{R}^n$，$n \geqslant 2$给定 λ-凸透镜体具有最小内切半径。Bezdek 猜想，对于给定表面积的体积-凸体，同样的结论也成立 λBe1，猜想 [。我们通过确立以下尖锐且更一般的结果，证明了这一猜想：

定理 B (凸体的反内切半径不等式，其中 λ-凸)。设 $n \geqslant 2$。设$K \subset M^n(c)$是常曲率为 c 的模型空间 $M^n(c)$ 中的一个 λ-凸体，并设$L \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸透镜体。若 $|\partial K| = |\partial L|$, 则这些体的内切半径满足$r(K) \geqslant r(L)$。此外，当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等式成立。

关于常曲率空间中的 λ-凸透镜体的定义，见定义2.1。

以下结果是定理 B 在二维常正曲率空间中的直接推论，可利用球面对偶性得到（见 [BD3，章节 4]）：

推论1.1 ($\mathbb{S}^2$中的逆外半径不等式)。设 $K \subset \mathbb{S}^2$ 是一个 λ-凹体，$S \subset \mathbb{S}^2$ 是一个 λ-香肠体（即两个测地曲率等于 λ的圆的凸包）。若 $|K| = |S|$, 则这些体的外接半径 $R(K)$ $R(S)$（即包含这些体的最小测地圆盘的半径）满足 $R(K) \leqslant R(S)$。此外，当且仅当 K 是一个 λ-香肠体时，等式成立。□

对于任意维数球面中的 λ-凹体，同样的结果很可能成立，但证明可能需要一些额外的工具。

最后，我们想指出，在 $\mathbb{R}^n$ 中 λ-凹体这一类中，逆内半径问题有一个简单的解。事实上，$r(K) \geqslant 1/\lambda$，因为每个 λ-凹体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都包含一个半径为 $1/\lambda$的球。这个不等式是最优的，且仅当 λ-香肠体时才能取等。

1.4. **论文结构**。在第 2 章节中，我们给出 λ-凸性 的定义，并介绍这一概念的相关背景。在第 3 和 4 章节中，我们分别给出定理A 和 B的证明。利用我们的方法，我们在附录 $\mathbb{R}^2$ 中给出 A中反向等周不等式的一个自包含证明。最后，附录 B 包含 $\mathbb{R}^n$ 中的一个渐近计算，表明当 $n \to \infty$时，给定表面积下，λ-凸透镜体的体积小于其最接近的“竞争者”——一个 λ-凸纺锤体（将在附录 B中定义）。

致谢。作者谨向 Fedor Nazarov 和 Dmitry Ryabogin 致以诚挚谢意，感谢他们给予的宝贵帮助。第二作者还要感谢数学计算与实验研究所（ICERM）的热情接待。本文的部分工作是在她参加“Harmonic Analysis and Convexity”（调和分析与凸性）项目期间完成的。

2. Some background

我们用 $M^n(c)$ 表示一个维数为 $n \geqslant 2$ 、截面曲率恒等于 $c \in \mathbb{R}$ 的完备单连通黎曼流形。我们称这些流形为模型空间。众所周知，根据 $c > 0$、 $c = 0$ 或 $c < 0$ 是否成立， $M^n(c)$ 分别是球面空间、欧几里得空间或双曲空间。

我们将使用记号 $|A|$ 表示可测集 A 在$M^n(c)$中的 n维体积。对于 A 的边界的（$n-1$）维体积（只要该体积有定义），我们也将使用相同的记号 $|\partial A|$ 。

通常，模型空间中的凸体 是一个紧致的、测地凸的且内部非空的集合。

2.1. 模型空间中的全脐超曲面。 对于给定的 $\lambda > 0$，令 $\mathcal{S}_\lambda \subset M^n(c)$ 表示一个法曲率为常数λ的完备全脐超曲面。我们将使用记号 $\mathcal{B}_\lambda$ 表示由 $\mathcal{S}_\lambda$围成的凸区域。以下各处均假设 $\mathcal{B}_\lambda$ 是闭的。

完备全脐超曲面的以下分类是众所周知的（例如参见 [BZ，第35.2节。4]）：

(1) 若 $c = 0$，即环境模型空间为欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$，则集合 $\mathcal{S}_\lambda$和 $\mathcal{B}_\lambda$ 分别是半径为 $1/\lambda$的球面和球。(2) 若 $c > 0$，即 $M^n(c)$是半径为 $1/\sqrt{c}$的球面 $\mathbb{S}^n(c)$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是半径为 $1/\sqrt{c} \cdot \operatorname{cot}^{-1}(\lambda/\sqrt{c})$的测地球面，而 $\mathcal{B}_\lambda$ 是相应的球。(3) 当 $c < 0$时，情况会更加有趣，也就是说，模型空间为双曲空间 $\mathbb{H}^n(c)$，此时情况取决于 c 与 λ之间的关系：

(a) 若 $\lambda > \sqrt{-c}$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是半径为 $1/\sqrt{-c} \cdot \operatorname{coth}^{-1}(\lambda/\sqrt{-c})$的测地球面，而 $\overline{\mathcal{B}_\lambda}$ 是测地球。在这种情况下， $\mathcal{B}_\lambda$ 是紧的。(b) 若 $\lambda = \sqrt{-c}$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是一个极限球面，而 $\mathcal{B}_\lambda$ 是一个极限球。在这种情况下， $\mathcal{B}_\lambda$不是紧的（不过，可以通过添加一个无穷远点将其紧化）。(c) 最后，若 $\lambda < \sqrt{-c}$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是一个等距超曲面（简称等距超曲面），也就是说，它是到某个全测地超平面距离给定的点的集合。通过显式计算可以看出，对每个 $\mathcal{S}_\lambda$ ，都存在唯一的超平面 $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n(c)$，使得

$$\mathcal{S}_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{H}^n(c) \colon \operatorname{dist}_{\mathbb{H}^n(c)}(x, \mathcal{H}) = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+\lambda}{\sqrt{-c}-\lambda} \right\}.$$

我们将 $\mathfrak{r}_\lambda := \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+\lambda}{\sqrt{-c}-\lambda}$称为等距超曲面 $\mathcal{S}_\lambda \subset \mathbb{H}^n(c)$ 的特征距离。在等距情形下， $\mathcal{B}_\lambda$ 并不紧致，且其中存在一个指向无穷远的方向锥 $\mathcal{B}_\lambda$。

在 $\mathbb{H}^n(c)$ 的庞加莱单位球模型中，超曲面 $\mathcal{S}_\lambda$ 是欧几里得球面：当 $\lambda > \sqrt{-c}$ 时位于单位球内；当 $\lambda = \sqrt{-c}$ 时与单位球面相切；当 $\lambda < \sqrt{-c}$ 时与单位球面相交，且交角不同于 $\pi/2$ 。注意，当

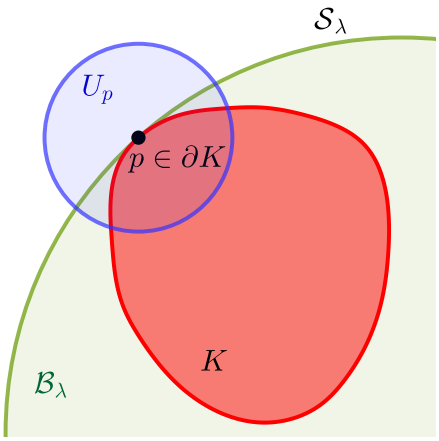

FIGURE 2. K 是一个凸体， $\mathcal{S}_\lambda$ 是具有恒定法曲率 $\lambda > 0$ 的全脐超曲面，例如球面。若在每个点 $p \in \partial K$ 周围的某个邻域 U_p 中都成立这一局部图景，则 K 是 λ-凸 的。在这种情况下，我们称 ∂K 的主曲率在屏障意义下由 λ 下界控制。

交角趋于 $\pi/2$ 时，相应的等距超曲面趋于一个全测地超平面。

2.2. **λ-凸体**。固定某个 $\lambda > 0$。回忆一下，对于模型空间中的每个全脐超曲面 $\mathcal{S}_\lambda$，我们用 $\mathcal{B}_\lambda$ 表示由 $\mathcal{S}_\lambda$ 所围成的相应凸区域。

定义 2.1（λ-凸体）。若对于每个$p \in \partial K$，都存在一个邻域 $U_p \subset M^n(c)$ 以及一个经过 p 的全脐超曲面 $\mathcal{S}_\lambda$，使得

$$U_p \cap \partial K \subset \mathcal{B}_\lambda$$

（见图2）。

对于一个 λ-凸体 K，我们称 $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}_\lambda(p)$为一个曲率为 λ（经过 $p \in \partial K$）的支撑凸集。如果 $\mathcal{B}_\lambda$ 是一个测地球，我们就称它为点 p处的支撑球（其边界 $\mathcal{S}_\lambda$ 为支撑球面）。

Blaschke 的下述经典定理将定义 2.1中的局部条件转化为全局条件。该定理最初由 [Bla] 针对 λ 中边界光滑的 -凸体证明，后来 $\mathbb{R}^2$ 将其推广至 [Ra，BrS] 针对 λ 中一般的 -凸域进行了推广；此外， $\mathbb{R}^n$以及[Ka、Mi1、Ho、BD4、Dr5] 针对其他模型空间中的 λ-凸体也进行了推广（更一般地说，还推广到了某些有界曲率的黎曼流形；参见 [Dr5] 及其中的参考文献）。

定理 2.2 (Blaschke滚动定理)。 设 $K \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸体。那么，对每个 $p \in \partial K$ ，都存在一个曲率为 λ 的支撑凸集 $\mathcal{B}_\lambda(p)$，使得$K \subseteq \mathcal{B}_\lambda(p)$。□

最后，我们指出 λ-凸性的一个等价定义。从某种意义上说，该定义与定义2.1对偶。利用定理2.2可以看出这种等价性。若凸体$K \subset M^n(c)$满足：当且仅当 λ中的任意一对点都可以由一条常测地曲率为 K 的曲线的最短圆弧连接，且该圆弧完全位于 K内，则称其为 λ-凸。由此看来， λ-凸性是标准凸性概念的一种推广；在标准概念中，当且仅当连接任意两点的线段完全位于物体内部时，我们称该物体为凸的。因此，整个纺锤超曲面，即连接这两点的所有圆弧的轨迹，以及由该超曲面围成的区域，都必须位于该凸体内（这说明了为何一些作者使用“纺锤凸性”这一名称；参见章节2.3）。纺锤超曲面将在附录B的讨论中出现。

2.3. **λ-凸多胞体及其性质**。 在本小节中，我们定义一类特殊的 λ-凸体。

定义 2.3 (λ-凸多面体)。 λ-凸多面体 是 $M^n(c)$ 中的一个 λ-凸体，它是有限个凸区域 $\mathcal{B}_\lambda$ 的交集。 λ- 凸多面体的每个面 都是相应的 $\mathcal{B}_\lambda$ 与多面体边界的交集。一个面是 $n-1$ 维的。两个面要么不相交，要么相交。后一种情况下，它们的交集称为一个（低维）面。维数为 0 和 1 的面分别称为多面体的顶点 和棱 。

定义 2.4 (λ-凸透镜体)。 一个 λ-凸多面体，若恰有两个面，则称为λ-凸透镜体 （或*UFO* 体）（见图 1）。

注意，对于 $n \geqslant 3$，一个 λ-凸透镜体恰有一个 $(n-2)$ 维面，且不存在维数小于 $n-2$ 的面。对于 $n=2$，恰有两个 0 维面（即二维透镜体的顶点）。每个透镜体关于通过其 $(n-2)$ 维面的一条全测地超平面反射对称。在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个 λ-凸透镜体是两个半径为 $1/\lambda$ 的球的交集。

我们想指出， λ-凸多胞体与球多面体之间存在直接对应关系，即由有限多个固定半径的测地球的交集所得到的体。这些离散几何对象已被深入研究，例如参见 [BLNP] 及其中的参考文献。球多面体语境下的 λ-凸性概念在多篇论文中被称为“r-超凸性”、“纺锤凸性”、“球凸性”和“r-对偶性”，例如见 [BLNP、Be2、FKV、LNT]。然而，在我们对双曲空间中λ-凸性的定义里，我们允许支撑超曲面不仅为球，也可以是极限球面或等距超曲面。前一种情形被称为 h-凸性的一种实例。从这一视角出发，受几何概率中的一些问题所启发，λ-凸性在黎曼空间中得到了研究，例如见 [BGR、BM]。

以下命题是 Blaschke滚动定理（定理 2.2）的直接推论：

命题 2.5（由 λ-凸多面体近似）。设 $K \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸体。则存在一个序列 $(P_i)_{i=1}^{\infty}$，其中的元素为 λ-凸多面体，使得 $K \subseteq \ldots \subseteq P_2 \subseteq P_1$，并且在豪斯多夫度量下 $\lim_{i\to\infty} P_i = K$。□

请注意，定义2.3 中隐含着一个假设，即所讨论的球的交集是紧的。在许多情况下，这一点是自动成立的：

引理 2.6（球的紧交集）。设 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset M^n(c)$ 是由曲率为 λ 的全脐超曲面围成的一对凸体。假设 $\mathcal{B}_1$ 不包含于$\mathcal{B}_2$，且 $\mathcal{B}_2$ 不包含于 $\mathcal{B}_1$。若 $c \geqslant 0$，或 $c < 0$ 且 $\lambda \geqslant \sqrt{-c}$，则 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ 是一个紧集。

证明。根据全脐超曲面的分类可知，参见第 2.1节。□

然而，在双曲等距情形下，即 $\lambda < \sqrt{-c}$ 时，引理2.6 在这一一般性下并不成立。由于每个 $\mathcal{B}_i$ 都是无界的，并包含一个指向无穷远的方向锥，这会带来额外的困难。尽管如此，只要取足够多个等距球，并且它们彼此足够“接近”，我们仍然可以得到一个紧交集。更确切地说，我们有：

引理 2.7（等距球的紧交集）。设 $B \subset \mathbb{H}^n(c)$ 是一个测地球，$c < 0$ 是 $\mathbb{H}^n(c)$ 中由曲率为 $\lambda \in (0, \sqrt{-c})$ 的等距超曲面围成的一族 m 凸区域 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$。还假设，对于每个 $i \in \{1, \ldots, m\}$，$B \subset \mathcal{B}_i$ 和 ∂B 在某个点 p_i 与 $\partial\mathcal{B}_i$ 相切。设 B 的半径小于特征距离 $\mathfrak{r}_\lambda$，且切点集合 $\mathbf{p} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ 不包含在任何一个相对于经过 B 中心的任意超平面的开半空间内。那么

$$\mathcal{B}_{\mathbf{p}} := \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$$

是一个紧集。

Remark。引理 2.7 若 $r \geqslant \mathfrak{r}_\lambda$（参见下文引理 2.8 (3)）则不成立。

引理 2.7 的证明。证明如下，我们需要进行以下辅助构造。设 $\mathcal{H} \subset \mathbb{H}^n(c)$ 是经过 B 中心的一个超平面。记 $S = S(\mathcal{H}) := \partial B \cap \mathcal{H}$对应的大球面。对于 $p \in S$，令 $\mathcal{B}_\lambda(p) \supset B$ 为由曲率为 λ 的等距超曲面围成、并在 B 处与球 p相切的凸区域。令 r 为 B 的半径。假设 $r < \mathfrak{r}_\lambda$ 等价于以下事实：

$$\mathcal{Y} := \bigcap_{p\in S} \mathcal{B}_\lambda(p)$$

是一个紧致的（凸）体。等价地说，这意味着对于每个这样的 S大球面，都可以找到一个点，例如 $q = q(S) \in \mathbb{H}^n(c)$，使得每条连接 q 与某点 $q' \in S$ 且曲率为λ 的等距圆弧，都垂直于 $\mathcal{H}$ 于 q'。由对称性，点 q位于经过 B 中心且垂直于 $\mathcal{H}$的测地线 γ 上。此外，

恰好存在两个这样的点，在相对于 $\mathcal{H}$的每个半空间中各有一个。将这些点称为 $q^+ = q^+(S)$和 $q^- = q^-(S)$。现在，对于点 $p \in \mathbb{H}^n(c)$，定义 $\mathcal{X}(B,p)$为所有包含 B 和 p的形如 $\mathcal{B}_\lambda$ 的凸集的交集。在此记号下，

$$\mathcal{X}(B, q^+) = \mathcal{X}(B, q^-) = \mathcal{Y}.$$

一般而言， $\mathcal{X}(B,\ p)$ 不一定是紧的。然而，由于 $\mathcal{X}(B,\ q^\pm)$ 是紧的，对于在双曲度量下充分接近 q^+ 或 q^- 的每个点 p，集合 $\mathcal{X}(B,\ p)$ 也同样是紧的。此外，如果 p 还位于测地线 γ 上、线段 $[q^-, q^+]$ 之外，并且更靠近（例如） q^+，那么 $\partial\mathcal{X}(B,\ p) \cap \partial B$ 和 q^- 都包含在相对于 $\mathcal{H}$ 的同一个开半空间内。由对称性可知，交集 $\partial\mathcal{X}(B,\ p) \cap \partial B$ 位于某个超平面 $\mathcal{I}(p)$ 内。令 $\mathcal{I}^+(p)$ 为相对于 $\mathcal{I}(p)$ 且包含 q^+ 的开半空间。最后，令

$$\mathcal{Y}^+(p) := B \cup \left(\mathcal{X}(B,p) \cap \mathcal{I}^+(p)\right).$$

我们回到引理的证明。反设结论不成立，令 $\gamma \subset \mathcal{B}_\mathbf{p}$ 为一条从 B 的中心出发并延伸至无穷远的测地射线。令 $\mathcal{H}_\gamma$ 为经过 B 的中心且垂直于 γ 的超平面，并令 $S_\gamma := S(\mathcal{H}_\gamma)$ 为相应的大球面。由于 $B \subset \mathcal{B}_\mathbf{p}$，Blaschke滚动定理（定理 2.2）保证，每条连接 γ 中一点与 ∂B 中一点、曲率为 λ 的等距弧都包含在 $\mathcal{B}_\mathbf{p}$ 内。特别地，对于某个充分接近 $q^+(S_\gamma) \in \gamma$ 的 $p \in \gamma$，有 $\mathcal{Y}^+(p) \subset \mathcal{B}_\mathbf{p}$。但根据构造， S_γ 位于 $\mathcal{Y}^+(p)$ 的内部。这就产生矛盾，因为相对于 $\mathcal{H}_\gamma$ 且包含 p 的开半空间不包含 $\mathbf{p}$ 中的点。□

2.4. 内切球及其性质。 设 $K \subset M^n(c)$ 是一个凸体。包含在 K 中的最大半径测地球称为 K 的内切球。 K 的内切半径记作 $r(K)$，是 K 的内切球半径。注意，尽管 K 可能有多个内切球（即使 K 是严格凸的），这些内切球的半径也必定相等。因此， $r(K)$ 定义良好。以下引理将讨论内切球是否唯一：

引理 2.8（关于内切球的唯一性）。设 $K \subset M^n(c)$ 是一个严格凸体 y.

(1) 若 $c \geqslant 0$，则 K 有唯一的内切球；(2) 若 $c < 0$ 且 K 是具有 $\lambda \geqslant \sqrt{-c}$ 的 λ-凸的，则 K 有唯一的内切球；(3) 对于每个 $c < 0$ 和 $\lambda' \in (0,\ \sqrt{-c})$，都存在一个 λ'-凸体 K，使得 K 恰有两个内切球；特别地，在双曲空间中，一个 λ-凸体可以有多个内切球。

证明。 欧几里得空间中的论证广为人知，例如如下所示。若有两个不同的球 B_1, $B_2 \subset K \subset \mathbb{R}^n$，且它们的半径必然相同，即 $r := r(K)$，那么 H 与 B_1 的凸包 B_2 完全包含在 K中。此外，由于 K 是严格凸的，任何半径为 r、且不同于 B_1 和 B_2 的球 $B \subset H$ 都必须位于 K的内部。因此，可以扩大 B （保持球心不变），使扩大后的球仍然包含在K中。这与 r的极大性矛盾。

我们可以重新诠释这一论证，使其同样适用于 $\mathbb{S}^n$。同样地，通过反证法，我们假设对于 $K \subset \mathbb{S}^n$存在两个不同的内切球 B_1 和 B_2。

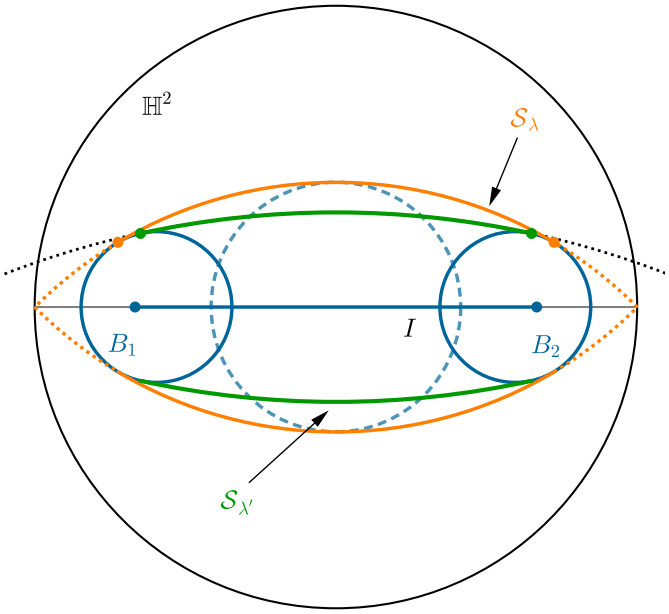

FIGURE 3. 在 $\mathbb{H}^2$的庞加莱圆盘模型中：物体 H'' 由圆盘 B_1 和 B_2 边界上的两段圆弧（蓝色）以及曲线 $\mathcal{S}_{\lambda'}$ 的两段绿色弧组成，其常曲率为 $\lambda' \in (0, 1)$（绿色）。线段 I 的外平行集 H' 由两段橙色圆弧 $\mathcal{S}_\lambda$ 和圆盘边界上的两段蓝色圆弧组成。作为比较，以原点为圆心的圆盘与 B_1 和B_2具有相同的半径。在此例中， B_1 和 B_2 是 H''唯一的内接圆盘。

令 H' 为半径为 r 且中心位于连接 I 与 B_1 和 B_2的测地线段上的球的轨迹 H' 。等价地， H' 是到I的距离至多为 r 的点集。在欧几里得空间中， $H' = H$。在球面情形下，我们有 $H' \subsetneq H \subset K$，因此将上述论证应用于 H' 可得，严格凸体 $K \subset \mathbb{S}^n$ 具有唯一内接球。至此，结论（1）得证。

现在考虑双曲情形。为简单起见，假设 $c = -1$ 并记 $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^n(-1)$。包含关系 $H' \subsetneq H$ 在 $\mathbb{H}^n$中不成立。然而请注意， $\partial H' \setminus (\partial B_1 \cup \partial B_2)$是 μ-凸的，其中 $\mu = \tanh(2r) \in (0, 1)$（即 $r = \mathfrak{r}_\mu$，见第 2.1 节中的(3c)）。若满足情形(2)的假设，则 $\mu < \lambda$。由 Blaschke滚动定理可知 $H' \subsetneq K$，因此我们可以像在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{S}^n$中那样得出矛盾。至此，(2)得证。

一般而言，无法保证 $H' \subset K$。此外， H' 给出了一个μ-凸集的例子，其中 $\mu \in (0,1)$，所有半径为 r 且位于 H' 内的球都是内切球，并且这类球构成一个连续族。为证明（3），可以如下修改这个例子（见图3 中 $\mathbb{H}^2$的构造）。给定 $\lambda' \in (0,1)$，取一条测地线段

$I \subset \mathbb{H}^n$ 并令 H' 如上文针对 $r > \mathfrak{r}_{\lambda'}$所定义。考虑连接 B_1 和 B_2中各点、曲率为 λ' 的曲线的所有可能弧段。这些弧段将扫出一个 λ'-凸体 H''，其中 B_1 和 B_2 是仅有的内切球。□

下述命题给出了凸体内的一个球为内切球所需的条件，以及若干充分条件。该命题的部分内容已广为人知（且并非最一般的情形）；为使论述完整，我们在此概述证明。

命题 2.9（内切球的充分必要条件）。设 $K \subset M^n(c)$ 是一个凸体，且 $B \subset K$ 是以某点 $o \in K$为中心的测地球。

（1）若 B 是 K的内切球，则对于任一经过 o的超平面，$\partial B \cap \partial K$ 都不包含于其任一开半空间内。（2）若 K 是一个 λ-凸多面体，$\partial B \cap \partial K$ 不包含于经过 o的任一超平面所确定的开半空间内，且 B 与 K的所有面相切，则 B 是 K的内切球。此外，该内切球是唯一的。

证明。我们先证明第（1）部分。反设 $S := \partial B \cap \partial K$ 位于某个开半空间 $\mathcal{H}^+$中。记 $\mathcal{H} := \partial\mathcal{H}^+$, $o \in \mathcal{H}$。令 $\mathcal{H}^- := M^n(c) \setminus \mathcal{H}^+$ 为 $\mathcal{H}^+$的补集。取一个较小的 $\varepsilon > 0$，并考虑一条长度为ε的测地线段 $I_\varepsilon \subset \mathcal{H}^-$，它从 o 出发且垂直于 $\mathcal{H}$。令 $r = r(K)$ 为 B的半径。定义 H'_ε 为以 I_ε为中心、半径为 $r = r(K)$的球的轨迹。由于 B 和 K 是紧的，且 S 包含于 $\mathcal{H}^+$中，该距离

$$\operatorname{dist}_{M^n(c)}\left(\partial K, \mathcal{H}^- \cap B\right)$$

严格为正。因此，存在 ε 使得 $H'_\varepsilon \subset K$。为了导出矛盾，我们可以采用与引理2.8 （1）的证明中所使用的类似论证。

现在我们处理第（2）部分。我们将在双曲情形下给出论证；其他情形的论证类似，因此从略。

首先假设 $\partial B \cap \partial K$ 至少包含 $n+1$ 个互不相同的点 $p_1, \ldots, p_{n+1}$，且包含这些点的最小全测地子空间等于 $M^n(c)$。根据假设，每个 p_i 都是 B 与某些面的切点。在 $\mathbb{H}^n(c)$的庞加莱´圆盘模型中，每个 $\mathcal{S}_\lambda(p_i)$都是欧几里得球面。此外，∂B 也是欧几里得球面。但在 $\mathbb{R}^n$中，位于内部且与任意给定的一组 $n+1$ 个互不相同的球面相切的球面至多只有一个。若 B' 是 K的内切球，那么$\partial B' \cap \partial K$ 不包含在相对于原点的任何开半空间内（第（1）部分）。根据上述唯一性，$B = B'$。

一般而言，设 $1 \leqslant m < n$ 为满足 $o \in Y$ 和 $\partial B \cap \partial K \subset Y$ 的全测地子空间 $Y \subset M^n(c)$ 的最小维数。由于 $\partial B \cap \partial K$ 不包含在任何关于经过 o 的超平面的开半空间内，体 K 必须关于 Y 对称。因此，K 的任何内切球也关于 Y 对称。注意，在 Y 内，$\partial B \cap \partial K$ 中的点不可能位于关于经过 o 的 $m-1$ 维平面的 Y 的任何开半空间内。根据 m 的极小性，我们至少可以选取 $m+1$ 个互不相同的点 p_1、……、p_{m+1}，它们属于 $\partial B \cap \partial K$，使得测地射线

op_1、……、op_{m+1}张成 Y。现在，我们可以应用与上述类似的唯一性论证。对于每个 $m < n$，在 $\mathbb{R}^n$ 中存在唯一的欧几里得球面，它位于任意m 给定的欧几里得球面内部并与之相切，并且关于一个 m 维欧几里得平面对称（我们可以假设 o 是单位球模型的中心）。于是，该命题以与 $n+1$ 个互不相同的点的情形相同的方式得证。□

以下命题将内切半径的极值性质与 λ-凸体边界的结构联系起来。

命题 2.10（内切半径的极值性质）。设 $K \subset M^n(c)$ 为一个 λ-凸体。（在 $c<0$ 且 $\lambda < \sqrt{-c}$ 的情形下，我们额外假设 $r(K) < \mathfrak{r}_\lambda$。）

如果 $K \subset M^n(c)$ 不是一个 λ-凸多面体，那么可以找到一个 λ-凸多面体 K'，使得

$$r(K') = r(K) \quad and \quad |\partial K'| > |\partial K|. \tag{2.1}$$

等价地，存在一个 λ-凸多面体 K''，使得

$$r(K'') < r(K) \quad and \quad |\partial K''| = |\partial K|. \tag{2.2}$$

证明。我们从（2.1）开始。

令 B 为 K的内切球，并令 o 为其球心。由命题 2.9 (1)，$\partial B \cap \partial K$不包含于任何一个以 o 为边界的开半空间中。取一个子集 $T \subset \partial B \cap \partial K$，其中至多有 $n+1$ 个点，且这些点具有相同性质，即相对于经过 o的超平面而言，它们不全落在任何一个开半空间内。由于 K 是 λ-凸的，对于每个 $p \in T$，存在一个曲率为 $\mathcal{B}_\lambda(p)$ 的支撑凸集 λ 经过 p。定义如下交集：

$$K' = \bigcap_{p \in T} \mathcal{B}_\lambda(p).$$

由引理 2.6 和 2.7，K' 是一个 λ-凸多面体。由 Blaschke滚动定理（定理 2.2），$K' \supset K$。因此，$|\partial K'| > |\partial K|$。由于根据假设，$K$ 不是λ-凸多面体，因此这个不等式是严格的。此外，根据构造，$B \subset K'$ 且 $T \subset \partial B$。由命题 2.9 的第（2）部分，B 是 K' 的内切球。因此，$r(K') = r(K)$。这就证明了（2.1）。

为证明 (2.2)，我们使用 (2.1) 及单调性论证。事实上，设 K' 为满足 (2.1) 的多面体，并设 B 为其半径为 $r = r(K)$ 的内切球。对于 $s \leqslant r$，设 B'为一个与 B 同心、半径为 s 的球。对每个 $p \in T$，设 p' 为测地射线 op 与 $\partial B'$ 的交集。设 T' 为所有此类 p'所构成的集合。对每个 p'，设 $\mathcal{S}_\lambda(p')$ 为在 p' 处与 B' 相切的 λ- 凸超曲面，使得 $\mathcal{B}_\lambda(p') \supset B'$。最后，定义

$$K''(s) := \bigcap_{p' \in T'} \mathcal{B}_\lambda(p').$$

由于 $s \leqslant r$，$K''(s)$ 是一个 λ-凸多面体。根据命题 2.9 (2)，$r(K''(s)) = s$。根据构造，$K''(r) = K'$，因此根据假设，$|\partial K''(r)| > |\partial K|$。根据连续性，存在 $s_0 < r$ 使得 $|\partial K''(s_0)| = |\partial K|$，从而命题得证，其中 $K'' = K''(s_0)$。□

REMARK。 我们将在定理 B 的证明中使用类似的单调性论证 .

2.5. 内平行体 $\mathbb{R}^n$ 及其性质。 设 A为$\mathbb{R}^n$中的一个凸体。距离 $t \geqslant 0$ 处的内平行体 定义为

$$A_t = A - t\boldsymbol{B} := \{x \in \mathbb{R}^n : x + t\boldsymbol{B} \subset A\},$$

其中， $\boldsymbol{B}$ 是单位欧氏球。使得 A_t 非空的最大数值 t 称为 A的内切半径 $r(A)$。注意，如果 $A \subset A' \subset \mathbb{R}^n$ 是两个凸体，那么 $A_t \subset A'_t$。凸体 A、A' 在 $\mathbb{R}^n$ 中的豪斯多夫距离定义为

$$d_H(A, A') = \min\{\mu \geqslant 0 : \ A \subset A' + \mu\boldsymbol{B}, \ A' \subset A + \mu\boldsymbol{B}\}.$$

对于凸体 $A \subset \mathbb{R}^n$ 和 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant r(A)$，定义

$$T_A(\varepsilon) := \min\{\mu \geqslant 0 : A - \varepsilon\boldsymbol{B} + \mu\boldsymbol{B} \supset A\}. \tag{2.3}$$

显然 ， $T_A(\varepsilon) \geqslant \varepsilon$，但这一不等式可能是严格的。注意， $T_A(\varepsilon) = d_H(A, \ A_\varepsilon)$.

引理 2.11 （关于 ε 的依赖性）。

$$T_A(\varepsilon) \to 0 \quad as \quad \varepsilon \searrow 0.$$

证明。 对于单调递减的 ε，序列 $A_\varepsilon = A - \varepsilon\boldsymbol{B}$中的体彼此嵌套，即若 $A_\varepsilon \subsetneq A_{\varepsilon'}$ ，则 $\varepsilon > \varepsilon'$。因此，由布拉施克选择定理 [Sch，第 63], 页可知，该序列的豪斯多夫极限存在，且等于该凸体

$$A' := \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon\right),$$

其中，Cl 表示集合的闭包。注意， A' 的内部，记为 $\operatorname{int} A'$，等于 $\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$。最后，注意到对于每个 $x \in \operatorname{int} A$ ，都存在 $\delta = \delta(x)$（其可以任意小），使得 $x + \delta\boldsymbol{B} \subset A$。例如， δ 可取为 x 到 ∂A 的距离的一半。根据内平行体的定义， $x \in A_\delta$。因此，对于每个 $x \in \operatorname{int} A$，都有 $x \in \operatorname{int} A'$，这意味着 $\operatorname{int} A' = \operatorname{int} A$，从而 $A = A'$。由构造可知，$d_H(A', \ A_\varepsilon) \to 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时。于是， $T_A(\varepsilon) = d_H(A, \ A_\varepsilon) \to 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，这正是该引理的结论。□

引理 2.12 (关于 A)。 设 A 和 A' 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且满足 $A' \supset A$。则

$$T_{A'}(\varepsilon) \leqslant T_A(\varepsilon) + d_H(A, A').$$

证明。 我们有以下推论:

$$A' \supset A \ \Rightarrow \ A' - \varepsilon\boldsymbol{B} \supset A - \varepsilon\boldsymbol{B} \ \Rightarrow \ A' - \varepsilon\boldsymbol{B} + T_A(\varepsilon)\boldsymbol{B} \supset A - \varepsilon\boldsymbol{B} + T_A(\varepsilon)\boldsymbol{B} \supset A,$$

其中最后一个包含关系由（2.3）得出。根据豪斯多夫距离的定义，我们得到

$$A' - \varepsilon\boldsymbol{B} + T_A(\varepsilon)\boldsymbol{B} \supset A \ \Rightarrow \ A' - \varepsilon\boldsymbol{B} + T_A(\varepsilon)\boldsymbol{B} + d_H(A, A')\boldsymbol{B} \supset A + d_H(A, A')\boldsymbol{B} \supset A'.$$

因此， $A' - \varepsilon\boldsymbol{B} + (T_A(\varepsilon) + d_H(A, \ A'))\ \boldsymbol{B} \supset A'$，从而 $T_{A'}(\varepsilon) \leqslant T_A(\varepsilon) + d_H(A, \ A')$，如所需。□

引理 2.13 (嵌套序列的豪斯多夫极限)。 若 $A^1 \supset A^2 \supset \ldots \supset C$ 是一个凸体的嵌套序列，则

$$\mathcal{A} := \bigcap_{j=1}^{\infty} A^j$$

是一个凸体，且

$$d_H\left(A^j, \mathcal{A}\right) \to 0 \quad as \quad j \to \infty.$$

证明。 显然， $\mathcal{A}$ 是一个闭凸集。由于每个 A^j 都包含凸体 C，因此 $\mathcal{A}$ 的内部非空。故 $\mathcal{A}$ 是一个凸体。收敛性由 [Sch，引理 1.8 得出。2]。 □

利用上述三个引理，我们得到以下辅助结论。

引理 2.14 （近似可传递至内平行体）。 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，且 $(A^j)_{j=1}^{\infty}$ 是一个凸体序列，使得

$$A^j \supset A^{j+1} \supset A \quad and \quad \lim_{j\to\infty} d_H\left(A, A^j\right) = 0,$$

那么对于距离为 $0 \leqslant t < r(A)$的内平行体，有

$$\lim_{j\to\infty} d_H\left(A_t, A_t^j\right) = 0.$$

证明。 由于 $(A^j)_{j=1}^{\infty}$ 是逼近 A 的嵌套序列，因此存在一个单调序列 $\varepsilon_j \searrow 0$ ，使得

$$d_H(A, A^j) = \varepsilon_j.$$

因此，

$$A + \varepsilon_j \boldsymbol{B} \supset A^j \quad \Rightarrow \quad A \supset A^j - \varepsilon_j \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad A - t\boldsymbol{B} \supset A^j - \varepsilon_j \boldsymbol{B} - t\boldsymbol{B}.$$

用我们的记号，最后一个包含关系也可写成 $A_t \supset A_t^j - \varepsilon_j \boldsymbol{B}$。由于根据（2.3）

$$A_t^j - \varepsilon_j \boldsymbol{B} + T_{A_t^j}(\varepsilon_j)\boldsymbol{B} \supset A_t^j,$$

我们得出

$$A_t + T_{A_t^j}(\varepsilon_j)\boldsymbol{B} \supset A_t^j. \tag{2.4}$$

根据该引理的假设， $A^j \supset A$，因此 $A_t^j \supset A_t$。于是， （2.4）意味着

$$d_H\left(A_t, A_t^j\right) \leqslant T_{A_t^j}(\varepsilon_j).$$

剩下需要证明的是，当 $j \to \infty$ 时，$T_{A_t^j}(\varepsilon_j) \to 0$。

由于序列 $\left(A^j\right)_{j=1}^{\infty}$ 是递减的，因此序列 $\left(A_t^j\right)_{j=1}^{\infty}$ 也是递减的。此外，每个 A_t^j 都包含 A_t。根据我们对 $0 \leqslant t < r(A)$ 的选择，后一个集合是一个（非空）凸体。因此，由引理 2.13，

$$\mathcal{A} := \bigcap_{j=1}^{\infty} A_t^j$$

是一个凸体，并且是 A_t^j 当 $j \to \infty$时的豪斯多夫极限。由于 $A_t^j \supset \mathcal{A}$，引理 2.12保证

$$T_{A_t^j}(\varepsilon_j) \leqslant T_{\mathcal{A}}(\varepsilon_j) + d_H(\mathcal{A}, A_t^j)$$

对于每个 $j \geqslant 1$。由引理 2.13，

$$d_H(\mathcal{A}, A_t^j) \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

由于 $\varepsilon_j \searrow 0$ 当 $j \to \infty$时，引理 2.11 保证

$$T_{\mathcal{A}}(\varepsilon_j) \to 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

综合以上结果可得 $\lim_{j\to\infty} T_{A_t^j}(\varepsilon_j) = 0$。至此，证明完成。 □

3. Proof of the reverse isoperimetric inequality in $\mathbb{R}^3$ (Theorem A)

证明分为两个步骤。第一步，我们证明当 K 是一个 λ-凸多面体时定理成立。第二步，我们利用近似（命题 2.5）以及第一步的结果，证明定理在一般情形下成立：反向等周不等式将由连续性推出，因此我们唯一需要处理的是等号情形。

3.1. **步骤 I：** K **是一个** λ**-凸多面体。** 设 K 是一个 λ-凸多面体（见定义 2.3）。不失一般性，令 $\lambda = 1$。我们还可以假设 K 不是透镜体（因为对于透镜体，定理的结论成立）。众所周知（例如，见 [Ma]），$\frac{d}{dt}|K_t| = |\partial K_t|$ 在任意 $t \geqslant 0$处，其中 K_t 是 K 在距离 t处的内平行体。因此，

$$|K| = \int_0^{r(K)} |\partial K_t| dt.$$

注意，$f_K\colon\ t \mapsto |\partial K_t|$ 是一个严格递减的绝对连续函数，因此该积分有意义（关于一般凸体中此类函数的可微性问题，见 [Sch，第 439] 页）。

对于透镜体 L，令 $f_L\colon t \mapsto |\partial L_t|$ 为一个类似的函数，用来度量 L的内平行体的面积。根据定理的假设，$f_K(0) = f_L(0)$。下面的关键命题给出了 f_K 和 f_L 在 0 右侧某个小邻域内的取值关系。

命题 3.1（透镜体的内平行体面积较小）。 $f_K(t) > f_L(t)$ 对所有充分小的 $t > 0$。

为了证明命题 3.1，我们需要以下辅助结果，它表明小球面三角形的面积在局部表现得如同欧氏三角形的面积。

引理 3.2（小三角形的面积）。 设 $\Delta(t) = aob \subset \mathbb{S}^2$ 是一个球面测地三角形，使得 $|oa| = |ob| = O(t)$ 当 $t \to 0$ 时成立。那么

$$|\Delta(t)| = O\left(t^2\right).$$

证明。 根据三角不等式， $\Delta(t)$ 位于一个圆盘内，记为 U，其圆心为 o，半径为 $O(t)$。对于以 o 为中心的法坐标，在邻域 U内，球面的度量张量有如下展开式（例如参见 [Pet，引理 5.5。7]）：

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} + O(|op|^2),$$

其中， δ_{ij} 是克罗内克δ。

因此，在法坐标中计算 Δ的面积，得到：

$$|\Delta(t)| = |\Delta(t)|_{Euc} + O\left(|\mathrm{diam}(U)|^2\right)$$

这里， $|\Delta(t)|_{Euc}$ 是在欧几里得度量下计算的 Δ的面积（使用相同的坐标）。在我们的情形中， $|\Delta(t)|_{Euc} = O(t^2)$。引理得证。□

*Pro*命题 *3.1* 的证明中，我们的目标是估计 $f_K(t) = |\partial K_t|$ 当 t为小的正数时。

我们先引入一些记号（见图4）。设 F_i 为 i的第 K个面，并设 o_i 为包含 F_i的单位球面的中心。记 β_i 为 F_i的面积，记l_{ij} 为相邻面 E_{ij} 与 F_i 的公共边 F_j的长度，并记γ_{ij}为包含 F_i 和 F_j的单位球面之间的角。

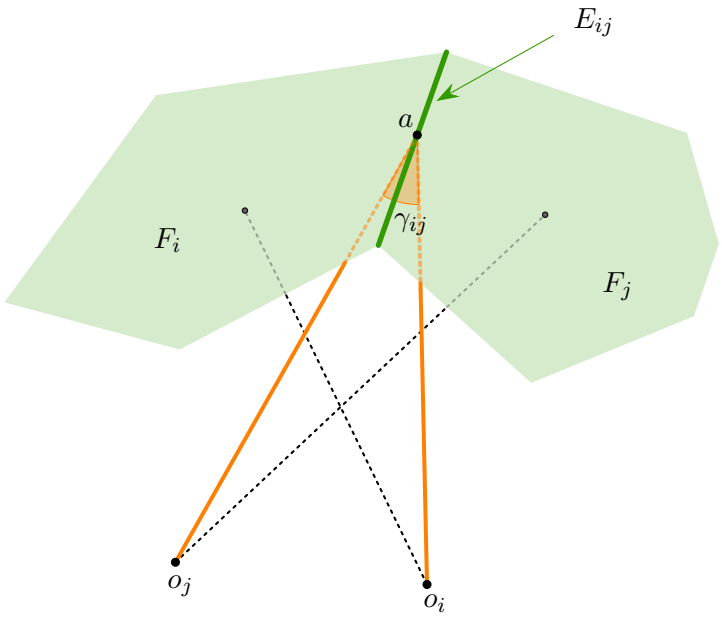

FIGURE 4. 命题 3.1证明中的记号：面 F_i 和F_j 相邻， $E_{ij} = F_i \cap F_j$ 是公共边； $|F_i| = \beta_i$, $|F_j| = \beta_j$， $|E_{ij}| = l_{ij}$。分别包含 F_i和 F_j的单位球面的球心分别为 o_i和o_j，并且 $\gamma_{ij} = \angle o_i a o_j$ 是 F_i与 F_j之间的角，其中 $a \in E_{ij}$ 是任意一点。

按照这些记号，

$$f_K(0) = |\partial K| = \sum_i \beta_i.$$

我们想证明

$$f_K(t) = (1-t)^2 \sum_i \beta_i - 2t \sum_{i,j} l_{ij} \tan \frac{\gamma_{ij}}{2} + O\left(t^2\right). \tag{3.1}$$

由于 K 是一个1-凸多面体，因此 K_t 是一个$(1-t)^{-1}$-凸多面体。注意，当 t充分小时，多面体 K_t 与 K具有相同的组合结构；~尤其是，它们的面数相同。记 $F_i(t)$为 K_t~ ~的第 i个面（对应于 F_i），记 $E_{ij} = E_{ij}(t)$为 K_t 上与 K的棱 E_{ij}~ ~对应的棱。于是 $|\partial K_t| = \sum_i |F_i(t)|$。我们的目标是计算 $|F_i(t)|$。

定义 Π_t 为从以 o_i 为中心的单位球面到同心的、半径为 $1-t$的球面的径向投影。记 $\widetilde{F}_i(t) := \Pi_t(F_i)$为 F_i的第 i个~面的投影。注意， $F_i = F_i(0) = \widetilde{F}_i(0)$。同时，对于较小的正数 t ，有$\sim F_i(t) \supset F_i(t)$。因此，

$$|\widetilde{F}_i(t)| = |F_i(t)| - |F_i(t) \backslash \widetilde{F}_i(t)|.$$

~差集 $F_i(t) \backslash F_i(t)$ 是若干球面四边形 $Q_{ij}(t)$ 的不交并，其中 j遍历所有与 F_i 相邻的 K面所对应的指标。对于每个 j，四边形 $Q_{ij}(t)$ 的边界由 E_{ij}、 $\Pi_t(E_{ij})$ 以及一对大圆弧组成，这对大圆弧分别连接 E_{ij} 和 $\Pi_t(E_{ij})$的相应端点~ ~（见图5）。我们想强调的是， E_{ij}的端点是 K_t的顶点，而 $\Pi_t(E_{ij})$的端点则是 K的顶点~的径向投影。我们声称，根据构造， $Q_{ij}(t)$的两条边 E_{ij} 和 $\Pi_t(E_{ij})$位于 $\mathbb{R}^3$中的平行平面上。事实上，若 o_j 是包含 F_j的单位球面的球心，那么包含 E_{ij} 的平面$\mathcal{H}_{ij} \subset \mathbb{R}^3$ 垂直于欧几里得测地线 $o_i o_j$。棱 $\widetilde{E}_{ij}$也位于 $\mathcal{H}_{ij}$ 上（并且位于以 o_i 和 o_j为球心、半径为 $1-t$ 的两个球面的交集上）。最后，由于投影 Π_t 以 o_i 为中心，且 $\Pi_t(E_{ij})$位于与 $\mathcal{H}_{ij}$平行的平面上，这就证明了上述关于四边形 $Q_{ij}(t)$两条边的结论。

我们有

$$|F_i(t) \backslash \widetilde{F}_i(t)| = \sum_j |Q_{ij}(t)|,$$

因此，我们的目标是估计每个 $|Q_{ij}(t)|$。为此，我们将 $Q_{ij}(t)$ 分解为若干集合，即 $Q^e_{ij}(t)$、$Q^v_{ij}(t)$ 和 $Q^{v'}_{ij}(t)$，定义如下。集合 $Q^e_{ij}(t)$ 是由 $\Pi_t(E_{ij})$、圆弧 E_{ij} 的延长线，以及经过 $\Pi_t(E_{ij})$ 端点且与其正交的大圆的一对弧所围成的球面四边形（见图6）。注意， $Q^e_{ij}(t)$ 不是测地四边形，因为它只有两条边是测地线段。同时， $Q^e_{ij}(t)$ 的每个角都等于 $\pi/2$。由此可知， $Q^e_{ij}(t) \setminus Q_{ij}(t)$ 是两个三角形区域的不相交并集，我们将其分别称为 $Q^v_{ij}(t)$ 和 $Q^{v'}_{ij}(t)$。它们分别连接到 $\Pi_t(E_{ij})$ 的一个端点，该端点分别记为 v 和 v'。每个这样的区域都有两条边是球面测地线段，并且

有一个角等于 $\pi/2$。因此， $Q_{ij}^{v}(t)$ 和 $Q_{ij}^{v'}(t)$ 不是测地三角形，但它们各自都包含于一个测地三角形中；我们分别将这些三角形记为 $Q_{ij}^{v}(t)$ 和 $\widehat{Q}_{ij}^{v'}(t)$。

根据我们的分解， $|Q_{ij}(t)| = |Q_{ij}^{e}(t)| - |Q_{ij}^{v}(t)| - |Q_{ij}^{v'}(t)|$。因此，

$$\begin{aligned} f_K(t) &= \sum_i |F_i(t)| - \sum_i |F_i(t) \backslash \widetilde{F}_i(t)| \\ &= (1-t)^2 \sum_i \beta_i - \sum_i \sum_j \left(|Q_{ij}^{e}(t)| - |Q_{ij}^{v}(t)| - |Q_{ij}^{v'}(t)| \right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

我们证明，当$Q_{ij}^{v}(t)$和$Q_{ij}^{v'}(t)$的面积至少为 t^2 阶，且 t充分小时，只有$|Q_{ij}^{e}(t)|$ 对 t 阶项有贡献，该项出现在 (3.1) 中。

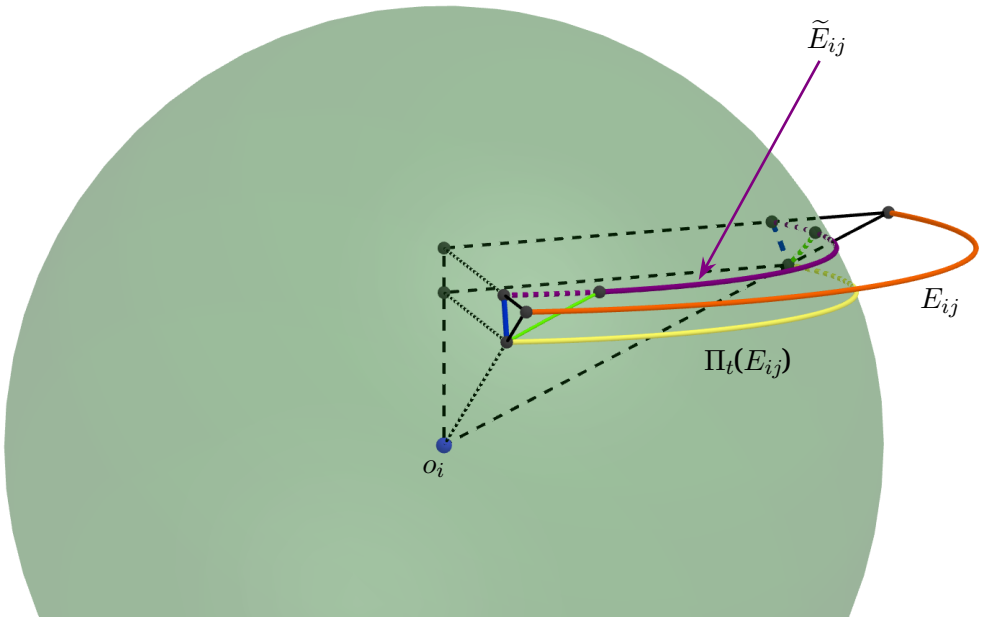

FIGURE 5. 四边形 $Q_{ij}(t)$由棱 E_{ij} （属于 K_t ，紫色）及棱 E_{ij} （属于 K ，橙色）的径向投影 $\Pi_t(E_{ij})$（黄色）围成，此外还有一对鲜绿色的大圆弧；这对圆弧连接 E_{ij} 和 $\Pi_t(E_{ij})$的端点（其中一条圆弧以虚线表示）。绿色球面的半径为 $1-t$ ，球心位于 o_i ，并由面 F_i界定。

对 $|Q_{ij}^{v}(t)|$ 和 $|Q_{ij}^{v'}(t)|$的估计。 我们利用引理 $|\widehat{Q}_{ij}^{v}(t)|$ 3.2 进行估计，并证明

$$|\widehat{Q}_{ij}^{v}(t)| = O(t^2). \tag{3.3}$$

由于 $Q_{ij}^{v}(t) \supset Q_{ij}^{v}(t)$，我们将得到该三角形区域面积的相同估计；对于附属于 v' 的三角形区域，也有类似的估计成立。

设 p、p' 和 v 是 $Q_{ij}^{v}(t)$ 的顶点，标记方式满足 pv 与 $\Pi_t(E_{ij})$ 正交（见图 6）。设 $x(t)$ 为球面线段 pv的长度， $x'(t)$ 为球面线段 $p'v$的长度。由构造可得

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

因此 $x(t) = x'(t) = O(t)$。因此，(3.3) 可由引理 3.2 应用于三角形 pvp'。

对$|Q_{ij}^{e}(t)|$ 的估计。 现在我们计算$|Q_{ij}^{e}(t)|$ 对 t 阶项的非零贡献。

由于$Q_{ij}^{e}(t)$是由半径为$1-t$的球面上的两条纬线围成的球面四边形，

$$|Q_{ij}^{e}(t)| = (1-t) \cdot \vartheta \cdot |o_i' h|,$$

其中， o_i' 是张成 E_{ij}的欧几里得圆的圆心， h 是张成 $\Pi_t(E_{ij})$的欧几里得圆的圆心，而 $\vartheta = \angle vhv'$ 是对着 $\Pi_t(E_{ij})$的角（见图6）。我们注意到 $|o_i' h| = |o_i' o_i| - |o_i h|$。令 q 为 E_{ij} 的端点，使得 $\Pi_t(q) = v$。由于 $|o_i q| = 1$ 和 $\angle o_i q o_i' = \gamma_{ij}/2$，可得 $|o_i o_i'| = \sin(\gamma_{ij}/2)$。利用欧氏三角形 $\Delta o_i q o_i'$ 和 $\Delta o_i v h$的相似性，得到 $|o_i h| = (1-t)\sin(\gamma_{ij}/2)$。因此，

$$|o_i' h| = t \sin\frac{\gamma_{ij}}{2} \qquad \text{and} \qquad |vh| = (1-t)\cos\frac{\gamma_{ij}}{2}.$$

回顾一下， E_{ij} 的长度等于 l_{ij}；根据位似， $\Pi_t(E_{ij})$的长度等于$(1-t)l_{ij}$。因此，

$$\vartheta = \frac{(1-t)l_{ij}}{|vh|} = \frac{l_{ij}}{\cos\frac{\gamma_{ij}}{2}}.$$

因此，

$$|Q_{ij}^{e}(t)| = (1-t)\frac{l_{ij}}{\cos\frac{\gamma_{ij}}{2}} \cdot t \sin\frac{\gamma_{ij}}{2} = t \cdot l_{ij} \tan\frac{\gamma_{ij}}{2} - t^2 \cdot l_{ij} \tan\frac{\gamma_{ij}}{2},$$

这证实了展开式（3.1）。由此展开式可知，右导数$f_K(0)\,\text{of}\ f_K(t)\,\text{at}\ t=0$具有如下形式

$$\dot{f}_K(0) = -2\left(\sum_i \beta_i + \sum_{i,j} l_{ij} \tan\frac{\gamma_{ij}}{2}\right) = -2f_K(0) - 2\sum_{i,j} l_{ij} \tan\frac{\gamma_{ij}}{2}. \tag{3.4}$$

注意，对于透镜体（3.4）同样成立 L。

我们要证明，透镜体 L 使式（3.4）中的量达到最小。由于 $f_K(0) = f_L(0)$，只需证明在由 $\mathbb{R}^3$中的高斯–博内定理给出的约束下，透镜体L 使项 $\sum_{i,j} \tan\frac{\gamma_{ij}}{2} l_{ij}$ 达到最大：

$$\int_{\partial K} \kappa(z)\,\mathrm{d}\sigma_K(z) = 4\pi. \tag{3.5}$$

这里， $\kappa(z)$表示点 z 处 ∂K 的高斯曲率，积分是相对于 K 边界上的面积测度进行的。

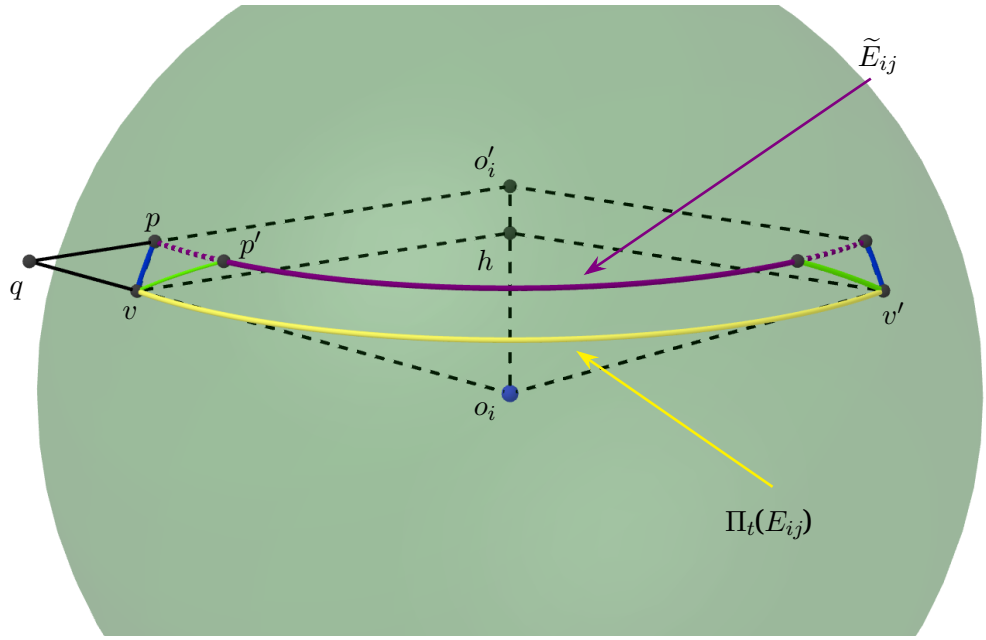

FIGURE 6. 四边形 $Q_{ij}^e(t)$ 由 E_{ij} (Π_t，紫色虚线) 的延长线、E_{ij}(Π_t，黄色) 以及两段大圆弧围成。这两段大圆弧经过 E_{ij}(Q_{ij}^v) 的端点，且与其正交（蓝色）。三角形区域 t(pv) 由测地线段 $p'v$ (蓝色)、 pp' (亮绿色) 以及小圆的圆弧 $\widetilde{\ }$（紫色虚线）围成。该小圆以 o_i' 为圆心，且包含 E_{ij}。

由于 ∂K 并不光滑，对于 λ-凸多面体，这一约束应作如下理解。回顾一下，对于点 $z \in \partial K$， K 在 z 处的法锥是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集，由 0 以及 z 处所有可能支撑平面的所有法向量组成，这些支撑平面均支撑 K。我们将此锥记为 $N(K,z)$；它是一个闭凸集（见 [Sch，第 81] 页）。对于子集 $\omega \subset \partial K$，我们用 $u(K,\omega)$ 表示 ω的球面像，即

$$u(K,\omega) = \bigcup_{z\in\omega} N(K,x) \cap S^2,$$

其中 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 是以原点为中心的单位球面（参见 [Sch，第 88]页）。记 σ 为 S^2上的面积测度。最后，如果 $\mathcal{V}$、 $\mathcal{E}$ 和 $\mathfrak{F}$ 分别表示多面体的顶点、棱和

fa多面体 K 的.....顶点集合，那么关于 K 的高斯–博内定理可表述如下 s:

$$\int_{\partial K} \kappa(z)\mathrm{d}\sigma_K(z) = \sum_{F\in\mathfrak{F}} \int_F \kappa(z)\mathrm{d}\sigma_K(z) + \sum_{e\in\mathcal{E}} \sigma\left(u(K,e)\right) + \sum_{v\in\mathcal{V}} \sigma\left(u(K,v)\right) = 4\pi. \tag{3.6}$$

为完成证明，我们注意到，每个 $F\in\mathfrak{F}$ 上的高斯曲率 κ 都是常数，且等于 1。在 S^2 上引入标准坐标（ϑ,φ），使得 $\mathrm{d}\sigma = \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$。进一步旋转这些坐标，使棱 $E_{ij}\in\mathcal{E}$的球面像成为 S^2 中的一段带状区域，其表达式为 $-\gamma_{ij}/2 \leqslant \vartheta \leqslant \gamma_{ij}/2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant l_{ij}/\cos(\gamma_{ij}/2)$，坐标为（$\vartheta,\varphi$）。因此，

$$\sigma\left(u(K,E_{ij})\right) = \int_0^{\frac{l_{ij}}{\cos\frac{\gamma_{ij}}{2}}} \int_{-\frac{\gamma_{ij}}{2}}^{\frac{\gamma_{ij}}{2}} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{l_{ij}}{\cos\frac{\gamma_{ij}}{2}}\cdot 2\sin\frac{\gamma_{ij}}{2} = 2l_{ij}\tan\frac{\gamma_{ij}}{2}.$$

因此，利用（3.6），

$$\sum_i \beta_i + 2\sum_{i,j} l_{ij}\tan\frac{\gamma_{ij}}{2} + \sum_{v\in\mathcal{V}} \sigma\left(u(K,v)\right) = 4\pi;$$

$$2\sum_{i,j} l_{ij}\tan\frac{\gamma_{ij}}{2} = 4\pi - \sum_i \beta_i - \sum_{v\in\mathcal{V}} \sigma\left(u(K,v)\right).$$

与之前一样，$\sum_i \beta_i$ 对于 K 和透镜体 L而言相同。另一方面，$\sum_{v\in\mathcal{V}} \sigma\left(u(K,v)\right)$ 始终为正，当且仅当 K 没有顶点时才等于零。没有顶点的有限个球的交集只有透镜体 L。因此，$\sum_{i,j} l_{ij}\tan\frac{\gamma_{ij}}{2}$ 在透镜体 L上取最大值。这就完成了命题3.1的证明。□

现在我们在步骤 I 中完成定理A 的证明。

根据命题 3.1，$f_K(t) > f_L(t)$ 在 $t=0$ 的某个右侧开邻域内成立。我们声称，后者意味着对于任意 $t\in(0,r(K))$，都有 $f_K(t)\geqslant f_L(t)$，且存在一些开区间使得该不等式严格成立。如果对每个 $t\in(0,r(K))$，都有 $f_K(t) > f_L(t)$，那么证明即告完成。否则，存在 $t_0\in(0,r(K))$，使得 $f_K(t_0) = f_L(t_0)$，即 $|\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}|$。取具有此性质的最小 t_0。由此选择可知，对每个 $t\in(0,t_0)$，都有 $f_K(t) > f_L(t)$。注意，K_{t_0} 不可能是透镜体：否则，由于透镜体由其表面积唯一确定，我们便会得到透镜体 K_{t_0} 和 L_{t_0} 相等，因此在起始时刻必定有 $|\partial K| < |\partial L|$，这是不可能的。但由于 K_{t_0} 不是透镜体，我们可以重复命题 3.1 的论证，并证明 $f_K(t) > f_L(t)$ 在 t_0 的某个右侧开邻域内成立。然后我们可以继续归纳，从而得到所声称的结论。

我们已证明，对于任意 $t\geqslant 0$，都有 $|\partial K_t|\geqslant|\partial L_t|$；并且只要 K 不是透镜体，该不等式在某些 t 取值的开区间上严格成立。因此，

$$|K| = \int_0^{r(K)} |\partial K_t|dt > \int_0^{r(L)} |\partial L_t|dt = |L|.$$

这就完成了步骤 I 的证明。

Remark。 注意，上述结果意味着 $r(K) \geqslant r(L)$。因此，通过用 λ-凸多面体逼近 λ-凸体，我们得到以下结果：在 λ中所有具有给定表面积的 $\mathbb{R}^3$-凸体中，透镜体的内切半径最小。这是定理B的一个特例，我们将在第4 节采用不同的方法证明该定理。

3.2. **步骤 II：一般情形。** 假设 K 不是一个 λ-凸多面体。根据命题2.5，我们可以找到一个嵌套序列 $(K^j)_{j=1}^{\infty}$，其中由 λ-凸多面体组成，且满足

$$K \subset K^j \quad \text{and} \quad \lim_{j\to\infty} d_H(K, K^j) = 0.$$

由于 K 不是多面体，我们可以假设所有逼近多面体 K^j 都不是透镜体。根据凸体在豪斯多夫极限下体积泛函的连续性，

$$\lim_{j\to\infty} |K^j| = |K| \quad \text{and} \quad \lim_{j\to\infty} |\partial K^j| = |\partial K|.$$

根据步骤 I，若 L^j 是一个 λ-凸透镜体，且满足 $|\partial K^j| = |\partial L^j|$，则

$$|K^j| > |L^j|. \tag{3.7}$$

$(L^j)_{j=1}^{\infty}$ 的豪斯多夫极限是透镜体 L，其表面积等于 $|\partial K|$。因此，将 n维体积 K 与 L 之间所需的不等式，通过取极限即可由（3.7）得出。为研究等号情形，只需证明取极限后必有严格不等式。

对每个 $j \geqslant 1$，考虑函数 $f_{K^j}(t) = |\partial K_t^j|$的图像，$t < r(K)$。由引理 2.14，

$$\lim_{j\to\infty} d_H(K_t^j, K_t) = 0.$$

由于

$$\lim_{j\to\infty} |\partial K_t^j| = |\partial K_t|$$

根据体积的连续性，函数 $t \mapsto f_{K^j}(t)$ 的图像逐点收敛到函数 $t \mapsto f_K(t) = |\partial K_t|$ 的图像。与透镜体对应的函数 f_{L^j} 和 f_L 也同样如此。根据步骤 I，除非 $t = 0$（此时根据假设，等式成立），否则 $f_{K^j}(t) > f_{L^j}(t)$。因此，

$$f_K(t) \geqslant f_L(t) \tag{3.8}$$

对于公共定义区域中的所有 t。

f_K 的图像仅在 $r(K)$处与 t轴相交。由于 K 不是一个 λ凸多面体，命题 2.10 保证存在一个 λ凸多面体 K''，使得 $|\partial K| = |\partial K''|$且 $r(K) > r(K'')$。由于 $|\partial K| = |\partial L|$，我们有 $|\partial L| = |\partial K''|$，因此，根据步骤 I 末尾的注，$r(K'') \geqslant r(L)$。综合以上结果，我们得出 $r(K)$必定严格大于 $r(L)$。因此，图像 f_K 和 f_L 不可能重合。根据 (3.8)，这意味着 f_K下方的面积，即 $|K|$，必定严格大于 f_L下方的面积，即 $|L|$。我们证明了 $|K| > |L|$，由此完成了等号情形的证明，也完成了定理 A 的证明。

4. Proof of the reverse inradius inequality (Theorem B)

本章节中，我们在模型空间 $M^n(c)$中进行研究。在每个模型空间中，定理B 的证明思路相同，但双曲空间中的等距情形除外；该情形还需要额外的论证。我们将在下一小节阐述这一论证，随后将定理B 化为一个等价命题。

4.1. **化为等价表述（定理 C）**。假设 $c<0$ 且 $0<\lambda<\sqrt{-c}$，即我们处于等距情形（见（3c），第2.1节）。由于根据定义， λ-凸透镜体L 是紧的，因此必有 $r(L)<\mathfrak{r}_\lambda$，其中 $\mathfrak{r}_\lambda$ 是等距情形下的特征距离。如果 $r(K)\geqslant\mathfrak{r}_\lambda$，则 $r(K)\geqslant r(L)$，定理的结论即得证。

因此，在本节余下部分，我们考虑满足以下条件的 λ-凸体 $K\subset M^n(c)$ $c\in\mathbb{R}$:

(4.1) 或者 $c\geqslant 0$；或者 $c<0$ 且 $\lambda\geqslant\sqrt{-c}$；或者 $c<0$ 且 $\lambda\in(0,\sqrt{-c})$，其中 $r(K)<\mathfrak{r}_\lambda$.

注意，对于每个 $n\geqslant 2$、每个 $c\in\mathbb{R}$ 以及每个 λ-凸体 $K\subset M^n(c)$，如（4.1）所示，都存在一个 λ-凸透镜体 $L\subset M^n(c)$，使得 $r(K)=r(L)$（且在空间中除刚性运动外唯一）。

定理 C。设 $c\in\mathbb{R}$和 $K\subset M^n(c)$是一个 λ-凸体，如 (4.1)所示。若 $L\subset M^n(c)$是满足 λ-凸透镜体，且 $r(L)=r(K)$，则 $|\partial L|\geqslant|\partial K|$。此外，当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等式成立。

事实上，我们有以下结论:

Claim 4.1. 对于一个 λ-凸体 $K\subset M^n(c)$ 和 $c\in\mathbb{R}$，如 (4.1)所示，定理 B 和 C等价。

断言 4.1 的证明。我们使用单调性论证。假设定理 B 成立。设 K 和 L 满足定理 C 中的假设，即 $r(L)=r(K)$。令 L' 为满足 $|\partial L'|=|\partial K|$的 λ-凸透镜体。由定理 B， $r(L')\leqslant r(K)$。因此， $r(L')\leqslant r(L)$。透镜体的表面积随其内切半径的增大而单调增大。因此，$|\partial L'|\leqslant|\partial L|$。我们得出 $|\partial K|\leqslant|\partial L|$，从而得到定理 C。

反过来，假设定理 C 成立。设 K 和 L 满足定理 B 中的假设，即 $|\partial L|=|\partial K|$。令 L'' 为满足 $r(L'')=r(K)$ 的 λ- 凸透镜体。由于 (4.1) 成立，这样的透镜体 L'' 总是存在。由定理 C， $|\partial L''|\geqslant|\partial K|$。因此，$|\partial L''|\geqslant|\partial L|$，并且根据单调性， $r(L'')\geqslant r(L)$。因此， $r(K)\geqslant r(L)$，这正是定理 B 所断言的。□

鉴于断言 4.1 以及本章节开头的讨论，要证明定理 B ，只需证明定理C。本章节余下部分将用于证明定理 C。证明将基于三个断言：断言 4.2、4.3和4.4（关键断言）。

4.2. **定理 C 的证明（假设关键断言成立）**。根据命题 2.10的第一部分，我们可以假设 K 是一个 λ-凸多面体。

固定内切半径 $r = r(K) = r(L) > 0$。令 $B \subset K$ 为 K 的一个内切球（半径为r），并以 o 表示 B的中心。考虑径向投影

$$\Pi\colon M^n(c) \setminus \{o\} \to \partial B \tag{4.2}$$

从 B 的中心到其边界（见图 9）。由对称性，Π 将 K 的每条棱映射到 ∂B中的一片大球面上。

我们将 K的各个面依次记为 F_1、……、F_ℓ，并令 $\mathcal{S}_1$、……、$\mathcal{S}_\ell$为包含相应面 $F_i \subset \mathcal{S}_i$的全脐超曲面。照例，以 $\mathcal{B}_i$ 表示由 $\mathcal{S}_i$围成的凸区域。我们有

$$K = \bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{B}_i.$$

Claim 4.2. 假设 K 存在一些不与 B接触的面，并令 $\mathcal{N} \subset \{1, \dots, \ell\}$ 为这些面的指标集合。如果

$$K' = \bigcap_{i=1,\, i\notin\mathcal{N}}^{\ell} \mathcal{B}_i,$$

then

$$r(K') = r(K) \quad \text{and} \quad |\partial K| < |\partial K'|.$$

证明。首先，注意到 K' 是紧的。这在等距情形下由引理 2.7 得出，而在其他所有情形下由引理 2.6 得出。因此，K' 是一个 λ-凸多面体。根据构造，$K \subset K'$，所以我们得到 $|\partial K| < |\partial K'|$。

最后，由于 B是 K的内切球，集合 $\partial B \cap \partial K$不包含于任何一个相对于经过 o 的超平面的开半空间中（由命题 2.9 的第 (1) 部分可知）。根据构造，$B \subset K'$和 $\partial B \cap \partial K = \partial B \cap \partial K'$。因此，$\partial B \cap \partial K'$ 不位于经过 o的任何开半空间中。此外，K' 的每个面都与 B相切。由命题 2.9 的第 (2) 部分可知，B 是 K'的内切球。因此，$r(K') = r(K)$。□

为表述接下来的两个断言，我们引入一些额外的记号。根据断言4.2，我们可以假设每个 F_i都在某个点 B处与 p_i相切。固定 $i \in \{1, \dots, \ell\}$。令 δ_i为一个经过 o 且垂直于测地线 op_i的全测地超平面，并令$\mathcal{H}_i$ 为由 δ_i 界定且包含点 p_i的闭半空间。考虑由下式定义的面 F的自然径向延拓 F_i：$F_{\circ} = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{H}_i$。

注意，自然径向延拓 F 是紧的。事实上，对于 $c \geqslant 0$，或 $c < 0$ 和$\lambda > \sqrt{-c}$，这一点成立，因为在这些情况下，$\mathcal{S}_i$ 是测地球面，因而是紧的。如果$c < 0$ 和$\lambda = \sqrt{-c}$，那么 $\mathcal{S}_i$ 是极限球。在这种情况下，在庞加莱单位球模型中选择坐标，使 $\mathcal{H}_i$ 是以北极为中心的闭上半球，并且 $\mathcal{S}_i$ 是单位球内与南极相切的欧几里得球面。由此可见，$\mathcal{S}_i \cap \mathcal{H}_i$ 是一个紧集。

最后，如果 $c<0$ 和 $\lambda<\sqrt{-c}$，那么 $\mathcal{S}_i$ 是一个等距面。同样，在球模型中选择坐标，使 $\mathcal{H}_i$ 是以北极为中心的闭上半球，而 $\mathcal{S}_i$ 是沿小球面 Q与单位球边界相交的欧几里得球面，该小球面与赤道球面平行（见图 7）。令 T 为张成Q的双曲超平面。那么 $\mathcal{S}_i$ 是距 T 距离为 $\mathfrak{r}_\lambda$的等距集的一个连通分支。由于 $r<\mathfrak{r}_\lambda$， Q 必定位于单位球的开南半球内。因此，$\mathcal{S}_i\cap\mathcal{H}_i$ 是紧的。

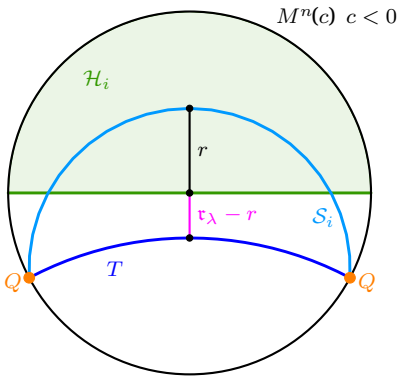

FIGURE 7

由于 F是紧的， F 的（$n-1$）维体积是良定义的，我们注意到

$$|F|=\frac{1}{2}\cdot|\partial L|. \tag{4.3}$$

（在此处以及下文中，我们特别强调， $|\cdot|$表示（$n-1$）维体积。）定义

$$\widetilde{F}_i=\Pi(F_i),\quad \widetilde{F}=\Pi(F).$$

~注意， F 是半球面。

CLAIM 4.3.

$$\sum_{i=1}^{\ell}|\widetilde{F}_i|=|\partial B|=2\cdot|\widetilde{F}|. \tag{4.4}$$

证明。 由以下事实可知：对于每个 i 和 $j\neq i$，透镜体 $\mathcal{B}_i\cap\mathcal{B}_j$ 关于经过 o 且垂直于由 o、 p_i 和 p_j张成的平面的全测地超平面对称。□

CLAIM 4.4 (KEY CLAIM). 对于每个 $i\in\{1,\dots,\ell\}$,

$$\frac{|F_i|}{|\widetilde{F}_i|}\leqslant\frac{|F|}{|\widetilde{F}|}, \tag{4.5}$$

当且仅当 $F_i=F$ 时，等式成立。

关键断言的证明留待下一小节给出。这里我们说明，断言4.4 与断言4.3 共同推出定理C。我们有，

$$\begin{aligned}|\partial K|=\sum_{i=1}^{\ell}|F_i| &\overset{(4.5)}{\leqslant}\sum_{i=1}^{\ell}|\widetilde{F}_i|\cdot\frac{|F|}{|\widetilde{F}|}\\ &\leqslant\frac{|F|}{|\widetilde{F}|}\cdot\sum_{i=1}^{\ell}|\widetilde{F}_i|\overset{(4.4)}{=}\frac{|F|}{|\widetilde{F}|}\cdot 2|\widetilde{F}|=2|F|\\ &\overset{(4.3)}{=}|\partial L|\,.\end{aligned}$$

为完成证明，还需分析等号情形。若 $|\partial K| = |\partial L|$，那么上述不等式链中的每一步都必须取等号。根据断言4.4，这只有在 K 的所有面都与透镜体的某一个面相等时才可能。这意味着 K 本身必须是一个透镜体，因此定理C 得证。

4.3. **关键断言的证明**。 为证明断言4.4，我们需要以下辅助结果。

引理 4.5. 若 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个连续且严格递增的零均值函数，即

$$\int_0^1 f(t)dt = 0,$$

then

$$\int_0^x f(t)dt \leqslant 0 \quad \textit{for all } x \in [0,1], \tag{4.6}$$

并且除非 $x = 1$，此不等式为严格不等式。

证明。注意到 $f(0) \leqslant 0$ 且 $f(1) \geqslant 0$。事实上，若 $f(0) > 0$，则对所有$t \in [0,1]$ 都有 $f(t) > 0$，因为 f 是递增的。这与零均值条件矛盾。对 $f(1) \geqslant 0$ 也可作类似论证。再者，由于 f严格递增，存在 $\alpha \in (0,1)$，使得对所有 $t < \alpha$，$f(\alpha) = 0$、 $f(t) < 0$，且对所有 $t > \alpha$， $f(t) > 0$。现在，若 $x \leqslant \alpha$，则 (4.6) 显然成立。若$x > \alpha$，则

$$\int_0^x f(t)dt = -\int_x^1 f(t)dt \leqslant 0$$

根据 α 的选择和零均值条件。 □

现在我们开始证明断言 4.4。证明分为三个步骤：

- 步骤 I：我们为某些圆锥扇区（定义如下）建立类似于（4.5）的不等式；
- 步骤 II：我们用此类扇区近似每个 F_i （如图 8所示）；利用这一近似可得到所需的不等式；
- 步骤 III：我们分析近似过程，从而得出等号情形。

步骤 *I*。 考虑一组三个对象：两个经过 op_i 的超平面 ξ 和 ξ'，以及对于 $x \in [0,1]$ 而言，一个角为 $\pi x/2$ 、围绕 op_i 且顶点位于 o 的实心圆锥 $\mathcal{C}_x$ 。定义 C_x 为位于 ξ 和 ξ' 之间的 $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{C}_x$ 的一个连通分支。我们将 C_x 称为一个圆锥~扇区。令 $C_x = \Pi(C_x)$ 为 C_x 的径向投影。那么，在以 o 为中心的极坐标中，我们可以写成

$$|C_x| = \int_{\widetilde{C}_x} g(t,\vartheta)\,\mathrm{d}\sigma,$$

~其中，$\sigma = (t,\ \vartheta)$ 是 $C_x \subset \partial B$ 中的一点，$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}t\mathrm{d}\vartheta$ 是 ∂B 上的面积测度，t 是 op_i 与 σ 的方向之间的角，而 g 是密度。

注意，对于 $x = 1$，我们有

$$\frac{|C_1|}{|\widetilde{C}_1|} = \frac{|F|}{|\widetilde{F}|} =: \mathcal{F}. \tag{4.7}$$

~事实上，两者 $|C_1|$ 和 $|C_1|$ 都与超平面之间的夹角ξ 和 ξ'成线性比例，这一点可通过以 p_i为中心的极坐标积分立即得出。因此，这些体积的商与夹角无关，且等于（4.7）右侧的值（这对应于 ξ 和 ξ' 之间的夹角为零的情形）。

定义函数

$$\mathcal{R}(x) := |C_x| - |\widetilde{C}_x| \cdot \mathcal{F} = \int\limits_{\widetilde{C}_x} (g(t,\vartheta) - \mathcal{F})\ \mathrm{d}\sigma.$$

由（4.7），$\mathcal{R}(1) = 0$。此外，我们可以将其改写为

$$\mathcal{R}(x) = \int\limits_0^x \left(\int_{\partial(\mathcal{C}_t \cap \widetilde{C}_x)} (g(t,\vartheta) - \mathcal{F})\,\mathrm{d}\vartheta \right) \mathrm{d}t.$$

由于 $t \mapsto g(t,\ \vartheta)$ 是一个连续且严格递增的函数，被积函数

$$\widehat{\mathcal{R}} \colon t \mapsto \int_{\partial(\mathcal{C}_t \cap \widetilde{C}_x)} (g(t,\vartheta) - \mathcal{F})\,\mathrm{d}\vartheta$$

在 $[0,1]$ 上也是连续且严格递增的。

应用引理 4.5 于函数 $\widehat{\mathcal{R}}$，我们得到 $\mathcal{R}(x) = \int_0^x \widehat{\mathcal{R}}(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$ 当$x \in [0,1]$时成立。这转化为不等式

$$\frac{|C_x|}{|\widetilde{C}_x|} \leqslant \mathcal{F}, \tag{4.8}$$

这对任意角 x 以及超平面 ξ 和 ξ' 的任意选择都成立。此外，

$$\text{inequality (4.8) is strict unless } x = 1. \tag{4.9}$$

步骤 I 至此完成。

步骤 *II*。现在我们如下用圆锥扇区 C_x 逼近面 F_i （见图 8）。对于指标 $s \in \{1,2,\dots,\}$，考虑一列 J_s 全测地超平面 $(\xi_{s,\ j})_{j=1}^{J_s}$，它们经过 op_i 并围绕 op_i 循环地标记。记 $\alpha_{s,\ j}$ 为 $\xi_{s,\ j}$ 与 $\xi_{s,\ j+1}$ 之间的角，并定义

$$\overline{\alpha}_s := \max_{j \in \{1,\dots,J_s\}} \alpha_{s,j}$$

为最大角。

令 $G_{i,(s,j)}$ 为 F_i 中位于 $\xi_{s,j}$ 与 $\xi_{s,j+1}$之间的连通分支。我们也可以将 $G_{i,(s,j)}$ 按循环顺序排列。对于每个“切片”$G_{i,(s,j)}$，考虑最大的角 x_j，使得

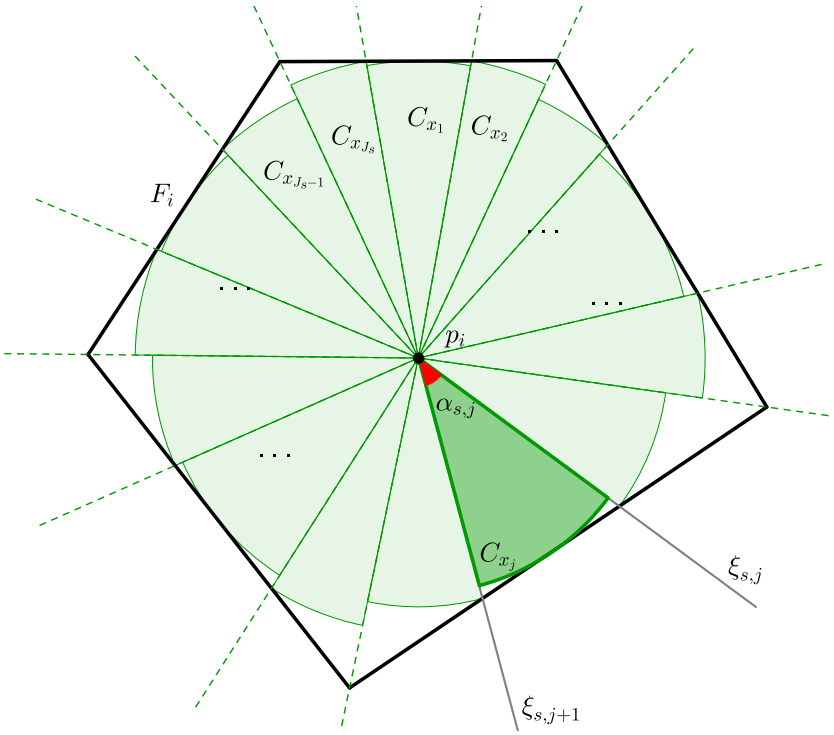

FIGURE 8. 用圆锥扇区近似面 F_i C_{x_j}。

满足 $C_{x_j} \subset G_{i,(s,j)}$，其中 C_{x_j} 是利用超平面 $\xi_{s,j}$ 和 $\xi_{s,j+1}$ (见图 9)。由此可得

$$|F_i| = \lim_{\overline{\alpha}_s \to 0} \sum_{j=1}^{J_s} \left|C_{x_j}\right| \text{ and } |\widetilde{F}_i| = \lim_{\overline{\alpha}_s \to 0} \sum_{j=1}^{J_s} |\widetilde{C}_{x_j}|.$$

~对每一对应用（4.8） C_{x_j}， C_{x_j}，将结果相加，并令 $\alpha_s \to 0$趋于极限，我们得到所需的不等式（4.5）。步骤 II 至此完成，即命题4.4中不等式的证明。

步骤 *III*。现在我们证明命题4.4中的等号情形。为此，令 x分别为 x中最小角和最大角 _ $x \in [0,1]$，使得 $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{S}_i \supset F_i$分别$\mathcal{C}_x \cap \mathcal{S}_i \subset F_i$。根据定义， $\mathcal{C}_x$ 是围绕 F_i的“外接”圆锥，而 $\mathcal{C}_x$ 是 F_i的“内接”圆锥。在此记号下，

$$\underline{x} \leqslant x_j \leqslant \overline{x} \qquad \text{for each } j \in \{1, \dots, J_s\}.$$

若 _$x = 1$，则 $\overline{x} = \underline{x} = 1$，因此 $F_i = F$。这说明（4.5）中的等式成立。现在我们证明，若 $x < 1$, _则（4.5）中必为严格不等式。由此将完成步骤 III。

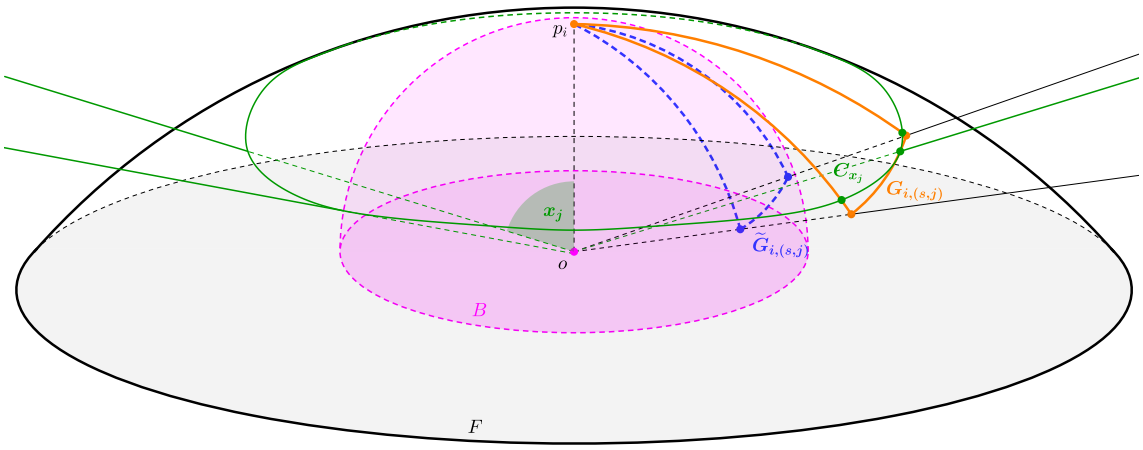

FIGURE 9. 到 ∂B 的投影以及内接圆锥扇形 C_{x_j}。

若 $x < 1$，则根据我们的近似的连续性，存在 ν，$\mu \in (0, 1)$（仅取决于 x），使得对于每个圆锥序列 $\left(C_{x_j}\right)_{j=1}^{J_s}$，我们都可以找到一个指标子区间$\mathcal{J}' = \{j', \ldots, j' + k\}$ 满足以下条件：

- ξ_s与ξ_s之间的角，j' 等于 $\nu \cdot 2\pi$，即，

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} \alpha_{s,j} = \nu \cdot 2\pi;$$

对每个 $j \in \mathcal{J}'$均成立。

由于 ν 不依赖于 s，序列 C_{x_j} 中的圆锥对于 $j \in \mathcal{J}'$ 逼近了 F_i面积的一个确定比例，即存在常数 $\eta = \eta(\nu, \mu) \in (0, 1)$，使得

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{j \in \mathcal{J}'} |C_{x_j}| = \eta \cdot |F_i|.$$

相应的投影也具有同样的性质（使用相同的常数 η）。根据构造，对于 $j \in \mathcal{J}'$，有 $x_j < 1$，并且由（4.9），$|C_{x_j}| < \mathcal{F} \cdot |C_{x_j}|$。将这些不等式对 $j \in \mathcal{J}'$求和，可得

$$\sum_{j \in \mathcal{J}'} |C_{x_j}| < \mathcal{F} \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}'} |\widetilde{C}_{x_j}|$$

由于 $x_j < \mu < 1$ 对每个 s都成立，并且 μ 不依赖于 s，因此我们可以在保持严格不等号的情况下，对上述不等式取极限。因此，在 $x < 1$的情形下，我们得出 $|F_i| < \mathcal{F} \cdot |F_i|$。如上所述，这意味着，当且仅当 4.5) 中的等式成立时，$F_i = F$。

Appendix A. Reverse isoperimetric inequality for λ-convex curves in $\mathbb{R}^2$,revisited

在本附录中，我们利用本文采用的方法（参见 [BD2] 和 [FKV] 关于 $\mathbb{R}^2$ 中反等周问题的结果，给出一种替代证明第 3节）。

定理 A.1 （二维反向等周不等式）。 设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是一个 λ-凸体， $L \subset \mathbb{R}^2$ 是一个 λ-凸透镜体。若 $|\partial K| = |\partial L|$，则 $|K| \geqslant |L|$；且等号仅在 K 是透镜体时成立。

定理 *A.1* 的证明。 与定理 A 的证明类似，利用 Blaschke滚动定理，我们可以用 λ-凸多边形 K 来逼近 λ-凸多边形。我们将证明所需不等式对多边形成立，而一般情形下的不等式可由极限论证得出。证明最后将单独分析等号情形。

现在假设 K 是一个 λ-凸多边形。与定理 A的证明类似，我们有

$$|K| = \int_0^{r(K)} |\partial K_t| dt.$$

为了证明 λ-凸多边形的结论，只需证明在 0 处的单侧导数满足

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} |\partial K_t| \geqslant \frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} |\partial L_t|, \text{ with equality if and only if } K \text{ is a } \lambda\text{-convex lens.} \tag{A.1}$$

这里， L_t 是透镜体 L 在距离 t 处相应的内平行体，它与 K等周：

$$|\partial K| = |\partial K_0| = |\partial L_0| = |\partial L|. \tag{A.2}$$

注意， L_t 是一个 $(1/\lambda - t)^{-1}$-凸透镜体。

不失一般性，假设 $\lambda = 1$。记 β_i、 $i \in \{1, \dots, m\}$为构成 ∂K的单位圆弧所对应的支撑角，并记 γ_i 为相邻圆弧之间的角（见图 10）。于是

$$|\partial K| = \sum_{i=1}^m \beta_i$$

通过与定理A证明中类似的计算，可得

$$|\partial K_t| = \sum_{i=1}^m (1-t)\,\beta_i - 2 \cdot \sum_{i=1}^m t \cdot \tan\frac{\gamma_i}{2} + O\left(t^2\right) = |\partial K| - t \cdot \sum_{i=1}^m \left(\beta_i + 2\tan\frac{\gamma_i}{2}\right) + O\left(t^2\right).$$

因此

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} |\partial K_t| = -\sum_{i=1}^m \left(\beta_i + 2\tan\frac{\gamma_i}{2}\right) = -|\partial K| - 2 \cdot \sum_{i=1}^m \tan\frac{\gamma_i}{2}.$$

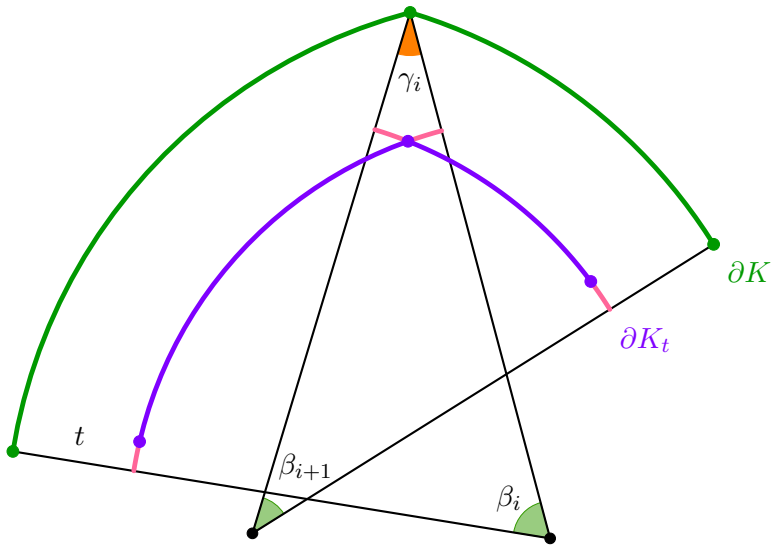

FIGURE 10. 定理A.1证明中的记号。边界上 ∂K 和 ∂K_t 对应的两对相邻圆弧分别以绿色和紫色显示。粉色部分的长度为 t^2 的量级，其中 t充分小。

特别是在透镜体的情形下，该表达式可写为

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+} |\partial L_t| = -|\partial L| - 4\tan\frac{\gamma_*}{2},$$

其中， γ_* 是透镜体顶点处的角。

在假设（A.2）下，为了证明（A.1），我们需要证明

$$\sum_{i=1}^{m} \tan\frac{\gamma_i}{2} \leqslant 2\tan\frac{\gamma_*}{2}, \quad \text{with equality only if } m=2 \text{ and } \gamma_1=\gamma_2=\gamma_*. \tag{A.3}$$

注意，我们有以下约束：

$$\max\gamma_i \leqslant \gamma_* \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{m}\gamma_i = 2\gamma_*. \tag{A.4}$$

第一个约束由 Blaschke滚动定理推出。第二个约束源于这样一个事实：凸曲线的球面像等于 2π ，并且是各光滑边界分支的球面像之和（在我们的情形下，其总和等于边界的长度），再加上顶点处的角。

现在，利用（A.4）以及（$\tan x$）$/x$ 在 $[0,\pi/2)$ 上是递增函数这一事实，我们估计：

$$\sum_{i=1}^{m}\tan\frac{\gamma_i}{2}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{2}\cdot\frac{\tan\frac{\gamma_i}{2}}{\frac{\gamma_i}{2}}\leqslant\frac{\tan\frac{\gamma_*}{2}}{\frac{\gamma_*}{2}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\gamma_i}{2}=2\tan\frac{\gamma_*}{2}. \tag{A.5}$$

因此，A.3）得证。注意，我们已经对 1-多边形建立了定理A.1，并在 $\mathbb{R}^2$中证明了任意 1-凸体的该不等式。现在我们来完成一般体的等号情形证明。

假设 ∂K 没有顶点。当 ∂K 具有顶点时，如何调整证明将是显然的（从某种意义上说，它们只会有所帮助）。

设 K^j 为逼近 K的 1-凸多边形序列，即在豪斯多夫度量下，当 $j\to\infty$时 $K^j\to K$。设 L^j 为相应的 1-凸透镜序列，使得

$$|\partial K^j|=|\partial L^j|\quad\text{for every } j.$$

由连续性可知， $L^j\to L$，其中 L 是满足 $|\partial K|=|\partial L|$的透镜体。

设 γ_i^j 为 K^j的角， γ_*^j 为 L^j的角，并记 $\alpha^j:=\max\limits_i\ \gamma_i^j$。由于 ∂K是光滑的，我们可以选择一个逼近序列，使得

$$\alpha^j\searrow 0.$$

我们还有

$$\gamma_*^j\nearrow\gamma_*.$$

（注意， $\alpha^j\leqslant\gamma_*^j$。）由于我们对序列的选择，可以找到 $N>0$ 使得

$$\alpha^j<\frac{\gamma_*}{3}<\frac{2\gamma_*}{3}<\gamma_*^j\quad\text{for all}\quad j\geqslant N. \tag{A.6}$$

我们声称，对每个 $j\geqslant N$，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}|\partial K_t^j|\geqslant\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}|\partial L_t^j|+C, \tag{A.7}$$

其中 $C=C(\gamma_*)>0$ 仅依赖于 γ_*。首先注意，对(A.5)进行更详细的分析可得以下界：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}|\partial K_t^j|\geqslant\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}|\partial L_t^j|+\mathcal{E}_j,$$

其中

$$\mathcal{E}_j=\gamma_*^j\cdot\left(\frac{\tan\frac{\gamma_*^j}{2}}{\frac{\gamma_*^j}{2}}-\frac{\tan\frac{\alpha^j}{2}}{\frac{\alpha^j}{2}}\right)$$

对 $f(x)$ 应用中值定理：$=\tan(x)/x$ 并利用（A.6），对于某个$\xi\in[\alpha^j/2,\gamma_*^j/2]$，我们得到关于 $j\geqslant N$ 的如下统一估计：

$$\mathcal{E}_j=\gamma_*^j\cdot f'(\xi)\cdot\frac{\gamma_*^j-\alpha^j}{2}\geqslant\frac{1}{9}(\gamma_*)^2\cdot f'(\xi).$$

由中值定理得到的值 $f'(\xi)$ 在 $[0,\gamma_*]$ 上，对于我们所选取的 N，取得其最小值。该最小值严格为正，且仅取决于 γ_*。因此，同样对于我们的选择（A.6），存在 $C>0$，其仅取决于 γ_*，使得

$$\mathcal{E}_j \geqslant C \quad \text{for all} \quad j \geqslant N.$$

这就转化为该断言。

在（A.7）中取 C 的极限，由于其不依赖于 j，我们得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+} |\partial K_t| \geqslant \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+} |\partial L_t| + C.$$

因此，$|K| > |L|$，这证明了具有光滑边界的 1-凸体满足严格不等式。若 ∂K 有顶点，则我们可以选取一个不改变这些顶点的 1-凸多边形逼近序列。重复上述断言的论证，除非 K 是一个 1-凸透镜体，否则我们将得到严格不等式。至此，一般情形下定理A.1 的证明完成。□

Remark。 定理A证明中步骤 II 的论证也可以应用于$\mathbb{R}^2$，以研究等号情形。上文中，我们给出了另一种证明，以展示如何用另一种方法控制极限下的不等式。

Remark。 在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$中，可以将 λ-凸透镜体的体积显式地表示为其表面积的函数。利用这些显式公式，我们可将以下反向等周不等式（RIP）作为定理A和定理A.1的推论得到：

推论 A.2（二维中的显式反向等周不等式）。若 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是一个 λ-凸体，则

$$|K| \geqslant \frac{|\partial K|}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\sin\left(\frac{|\partial K|\lambda}{2}\right),$$

且当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等式成立。 □

推论 A.3（三维中的显式反向等周不等式）。若 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个 λ-凸体，则

$$|K| \geqslant \frac{|\partial K|^2\lambda}{96\pi^2}\cdot\left(12\pi - |\partial K|\lambda^2\right),$$

且当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等式成立。 □

Appendix B. Lenses vs. spindles, an asymptotic competition

这里我们将讨论一项支持 Borisenko 猜想的额外证据。根据定理 A.1，λ-凸透镜体是 $\mathbb{R}^2$ 中二维反向等周问题的解。如果要为维数 $n \geqslant 3$ 猜想一个可能的解，那么一个自然的候选者是通过旋转该透镜体得到的物体。然而，为了保持凸性，有两种旋转方式。将二维透镜体绕实现最小宽度的对称轴旋转，所得结果是 n 维透镜体。根据定理 A，该物体确实是 $\mathbb{R}^3$ 中的解。另一方面，也可以绕实现其直径的对称轴旋转该透镜体。所得物体称为纺锤体，其更正式的定义如下，是

最优形状中透镜体的一个自然“竞争者”。正如我们将在下文看到的，在 $\mathbb{R}^n$ 中，随着 $n \to \infty$，透镜体在这场竞争中渐近地“胜出”。纺锤体也作为带有曲率约束的其他优化问题的解出现（例如参见 [Be1、BD1]）。

我们称凸体 $\mathrm{Sp} \subset \mathbb{R}^n$ 为 λ-凸纺锤体，如果 Sp 是所有半径为 $1/\lambda$ 且包含给定两点的球的交集。Sp 的边界由以下方式构成：在 x_1x_n 平面内取半径为 $1/\lambda$ 、两端点均位于 x_1 轴上的较短圆弧，并绕 x_1 轴在 $\mathbb{R}^n$ 中旋转（此处及下文中， x_1、 ..... 、 x_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡尔坐标）。

下一个命题表明，假设透镜体与纺锤体的表面积相同，那么渐近地看，透镜体的体积较小。

命题 B.1 (透镜体在无穷维时胜出)。 设 L 是一个 λ-凸透镜体，Sp 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 λ-凸纺锤体。若 $|\partial L| = |\partial \mathrm{Sp}|$，则当 $n \to \infty$. 时， $|L| < |\mathrm{Sp}|$

证明。 不失一般性，假设 $\lambda = 1$。我们先计算透镜体和纺锤体的表面积。考虑 x_1x_n-平面上以点 $(0, \ldots\ldots, 0, -h_1)$ 为圆心、半径为 1 的圆，其中 $0 < h_1 < 1$。令 C_1 为该圆位于 x_1-轴上方的圆弧，其方程如下

$$x_n = \sqrt{1 - x_1^2} - h_1,$$

其中 x_1 在 0 和 $\sqrt{1 - h_1^2}$ 之间变化。将 C_1 绕 x_1-轴旋转，便得到 Sp 在超平面 $x_n \geqslant 0$ 中的部分。现在，我们利用旋转体表面积的相应公式计算 Sp 的表面积:

$$|\partial \mathrm{Sp}| = 2 \int_0^{\sqrt{1-h_1^2}} \left(\sqrt{1 - x_1^2} - h_1 \right)^{n-2} \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}} \, dx_1.$$

我们将使用拉普拉斯方法来求得 $|\partial \mathrm{Sp}|$ 当 $n \to \infty$ 时的渐近行为（参见例如 [BH]）。我们断言

$$|\partial \mathrm{Sp}| \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1 - h_1)^{n - \frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right). \tag{B.1}$$

上述积分的渐近展开中，主导贡献来自 $x_1 = 0$ 的邻域，因此我们可以考虑在 $(0, \infty)$ 上的积分。此外，利用 $\sqrt{1 - x_1^2} - h_1 = (1 - h_1) \left(1 - \frac{1}{2(1-h_1)} x_1^2 + O(x_1^4) \right)$，并且注意到积分

$(\sqrt{1-h_1^2},\infty)$ 上的积分是指数级小量，我们有

$$\begin{aligned}|\partial \mathrm{Sp}| &\approx 2(1-h_1)^{n-2}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{2(1-h_1)}x_1^2+O(x_1^4)\right)^{n-2}e^{\frac{1}{2}x_1^2+O(x_1^4)}\,dx_1\\ &= 2(1-h_1)^{n-2}\int_0^{\infty}e^{-(n-2)\left(\frac{1}{2(1-h_1)}x_1^2+O(x_1^4)\right)}e^{\frac{1}{2}x_1^2+O(x_1^4)}\,dx_1\\ &= 2(1-h_1)^{n-2}\int_0^{\infty}e^{\frac{-(n-3)-h_1}{2(1-h_1)}x_1^2-(n-3)O(x_1^4)}\,dx_1\\ &\approx 2(1-h_1)^{n-2}\int_0^{\infty}e^{-(n-3)\left(\frac{1}{2(1-h_1)}x_1^2+O(x_1^4)\right)}\,dx_1.\end{aligned}$$

在最后一个积分中进行变量代换 $y^2=\frac{1}{2(1-h_1)}x_1^2+O(x_1^4)$，并利用 $y=\frac{x_1}{\sqrt{2(1-h_1)}}\left(1+O(x_1^2)\right)$ 和 $dx_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-h_1}}\right)+O(y^2)\Big)\,dy$，可得

$$\begin{aligned}|\partial \mathrm{Sp}| &\approx 2(1-h_1)^{n-2}\int_0^{\infty}e^{-(n-3)\left(\frac{1}{2(1-h_1)}x_1^2+O(x_1^4)\right)}\,dx_1\\ &= 2(1-h_1)^{n-2}\left[\frac{1}{\sqrt{2(1-h_1)}}\int_0^{\infty}e^{-(n-3)y^2}dy+\int_0^{\infty}e^{-(n-3)y^2}O(y^2)dy\right].\end{aligned}$$

第一个积分就是高斯积分

$$\int_0^{\infty}e^{-(n-3)y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n-3}}.$$

对于第二个积分，我们利用变量代换 $y=\sqrt{n-3}\,t$ 估计如下

$$\int_0^{\infty}e^{-(n-3)y^2}O(y^2)dy=\frac{1}{(n-3)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}O(t^2)dt.$$

因此，我们得到（B.1）。

现在我们可以求出透镜体 L 的表面积。为此，考虑 x_1x_n-平面中以点 $(-\sqrt{1-h_2^2},\dots,0,0)$ 为圆心、半径为 1 的圆，其中 $0<h_2<1$。令 C_2 为该圆上由下列方程给出的圆弧

$$x_n=\sqrt{1-\left(x_1+\sqrt{1-h_2^2}\right)^2}$$

其中 x_1 在 0 和 $1-\sqrt{1-h_2^2}$ 之间变化。我们断言

$$|\partial L|\approx 2\frac{h_2^{n-1}}{\sqrt{1-h_2^2}}\frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{B.2}$$

忽略指数级小的尾部， L 的表面积为

$$
\begin{aligned}
|\partial L| &= 2\int_0^{1-\sqrt{1-h_2^2}} \left(1-\left(x_1+\sqrt{1-h_2^2}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx_1 \\
&\approx 2h_2^{n-3}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{x_1^2}{h_2^2}-2\frac{\sqrt{1-h_2^2}}{h_2^2}x_1\right)^{\frac{n-3}{2}} dx_1 \\
&= 2h_2^{n-3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{n-3}{2}\left(2\frac{\sqrt{1-h_2^2}}{h_2^2}x_1+O(x_1^2)\right)} dx_1.
\end{aligned}
$$

作变量代换 $y=2\frac{\sqrt{1-h_2^2}}{h_2^2}x_1+O(x_1^2)$，并利用

$$
dx_1=\left(\frac{h_2^2}{2\sqrt{1-h_2^2}}+O(y)\right)dy,
$$

我们得到

$$
|\partial L| \approx 2\,h_2^{n-3}\int_0^{\infty} e^{-\frac{n-3}{2}y}\left(\frac{h_2^2}{2\sqrt{1-h_2^2}}+O(y)\right)dy.
$$

通过类似于上述的论证，我们得到（B.2）。

同理，我们得到体积的表达式：

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Sp}| &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(1-h_1)^{n-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right); \\
|L| &\approx 2\frac{h_2^{n+1}}{\sqrt{1-h_2^2}}\frac{1}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}
$$

其中 h_1， $h_2\in(0,\ 1)$。

由于 $|\partial \mathrm{Sp}|=|\partial L|$，我们有

$$
(1-h_1)^{n-\frac{5}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{h_2^{n-1}}{\sqrt{1-h_2^2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
$$

这意味着，当 $1-h_1=h_2$ $n\to\infty$ 时。因此，

$$
\frac{|\mathrm{Sp}|}{|\partial \mathrm{Sp}|}=1-h_1>h_2^2=\frac{|L|}{|\partial L|}
$$

因为 $n\to\infty$ 这证实了透镜体的体积小于纺锤体。

□

References

[Bal1] K. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*。《伦敦数学会杂志》44（1991），351–359。[Bal2] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*。载于 J. Lindenstrauss 和 V. D. Milman 编，《以色列泛函分析几何方面研讨会》，《数学讲义》第1376卷，施普林格出版社，1989年。[Ba] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*。《数学发明》134（1998），335–361。[Be1] K. Bezdek, *Volumetric bounds for intersections of congruent balls in Euclidean spaces*。《数学等式》95（2021），第4期，653–665。[Be2] K. Bezdek, *From r-dual sets to uniform contractions*。《数学等式》92（2018），123–134。[BLNP] K. Bezdek，Z. L´angi，M. Nasz´odi，P. Papez, *Ball-polyhedra*。《离散与计算几何》38（2007），第2期，201–230。[Bla] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*。德格鲁伊特出版社，柏林，1956年。[BH] N. Bleistein，R. A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*。多佛出版社，纽约，1986年。[Bor] A. Borisenko, *Reverse isoperimetric inequality in two-dimensional Alexandrov spaces*。《美国数学会会刊》145（2017），4465–4471。[BD1] A. Borisenko，K. Drach,
Closeness to spheres of hypersurfaces with normal curvature bounded below。《数学文集》204:11（2013），1565–1583。[BD2] A. Borisenko，K. Drach, *Isoperimetric inequality for curves with curvature bounded below*。《数学札记》95（2014），第5期，590–598。[BD3] A. Borisenko，K. Drach,
Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere。《动力系统与控制系统杂志》21（2015），第3期，311–327。[BD4] A. Borisenko，K. Drach, *Comparison theorems for support functions of hypersurfaces*。《乌克兰国家科学院通报》，数学、自然科学与技术科学（2015），第3期，11–16（arXiv: 1402.2691）。[BGR] A. Borisenko，E. Gallego，A. Revent
´ *Relation between area and volume for λ-convex sets in* os, 。《微分几何及其应用》（），第–期，–页。[BM] A. Borisenko，V. Miquel, *Hadamard manifolds* **14** 2001 3, 267 280
Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space。《伊利诺伊数学杂志》43（1999），第1期，61–78。[BrS] J. Brooks，J. Strantzen, *Blaschke's rolling theorem in* $\mathbb{R}^n$。《美国数学会回忆录》80（405）（1989）。[BZ] Yu. D. Burago，V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*。施普林格出版社，纽约，1988年。[CDT] R. Chernov，K. Drach，K. Tatarko, *A sausage body is a unique solution for a reverse isoperimetric problem* **353** 2019 431 445 。《数学进展》（），–。[CFP] G. Croce，Z. Fattah，G. Pisante, *A reverse isoperimetric inequality for planar* (α, β) *-convex bodies*。《ESAIM控制、优化与变分法》28（2022），论文编号62，18页。[Dr1] K. Drach,
About the isoperimetric property of λ-convex lunes on the Lobachevsky plane。《乌克兰国家科学院通报》，数学、自然科学与技术科学（ 2014 11，11 15 1402 2688 ），第–期，–
[ ]
（arXiv: . math.DG ）。[Dr2] K. Drach, *Extreme bounds for complete hypersurfaces in Riemannian spaces*。博士论文，B. Verkin低温物理与工程研究所（乌克兰国家科学院），哈尔科夫，2016年。[Dr3] K. Drach,
On a solution of the reverse Dido problem in a class of convex surfaces of revolution。《乌克兰国家科学院通报》，数学、自然科学与技术科学（2016），第4期，7–12。[Dr4] K. Drach,
Inradius estimates for convex domains in 2-dimensional Alexandrov spaces。《分析、几何与度量空间》6（2018），第1期，165–173。[Dr5] K. Drach,
The Blaschke rolling theorem in Riemannian manifolds of bounded curvature，论文准备中。[FKV] F. Fodor，A. Kurusa，V. V
´ *Inequalities for hyperconvex sets* **16** 2016 3, 337 348
ıgh, 。《几何进展》（），第–期，–页。[Ho] R. Howard,
Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary。《数学手稿》99（1999），第4期，471–483。

[HTr] R. Howard, A. Treibergs, *A reverse isoperimetric inequality stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature* **25** 1995 2, 635 684 , . 《落基山数学杂志》 ( ), no. – . [Ga] A. Gard, *Reverse isoperimetric inequalities in* $\mathbb{R}^3$. 博士论文，俄亥俄州立大学，哥伦布，2012. [Ka] H. Karcher, *Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie* **177** 1968 122 132 . 《数学年刊》 ( ), – . [LNT] Zs. L´angi, M. Nasz´odi, I. Talata, *Ball and spindle convexity with respect to a convex body*. 《等式与数学》85 (2013), 41–67. [Ma] G. Matheron, *La formule de Steiner pour les érosions*. 《应用概率杂志》15 (1978), 126–135. [Mi1] A. Milka, *A certain theorem of Schur–Schmidt*. 《乌克兰几何文集》8 (1970), 95–102. [Mi2] A. Milka, *Estimates of the sizes of curves with bounded curvature*. 《乌克兰几何文集》21 (1978), 88–91. [Na] P. Nayar, *Reverse isoperimetric inequalities for parallel sets* (arXiv:2102.03680 [math.MG]). [Naz] F. Nazarov, *private communication*. [Pet] P. Petersen, *Riemannian Geometry*. 数学研究生教材171，第三版，2016. [Ra] J. Rauch, *An inclusion theorem for ovaloids with comparable second fundamental forms*. 微分几何杂志9 (1974), 501–505. [Ro] A. Ros, *The isoperimetric problem*. 载于《极小曲面的整体理论》，Clay 数学文集第2卷，第175–209页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005. [SY] E. Saor Yepes Nicolas, ´ ´ ´ *On a reverse isoperimetric inequality for relative outer parallel bodies* **148** 2020 11, 4923 4931 , . 《美国数学会会刊》 ( ), no. – . [Sch] R. Schneider, *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*, 第二次扩充版，剑桥出版社，2014. ín Gomez, J.

Institute of Science and Technology Austria, Am Campus 1, 3400 Klosterneuburg, Austria
Email address: kostiantyn.drach@ist.ac.at, kostya.drach@gmail.com

Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, ON, N2L 3G1, Canada*Email address*: ktatarko@uwaterloo.ca