arXiv:2303.02295v1 [math.NT] 4 Mar 2023

由 $\mathbb{Z}_p$ 上的 p 进积分导出的退化双曲函数的若干恒等式

TAEKYUN KIM、HYE KYUNG KIM 和 DAE SAN KIM

摘要。本文旨在介绍若干退化双曲函数，作为双曲函数的退化版本；计算退化双曲余弦函数和退化双曲正弦函数的 Volkenborn 积分与费米子 p 进积分，并由此推导出一些涉及退化伯努利数、退化欧拉数和第一类柯西数的恒等式。

1. 引言

幂函数的 Volkenborn 积分和费米子 p 进积分分别给出伯努利数和欧拉数，而广义下降阶乘的 Volkenborn 积分和费米子 p 进积分则分别给出退化伯努利数和退化欧拉数（见（11））。因此，后者可视为前者的退化版本。

本文旨在推导由 Volkenborn 积分和 $\mathbb{Z}_p$ 上的费米子 p 进积分所产生的退化双曲函数的一些恒等式。具体而言，我们将退化双曲函数定义为通常双曲函数的自然退化版本，并推导与之相关的一些恒等式。随后，我们计算退化双曲余弦和退化双曲正弦函数的 Volkenborn 积分和费米子 p 进积分。基于这些结果，我们推导出涉及退化伯努利数、退化欧拉数和第一类柯西数的一些恒等式。

本文的结构如下。第 1 节回顾 $\mathbb{Z}_p$ 上一致可微函数的 Volkenborn 积分和 $\mathbb{Z}_p$ 上连续函数的费米子 p 进积分，以及它们的积分方程和指数函数情形下的例子。我们提醒读者注意第一类柯西数。我们回顾退化指数函数，它是通常指数函数的退化版本。随后我们说明，退化伯努利数和退化欧拉数分别自然地由 $\mathbb{Z}_p$ 上退化指数函数的 Volkenborn 积分和费米子 p 进积分导出。第 2 节是本文的主要结果。我们引入双曲函数的退化版本，即退化双曲余弦 $\cosh_\lambda(x:a)$、退化双曲正弦 $\sinh_\lambda(x:a)$、退化双曲正切 $\tanh_\lambda(x:a)$ 和退化双曲余切 $\coth_\lambda(x:a)$。接着，我们推导出若干联系这些退化双曲函数的恒等式。我们计算 $\cosh_\lambda(x:a)$ 和 $\sinh_\lambda(x:a)$ 的 Volkenborn 积分。根据这些结果，我们得到一些涉及退化伯努利数和第一类柯西数的恒等式。我们计算相同退化双曲函数的费米子 p 进积分，并由此推导出一个涉及退化欧拉数的恒等式。最后，我们在第 3 节总结全文。本节余下部分将回顾本文中所需的基本知识。

2020年数学主题分类：11S80；11B68；11B83。关键词与短语：Volkenborn 积分；费米子 p 进积分；退化双曲函数；退化伯努利数；退化欧拉数；第一类柯西数。 * 为通讯作者。

设 p 为一个固定的奇素数。在本文中， $\mathbb{Z}_p$、 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{C}_p$ 分别表示 p 进整数环、p 进有理数域以及 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭包的完备化。p 进范数 $|\cdot|_p$ 归一化为 $|\mathrm{p}|_p = \frac{1}{p}$。 $\mathbb{Z}_p$ 上的 Volkenborn 积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\mu(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{P^N-1} f(x)\mu(x+p^N\mathbb{Z}_p) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x), \quad (\text{see [1, 2, 5, 6, 7, 8, 13]}).\end{aligned} \tag{1}$$

由（1），我们注意到

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)\, d\mu(x) - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\mu(x) = f'(0), \quad (\text{see [5, 13]}), \tag{2}$$

其中，f 是 $\mathbb{C}_p$值的一致可微函数，定义在 $\mathbb{Z}_p$上。

在 [7], 上， $\mathbb{Z}_p$ 上的 f ermionic p进积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\mu_{-1}(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x)\ \mu_{-1}(x+p^N\mathbb{Z}_p) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x)(-1)^x,\end{aligned} \tag{3}$$

其中，f 是 $\mathbb{C}_p$值的连续函数，定义在 $\mathbb{Z}_p$上。

因此，由（3）可得

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)\, d\mu_{-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, d\mu_{-1}(x) = 2f(0) \quad (\text{see [1, 7, 8]}). \tag{4}$$

采用 [13], 中的记号，令 E 表示由下式给出的加法群

$$E = \left\{ x \in \mathbb{C}_p \,\middle|\, |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} \right\}. \tag{5}$$

已知存在一个从乘法群 $1+\mathrm{E}$ 到加法群 E 的同构，由 $1+\mathrm{x} \mapsto \log(1+\mathrm{x})$ 给出，其中 $\log = \log_p$ 是 p进对数。此外，逆映射由 $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{e}^x = \exp \mathrm{x}$ 给出，其中 $\exp = \exp_p$ 是 p进指数（见 [13]）。

第一类柯西数（也称为第二类伯努利数）定义为

$$\frac{t}{\log(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!}, \quad (|t|_p < 1, t \neq 0).$$

由（2）和（4），我们注意到

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt}\, d\mu(x) = \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad (t \in E, t \neq 0), \quad (\text{see [1-18]}), \tag{6}$$

and

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt}\, d\mu_{-1}(x) = \frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}, \quad (t \in E), \quad (\text{see [1, 5, 7]}), \tag{7}$$

其中，B_n 和 E_n 分别表示第 n 个伯努利数和第 n 个欧拉数。

除非另有说明，本文中始终令 λ为 $\mathbb{C}_p$中的任意非零元素。退化指数函数定义为

$$e_\lambda^x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(x)_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}=(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}},\quad \left(t\in\frac{1}{\lambda}E,|x|_p\le|\lambda|_p\right),\quad (\text{see [9, 10]}), \tag{8}$$

其中，广义下降阶乘（也称为 λ-下降阶乘）定义为 $(x)_{0,\lambda}=1$, $(x)_{n,\lambda}=x(x-\lambda)\cdots(x-(n-1)\lambda)$, $(n\ge 1)$。

由 (2) 可知,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e_\lambda^x(t)\,d\mu(x)=\frac{\frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda t)}{e_\lambda(t)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!},\quad \left(t\in\frac{1}{\lambda}E,t\ne 0,|\lambda|_p\ge 1\right), \tag{9}$$

其中 $\beta_{n,\lambda}$ 称为（完全）退化伯努利数（见 [3, 5]）。注意，$\lim_{\lambda\to 0}\beta_{n,\lambda}=B_n$, $(n\ge 0)$, (见 [11])。

由 (4) 可知,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e_\lambda^x(t)\,d\mu_{-1}(x)=\frac{2}{e_\lambda(t)+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{E}_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!},\quad \left(t\in\frac{1}{\lambda}E,|\lambda|_p\ge 1\right), \tag{10}$$

其中 $\mathscr{E}_{n,\lambda}$ 称为退化欧拉数（见 [3, 5]）。

注意，$\lim_{\lambda\to 0}\mathscr{E}_{n,\lambda}=E_n$, （$n\ge 0$）。

因此，由（9）和（10）可得

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x)_{n,\lambda}\,d\mu(x)=\beta_{n,\lambda},\quad \int_{\mathbb{Z}_p}(x)_{n,\lambda}\,d\mu_{-1}(x)=\mathscr{E}_{n,\lambda},\ (n\ge 0). \tag{11}$$

实变量或复变量的双曲函数定义如下:

$$\begin{aligned}&\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\\ &\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \text{and}\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}.\end{aligned} \tag{12}$$

2. 关于p进积分导出的退化双曲函数的一些恒等式，定义在 $\mathbb{Z}_p$

设 λ 是 $\mathbb{C}_p$中的任意非零元素，且 $a\in\frac{1}{\lambda}E$, （见（5））。考虑如下退化双曲函数:

$$\begin{aligned}&\cosh_\lambda(x:a)=\frac{1}{2}(e_\lambda^x(a)+e_\lambda^{-x}(a)),\quad (|x|_p\le|\lambda|_p),\\ &\sinh_\lambda(x:a)=\frac{1}{2}(e_\lambda^x(a)-e_\lambda^{-x}(a)),\quad (|x|_p\le|\lambda|_p),\\ &\tanh_\lambda(x:a)=\frac{\sinh_\lambda(x:a)}{\cosh_\lambda(x:a)},\quad (|x|_p\le|\lambda|_p),\\ &\coth_\lambda(x:a)=\frac{\cosh_\lambda(x:a)}{\sinh_\lambda(x:a)},\quad (|x|_p\le|\lambda|_p,x\ne 0,a\ne 0).\end{aligned} \tag{13}$$

注意，$\lim_{\lambda\to 0}\cosh_\lambda(x:a)=\cosh(xa)$, $\lim_{\lambda\to 0}\sinh_\lambda(x:a)=\sinh(xa)$, $\lim_{\lambda\to 0}\tanh_\lambda(x:a)=\tanh(xa)$, 以及 $\lim_{\lambda\to 0}\coth_\lambda(x:a)=\coth(xa)$。

由式 (13) 可知,

$$\begin{aligned}\cosh_\lambda(2x:a) &= \frac{e_\lambda^{2x}(a)+e_\lambda^{-2x}(a)}{2} = 1+\frac{e_\lambda^{2x}(a)+e_\lambda^{-2x}(a)-2}{2}\\ &= 2\left(\frac{e_\lambda^{x}(a)-e_\lambda^{-x}(a)}{2}\right)^2+1 = 1+\sinh_\lambda^2(x:a), \quad (|x|_p \le |\lambda|_p).\end{aligned} \tag{14}$$

另一方面，由（13）可得

$$\begin{aligned}2\cosh_\lambda^2(x:a)-1 &= 2\times\frac{e_\lambda^{2x}(a)+e_\lambda^{-2x}(a)+2}{4}-1\\ &= \frac{e_\lambda^{2x}(a)+e_\lambda^{-2x}(a)}{2} = \cosh_\lambda(2x:a), \quad (|x|_p \le |\lambda|_p).\end{aligned} \tag{15}$$

因此，由（14）和（15）可得以下命题。

命题 1. 设 $a \in \frac{1}{\lambda}E$，且令 $|x|_p \le |\lambda|_p$。则下列恒等式成立。

$$\cosh_\lambda(2x:a) = 2\cosh_\lambda^2(x:a)-1 = 1+2\sinh_\lambda^2(x:a).$$

由（13）可得

$$\begin{aligned}\sinh_\lambda(2x:a) &= \frac{e_\lambda^{2x}(a)-e_\lambda^{-2x}(a)}{2}\\ &= 2\frac{e_\lambda^{x}(a)-e_\lambda^{-x}(a)}{2}\frac{e_\lambda^{x}(a)+e_\lambda^{-x}(a)}{2}\\ &= 2\sinh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(x:a).\end{aligned} \tag{16}$$

因此，我们有以下命题。

命题 2. 设 $a \in \frac{1}{\lambda}E$，且 $|x|_p \le |\lambda|_p$。则下列恒等式成立。

$$\sinh_\lambda(2x:a) = 2\sinh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(x:a).$$

现在，我们观察到

$$\begin{aligned}&\sinh_\lambda(x+y:a) = \frac{1}{2}(e_\lambda^{x+y}(a)-e_\lambda^{-x-y}(a))\\ &= \frac{e_\lambda^{x+y}(a)-e_\lambda^{-x-y}(a)+e_\lambda^{x-y}(a)-e_\lambda^{-x+y}(a)}{4}+\frac{e_\lambda^{x+y}(a)-e_\lambda^{-x-y}(a)-e_\lambda^{x-y}(a)+e_\lambda^{-x+y}(a)}{4}\\ &= \frac{e_\lambda^{x}(a)-e_\lambda^{-x}(a)}{2}\times\frac{e_\lambda^{y}(a)+e_\lambda^{-y}(a)}{2}+\frac{e_\lambda^{x}(a)+e_\lambda^{-x}(a)}{2}\times\frac{e_\lambda^{y}(a)-e_\lambda^{-y}(a)}{2}\\ &= \sinh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(y:a)+\cosh_\lambda(x:a)\sinh_\lambda(y:a), \quad (a\in\frac{1}{\lambda}E, |x|_p\le|\lambda|_p, |y|_p\le|\lambda|_p).\end{aligned} \tag{17}$$

另一方面，由（13）可得

$$\begin{aligned}&\cosh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(y:a)+\sinh_\lambda(x:a)\sinh_\lambda(y:a)\\ &= \frac{e_\lambda^{x}(a)+e_\lambda^{-x}(a)}{2}\times\frac{e_\lambda^{y}(a)+e_\lambda^{-y}(a)}{2}+\frac{e_\lambda^{x}(a)-e_\lambda^{-x}(a)}{2}\times\frac{e_\lambda^{y}(a)-e_\lambda^{-y}(a)}{2}\\ &= \frac{e_\lambda^{x+y}(a)+e_\lambda^{-x-y}(a)+e_\lambda^{-x+y}(a)+e_\lambda^{x-y}(a)}{4}+\frac{e_\lambda^{x+y}(a)+e_\lambda^{-x-y}(a)-e_\lambda^{x-y}(a)-e_\lambda^{-x+y}(a)}{4}\\ &= \frac{2(e_\lambda^{x+y}(a)+e_\lambda^{-(x+y)}(a))}{4} = \frac{e_\lambda^{x+y}(a)+e_\lambda^{-(x+y)}(a)}{2} = \cosh_\lambda(x+y:a),\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $(a \in \frac{1}{\lambda}E \ |x|_p \le |\lambda|_p, |y|_p \le |\lambda|_p)$。因此，由 (17) 和 (18)，
我们得到以下命题。

Prop命题 3. 设 $\in \frac{1}{\lambda}E \ |x|_p \le |\lambda|_p$ 为 a，并设 $|y|_p \le |\lambda|_p$。则以下恒等式成立 .

$$\begin{aligned}&\cosh_\lambda(x+y:a) = \cosh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(y:a) + \sinh_\lambda(x:a)\sinh_\lambda(y:a),\\ &\text{and} \quad \sinh_\lambda(x+y:a) = \sinh_\lambda(x:a)\cosh_\lambda(y:a) + \cosh_\lambda(x:a)\sinh_\lambda(y:a).\end{aligned}$$

注意到 $\frac{d}{dx}\cosh_\lambda(x:a) = \frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a)\sinh_\lambda(x:a)$，并利用 (2)，可得

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x+1:a)\, d\mu(x) - \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu(x)\\ &= (\cosh_\lambda(1:a)-1)\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu(x) + \sinh_\lambda(1:a)\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu(x),\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\left(a \in \frac{1}{\lambda}E \ |\lambda|_p \ge 1\right)$。

注意到 $\frac{d}{dx}\sinh_\lambda(x:a) = \frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a)\cosh_\lambda(x:a)$，并利用 (2)，可得。由 (2) 我们注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a) &= \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x+1:a)d\mu(x) - \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)d\mu(x)\\ &= (\cosh_\lambda(1:a)-1)\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu(x)\\ &\quad + \sinh_\lambda(1:a)\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu(x),\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\left(a \in \frac{1}{\lambda}E \ |\lambda|_p \ge 1\right)$。

通过求解 (19) 和 (20) 中的线性方程组，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu(x) = \frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a)\frac{\sinh_\lambda(1:a)}{2(\cosh_\lambda(1:a)-1)},\\ &\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a), \quad \left(a \in \frac{1}{\lambda}E, |\lambda|_p \ge 1\right).\end{aligned} \tag{21}$$

由 (21) 以及命题 1 和命题 2，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)d\mu(x) &= \frac{1}{\lambda}\log(1+\lambda a)\frac{2\sinh_\lambda(\frac{1}{2}:a)\cosh_\lambda(\frac{1}{2}:a)}{4\sinh^2_\lambda(\frac{1}{2}:a)}\\ &= \frac{a}{2}\coth_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right)\frac{\log(1+\lambda a)}{\lambda a}, \quad \left(a \in \frac{1}{\lambda}E, |\lambda|_p \ge 1\right).\end{aligned} \tag{22}$$

因此，由 (21) 和 (22) 可得以下定理。

定理 4。设 $a \in \frac{1}{\lambda}E$，且令 $|\lambda|_p \ge 1$。则以下关系成立。

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda a}{\log(1+\lambda a)}\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu(x) = \frac{a}{2}\coth_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right),\\ &\frac{\lambda a}{\log(1+\lambda a)}\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu(x) = -\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

通过泰勒展开，我们得到

$$\begin{aligned}\cosh_\lambda(x:a) &= \frac{1}{2}(e_\lambda^x(a)+e_\lambda^{-x}(a)) = \frac{1}{2}(e_\lambda^x(a)+e_{-\lambda}^x(-a)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}((x)_{m,\lambda}+(-1)^m(x)_{m,-\lambda})\frac{a^m}{m!}, \quad (a\in\frac{1}{\lambda}E, |x|_p\le|\lambda|_p).\end{aligned} \tag{23}$$

由定理 4、(23) 和 (11)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}\coth_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right) &= \frac{\lambda}{\log(1+\lambda a)}\int_{\mathbb{Z}_p}\cosh_\lambda(x:a)\,d\mu(x) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l C_l\frac{a^l}{l!}\right)\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\mathbb{Z}_p}((x)_{m,\lambda}+(-1)^m(x)_{m,-\lambda})d\mu(x)\frac{a^m}{m!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l C_l\frac{a^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\beta_{m,\lambda}+(-1)^m\beta_{m,-\lambda}}{2}\right)\frac{a^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{\beta_{m,\lambda}+(-1)^m\beta_{m,-\lambda}}{2}\right)C_{n-m}\lambda^{n-m}\right)\frac{a^n}{n!},\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $a\in\frac{1}{\lambda}E$，令 $|\lambda|_p\ge 1$。由泰勒展开，得到

$$\sinh_\lambda(x:a) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left((x)_{m,\lambda}-(-1)^m(x)_{m,-\lambda}\right)\frac{a^m}{m!}, \quad (a\in\frac{1}{\lambda}E, |x|_p\le|\lambda|_p). \tag{25}$$

因此，由 (21) 和 (25)，得到

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\lambda}\log(1+\lambda a) &= \int_{\mathbb{Z}_p}\sinh_\lambda(x:a)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta_{n,\lambda}-(-1)^n\beta_{n,-\lambda}}{2}\right)\frac{a^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_{n,\lambda}-(-1)^n\beta_{n,-\lambda}}{2}\right)\frac{a^n}{n!},\end{aligned} \tag{26}$$

$\left(a\in\frac{1}{\lambda}E\ |\lambda|_p\ge 1\right)$。

and

(27)

$$-\frac{1}{2\lambda}\log(1+\lambda a) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}}{n}a^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\frac{a^n}{n!}, \quad (|\lambda a|_p\le 1).$$

由 (24)、(26) 和 (27)，我们得到以下定理。

定理5. 对于 $n\in\mathbb{N}$，我们有以下恒等式：

$$-(n-1)!(-\lambda)^{n-1} = \left(\beta_{n,\lambda}-(-1)^n\beta_{n,-\lambda}\right).$$

此外，我们还有以下关系：

$$\frac{a}{2}\coth_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(\frac{\beta_{m,\lambda}+(-1)^m\beta_{m,-\lambda}}{2}\right)C_{n-m}\lambda^{n-m}\right)\frac{a^n}{n!},$$

其中，$a\in\frac{1}{\lambda}E$，且 $|\lambda|_p\ge 1$。

由式（4）可知,

$$\begin{aligned} 2 &= \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x+1:a)\, d\mu_{-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) \\ &= (\cosh_\lambda(1:a)+1)\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) + \sinh_\lambda(1:a)\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x), \end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x+1:a)\, d\mu_{-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) \\ &= (\cosh_\lambda(1:a)+1)\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) + \sinh_\lambda(1:a)\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x), \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\mathrm{a} \in \frac{1}{\lambda}\mathrm{E}$，且 $|\lambda|_p \geq 1$。

通过求解式 (28) 和 (29) 中的线性方程组，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) &= 1, \\ \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) &= -\frac{\sinh_\lambda(1:a)}{\cosh_\lambda(1:a)+1}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\mathrm{a} \in \frac{1}{\lambda}\mathrm{E}$，且 $|\lambda|_p \geq 1$。

因此，由式 (30) 及命题 1 和命题 2，可得

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) = -\frac{2\sinh_\lambda(\frac{1}{2}:a)\cosh_\lambda(\frac{1}{2}:a)}{2\cosh_\lambda^2(\frac{1}{2}:a)} = -\tanh_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right), \tag{31}$$

其中 $\mathrm{a} \in \frac{1}{\lambda}\mathrm{E}$，且 $|\lambda|_p \geq 1$。

因此，由（30）和（31），我们得到以下定理。

定理 6. 设 $\mathrm{a} \in \frac{1}{\lambda}\mathrm{E}$，且 $|\lambda|_p \geq 1$。则有以下关系。

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) &= -\tanh_\lambda\left(\frac{1}{2}:a\right), \\ \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) &= 1. \end{aligned}$$

因此，由定理 6、（25）和（11），我们得到

$$\begin{aligned} -\tanh_\lambda(\frac{1}{2}:a) &= \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh_\lambda(x:a)\, d\mu_{-1}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathscr{E}_{n,\lambda} - (-1)^n\mathscr{E}_{n,-\lambda}}{2}\right)\frac{a^n}{n!}, \quad \left(a \in \frac{1}{\lambda}E, |\lambda|_p \geq 1\right). \end{aligned} \tag{32}$$

此外，由定理 6、（23）和（11），我们得到

$$1 = \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh_\lambda(x;a)\, d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathscr{E}_{n,\lambda} + (-1)^n\mathscr{E}_{n,-\lambda}}{2}\right)\frac{a^n}{n!},, \quad \left(a \in \frac{1}{\lambda}E, |\lambda|_p \geq 1\right). \tag{33}$$

因此，由(33)可得

$$\frac{1}{2}(\mathscr{E}_{n,\lambda} + (-1)^n\mathscr{E}_{n,-\lambda}) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 0 \\ 0 & \text{if} \quad n > 0. \end{cases} \tag{34}$$

对于 $n \geq 1$，我们有

$$\mathscr{E}_{n,\lambda} = (-1)^{n-1}\mathscr{E}_{n,-\lambda}. \tag{35}$$

由（32）和（35），我们得到以下定理。

定理 7. 设 $a \in \frac{1}{\lambda}E$，并设 $|\lambda|_p \geq 1$。则有以下关系。

$$-\tanh_\lambda\left(\frac{1}{2} : a\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}_{n,\lambda}\frac{a^n}{n!}.$$

3. 结论

我们引入了若干退化双曲函数，它们是通常双曲函数的退化版本。我们计算了退化双曲余弦和退化双曲正弦函数的 Volkenborn 积分及费米子 p 进积分。基于这些结果，我们推导出了关于退化双曲正切函数和退化双曲余切函数的一些恒等式。

近年来，生成函数、组合方法、p 进分析、示性演算、微分方程、概率论、特殊函数、解析数论和算子理论等各种工具，已被用于研究特殊数与多项式及其退化版本。

继续探索众多特殊数和多项式及其在物理学、科学、工程学以及数学中的应用，是我们未来的研究项目之一。

致谢
全体作者感谢 Jangjeon 数学科学研究所对本研究的支持。

数据和材料的可用性：不适用。

资助
第二作者获得基础科学研究计划、韩国国家研究基金会的资助（NRF-2021R1F1A1050151）。

伦理审批和参与同意
所有作者声明，本文的撰写不存在任何伦理问题。

参考文献

[1] Araci, S.; Acikgoz, M.; Park, K.-H.; Jolany, H. 利用 $q = -1$处的 p 进 q 积分统一两族多重扭曲型多项式。《马来西亚数学科学学会通报》 (2) 37 (2014), no. 2, 543-554. [2] Araci, S.; Erdal, D.; Seo, J. J. 关于与加权 q-Bernstein 和 q-Genocchi 多项式相关的 $\mathbb{Z}_p$ 费米子 p 进 q 积分表示的研究。《抽象与应用分析》 2011, Art. ID 649248, 10 pp. [3] Carlitz, L. 退化斯特林数、伯努利数和欧拉数。《数学实用论》 15 (1979), 51-88. [4] Dolgy, D. V.; Park, J.-W. 关于步长为 k 的 q-整数幂和的注记。《当代数学进展研究》 (Kyungshang) 33 (2023), no. 1, 87-93. [5] Kim, D. S.; Kim, T. 关于与三角函数相关的 $\mathbb{Z}_p$ 一些 p 进积分。《俄罗斯数学物理学杂志》 25 (2018), no. 3, 300-308.[6] Kim, D. S.; Kim, T.; Kwon, J.; Lee, S.-H. Park, S. 关于由 $\mathbb{Z}_p$上的 p 进积分导出的 λ-线性泛函。《差分方程进展》 2021, Paper No. 479, 12 pp. [7] Kim, T. 关于在 $q = -1$处与 $\mathbb{Z}_p$ 上的 p 进 q 积分相关的欧拉数和多项式的类似物。《数学分析及其应用杂志》 331 (2007), no. 2, 779-792.

[8] Kim, T. 与 p 进 q 积分相关的 q-欧拉数和多项式。《非线性数学物理学杂志》 14 (2007), no. 1, 15-27.[9] Kim, T.; Kim, D. S. 利用玻色算子得到的关于退化 r-斯特林数的一些恒等式。《俄罗斯数学物理学杂志》 29 (2022), no. 4, 508-517.[10] Kim, T.; Kim, D. S. 关于与若干退化多项式和数相关的退化斯特林数的一些恒等式。《俄罗斯数学物理学杂志》 30 (2023), no. 1, 62-75. [11] Kim, T.; Kim, D. S.; Park, J.-W. 完全退化伯努利数和多项式。《数学论证》 55 (2022), no. 1, 604-614.[12] Kwon, J.; Kim, W. J.; Rim, S.-H. 关于由 $\mathbb{Z}_p$上的 p 进积分导出的第二类 Daehee 和 Changhee 多项式的一些恒等式。《长田数学学会会刊》 22 (2019), no. 3, 487-497. [13] Schikhof, W. H. 超度量微积分：p 进分析导论。《剑桥高等数学研究丛书》，第 4 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1984。[14] Shiratani, K. 关于作用于 p 进一致可微函数的一些算子。《日本数学杂志》（新辑）2 (1976), no. 2, 343-353.[15] Shiratani, K.; Yokoyama, S. p 进卷积的一个应用。九州大学理学部纪要 A 辑 36 (1982), no. 1, 73-83.[16] Woodcock, C. F. $\mathbb{Z}_p$上的一个不变p进积分。《伦敦数学学会杂志》（第二辑）8 (1974), 731-734. [17] Woodcock, C. F. p进Lipschitz函数的傅里叶分析。《伦敦数学学会杂志》（第二辑）7 (1974), 681-693. [18] Yun, S. J.; Park, J.-W. 关于第二类完全退化Daehee数和多项式。《数学杂志》 2020, Art. ID 7893498, 9 pp. 光云大学数学系，首尔 139-701，大韩民国 电子邮件地址：tkkim@kw.ac.kr 大邱加图立大学数学教育系，庆山 38430，大韩民国 电子邮件地址：hkkim@cu.ac.kr 西江大学数学系，首尔 121-742，大韩民国 电子邮件地址：dskim@sogang.ac.kr