arXiv:2303.02301v1 [math.LO] 4 Mar 2023

具有可计算呈现的局部泛C*-代数

ALEC FOX、ISAAC GOLDBRING 和 BRADD HART

摘要。Kirchberg 嵌入问题（KEP）询问每个 C*-代数是否都能嵌入 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ 的某个超幂中。为了尝试对 KEP 给出否定解，并受到近期 Connes 嵌入问题被推翻的启发，我们确立了 KEP 有肯定解所带来的两个可计算性理论推论。这两个结果都基于一个先验上较弱的假设：存在一个具有可计算表示的局部泛 C*-代数。

1. 引言

近期一项里程碑式的量子复杂性结果 $\mathrm{MIP}^* = \mathrm{RE}$ [11]，为冯·诺依曼代数理论中的一个著名问题——**Connes 嵌入问题**（CEP）——给出了否定解。CEP 在 Connes 的开创性论文 [4], 中提出，询问每个迹冯·诺依曼代数是否都能嵌入超有限 II_1 因子的某个迹超幂中。CEP 的否定解可用于为 C*-代数理论中的一个类似问题给出否定解，该问题称为**Blackadar-Kirchberg 问题**（或**MF 问题**）：每个稳定有限 C*-代数是否都能嵌入泛 UHF 代数的某个超幂中（见 [9,命题 6.1]）。

Blackadar-Kirchberg 问题可视为 CEP 的“有限”C*-代数类比。本文探讨 CEP 的“无限”C*-代数类比，即**Kirchberg 嵌入问题 (KEP)**。KEP 问的是，每个 C*-代数是否都能嵌入 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ 的某个超幂中。[1]

Kirchberg 嵌入问题由第二作者与 Sinclair 在 [10]中从模型论角度进行了研究。在该论文中，KEP 被证明等价于以下陈述：存在一个既是核的又在**存在地**

Goldbring 获得了美国国家科学基金会 DMS-2054477 号资助的部分支持。Hart 的经费来自加拿大自然科学与工程研究委员会。[1]顺便一提，人们可能会问，是否存在 CEP 的“无限”类比，也就是说，III 型冯·诺依曼代数的类比。例如，人们可能会问，每个冯·诺依曼代数是否都能通过期望映射嵌入超有限 III_1 因子 $\mathcal{R}_\infty$ 的 Ocneanu 超幂中。在 [1], Ando、Haagerup 和 Winslow 证明，这个问题等价于 CEP 本身（因此答案是否定的）。

闭的 C-代数。第二作者在 [8], 中给出了 KEP 的进一步模型论等价形式，其中证明了 KEP 等价于以下陈述：$\mathcal{O}_2$ 是可强制的 C*-代数。

在本文中，我们不再关注 $\mathcal{O}_2$ 的核性，而是转而聚焦于这样一个事实：它具有所谓的 **可计算表示**。这里，如果存在一种算法，能够有效地逼近将所有有理多项式作用于生成元所得结果的范数，则称一个 C*-代数的呈示是可计算的。如下文事实 1 所述， $\mathcal{O}_2$ 的标准呈示是可计算的。随后，我们从具有可计算表示的一个**局部通用** C*-代数的存在性中推导出两个可计算性理论后果；这里，如果每个 C*-代数都嵌入 A 的某个超幂中，则称 C*-代数 A 是局部通用的。我们认为，这两个后果通常都不应成立，因此将这些结果视为 KEP 具有否定解的证据。

我们现在简要介绍两个主要结果，并在接下来的两节中给出更精确的表述。

我们的第一个定理涉及**弱稳定**C*-代数的概念。粗略地说，有限呈示的 C*-代数 A 是弱稳定的，如果从 A 到某个 C*-代数 B 的任意近似 $*$-同态，都接近于一个从 A 到 B的实际 $*$-同态。更精确地说，有限呈示的 C*-代数

$$A = C^*\langle \bar{x} \mid p_j(x_1, \ldots, x_k) = 0\,, j = 1, \ldots, m\rangle$$

（这一概念的精确定义见下一节）是弱稳定的，当且仅当：对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意 C*-代数 B 及元素 z_1、……、 $z_k \in B$，若对所有 $j = 1$、……、 m都有 $\|p_j(\bar{z})\| < \delta$，则存在一个 $*$-同态 $\varphi : A \to B$，使得对所有 $i = 1$、 ……、 k 都有 $\|\varphi(x_i) - z_i\| \leq \epsilon$。弱稳定 C*- 代数（以及其他变体）已被其他研究者探讨，其中最具基础性的论文可能是 [3] 和 [12]。如果我们要求这一赋值 $\epsilon \mapsto \delta$ 是可计算的（其含义将在下文定义 5 中精确定义），便得到**可计算弱稳定**C*-代数的概念。（严格来说，可计算弱稳定性是给定的 C*-代数有限呈示的一种性质，但在可计算同构下保持不变；见下文引理 6。）

我们的第一个定理指出，如果存在一个具有可计算表示的局部通用 C*-代数，那么任何可计算弱稳定的**有限可计算枚举的呈示**（意即该呈示中的有限多个多项式的系数取自 $\mathbb{Q}(i)$）的 C*-代数实际上都是可计算的。简言之：假设存在一个具有可计算呈示的局部通用 C*-代数，则 C*-代数上的有效弱稳定条件意味着可以有效地逼近 C*-代数中的算子范数。

我们的第二个结果属于量子复杂性理论领域。文中 [11], 定义了一个特定的量子复杂性类 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}$，并证明该类中的所有语言都是 coRE——即递归可枚举集的补集。其逆命题是否成立仍是一个悬而未决的问题：也就是说， $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}$是否与 coRE 类相同？在记号 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}$ 中，“co”代表“对易”，源于其定义中使用了**可交换算子策略**。本文定义了“几乎对易”算子策略的一个放宽版本 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta,\ \mathrm{op}}$ 并证明，假设存在一个具有可计算表示的局部通用 C*-代数，那么属于相应量子复杂性类 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{op},\ \delta}$ 的所有语言实际上都是递归可枚举的（因此也是可判定的！）。

我们以一些关于 C*-代数超积的记号和术语结束本引言。本文中，所有 C*-代数都假定为含幺的，所有 $*$-同态都假定保持单位元。此外， $\mathcal{U}$ 始终表示 $\mathbb{N}$上的一个非主超滤子。给定一个 C*-代数 C，其相对于 $\mathcal{U}$的**超幂**记为 $C^{\mathcal{U}}$，它是 Banach 代数 $\ell^\infty(\mathbb{N}, C)$ 的商代数，其中 $\ell^\infty(\mathbb{N}, C)$ 由来自 C 的所有一致范数有界序列组成，商去的理想由满足 $\lim_{\mathcal{U}} \|A_m\| = 0$ 的元素 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 构成。众所周知， $C^{\mathcal{U}}$ 仍然是一个 C*-代数。给定 $(A_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, C)$，我们将其在 $C^{\mathcal{U}}$ 中的陪集记为$(A_m)_{\mathcal{U}}$。

作者谨向 William Slofstra、Thomas Vidick 和 Henry Yuen 致谢，感谢他们就这项工作进行的有益讨论。

2. 可计算弱稳定性

设 $\mathcal{G}$ 为一组非交换不定元，我们称之为**生成元**。对于 $\mathcal{G}$ 的一组**关系**，我们指形如 $\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \le \alpha$的一组关系，其中 p 是 n 中的一个 $*$-多项式，不含常数项；x_1、.....、 x_n 是 $\mathcal{G}$的元素，且 α 是非负实数。我们还要求，对于每个生成元 $x \in \mathcal{G}$， $\mathcal{R}$中都存在一个形如 $\|x\| \le M$ 的关系。 $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ 的一个**表示**是一个函数 $j : \mathcal{G} \to A$，其中 A 是一个 C*-代数，并且对于 $\mathcal{R}$中的每个关系 $\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \le \alpha$，都有 $\|p(j(x_1), \ldots, j(x_n))\| \le \alpha$。

万有C*-代数 of $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ 是一个 C*-代数 A，并带有一个表示$\iota : \mathcal{G} \to A$ of $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$，使得对于 $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ 的所有其他表示 $j : \mathcal{G} \to B$，都存在唯一的 *-同态 $\varphi : A \to B$，使得 $\varphi(\iota(x)) = j(x)$ 对所有$x \in \mathcal{G}$成立。如果 $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ 的万有 C*-代数存在，那么它在同构意义下唯一，并记作 $C^*\langle \mathcal{G}|\mathcal{R}\rangle$。注意， $C^*\langle \mathcal{G}|\mathcal{R}\rangle$ 由生成元的像生成。如果 $\mathcal{G}$ 是一个序列 $\bar{x}$，那么我们可以用 $C^*\langle \bar{x}|\mathcal{R}\rangle$ 代替$C^*\langle G|\mathcal{R}\rangle$。鉴于本文始终处于含幺 C*-代数的语境中，我们默认为存在一个指定生成元，用于表示

单位元，并加入关系，声明它是一个充当乘法单位元的自伴幂等元。

C*-代数 A 如果具有如下形式： $A = C^*\langle \mathcal{G}|\mathcal{R}\rangle$ 其中 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{R}$ 为有限集，则称其为**有限呈示的**。

设 C 为一个 C*-代数。 C 的**呈示**是一个二元组 $C^\dagger := (C, (a_n)_{n\in\mathbb{N}})$，其中 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 C 的子集，并且生成 C （作为 C*-代数）。序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中的元素称为该呈示的**特殊点**；而对于 p，形如 $p(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ 且 $*$-多项式的系数来自$\mathbb{Q}(i)$ （即**有理多项式**）的元素，称为该呈示的**有理点**。如果存在一个算法，使其输入 $C^\dagger$ 的有理点 p 和 $k \in \mathbb{N}$ 后，返回一个满足 $|\|p\| - q| < 2^{-k}$ 的有理数 q，则称 $C^\dagger$ 是 C 的**可计算表示**。如果 $A^\dagger$ 和 $C^\dagger$ 是 C*-代数的呈示，则称 *-同态 $\varphi : A \to C$ 是从 $A^\dagger$ 到 $C^\dagger$ 的**可计算映射**，如果存在一个算法，使其输入 $A^\dagger$ 的有理点 p 和 $k \in \mathbb{N}$ 后，返回 $C^\dagger$ 的有理点 q，并满足 $\|\varphi(p) - q\| < 2^{-k}$。

通用 C*-代数 $C^*\langle \bar{x}|\mathcal{R}\rangle$ 的**标准呈示**以 $\bar{x}$ 作为其特定生成集。若关系 $\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \leq a$ 满足 p 是有理多项式且 a 是非负二进有理数，则称其为**有理**关系。若 C*-代数 A 的呈示 $A^\dagger$ 是某个有理关系可计算枚举集 $\mathcal{R}$的标准呈示，则称其为**可计算可枚举**呈示。当 $\bar{x}$ 和 $\mathcal{R}$ 均为有限时，我们称 $A^\dagger$ 是**有限可计算枚举的**。

我们将需要第一作者的以下事实 [7]:

事实 1。 若 A 是一个单C*-代数，则其任意可计算可枚举呈示 $A^\dagger$ 都是可计算的。

特别地，鉴于 $\mathcal{O}_2$ 的标准呈示显然是（有限）可计算枚举的，我们由前述事实得出结论：它是一个可计算表示。

将形式为 $\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \leq 0$ 的关系写成更熟悉的形式 $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 是合理的。另请注意，在任何 C*-代数的可计算可枚举呈示中，我们都可以将形式为 $\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \leq a$ 的任意关系替换为两个关系 $p(x_1, \ldots, x_n) - g = 0$ 和 $\|g\| \leq a$，其中 g 是一个新生成元。

定义 2. 有限呈示的 C*-代数 $A = C^*\langle \bar{x} \mid p_i(\bar{x}) = 0, \|x_k\| \leq C_k\rangle$ 若满足以下条件，则称为**弱稳定**: 对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得对于所有 C*-代数B，如果 $\bar{z} \in B$ 对所有 i 都满足 $\|p_i(\bar{z})\| \leq \delta$，且 $\|z_k\| \leq C_k + \delta$ 对所有 k 都成立，那么就存在一个 *-同态 $\varphi : A \to B$，使得对于所有 k，$\|\varphi(x_k) - z_k\| \leq \epsilon$。

以下都是弱稳定 C*-代数的例子；证明见 [2] 。

例子 3。

(1) $C^*(\mathbb{F}_n)$，由 n个生成元生成的自由群的全通用 C*-代数。

(2) $M_n(\mathbb{C})$，或者更一般地，任意有限维 C*-代数。(3) Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n = C^*\langle s_1, \ldots\ldots, s_n \mid s_i^* s_j = \delta_{ij} 1, \ \sum s_i s_i^* = 1\rangle$。(4) 托普利茨代数 $\mathcal{T}$，由一个等距算子生成的通用 C*-代数。

注意，在以上所有例子中，C*-代数要么是核的，要么不是单的。事实上，我们有：

命题 4. 如果 *KEP* 有正解，那么任意单的弱稳定C*-代数都是正合的。

证明. 假设 A 是一个单的、弱稳定的 C*-代数。由 KEP 有正解可知，存在一个嵌入 $A \hookrightarrow \mathcal{O}_2^u$。由于 A 是弱稳定的（回想一下， A 是有限呈示的，因此只需满足有限多个条件），存在一个 *-同态 $A \to \mathcal{O}_2$；又由于 A 是单的，该同态必为嵌入。因此， A是正合的。□

现在我们引入弱稳定性的可计算版本。

定义 5. 有限可计算可枚举表示 $A^\dagger = C^*\langle \overline{x} \mid p_i(\overline{x}) = 0, \|x_k\| \le C_k\rangle$ 是**可计算弱稳定**的，如果存在一个算法，在输入 $n \in \mathbb{N}$时返回 $m \in \mathbb{N}$，使得对于所有 C*-代数 B，若 $\overline{z} \in B$ 对所有 i 都满足 $\|p_i(\overline{z})\| \le 2^{-m}$，且 $\|z_k\| \le C_k + 2^{-m}$ 对所有 k都满足，则存在一个 *-同态 $\varphi : A \to B$，使得 $\|\varphi(x_k) - z_k\| < 2^{-n}$ 对所有 k都成立。

虽然按原样给出的定义取决于关系的选择，但我们将在下面的引理中证明，这一概念在可计算意义下是稳健的，因此任何给出相同呈示的有限组有理关系都适用。

引理 6. 设

$$A^\dagger = C^*\langle x_1, \ldots, x_j \mid p_i(\overline{x}) = 0, \|x_k\| \le C_k\rangle$$

and

$$A^\# = C^*\langle y_1, \ldots, y_\ell \mid q_i(\overline{y}) = 0, \|y_k\| \le D_k\rangle$$

是一个C*-代数 A 的有限可计算可枚举表示。若存在一个从 $A^\#$ 到 $A^\dagger$ 的可计算同构，并且 $A^\dagger$ 是可计算弱稳定的，那么 $A^\#$ 也如此。

证明。 固定一个从 $A^\#$ 到 $A^\dagger$ 的可计算同构 ψ。设 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $k = 1, \ldots, \ell$，我们可以计算出一个有理 *-多项式 $t_k(\overline{x})$，使得 $\|t_k(\overline{x}) - \psi(y_k)\| < 2^{-(n+2)}$。取 d，使得对于任意 C*-代数 B，若对 $i = 1, \ldots, j$ 均有 $\|u_i - v_i\|_B < 2^{-d}$，则对所有 k 都有 $\|t_k(\overline{u}) - t_k(\overline{v})\|_B < 2^{-(n+2)}$。取 s 作为证据，表明 $A^\dagger$ 在输入 d 上是可计算弱稳定的。

对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $W_m = C^*\langle w_1, \ldots, w_\ell \mid \|q_i(\overline{w})\| \le 2^{-m}, \|w_k\| \le D_k + 2^{-m}\rangle$。根据 [7,定理 3.3]，，给定 $m \in \mathbb{N}$ 和一个有理 *-多项式 $r(\overline{w})$，我们可以有效地

枚举一个收敛到 $\|r(\overline{w})\|_{W_m}$ 的递减有理数列。对所有 $m \in \mathbb{N}$ 和有理 *-多项式 $r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w})$ 进行枚举，并在 $\|p_i(r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w}))\|_{W_m} < 2^{-s}$ 对所有 i 成立、$\|r_k(\overline{w})\|_{W_m} < C_k + 2^{-s}$ 对所有 k 成立，且 $\|t_k(r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w})) - w_k\|_{W_m} < 2^{-(n+2)}$ 对所有 k 成立时接受。注意，由于存在一个从 A 到 $\prod_{\mathcal{U}} W_m$ 的嵌入，它将 $\psi(y_k)$ 映射到 w_k，因此必定会接受。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在有理 *-多项式 $r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w})$，属于 $\prod_{\mathcal{U}} W_m$，使得 $\|p_i(r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w}))\| < \epsilon$ 对所有 i 成立、$\|r_k(\overline{w})\| < C_k + \epsilon$ 对所有 k 成立，且 $\|t_k(r_1(\overline{w}), \ldots, r_j(\overline{w})) - w_k\| < \epsilon$ 对所有 k 成立。

设 B 是一个 C*-代数，并且 $\overline{z} \in B$ 满足：对所有 i，都有 $\|q_i(\overline{z})\| \leq 2^{-m}$；对所有 k，都有 $\|z_k\| \leq D_k + 2^{-m}$。那么对所有 i，都有 $\|p_i(r_1(\overline{z}), \ldots, r_j(\overline{z}))\| < 2^{-s}$；对所有 k，都有 $\|r_k(\overline{z})\| < C_k + 2^{-s}$；对所有 k，都有 $\|t_k(r_1(\overline{z}), \ldots, r_j(\overline{z})) - z_k\| < 2^{-(n+2)}$。由 s 的选取可知，存在 $\varphi : A \to B$ 使得对 $k = 1$、……、j，都有 $\|\varphi(x_k) - r_k(\overline{z})\| < 2^{-d}$。那么对于 $k = 1$、……、ℓ，

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(\psi(y_k)) - z_k\| \\
&\leq \|\varphi(\psi(y_k)) - \varphi(t_k(\overline{x}))\| \\
&\qquad + \|\varphi(t_k(\overline{x})) - t_k(r_1(\overline{z}), \ldots, r_j(\overline{z}))\| \\
&\qquad + \|t_k(r_1(\overline{z}), \ldots, r_j(\overline{z})) - z_k\| \\
&\leq \|\psi(y_k) - t_k(\overline{x})\| \\
&\qquad + \|t_k(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_j)) - t_k(r_1(\overline{z}, \ldots, r_j(\overline{z}))\| \\
&\qquad + \|t_k(r_1(\overline{z}), \ldots, r_j(\overline{z})) - z_k\| \\
&< 2^{-n}.
\end{aligned}$$

□

接下来，我们旨在证明，上述所有弱稳定 C*-代数的例子实际上都是可计算弱稳定的。

以下结果是众所周知的。

引理 7. 假设 $0 < \delta < \epsilon < 1$。那么对于任意含幺 C*-代数 A 和 $a \in A$，若 $\|a^*a - 1\| \leq \delta$ 且 $\|aa^* - 1\| \leq \delta$，则存在酉元 $u \in A$ 使得 $\|a - u\| < \epsilon$。

以下结果的非有效版本可见于 [3] 或 [12]。

引理 8. 假设 $0 < \epsilon < 1$ 和 $0 < \delta < \epsilon^2/8$。那么对于任意 C*-代数 A 和 $a \in A$，若 $\|a\| \leq 2$、$\|a - a^*\| \leq \delta$ 和 $\left\|a - a^2\right\| \leq \delta$，则存在投影 $p \in A$ 使得 $\|a - p\| < \epsilon$。

证明。令 $x = (a + a^*)/2$，则 x 是自伴的，并且 $\|a - x\| \leq \delta/2 < \epsilon/2$。此外，通过展开可得 $\left\|x - x^2\right\| \leq \left\|a - a^2\right\| + \|a\|\|a - a^*\|/2 \leq 2\delta < \epsilon^2/4$。因此

x的谱为 $\sigma(x) \subseteq [-\epsilon/2, \epsilon/2] \cup [1-\epsilon/2, 1+\epsilon/2]$。令 f 在$\sigma(x)$ 上连续，使得 $f = 0$ 在 $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$ 上，并且 $f = 1$ 在 $[1-\epsilon/2, 1+\epsilon/2]$上。令 $p = f(x)$。则 p 是一个投影，并且 $\|a - p\| \leq \|a - x\| + \|x - f(x)\| < \epsilon$。□

推论 9。 如果 $A_1^\dagger$ 和 $A_2^\dagger$ 是可计算弱稳定的，那么 $A_1^\dagger \oplus A_2^\dagger$ 也是可计算弱稳定的。

引理 10。 假设 $0 < \epsilon < 1$ 和 $0 < \delta < 2^{-16}\epsilon^8$。那么对于任意 C*-代数 A、$a \in A$以及投影 p_1，$p_2 \in A$，如果 $\|a^*a - p_1\| \leq \delta$ 和 $\|aa^* - p_2\| \leq \delta$，则存在偏等距 v，使得 $\|a - v\| < \epsilon$、$v^*v = p_1$和 $vv^* = p_2$。

证明。 令 $b = p_2 a p_1$。我们有 $\|a(1-p_1)\|^2 = \|(1-p_1)(a^*a - p_1)(1-p_1)\| \leq \delta$，类似地 $\|(1-p_2)a\|^2 = \|(1-p_2)aa^*(1-p_2)\| \leq \delta$。因此 $\|a - b\| \leq \|a(1-p_1)\| + \|(1-p_2)a\| \leq 2\sqrt{\delta}$。此外，

$$\begin{aligned}
&\left\|(b^*b)^2 - b^*b\right\| \\
&\leq \left\|(b^*b)^2 - (a^*a)^2\right\| + \left\|(a^*a)^2 - p_1^2\right\| + \|p_1 - a^*a\| + \|a^*a - b^*b\| \\
&\leq 20\|b - a\| + 4\|a^*a - p_1\| \\
&\leq 49\sqrt{\delta}.
\end{aligned}$$

设 $\gamma = 7\delta^{1/4}$。则 $\sigma(b^*b)$ 是 $[-\gamma, \gamma] \cup [1-\gamma, 1+\gamma]$的子集。设 f 是 $\sigma(b^*b)$ 上的连续函数，使得 $f = 0$ 在 $[-\gamma, \gamma]$ 上成立，且对所有 $x \in [1-\gamma, 1+\gamma]$，$f(x) = \sqrt{x}$。设 $w = bf(b^*b)$。则 $w^*w = b^*bf(b^*b)^2$ 和 $ww^* = bb^*f(bb^*)^2$ 是投影。此外，
$\|b - w\|^2 = \|(b^* - w^*)(b - w)\| = \|b^*b - w^*w\| \leq \gamma$，因此
$\|a - w\| \leq \|a - b\| + \|b - w\| \leq 2\sqrt{\delta} + \sqrt{\gamma} < \epsilon$。注意 $w^*w \leq p_1$ 和 $ww^* \leq p_2$。则 $p_1 - w^*w$ 是一个范数为

$$\|p_1 - w^*w\| \leq \|p_1 - a^*a\| + \|a^*a - b^*b\| + \|b^*b - w^*w\| < 1$$

且 $p_2 - ww^*$ 是一个范数为

$$\|p_2 - ww^*\| \leq \|p_2 - aa^*\| + \|aa^* - bb^*\| + \|bb^* - ww^*\| < 1.$$

因此 $w^*w = p_1$ 且 $ww^* = p_2$。

□

推论 11。 如果 $A^\dagger$ 是可计算弱稳定的，那么 $M_n(A^\dagger)$也是如此。

现在我们有以下标准表示是可计算弱稳定的：

例 12。

(1) $C^*(\mathbb{F}_n)$。(2) $\mathbb{C}$。更一般地，由 n 个投影生成的泛 C* 代数。(3) $M_n(\mathbb{C})$。更一般地，任意有限维 C* 代数。(4) Cuntz 代数 $\mathcal{O}_n$。

(5) 托普利茨代数 $\mathcal{T}$。

对于 (1)，应用引理 7；对于 (2)，应用引理 8；对于 (3)，应用推论 9 和引理 10；对于 (4)，应用引理 8 和引理 10。
注意，前面的呈示实际上都是可计算的。下面是本节的主要结果：

定理 13。 如果存在一个带有可计算呈示 $B^\dagger$ 的局部普适 C*-代数 B，那么 C*-代数 A 的每个可计算弱稳定呈示 $A^\dagger$ 都是可计算的。

证明。 由于 $A^\dagger$ 是可计算可枚举的，根据 [7, 定理 3.3]，存在一个有效程序：给定 $A^\dagger$ 的一个有理点 q 后，该程序会枚举一个收敛于 $\|q\|$ 的递减有理数序列。只需证明我们可以从下方进行同样的操作。

给定 $A^\dagger$ 的有理点 $q(\overline{x})$，我们按如下方式进行。遍历所有 $j \in \mathbb{N}$。对于每个 j，确定 $n \in \mathbb{N}$，使得若对所有 k 都有 $\|x_k - y_k\| < 2^{-n}$，则在所有 C*-代数中都有 $\|q(\overline{x}) - q(\overline{y})\| < 2^{-j}$。设 $m \in \mathbb{N}$ 在输入 n 时由有效程序给出，该程序证明 $A^\dagger$ 是可计算弱稳定的。遍历 $B^\dagger$ 的所有有理点元组 $\overline{r}$，使得对所有 i 都有 $\|p_i(\overline{r})\| < 2^{-m}$，且对所有 k 都有 $\|r_k\| < C_k + 2^{-m}$。遍历所有二进有理数 d。若某时出现 $\|q(\overline{r})\| > 2^{-j} + d$，其中 d 大于此前所有输出，则输出 d。根据 m 的选取，存在一个 *- 同态 $\varphi : A \to B$，使得 $\|\varphi(x_k) - r_k\| < 2^{-n}$。于是 $\|q(\overline{x})\| \geq \|\varphi(q(\overline{x}))\| \geq \|q(\overline{r})\| - 2^{-j} > d$。

我们证明，该序列确实从下方收敛到 $\|q\|$。事实上，设 $d < \|q(\overline{x})\|$，并令 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $\|q(\overline{x})\| - d > 2^{-j}$。令 n 和 m 如上。由于 B 是局部通用的，对于足够小的 $\epsilon > 0$，存在 $\overline{z}$ 属于 B，使得对所有 i 都有 $\|p_i(\overline{z})\| < 2^{-m} - \epsilon$，并且对所有 k 都有 $\|z_k\| < C_k + 2^{-m} - \epsilon$ 和 $\|q(\overline{z})\| > d + 2^{-j} + \epsilon$。因此，存在 $B^\dagger$ 的有理点 $\overline{r}$，使得对所有 i 都有 $\|p_i(\overline{r})\| < 2^{-m}$，并且对所有 k 都有 $\|r_k\| < C_k + 2^{-m}$ 和 $\|q(\overline{r})\| > d + 2^{-j}$。□

由事实 1，我们立即得到以下结论：

推论 14。 如果存在一个具有可计算可枚举表示 $B^\dagger$ 的单局部通用 C*-代数 B（特别地，如果 *KEP* 成立），那么 C*-代数 A 的每个可计算弱稳定表示 $A^\dagger$ 都是可计算的。

3. 量子复杂性结果

一个包含**问题数为 n、答案数为 k 的非局域博弈**是一个数对 $\mathfrak{G} = (\pi, D)$，其中 π 是定义在 $[n]$ 上的概率分布，而 $D : [n] \times [n] \times [k] \times [k] \to \{0, 1\}$ 称为

该**博弈的判定谓词**。此处，$[n] := \{1, \ldots, n\}$，[k]也类似。我们还将数对 (n, k) 称为 $\mathfrak{G}$的**维数**。我们设有两名玩家，以下称为 Alice 和 Bob，他们按如下方式进行 $\mathfrak{G}$：随机地按照 π 选取一对问题 $(x, y) \in [n] \times [n]$，然后 Alice 和 Bob 以某种方式分别给出一对答案 $(a, b) \in [k] \times [k]$；若 $D(x, y, a, b) = 1$，则他们赢得博弈，否则输掉博弈。

为了描述它们在玩 $\mathfrak{G}$ 时所采用的策略，我们需要正算子值测度的概念。回顾一下，在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上，**正算子值测度**或 **正算子值测度** 是一个由 A_1、.....、A_k 组成的有限集，其中各元素都是 $\mathcal{H}$ 上的正算子，并且满足 $A_1 + \cdots + A_k = I$。我们将 k 称为该正算子值测度的**长度**。更一般地，可以用相同的定义来定义任意 C*-代数中的正算子值测度。

对每个 k，令 $\varphi_k(X)$ 表示公式

$$\max\left(\max_{1\le i\le k}\inf_{Z_i}\|Z_i^*Z_i - X_i\|, \|\sum_{i=1}^{k} X_i - I\|\right)$$

关于 k 个变量 $X = (X_1, \ldots, X_k)$。下面的引理很容易证明，但在全文中都会用到：

引理 15. 对于每个 $\epsilon > 0$ 和 $k \geq 1$，都存在 $\delta > 0$，使得：对于任意 C*-代数 C以及其中单位球里的任意元素 $A_1, \ldots, A_k$，若 $\varphi_k(A_1, \ldots, A_k) < \delta$，则存在 C 中的正算子值测度 $B_1, \ldots, B_k$，使得 $\max_{1\le i\le k}\|A_i - B_i\| < \epsilon$。

我们用正算子值测度来定义非局域博弈的策略。首先，设 $\mathfrak{G}$ 是一个维数为 (n, k) 的非局域博弈，且 C 是一个 C*-代数。C 中的一个 **$\mathfrak{G}$-测量** 是由 C中的正算子值测度组成的一个元组 $A := (A^x)_{x\in[n]}$，其中每个正算子值测度的长度均为 k。当然，C 中 $\mathfrak{G}$-测量的概念只取决于非局域博弈的维数，但这一术语在下文中会很有用。因此，对于每一对可能的问题和答案 $(x, a) \in [n] \times [k]$，我们都有一个正元 $A_a^x \in C$；并且对于每个 $x \in [n]$，都有 $\sum_{a\in[k]} A_a^x = I$。

在 C 中的 $\mathfrak{G}$-策略是一个元组 $\sigma := (A, B, \phi)$，其中 A 和 B 是 C 和 $\phi \in S(C)$ 中的 $\mathfrak{G}$-测量，而 C 上的一个态为 $\mathfrak{G}$。给定上述 C 中的一个 $\mathfrak{G}$-策略 σ，我们将相应的相关矩阵 $p_\sigma \in [0, 1]^{n^2k^2}$ 定义为 $p_\sigma(a, b|x, y) = \phi(A_a^x \bullet B_b^y)$，其中，对于任意 A、$B \in C$，我们定义 $A \bullet B := \frac{1}{2}(A^{1/2}BA^{1/2} + B^{1/2}AB^{1/2})$。这一界定背后的直觉是：如果 Alice 和 Bob 按照策略 σ 进行 $\mathfrak{G}$，那么在收到问题对 (x, y) 后，他们会分别使用各自的正算子值测度 A^x 和 B^y 测量态 ϕ 中属于自己的部分；由于我们并未假设这些测量彼此对易，因此我们取 Alice 先测量和 Bob 先测量时所得结果的平均值。因此，

[2]这种记号似乎最早由 Ozawa 在 [14]中提出。

$p_\sigma(a,b|x,y)$ 是使用策略 σ 时，他们以答案对 (a,b) 回答问题对 (x,y) 的概率。

当然，如果每个 A_a^x 和 B_b^y 都对易，上述定义就退化为通常计算 $p_\sigma(a,b|x,y)=\phi(A_a^xB_b^y)$ 的情形，我们称该策略为σ **对易**。固定一个正实数 $\delta>0$。如果对所有 $(x,y)\in[n]\times[n]$，都有 $\sum_{a,b\in[k]}\|[A_a^x,B_b^y]\|<\delta$，我们就称该策略为 σ δ-**op- 几乎对易** 。注意， δ-op-对易策略的概念仅取决于这对 $\mathfrak{G}$-测量，因此称这样一对测量为 δ-**op-几乎对易对**是有意义的。

给定 C 中的一个 $\mathfrak{G}$-策略 σ，我们将 **的值在按照** σ 进行时定义为 Alice 和 Bob 按照 σ 进行博弈时获胜的期望值，也就是说，

$$\mathrm{val}(\mathfrak{G},\sigma):=\sum_{x,y}\pi(x,y)\sum_{a,b}D(x,y,a,b)p_\sigma(a,b|x,y).$$

接下来，我们需要为 C中的每一对 $\mathfrak{G}$测量定义元素 (A,B)

$$\mathfrak{G}(A,B):=\sum_{x,y}\pi(x,y)\sum_{a,b}D(x,y,a,b)(A_a^x\bullet B_b^y).$$

使用这一记号，我们有 $\mathrm{val}(\mathfrak{G},\sigma)=\phi(\mathfrak{G}(A,B))$。

如果将 $\mathrm{val}(\mathfrak{G},\sigma)$ 对所有 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的对易 $\mathfrak{G}$策略（其中 σ 遍历所有可能取值）取上确界，就得到 $\mathfrak{G}$的**对易值**，记为 $\mathrm{val}^{co}(\mathfrak{G})$。类似地，给定 $\delta>0$，我们将 $\mathfrak{G}$ 的 δ、op-**对易值**定义为 $\mathrm{val}(\mathfrak{G},\sigma)$ 对所有 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的 δ-op-近似对易 $\mathfrak{G}$策略（其中 σ 遍历所有可能取值）取上确界，记为 $\mathrm{val}_\delta^{co,\,op}(\mathfrak{G})$。

回想一下，**语言**（按复杂性理论的含义）就是$2^{<\mathbb{N}}$的一个子集，也就是说，它是由有限比特序列组成的集合。

定义 16。我们称语言 L 属于 MIP^{co}，如果存在一个高效映射，将比特序列 z 映射到非局域博弈 $\mathfrak{G}_z$，使得：

- 若 $z\in L$，则 $\mathrm{val}^{co}(\mathfrak{G}_z)=1$。
- 若 $z\notin L$，则 $\mathrm{val}^{co}(\mathfrak{G}_z)\le\frac{1}{2}$。

在 [13], 中已证明，如果 L属于 MIP^{co}，那么 L 属于复杂度类 coRE，即其补集为可计算可枚举集的集合类；并且有人提出，这一包含关系是否实际上是等式。本节的主要结果表明，对于 MIP^{co} 类的一个适当定义的几乎对易版本，类似问题的答案是否定的：

定义 17。 固定一个可计算函数 $\delta : \mathbb{N} \to [0,1]$。我们称一种语言L 属于 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$，$_{\mathrm{op}}$，如果存在一个从比特序列 z 到非局域博弈 $\mathfrak{G}_z$ 的高效映射，使得：

- 若 $z \in L$，则 $\mathrm{val}^{\mathrm{co}}_{\delta(|z|),\ \mathrm{op}}(\mathfrak{G}_z) = 1$。
- 若 $z \notin L$，则 $\mathrm{val}^{\mathrm{co}}_{\delta(|z|),\ \mathrm{op}}(\mathfrak{G}_z) \leq \frac{1}{2}$。

定理 18. 如果存在一个具有可计算表示的局部普适 C*-代数 C （特别是，如果 *KEP* 成立），那么对于每个可计算函数 $\delta : \mathbb{N} \to [0,1]$，$\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$，$_{\mathrm{op}}$ 中的每种语言都是递归可枚举的。

证明。 假设 C 是一个具有可计算呈示 $C^{\#}$的局部普适 C*-代数。固定一个可计算函数 $\delta : \mathbb{N} \to [0,1]$，并假设 L 属于 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$，$_{\mathrm{op}}$。下面给出一个证明 L 是递归可枚举的算法。假设输入比特序列 z。设 $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}_z$。开始枚举 $C^{\#}$中由有理点构成的 $\delta(|z|)$-近似对易的 $\mathfrak{G}$-测量对 (A, B)，这是可行的，因为该呈示是可计算的。如果 (A, B) 是这样一个 $\delta(|z|)$-op-近似对易对，就将$\|\mathfrak{G}(A, B)\|$近似到误差小于 $\frac{1}{4}$。如果这个近似值超过 $\frac{1}{2}$，则判定$z \in L$。

下面说明该算法为何有效。我们先证明，如果 $z \in L$，算法就会告知我们这一点。如上所述，设 $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}_z$。固定一个足够小的 $\epsilon > 0$，并令$\sigma := (A, B, \phi)$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的一个 $\delta(|z|)$-op-近似对易 $\mathfrak{G}$-策略，使得 $\mathrm{val}(\mathfrak{G}, \sigma) > 1 - \epsilon$。由此可得 $\|\mathfrak{G}(A, B)\| > 1 - \epsilon$。令 D 为由 A 和 B 的坐标生成的 C*-代数，并考虑将 D 嵌入C^{u}的一个嵌入。根据引理 15，存在 C 中的 $\delta(|z|)$-op-近似对易的 $\mathfrak{G}$-测量 A 和 B，使得 $\|\mathfrak{G}(A, B)\| > 1 - 2\epsilon$。不失一般性，可以假设 A 和 B 的坐标均为 $C^{\#}$ 中的有理点。如果 ϵ 足够小，那么将 $\|\mathfrak{G}(\bar{A}, \bar{B})\|$ 近似到误差小于 $\frac{1}{4}$ 所得结果将超过 $\frac{1}{2}$。因此，我们的算法最终会告知我们 $z \in L$。

现在我们检查该算法不会出错，也就是说，如果算法告诉我们 $z \in L$，那么事实上 z 确实属于 L。如果算法告诉我们，(A, B) 是 C 中满足 $\|\mathfrak{G}(A, B)\| > \frac{1}{2}$ 的一对 $\delta(|z|)$-算子几乎对易的 $\mathfrak{G}$-测量，那么在 C 上将存在某个态 ϕ，使得 $\phi(\mathfrak{G}(A, B)) > \frac{1}{2}$。令 $\sigma := (A, B, \phi)$，我们看到 $\mathrm{val}^{\mathrm{co}}{}_{\mathrm{op}\,\delta}(\mathfrak{G}) > \frac{1}{2}$。因此，$z \in L$，正如所需。□

我们指出关于定理 18 的两点。首先，与 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}$ 的情况一样，可以证明 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$ $_{,\mathrm{op}}$ 中的每种语言都是 coRE（无论 KEP 是否成立），因此该定理意味着，只要 KEP 成立，$\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$ $_{,\mathrm{op}}$ 中的每种语言实际上都是可判定的。其次，类 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$ $_{,\mathrm{op}}$ 不同于类 $\mathrm{MIP}^{\mathrm{co}}_{\delta}$

后者由 Coudron 和 Slofstra 在 [5] 中引入；特别是，他们类中的每种语言都无需任何 KEP假设即可判定。

参考文献

[1] H. Ando、U. Haagerup 和 C. Winslow，《超积、QWEP冯·诺依曼代数与 Effros-Maréchal拓扑》，即将发表于《纯粹与应用数学杂志》。arXiv 1306.0460。[2] B. Blackadar，《算子代数：C*-代数与冯·诺依曼代数理论》，施普林格，柏林、海德堡（2005），ISBN：978-3-540-28486-4[3] B. Blackadar，关于 C*-代数的形状理论，《斯堪的纳维亚数学》56（1985），249-275。[4] A. Connes，内射因子的分类，《数学年刊》104（1976），73-115。[5] M. Coudron 和 W. Slofstra，计算非局域博弈的近似对易算子值的复杂度下界，即将发表于2019年计算复杂性大会（CCC）。[6] S. Eilers、T. Shulman 和 A. Sørensen，离散群的C*-稳定性，《数学进展》373（2020），107324。[7] A. Fox，关于C*-代数与群之间的可计算类比，即将发表于《符号逻辑杂志》。arXiv 2206.01415。[8] I. Goldbring，可强制算子代数，《朱西厄数学研究所杂志》20（2021），31-63。[9] I. Goldbring 和 B. Hart，超有限II_1 因子的普遍理论不可计算，预印本。arXiv 2006.05629。[10] I. Goldbring 和 T. Sinclair，关于Kirchberg嵌入问题，《泛函分析杂志》269（2015），155-198。[11] Z. Ji、A. Natarajan、T. Vidick、J. Wright 和 H. Yuen，MIP* = RE，预印本，arxiv 2001.04383 [12] T. A. Loring，由稳定关系生成的C*-代数，《泛函分析杂志》112（1993），159-203。[13] M. Navascués、S. Pironio 和 A. Acín。刻画量子关联集合的收敛半定规划层级。《新物理学杂志》10(7):073013，2008。[14] N. Ozawa，Tsirelson问题与渐近对易酉矩阵，《数学物理杂志》54（2013）：032202。

加利福尼亚大学欧文分校数学系，罗兰楼340室（400号楼），欧文，加利福尼亚州 92697-3875

电子邮箱地址：foxag@uci.edu

网址：https://www.math.uci.edu/people/alec-fox

电子邮箱地址：isaac@math.uci.edu

网址：http://www.math.uci.edu/~isaac

麦克马斯特大学数学与统计学系，主街1280号，汉密尔顿，安大略省，加拿大L8S 4K1

电子邮箱地址: hartb@mcmaster.ca

网址: http://ms.mcmaster.ca/~bradd/