arXiv:2303.02316v1 [math.QA] 4 Mar 2023

相对泊松双代数与弗罗贝尼乌斯雅可比代数

GUILAI LIU 和 CHENGMING BAI

Abstract. 雅可比代数是雅可比流形的代数对应物，恰好就是含幺相对泊松代数。由于单位元的存在，无法直接通过 Manin 三元组构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数，因此我们转而研究相对泊松代数的 Manin 三元组。这类结构等价于某些双代数结构，即相对泊松双代数。对余边界情形的研究引出了相对泊松杨-巴克斯特方程（RPYBE）。RPYBE 的反对称解给出余边界相对泊松双代数。我们引入相对泊松代数和相对前泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子概念，以得到 RPYBE 的反对称解。一个直接应用是，相对泊松双代数可用于构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数；特别地，我们还给出了由相对前泊松代数构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数的方法。

Contents

1. 引言 1
1.1. 泊松代数的推广 1
1.2. 弗罗贝尼乌斯雅可比代数与相对泊松双代数 3
1.3. 论文结构 4
2. 相对泊松代数的表示与匹配对 4
2.1. 相对泊松代数与雅可比代数的表示 5
2.2. 相对泊松代数的匹配对 9
3. 相对泊松双代数 11
3.1. Frobenius 相对泊松代数与相对泊松代数的 Manin 三元组 12
3.2. 相对泊松双代数 14
4. 余边界相对泊松双代数 16
4.1. 余边界相对泊松双代数 16
4.2. $\mathcal{O}$- 算子与相对泊松代数 22
4.3. 相对前泊松代数 25
5. 相对泊松双代数与弗罗贝尼乌斯雅可比代数 27
参考文献 31

1. Introduction

本文旨在为相对泊松代数建立一套双代数理论，其动机之一是构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

1.1. 泊松代数的推广。

泊松代数起源于对泊松几何的研究（[9, 30, 39]），并与数学和物理中的许多主题密切相关。回顾一下，泊松代数是一个向量空间 A，其上定义了两个双线性运算 $\cdot$，$[-,-]$：$A\otimes A\to A$ 使得（A，$\cdot$）是一个交换的

2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B63, 17A36, 18M70, 17D25, 17A40, 37J39, 53D17 .*Key words and phrases.* 雅可比代数；相对泊松代数；弗罗贝尼乌斯雅可比代数；双代数；经典杨-巴克斯特方程；相对前泊松代数。

结合代数，$(A,[-,-])$ 是一个李代数，并且它们按照莱布尼茨法则的意义相容：

$$[z,x\cdot y]=[z,x]\cdot y+x\cdot[z,y],\quad \forall x,y,z\in A. \tag{1}$$

泊松代数有多种推广形式，例如非交换泊松代数，它取消了结合代数的交换性（[40]）；也可以通过改变相容条件（1）（参见 [8, 15, 34]）来变更代数结构。在后一类推广中，雅可比代数是雅可比流形的抽象代数对应物（[26, 31]），而雅可比流形是辛流形或更一般的泊松流形的推广。回顾一下，雅可比流形是一个光滑流形，其上赋有一个双向量 Λ 和一个向量场 E，二者满足某些相容条件；等价地，它是一个光滑流形 M，其上的实光滑函数构成的交换结合代数 $A:=C^\infty(M)$，并赋有一个李括号 M，满足 $[-,-]$

$$[z,x\cdot y]=[z,x]\cdot y+x\cdot[z,y]+x\cdot y\cdot[1_A,z],\quad \forall x,y,z\in A, \tag{2}$$

其中 1_A是 A的单位元。相应地，雅可比代数 是一个三元组（A、 $\cdot$、 $[-,-]$），使得（A、 $\cdot$）是含幺交换结合代数，（A、 $[-,-]$）是李代数，且二者满足式（2）。

代入 $z=1_A$ 于等式 (2)，可得

$$[1_A,x\cdot y]=[1_A,x]\cdot y+x\cdot[1_A,y],\quad \forall x,y\in A. \tag{3}$$

因此，$\mathsf{ad}(1_A)$ 是 $(A,\cdot)$ 和 $(A,[-,-])$ 的导子，其中对所有 $x\in A$，$\mathsf{ad}(1_A)(x)=[1_A,x]$。由此得到雅可比代数的如下自然推广。

定义 1.1. 相对泊松代数是一个四元组 $(A,\cdot,[-,-],P)$，其中 $(A,\cdot)$ 是交换结合代数，$(A,[-,-])$ 是李代数，P 是 $(A,\cdot)$ 和 $(A,[-,-])$ 的导子，也就是说，P 满足以下条件：

$$P(x\cdot y)=P(x)\cdot y+x\cdot P(y), \tag{4}$$

$$P([x,y])=[P(x),y]+[x,P(y)], \tag{5}$$

对所有 $x,y\in A$，并且满足相对莱布尼茨法则，即

$$[z,x\cdot y]=[z,x]\cdot y+x\cdot[z,y]+x\cdot y\cdot P(z),\quad \forall x,y,z\in A. \tag{6}$$

我们也将其简记为 (A,P)。

若相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 中的 $(A,\cdot)$ 是含幺交换结合代数，则称该相对泊松代数为含幺的。雅可比代数与含幺相对泊松代数之间存在一一对应关系：雅可比代数 $(A,\cdot,[-,-])$ 是含幺相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],\mathsf{ad}(1_A))$；而含幺相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 是一个雅可比代数，因为由等式 (6) 可得，对所有 $x\in A$，$P(x)=[1_A,x]$。此外，可以从不一定含幺的相对泊松代数导出含幺相对泊松代数（从而也得到雅可比代数）（见引理 5.5）。也就是说，相对泊松代数不仅以自然的方式推广了雅可比代数，也为后者提供了良好的补充。考虑与相对泊松代数相关的几何问题也很自然；对此我们目前所知甚少，这将是未来研究中一个有趣的课题。

另一方面，相对泊松代数也源于不同的研究路径。事实上，它们最初以分次形式出现，称为广义泊松超代数（[12]）；这类超代数是在对一类称为坎托尔级数（[21, 25]）的单乔丹超代数进行分类时产生的。更多详情及相关主题请参见 [13, 23]。请注意，还有其他不同的代数结构也称为广义泊松代数（[36, 38]）。因此，我们采用此处所用的相对泊松代数概念。

注意，任何泊松代数都可以视为带有导子$P=0$的相对泊松代数。另一方面，若相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 中的交换结合代数 $(A,\cdot)$ 是平凡的，即对所有 $x,y\in A$，$x\cdot y=0$，那么它恰好是由一个李代数 $(P=0,A)$ 和其上的导子 $\cdot$所构成的结构

。一个不那么平凡的相对泊松代数例如如下所示。

例 1.2。设 $(A, \cdot)$ 是一个带有导子 P 的交换结合代数。定义

$$[x, y] = x \cdot P(y) - P(x) \cdot y, \quad \forall x, y \in A. \tag{7}$$

Th其中 $(A, [-,-])$ 是李代数，而 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 是相对泊松代数。

1.2. 弗罗贝尼乌斯雅可比代数与相对泊松双代数。

研究弗罗贝尼乌斯代数非常重要，因为它们与拓扑学、代数几何、范畴论、霍赫希尔德上同调和图论等诸多领域有着密切的联系（[7, 19,27, 29]）。一个结合代数（A, $\cdot$）如果存在一个非退化双线性型[10, 18]，并且该双线性型满足下述不变性条件，则称其为弗罗贝尼乌斯代数（ $\mathcal{B}$ ：

$$\mathcal{B}(x \cdot y, z) = \mathcal{B}(x, y \cdot z), \quad \forall x, y, z \in A. \tag{8}$$

注意，如果（A, $\cdot$）是有单位元且交换的，那么式（8）要求 $\mathcal{B}$ 是对称的。在结合代数上，这类双线性型体现了某种自然对称性，刻画了所谓的弗罗贝尼乌斯性质。在李代数的语境下，即一个李代数（$\mathfrak{g}$, $[-,-]$）配备一个非退化双线性型 $\mathcal{B}$，且该双线性型满足下述不变性条件：

$$\mathcal{B}([x, y], z) = \mathcal{B}(x, [y, z]), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \tag{9}$$

称为自对偶（[17]）。当 $\mathcal{B}$ 对称时，这种结构也称为二次（[35]）或度量李代数（[22]）。

为了研究雅可比代数的弗罗贝尼乌斯性质，文献[1]引入了弗罗贝尼乌斯雅可比代数的概念。也就是说，若存在非退化对称双线性型 $\mathcal{B}$ 定义在 A 上，使得等式（8）和（9）成立，则称雅可比代数（A, $\cdot$, $[-,-]$）为弗罗贝尼乌斯雅可比代数。显然，获得更多弗罗贝尼乌斯雅可比代数的例子是一个重要问题。

一类重要的二次李代数由以下李代数（标准）Manin 三元组的构造给出（[14]）。设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数，且其线性对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 上存在李代数结构，使得向量空间的直和$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上存在李代数结构，其中 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^*$ 是李子代数，并且双线性型

$$\mathcal{B}_d(x + a^*, y + b^*) = \langle x, b^* \rangle + \langle a^*, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, a^*, b^* \in \mathfrak{g}^*, \tag{10}$$

在 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 上是不变的。（$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$）称为李代数的一个（标准）Manin 三元组。显然，带有由式（10）给出的对称非退化双线性型 $\mathcal{B}_d$ 的李代数 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ 是一个二次李代数。在结合代数的背景下，上述构造称为 Frobenius代数的双构造（[7]）；而在泊松代数的背景下，则称为泊松代数的 Manin 三元组（[37]）。

另一方面，上述构造也对应于具有不同动机和应用的某些双代数结构。双代数是满足某些相容条件的代数与余代数的结合。事实上，李代数的 Manin 三元组等价于李双代数（[14, 16]），后者是泊松-李群的代数结构，并在量子群的无穷小化中发挥重要作用。Frobenius代数的双构造等价于反对称无穷小双代数（[2, 4, 5, 7]），这是 Joni 和 Rota 为差商演算提供代数框架而引入的一种特殊无穷小双代数（[20]）。泊松代数的 Manin 三元组等价于泊松双代数（[37]），后者自然适用于在可积系统中构造相容的泊松括号。

因此，为了得到弗罗贝尼乌斯雅可比代数，自然要考虑将上述构造推广到雅可比代数的情形，也就是考察类似“雅可比代数的 Manin 三元组”或“弗罗贝尼乌斯雅可比代数的双构造”的结构及相应的双代数结构。遗憾的是，这种方法行不通，因为一般而言，

含幺交换结合代数无法分解为两个含幺交换结合子代数的底层向量空间的直和。也就是说，由于交换结合代数中单位元的存在，Manin 三元组的结构对于雅可比代数而言并无意义。另一方面，相对而言，这种方法仍适用于相对泊松代数；也就是说，对于相对泊松代数，“相对泊松代数的 Manin 三元组”是有意义的，因为不存在“单位元的约束”。更有意思的是，由于一个含幺交换结合代数可能分解为两个交换结合子代数的底层向量空间的直和，且其中一个子代数含幺，我们仍然可以从相对泊松代数的 Manin 三元组得到弗罗贝尼乌斯雅可比代数的实例。

本文将上述相对泊松代数方法付诸实践，以构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。具体而言，我们引入相对泊松代数的 Manin 三元组以及相应双代数结构（即相对泊松双代数）的概念。它们之间的等价关系可通过相对泊松代数的匹配对来阐释。相对泊松双代数具有一些与李双代数或反对称无穷小双代数相似的性质。特别地，其中也存在余边界情形，由此引入李代数中经典杨-巴克斯特方程的一个类似形式，称为相对泊松代数中的相对泊松杨-巴克斯特方程（RPYBE）。相对泊松代数中 RPYBE 的反对称解可导出余边界相对泊松双代数；此外，我们引入相对泊松代数和相对前泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子概念，以构造此类解。此外，对于满足某些附加条件的相对泊松双代数，可以得到弗罗贝尼乌斯雅可比代数；特别地，还可以由相对前泊松代数构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

1.3. 论文结构。本文组织如下。

In 相对泊松代数的匹配对等概念。 对偶表示的表示。

在第 2 节中，我们引入相对泊松代数的表示这一概念。随后，我们研究相对泊松代数具有对偶表示这一条件。相对泊松代数的表示与雅可比代数的表示之间存在联系。我们还解释了为何雅可比代数不存在“匹配对理论”。

在第 3 节中，我们引入相对泊松代数的 Manin 三元组这一概念，它们等价于某些相对泊松代数的匹配对。随后，我们引入相对泊松双代数这一概念，作为前两种结构的等价结构。

在第 4 节中，我们研究余边界相对泊松双代数，并由此在相对泊松代数中引入 RPYBE。相对泊松代数中 RPYBE 的反对称解可以导出余边界相对泊松双代数。我们引入相对泊松代数和相对前泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子概念，以构造 RPYBE 的反对称解，进而构造相对泊松双代数。

在第 5 节中，我们给出一种从相对泊松双代数构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数的方法。特别地，可以从相对前泊松代数得到弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

本文中，除非另有说明，所有向量空间和代数均为定义在零特征代数闭域 $\mathbb{K}$ 上的有限维空间，不过许多结果和概念在无限维情形下仍然成立。

2. Representations and matched pairs of relative Poisson algebras

在第2.1节中，我们引入相对泊松代数的表示这一概念。随后，我们研究相对泊松代数具有对偶表示的情形，从而在对偶空间上得到一种合理的表示。我们还给出了文献 [1]中相对泊松代数的表示与雅可比代数的表示之间的关系。在第2.2节中，我们引入

相对泊松代数匹配对的概念，并说明雅可比代数并不存在“匹配对理论”。

2.1. 相对泊松代数与雅可比代数的表示。

设 $(A,\cdot)$ 是一个交换结合代数。若 (μ,V) 满足： V 是一个向量空间，且 μ： $A\to \mathrm{End}(V)$ 是一个满足下列条件的线性映射，则称 (μ,V) 是 $(A,\cdot)$ 的一个表示

$$\mu(x\cdot y)=\mu(x)\mu(y),\ \ \forall x,y\in A.$$

此外，若 $(A,\cdot)$ 是含单位元 1_A 的代数，则假设该表示是含单位元的，即假设 $\mu(1_A)v=v$, $\forall v\in V.$。事实上， (μ,V) 是（含单位元的）交换结合代数 $(A,\cdot)$ 的一个表示，当且仅当向量空间的直和 $A\oplus V$ 构成一个（含单位元的）交换结合代数（半直积），其乘法在 $A\oplus V$ 上定义如下:

$$(x+u)\cdot(y+v)=x\cdot y+\mu(x)v+\mu(y)u,\ \ \forall x,y\in A,u,v\in V. \tag{11}$$

我们将其记为 $A\ltimes_{\mu} V$。如果 1_A 是 $(A,\cdot)$ 的单位元，那么它也是 $A\ltimes_{\mu} V$ 的单位元.

设 $\mathcal{L}$： $A\to \mathrm{End}(A)$ 是由 $\mathcal{L}(x)(y)=x\cdot y$ 定义的线性映射，对所有 $x,y\in A$ 均成立。则 $(\mathcal{L},A)$ 是 $(A,\cdot)$ 的一个表示，称为 $(A,\cdot)$ 的伴随表示。

设 V 是一个向量空间。对于线性映射 φ： $A\to \mathrm{End}(V)$，定义线性映射 φ^*： $A\to \mathrm{End}(V^*)$ 如下

$$\langle\varphi^*(x)u^*,v\rangle=-\langle u^*,\varphi(x)v\rangle,\ \ \forall x\in A,u^*\in V^*,v\in V,$$

其中 $\langle -,-\rangle$ 是 V 与 V^* 之间的标准配对。若 (μ,V) 是交换结合代数 $(A,\cdot)$ 的一个表示，则 $(-\mu^*,V^*)$ 也是 $(A,\cdot)$ 的一个表示。特别地，$(-\mathcal{L}^*,A^*)$ 是 $(A,\cdot)$ 的一个表示。

类似地，设 $(A,[-,-])$ 是一个李代数。若 V 是一个向量空间，且 ρ： $A\to \mathrm{End}(V)$ 是满足以下条件的线性映射，则称 (ρ,V) 是 $(A,[-,-])$ 的一个表示:

$$\rho([x,y])=[\rho(x),\rho(y)],\ \ \forall x,y\in A.$$

事实上，(ρ,V) 是李代数 $(A,[-,-])$ 的一个表示，当且仅当通过在 $A\oplus V$ 上定义乘法如下， $A\oplus V$ 是一个李代数（半直积）:

$$[x+u,y+v]=[x,y]+\rho(x)v-\rho(y)u,\ \ \forall x,y\in A,u,v\in V. \tag{12}$$

我们将其记为 $A\ltimes_{\rho} V$。

令 $\mathrm{ad}: A\to \mathrm{End}(A)$ 为由 $\mathrm{ad}(x)(y)=[x,y]$ 定义的线性映射，其中对所有 $x,y\in A$ 均成立。则 $(\mathrm{ad}\ A)$ 是 $(A,[-,-])$ 的一个表示，称为 $(A,[-,-])$ 的伴随表示。此外，若 (ρ,V) 是李代数 $(A,[-,-])$ 的一个表示，则 (ρ^*,V^*) 也是 $(A,[-,-])$ 的一个表示。特别地，(ad^*,A^*) 是 $(A,[-,-])$ 的一个表示。

定义 2.1. 设 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 为一个相对泊松代数，(μ,V) 为交换结合代数 $(A,\cdot)$ 的一个表示，且 (ρ,V) 为李代数 $(A,[-,-])$ 的一个表示。若两个表示 (μ,V) 和 (ρ,V) 相容，或者说 (μ,ρ,V) 是 (A,P) 上的一个相容结构，则称下式成立:

$$\rho(y)\mu(x)v-\mu(x)\rho(y)v+\mu([x,y])v-\mu(x\cdot P(y))v=0,\ \ \forall x,y\in A,v\in V. \tag{13}$$

此外，若存在一个线性映射 α： $V\to V$，满足

$$\alpha(\mu(x)v)-\mu(P(x))v-\mu(x)\alpha(v)=0, \tag{14}$$

$$\alpha(\rho(x)v)-\rho(P(x))v-\rho(x)\alpha(v)=0, \tag{15}$$

$$\rho(x\cdot y)v-\mu(x)\rho(y)v-\mu(y)\rho(x)v+\mu(x\cdot y)\alpha(v)=0, \tag{16}$$

对于所有的 x、$y\in A$、$v\in V$，我们称四元组 (μ,ρ,α,V) 是 (A,P) 的一个表示。相对泊松代数 (A,P) 的两个表示 $(\mu_1,\rho_1,\alpha_1,V_1)$ 和 $(\mu_2,\rho_2,\alpha_2,V_2)$ 称为等价的，若存在线性同构 φ: $V_1\to V_2$，使得

$$\varphi(\mu_1(x)v)=\mu_2(x)\varphi(v),\ \varphi(\rho_1(x)v)=\rho_2(x)\varphi(v),\ \varphi(\alpha_1(v))=\alpha_2(\varphi(v)),\ \ \forall x\in A,v\in V. \tag{17}$$

对于向量空间 V_1 和 V_2，以及线性映射 $\phi_1 : V_1 \to V_1$ 和 $\phi_2 : V_2 \to V_2$，我们用 $\phi_1 + \phi_2$ 表示该线性映射

$$\phi_{V_1 \oplus V_2} : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2, \quad \phi_{V_1 \oplus V_2}(v_1 + v_2) := \phi_1(v_1) + \phi_2(v_2), \ \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2. \tag{18}$$

命题 2.2. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数，V 是一个向量空间，$\mu, \rho : A \to$自同态代数(V) 且 $\alpha : V \to V$ 是线性映射。分别由式 (11) 和 (12) 在 $A \oplus V$ 上定义两个双线性运算 $\cdot, [-,-]$。那么，$(A \oplus V, \cdot, [-,-], P + \alpha)$ 是一个相对泊松代数，当且仅当 (μ, ρ, α, V) 是 (A, P) 的一个表示。我们将 $A \oplus V$ 上的这个相对泊松代数结构（半直积）记为 $(A \ltimes_{\mu,\rho} V, P + \alpha)$，或简记为 $(A \ltimes V, P + \alpha)$。

由于该结果是命题 2.17 中相对泊松代数匹配对的一个特例，因此省略证明；其中 $A_2 = V$ 配备零乘法。

例 2.3. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数。那么 $(\mathcal{L}, \text{ad}_P, A)$ 是 (A, P) 的一个表示，称为 (A, P) 的伴随表示。

引理 2.4. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数。如果 (μ, ρ, V) 是 (A, P) 上的一个相容结构，那么 $(-\mu^*, \rho^*, V^*)$ 也是 (A, P) 上的一个相容结构。

证明。对任意 $x, y \in A, u^* \in V^*, v \in V$，有

$$\begin{aligned}&\langle(-\rho^*(y)\mu^*(x) + \mu^*(x)\rho^*(y) - \mu^*([x,y]) + \mu^*(x \cdot P(y))u^*, v\rangle\\ &= \langle u^*, \rho(y)\mu(x)v - \mu(x)\rho(y)v + \mu([x,y])v - \mu(x \cdot P(y))v\rangle = 0.\end{aligned}$$

因此结论成立。 □

设 V_1, V_2 是两个向量空间，$T : V_1 \to V_2$ 是一个线性映射。记对偶映射 $T^* : V_2^* \to V_1^*$ 为

$$\langle v_1, T^*(v_2^*)\rangle = \langle T(v_1), v_2^*\rangle, \ \forall v_1 \in V_1, v_2^* \in V_2^*.$$

命题 2.5. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数，(μ, ρ, V) 是 (A, P) 上的一个相容结构。设 $\beta : V \to V$ 是一个线性映射。那么，当且仅当满足以下方程时，$(-\mu^*, \rho^*, \beta^*, V^*)$ 是 (A, P) 的一个表示：

$$\mu(x)\beta(v) - \mu(P(x))v - \beta(\mu(x)v) = 0, \tag{19}$$

$$\rho(x)\beta(v) - \rho(P(x))v - \beta(\rho(x)v) = 0, \tag{20}$$

$$-\rho(x \cdot y)v + \rho(y)\mu(x)v + \rho(x)\mu(y)v + \beta(\mu(x \cdot y)v) = 0, \tag{21}$$

对所有 x、$y \in A$、$v \in V$。

证明。对所有 x、$y \in A$、$u^* \in V^*$、$v \in V$，有

$$\begin{aligned}&\langle\mu^*(P(x))u^* + \mu^*(x)\beta^*(u^*) - \beta^*(\mu^*(x)u^*), v\rangle = \langle u^*, -\mu(P(x))v - \beta(\mu(x)v) + \mu(x)\beta(v)\rangle,\\ &\langle\rho^*(P(x))u^* + \rho^*(x)\beta^*(u^*) - \beta^*(\rho^*(x)u^*), v\rangle = \langle u^*, -\rho(P(x))v - \beta(\rho(x)v) + \rho(x)\beta(v)\rangle,\\ &\langle\rho^*(x \cdot y)u^* + \mu^*(x)\rho^*(y)u^* + \mu^*(y)\rho^*(x)u^* - \mu^*(x \cdot y)\beta^*(u^*), v\rangle\\ &= \langle u^*, -\rho(x \cdot y)v + \rho(y)\mu(x)v + \rho(x)\mu(y)v + \beta(\mu(x \cdot y)v)\rangle.\end{aligned}$$

那么根据定义 2.1，$(-\mu^*, \rho^*, \beta^*, V^*)$ 是 (A, P) 的一个表示，当且仅当等式 (19)-（21）成立。 □

定义 2.6。设 (A, P) 是一个相对泊松代数，且 (μ, ρ, V) 是 (A, P) 上的相容结构。设 $\beta : V \to V$ 是一个线性映射。若 $(-\mu^*, \rho^*, \beta^*, V^*)$ 是 (A, P) 的一个表示，即等式 (19)-(21) 成立，则称 β 对偶表示 (A, P) 于 (μ, ρ, V) 上。当 (μ, ρ, V) 取为 $(\mathcal{L}, \text{ad}_A, A)$，即由相对泊松代数 (A, P) 的伴随表示 $(\mathcal{L}, \text{ad}_P, A)$ 所构成的相容结构时，我们简称 β 对偶表示 (A, P)。

根据命题 2.5，我们得到以下结论。

推论 2.7. 设 (A,P) 是一个相对泊松代数。当且仅当满足以下方程时，线性映射 $Q\colon A\to A$ 对偶表示 (A,P):

$$x\cdot Q(y)-P(x)\cdot y-Q(x\cdot y)=0, \tag{22}$$

$$[x,Q(y)]-[P(x),y]-Q([x,y])=0, \tag{23}$$

$$[x,y\cdot z]+[y,z\cdot x]+[z,x\cdot y]+Q(x\cdot y\cdot z)=0, \tag{24}$$

对所有 $x,y,z\in A$。

命题 2.8。设 (A,P) 是一个相对泊松代数，(μ,ρ,α,V) 是 (A,P) 的一个表示，且 $\beta\colon V\to V$ 是一个线性映射。

(1) 式（19）成立，当且仅当以下条件成立:

$$(\alpha+\beta)(\mu(x)v)-\mu(x)(\alpha+\beta)(v)=0,\ \ \forall x\in A,v\in V. \tag{25}$$

(2) 式（20）成立，当且仅当以下条件成立:

$$(\alpha+\beta)(\rho(x)v)-\rho(x)(\alpha+\beta)(v)=0,\ \ \forall x\in A,v\in V. \tag{26}$$

(3) 式（21）成立，当且仅当以下方程成立:

$$(\alpha+\beta)(\mu(x\cdot y)v)=0,\ \ \forall x,y\in A,v\in V. \tag{27}$$

(4) 若式（19）成立，则式（27）成立当且仅当下式成立:

$$\mu(x\cdot y)(\alpha+\beta)v=0,\ \ \forall x,y\in A,v\in V. \tag{28}$$

证明。令 x、$y\in A$ 和 $v\in V$。

(1) 由式（14），可得

$$\mu(x)\beta(v)-\mu(P(x))v-\beta(\mu(x)v)=-(\alpha+\beta)(\mu(x)v)+\mu(x)(\alpha+\beta)(v).$$

因此，式（19）成立当且仅当式（25）成立。

(2) 由式（15），可得

$$\rho(x)\beta(v)-\rho(P(x))v-\beta(\rho(x)v)=-(\alpha+\beta)(\rho(x)v)+\rho(x)(\alpha+\beta)(v).$$

因此，式（20）成立当且仅当式（26）成立。

(3) 我们有

$$\begin{aligned}
&-\rho(x\cdot y)v+\rho(y)\mu(x)v+\rho(x)\mu(y)v+\beta(\mu(x\cdot y)v)\\
&\overset{(16)}{=}-\mu(x)\rho(y)v-\mu(y)\rho(x)v+\mu(x\cdot y)\alpha(v)+\rho(y)\mu(x)v+\rho(x)\mu(y)v+\beta(\mu(x\cdot y)v)\\
&\overset{(13)}{=}\mu(x\cdot P(y))-\mu([x,y])v-\rho(y)\mu(x)v+\mu(y\cdot P(x))-\mu([y,x])v-\rho(x)\mu(y)v\\
&\quad+\mu(x\cdot y)\alpha(v)+\rho(y)\mu(x)v+\rho(x)\mu(y)v+\beta(\mu(x\cdot y)v)\\
&=\mu(P(x\cdot y))v+\mu(x\cdot y)\alpha(v)+\beta(\mu(x\cdot y)v)\\
&\overset{(14)}{=}(\alpha+\beta)\mu(x\cdot y)v,
\end{aligned}$$

因此，式（21）成立，当且仅当式（27）成立。

(4) 若式（19）成立，则再次由式（14），我们有

$$(\alpha+\beta)\mu(x\cdot y)v=\mu(x\cdot y)\beta(v)-\mu(P(x\cdot y))v+\mu(P(x\cdot y))v+\mu(x\cdot y)\alpha(v)=\mu(x\cdot y)(\alpha+\beta)v.$$

因此，在这种情况下，式（27）成立，当且仅当式（28）成立。 □

推论 2.9. 设 (μ,ρ,α,V) 是相对泊松代数 (A,P) 的一个表示。则 $-\alpha$自动对偶表示 (A,P) 在 (μ,ρ,V) 上，即 $(-\mu^*,\rho^*,-\alpha^*,V^*)$ 是 (A,P) 的一个表示。特别地，$-P$ 对偶表示 (A,P)。

证明。 结论的第一部分由命题 2.8 得出， $\beta = -\alpha$ 满足式（25）—（27）。当（μ， ρ， α， V）取为伴随表示（$\mathcal{L}$， ad P， A）时，结论的第二部分立即得出。□

推论 2.10. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数，且 $Q\colon A \to A$ 是一个线性映射。那么Q 对偶表示 (A, P) 当且仅当等式 (22)、(23) 以及下列等式成立：

$$(P + Q)(x \cdot y \cdot z) = 0, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{29}$$

特别地，如果 Q 对偶表示 (A, P)，则下列等式成立 ：

$$x \cdot y \cdot (P + Q)(z) = 0, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{30}$$

证明。 由命题 2.8 可知，取表示 (μ, ρ, α, V) 为 $(\mathcal{L}, \text{ad } P, A)$ 的伴随表示，其中 (A, P)。□

在本小节末尾，我们给出雅可比代数的表示与（含幺）相对泊松代数的表示之间的关系。

定义 2.11. ([1]) 设 $(A, \cdot, [-,-])$ 是一个雅可比代数。若三元组 (μ, ρ, V) 满足以下条件，则称其为 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示：(μ, V) 是含幺交换结合代数 $(A, \cdot)$ 的表示，(ρ, V) 是李代数 $(A, [-,-])$ 的表示：

$$\rho(x \cdot y)v - \mu(x)\rho(y)v - \mu(y)\rho(x)v + \mu(x \cdot y)\rho(1_A)v = 0, \tag{31}$$

$$\rho(y)\mu(x)v - \mu(x)\rho(y)v + \mu([x, y])v - \mu(x \cdot [1_A, y])v = 0, \tag{32}$$

对所有 $x, y \in A, v \in V$。

以下结论可直接由 [1, 定理 3.2] 得出。

命题 2.12. 假设 $(A, \cdot, [-,-])$ 是一个雅可比代数， V是一个向量空间，且 $\mu, \rho\colon A \to$ 自同态代数(V) 是线性映射。那么 (μ, ρ, V) 是 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示，当且仅当向量空间的直和 $A \oplus V$上存在一个雅可比代数结构，使得双线性运算

$\cdot$ 和 $[-,-]$ 在 $A \oplus V$上的定义分别见公式（11）和（12）。我们将 $A \oplus V$上的这个雅可比代数结构记为 $A \ltimes_{\mu,\ \rho} V$。

命题 2.13. 设 $(A, \cdot, [-,-])$ 是一个雅可比代数，且 $(A, \cdot, [-,-], \text{ad}(1_A))$ 是相应的含幺相对泊松代数。那么 (μ, ρ, V) 是雅可比代数 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示，当且仅当 $(\mu, \rho, \rho(1_A)\ V)$ 是含幺相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], \text{ad}(1_A))$ 的一个表示。

证明。假设 (μ, ρ, V) 是雅可比代数 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示。那么 $A \ltimes_{\mu,\ \rho} V$也是一个雅可比代数，其单位元为 1_A。由于

$$[1_A, x + u] = [1_A, x] + \rho(1_A)u = (\text{ad}(1_A) + \rho(1_A))(x + u), \quad \forall x \in A, v \in V,$$

$(A \ltimes_{\mu,\rho} V, \text{ad}(1_A) + \rho(1_A))$ 是一个含幺相对泊松代数。因此，由命题 2.2, $(\mu, \rho, \rho(1_A), V)$ 是含幺相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], \text{ad}(1_A))$ 的一个表示。反过来，类似地证明即可得到结论。□

推论 2.14。设 (μ, ρ, V) 是雅可比代数 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示。那么 $(-\mu^*, \rho^*, V^*)$ 也是 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示。

证明。由于

$$\langle \rho^*(1_A)u^*, v\rangle = \langle u^*, -\rho(1_A)v\rangle = \langle -(\rho(1_A))^* u^*, v\rangle, \quad \forall u^* \in V^*, v \in V,$$

我们有 $\rho^*(1_A) = -(\rho(1_A))^*$。若 (μ, ρ, V) 是雅可比代数 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示，则根据命题 2.13, $(\mu, \rho, \rho(1_A)\ V)$ 是含幺相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], \text{ad}(1_A))$ 的一个表示。根据推论 2.9, $(-\mu^*, \rho^*, -(\rho(1_A))^* = \rho^*(1_A)\ V^*)$ 是含幺相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], \text{ad}(1_A))$ 的一个表示。再次根据命题 2.13, $(-\mu^*, \rho^*, V^*)$ 是雅可比代数 $(A, \cdot, [-,-])$ 的一个表示。□

注2.15。 注意，对于雅可比代数 $(\mu,\ \rho,\ V)$ 的一个表示，$(A,\ \cdot,\ [-,-])$，$(-\mu^*,\ \rho^*,\ V^*)$ 自动成为 $(A,\ \cdot,\ [-,-])$ 的一个表示，无需任何附加条件；然而在[1], 中，要使 $(-\mu^*,\ \rho^*,\ V^*)$ 成为雅可比代数 $(A,\ \cdot,\ [-,-])$ 的一个表示，还需满足以下附加等式：

$$-\rho(x\cdot y)v+\rho(y)\mu(x)v+\rho(x)\mu(y)v-\rho(1_A)\mu(x\cdot y)v=0,\ \ \forall x,y\in A,v\in V. \tag{33}$$

事实上，式（33）并非必要，也就是说，通过直接证明，利用方程和（33）可以得到式（32）。 (31)

2.2. 相对泊松代数的匹配对。

我们首先回顾交换结合代数（[7]）和李代数（[33]）的匹配对的概念。

设（$A_1,\cdot_1$）和（$A_2,\cdot_2$）是两个交换结合代数，并且（μ_1,A_2）和（μ_2,A_1）分别是（$A_1,\cdot_1$）和（$A_2,\cdot_2$）的表示。若满足以下方程：

$$\mu_1(x)(a\cdot_2 b)=(\mu_1(x)a)\cdot_2 b+\mu_1(\mu_2(a)x)b,$$

$$\mu_2(a)(x\cdot_1 y)=(\mu_2(a)x)\cdot_1 y+\mu_2(\mu_1(x)a)y,$$

对所有的 $x,y\in A_1,a,b\in A_2$，则（A_1,A_2,μ_1,μ_2）称为交换结合代数匹配对。在这种情况下，向量空间 $A_1\oplus A_2$ 上存在一个交换结合代数结构，其定义为

$$(x+a)\cdot(y+b)=x\cdot_1 y+\mu_2(a)y+\mu_2(b)x+a\cdot_2 b+\mu_1(x)b+\mu_1(y)a,\ \ \forall x,y\in A_1,a,b\in A_2. \tag{34}$$

此外，每个底层向量空间为两个子代数的直和的交换结合代数，都可以由一个交换结合代数匹配对得到。

设 $(A_1,[-,-]_1)$ 和 $(A_2,[-,-]_2)$ 是两个李代数，(ρ_1,A_2) 和 (ρ_2,A_1) 分别是 $(A_1,[-,-]_1)$ 和 $(A_2,[-,-]_2)$ 的表示。若满足以下方程：

$$\rho_1(x)[a,b]_2-[\rho_1(x)a,b]_2-[a,\rho_1(x)b]_2+\rho_1(\rho_2(a)x)b-\rho_1(\rho_2(b)x)a=0,$$

$$\rho_2(a)[x,y]_1-[\rho_2(a)x,y]_1-[x,\rho_2(a)y]_1+\rho_2(\rho_1(x)a)y-\rho_2(\rho_1(y)a)x=0,$$

对所有 $x,y\in A_1,a,b\in A_2$ 均成立，则称 (A_1,A_2,ρ_1,ρ_2) 为李代数的匹配对。在这种情况下，向量空间 $A_1\oplus A_2$ 上存在如下李代数结构：

$$[x+a,y+b]=[x,y]_1+\rho_2(a)y-\rho_2(b)x+[a,b]_2+\rho_1(x)b-\rho_1(y)a,\ \ \forall x,y\in A_1,a,b\in A_2. \tag{35}$$

此外，每个底层向量空间为两个子代数的直和的李代数，都可以由一个李代数的匹配对得到。

现在我们考虑相对泊松代数的情形。

定义 2.16. 设 $(A_1,\cdot_1,[-,-]_1,P_1)$ 和 $(A_2,\cdot_2,[-,-]_2,P_2)$ 是两个相对泊松代数。假设 (μ_1,ρ_1,P_2,A_2) 是 $(A_1,\cdot_1,[-,-]_1,P_1)$ 的一个表示，而 (μ_2,ρ_2,P_1,A_1) 是 $(A_2,\cdot_2,[-,-]_2,P_2)$ 的一个表-示，使得 (A_1,A_2,μ_1,μ_2) 是交换结-合代数的一个匹配对，且 (A_1,A_2,ρ_1,ρ_2) 是李代数的一个匹配对。假设满足以下相容条件：

$$\rho_2(a)(x\cdot_1 y)+\mu_2(\rho_1(y)a)x-x\cdot_1\rho_2(a)y+\mu_2(\rho_1(x)a)y-y\cdot_1\rho_2(a)x-\mu_2(P_2(a))(x\cdot_1 y)=0, \tag{36}$$

$$\rho_1(x)(a\cdot_2 b)+\mu_1(\rho_2(b)x)a-a\cdot_2\rho_1(x)b+\mu_1(\rho_2(a)x)b-b\cdot_2\rho_1(x)a-\mu_1(P_1(x))(a\cdot_2 b)=0, \tag{37}$$

$$\rho_2(\mu_1(x)a)y\ +[\mu_2(a)x,y]_1-x\cdot_1\rho_2(a)y+\mu_2(\rho_1(y)a)x-\mu_2(a)([x,y]_1)+\mu_2(a)(x\cdot_1 P_1(y))=0, \tag{38}$$

$$\rho_1(\mu_2(a)x)b+[\mu_1(x)a,b]_2-a\cdot_2\rho_1(x)b+\mu_1(\rho_2(b)x)a-\mu_1(x)([a,b]_2)\ +\mu_1(x)(a\cdot_2 P_2(b))\ =0, \tag{39}$$

对所有的 $x,y\in A_1,a,b\in A_2$ 均成立。这样的结构称为相对泊松代数 (A_1,P_1) 与 (A_2,P_2) 的匹配对。我们将其记为 $((A_1,P_1),(A_2,P_2)\ \mu_1,\rho_1,\mu_2,\rho_2)$。

命题 2.17. 设 (A_1, P_1) 和 (A_2, P_2) 是相对泊松代数。对于线性映射 μ_1, ρ_1：$A_1 \to$ 自同态代数(A_2) 和 μ_2, ρ_2：$A_2 \to$ 自同态代数(A_1)，分别由式 (34) 和 (35) 在 $A_1 \oplus A_2$ 上定义双线性运算 $\cdot$ 和 $[-,-]$。那么，$(A_1 \oplus A_2, \cdot, [-,-], P_1 + P_2)$ 是相对泊松代数，当且仅当 $((A_1, P_1), (A_2, P_2)$ $\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2)$ 是相对泊松代数的匹配对。在这种情况下，我们将该相对泊松代数记为 $(A_1 \bowtie A_2, P_1 + P_2)$。此外，任何底层向量空间是两个子代数的直和的相对泊松代数，都可以由相对泊松代数的匹配对构造得到。

证明。已知 $(A_1 \oplus A_2, \cdot)$ 是交换结合代数，当且仅当 (A_1, A_2, μ_1, μ_2) 是交换结合代数匹配对；且 $(A_1 \oplus A_2, [-,-])$ 是李代数，当且仅当 $(A_1, A_2, \rho_1, \rho_2)$ 是李代数的匹配对。

令 x、$y \in A_1$、a、$b \in A_2$。由式（35），可得

$$
\begin{aligned}
(P_1+P_2)([x+a, y+b]) &= P_1([x,y]_1 + \rho_2(a)y - \rho_2(b)x) + P_2([a,b]_2 + \rho_1(x)b - \rho_1(y)a),\\
[(P_1+P_2)(x+a), y+b] &= [P_1(x), y]_1 + \rho_2(P_2(a)y) - \rho_2(b)P_1(x) + [P_2(a), b]_2 + \rho_1(P_1(x))b\\
&\quad - \rho_1(y)P_2(a),\\
[x+a, (P_1+P_2)(y+b)] &= [x, P_1(y)]_1 + \rho_2(a)P_1(y) - \rho_2(P_2(b))x + [a, P_2(b)]_2 + \rho_1(x)P_2(b)\\
&\quad - \rho_1(P_1(y))a.
\end{aligned}
$$

若 P_1+P_2 是李代数 $(A_1 \oplus A_2, [-,-])$ 的导子，则分别取 $a=b=0$ 和 $x=y=0$，由此可知 P_1 和 P_2 是李代数 $(A_1, [-,-]_1)$ 和 $(A_2, [-,-]_2)$ 的导子。此外，分别取 $a=y=0$ 和 $x=b=0$，则式（15）对作为 (A_1, P_1) 和 (A_2, P_2) 的表示的 $(\mu_1, \rho_1, P_2, A_2)$ 和 $(\mu_2, \rho_2, P_1, A_1)$ 成立。反之，若 P_1 和 P_2 分别是李代数 $(A_1, [-,-]_1)$ 和 $(A_2, [-,-])$ 的导子，且 $(\mu_1, \rho_1, P_2, A_2)$ 和 $(\mu_2, \rho_2, P_1, A_1)$ 分别是 (A_1, P_1) 和 (A_2, P_2) 的表示，则由式（15），$P_1 + P_2$ 是李代数 $(A_1 \oplus A_2, [-,-])$ 的导子。同样地，$P_1 + P_2$ 是交换结合代数 $(A_1 \oplus A_2, \cdot)$ 的导子，当且仅当 P_1 和 P_2 分别是交换结合代数 $(A_1, \cdot_1)$ 和 $(A_2, \cdot_2)$ 的导子，并且式（14）对作为 (A_1, P_1) 和 (A_2, P_2) 的表示的 $(\mu_1, \rho_1, P_2, A_2)$ 和 $(\mu_2, \rho_2, P_1, A_1)$ 成立。

Let x, y, $z \in A_1$, a, b, $c \in A_2$。我们在6上考虑相对莱布尼茨法则（$A_1 \oplus A_2$）：

$$[z+c, (x+a)\cdot(y+b)] = (x+a)\cdot[z+c, y+b] + [z+c, x+a]\cdot(y+b) + (x+a)\cdot(y+b)\cdot(P_1+P_2)(z+c)。\tag{40}$$

如果等式（40）成立，则对于作为相对泊松代数的（A_1, P_1）和（A_2, P_2），等式（6）成立，并且以下等式成立：

$$[c, x \cdot_1 y] = x \cdot [c,y] + [c,x] \cdot y + (x \cdot_1 y) \cdot P_2(c), \tag{41}$$

$$[z, a \cdot_2 b] = a \cdot [z,b] + [z,a] \cdot b + (a \cdot_2 b) \cdot P_1(z), \tag{42}$$

$$[z, x \cdot b] = x \cdot [z,b] + [z,x]_1 \cdot b + b \cdot (x \cdot_1 P_1(z)), \tag{43}$$

$$[c, x \cdot b] = b \cdot [c,x] + [c,b]_2 \cdot x + x \cdot (b \cdot_2 P_2(c)). \tag{44}$$

分别在等式（$a=b=c=0$，$x=y=z=0$，$a=b=z=0$，$x=y=c=0$，$a=y=c=0$，$a=y=z=0$）中取40。反之，由于（A_1，P_1）和（A_2，P_2）是相对泊松代数，如果等式（41）-（44）成立，则不难证明等式（40）在 $A_1 \oplus A_2$上成立。此外，我们有

$$
\begin{aligned}
&[c, x \cdot_1 y] = \rho_2(c)(x \cdot_1 y) - \rho_1(x \cdot_1 y)c,\\
&x \cdot [c,y] = x \cdot (\rho_2(c)y - \rho_1(y)c) = x \cdot_1 \rho_2(c)y - \mu_1(x)\rho_1(y)c - \mu_2(\rho_1(y)c)x,\\
&[c,x] \cdot y = (\rho_2(c)x - \rho_1(x)c) \cdot y = \rho_2(c)x \cdot_1 y - \mu_1(y)\rho_1(x)c - \mu_2(\rho_1(x)c)y,\\
&(x \cdot_1 y) \cdot P_2(c) = \mu_1(x \cdot_1 y)P_2(c) + \mu_2(P_2(c))(x \cdot_1 y).
\end{aligned}
$$

因此，将 a替换为 c后，式（16）对（μ_1，ρ_1，P_2，A_2）作为（A_1，P_1）的表示成立，当且仅当式（41）成立当且仅当式（36）。类似地，我们有

(1) 将 x 替换为 z后，式（16）对（μ_2, ρ_2, P_1, A_1）作为（A_2, P_2）的表示成立，当且仅当式（42）成立当且仅当式（37）；(2) 将 a 替换为 b、将 y 替换为 z后，式（13）对（μ_1, ρ_1, P_2, A_2）作为（A_1, P_1）的表示成立，当且仅当式（43）成立当且仅当式（38）；(3) 将 a 替换为 b、将 b 替换为 c后，式（13）对（μ_2, ρ_2, P_1, A_1）作为（A_2, P_2）的表示成立，当且仅当式（44）成立当且仅当式（39）。

因此结论成立。 □

例 2.18. 设 $(A_1, \cdot_1)$ 和 $(A_2, \cdot_2)$ 是两个交换结合代数，且 P_1 和 P_2 分别是它们的导子。设 $(A_1, [-,-]_1)$ 和 $(A_2, [-,-]_2)$ 分别是由式 (7) 定义的李代数。因此，$(A_1, \cdot_1, [-,-]_1, P_1)$ 和 $(A_2, \cdot_2, [-,-]_2, P_2)$ 是相对泊松代数。假设存在线性映射 $\mu_1 : A_1 \to$ 自同态代数(A_2) 和 $\mu_2 : A_2 \to$ 自同态代数(A_1)，使得 (A_1, A_2, μ_1, μ_2) 是交换结合代数匹配对，并且满足以下条件：

$$P_2(\mu_1(x)a) - \mu_1(P_1(x))a - \mu_1(x)P_2(a) = 0, \tag{45}$$

$$P_1(\mu_2(a)x) - \mu_2(P_2(a))x - \mu_2(a)P_1(x) = 0, \tag{46}$$

对所有 $x \in A_1$， $a \in A_2$。则 $P_1 + P_2$是由方程（34）定义的交换结合代数（$A_1 \oplus A_2$， $\cdot$）上的导子。此外，在 $A_1 \oplus A_2$上有一个李括号 $[-,-]$，其定义为

$$\begin{aligned}
&[x + a, y + b] = (x + a) \cdot (P_1(y) + P_2(b)) - (P_1(x) + P_2(a)) \cdot (y + b) \\
&= x \cdot_1 P_1(y) + \mu_2(a)P_1(y) + \mu_2(P_2(b))x + a \cdot_2 P_2(b) + \mu_1(x)P_2(b) + \mu_1(P_1(y))a \\
&\quad -(P_1(x) \cdot y + \mu_2(P_2(a))y + \mu_2(b)P_1(x) + P_2(a) \cdot_2 b + \mu_1(P_1(x))b + \mu_1(y)P_2(a)) \\
&= [x, y]_1 + \rho_2(a)y - \rho_2(b)x + [a, b]_2 + \rho_1(x)b - \rho_1(y)a,
\end{aligned}$$

对所有 x、$y \in A_1$、a、$b \in A_2$。这里，$\rho_1 : A_1 \to \mathrm{End}(A_2)$ 和 $\rho_2 : A_2 \to \mathrm{End}(A_1)$ 是由下式给出的线性映射

$$\rho_1(x)a = \mu_1(x)P_2(a) - \mu_1(P_1(x))a, \quad \rho_2(a)x = \mu_2(a)P_1(x) - \mu_2(P_2(a))x, \quad \forall x \in A_1, a \in A_2.$$

由例 1.2 可知，（$A_1 \oplus A_2$， $\cdot$， $[-,-]$， $P_1 + P_2$）是一个相对泊松代数。因此，由命题2.17可知，（（A_1, P_1），（A_2, P_2）μ_1, ρ_1, μ_2, ρ_2）是相对泊松代数的匹配对。

注 2.19。 我们想指出，由于单位元的出现，雅可比代数或含幺交换结合代数并不存在“匹配对理论”。事实上，若含幺交换结合代数（$A \oplus B$， $1_{A\oplus B}$）分解为两个含幺交换结合代数（A， 1_A）和（B, 1_B）的底层空间的直和，则存在交换结合代数 μ_B， A）和（μ_A， B）的表示，使得根据交换结合代数的匹配对，式（34）给出了 $A \oplus B$ 上的交换结合代数结构。假设 $1_{A\oplus B} = a + b$，其中 $a \in A$， $b \in B$。那么

$$1_A = 1_A \cdot 1_{A\oplus B} = 1_A \cdot (a + b) = a + \mu_A(1_A)b + \mu_B(b)1_A = a + b + \mu_B(b)1_A.$$

因此， $b = 0$ 且 $a = 1_A$。于是 $1_{A\oplus B} = 1_A$。类似地， $1_{A\oplus B} = 1_B$。因此， $1_{A\oplus B} \in A \cap B = \{0\}$，这就产生了矛盾。

3. Relative Poisson bialgebras

我们引入相对泊松代数的 Manin 三元组和相对泊松双代数的概念。它们之间的等价关系可用某些相对泊松代数的匹配对来诠释。

3.1. Frobenius 相 对泊松代数与相对泊松代数的 Manin 三元组。

我们将弗罗贝尼乌斯雅可比代数的概念（[1]）推广为以下弗罗贝尼乌斯相对泊松代数的概念。

定义 3.1. 相对泊松代数 (A, P) 上的一个双线性型 $\mathcal{B}$ 若满足下列等式，则称其为不变的：

$$\mathcal{B}(x \cdot y, z) = \mathcal{B}(x, y \cdot z), \tag{47}$$
$$\mathcal{B}([x, y], z) = \mathcal{B}(x, [y, z]), \tag{48}$$

对所有 $x, y, z \in A$。若存在 (A, P) 上的一个非退化不变双线性型 $\mathcal{B}$，则称相对泊松代数 (A, P) 为 Frobenius 的，记作 $(A, P, \mathcal{B})$。

设 $\mathcal{B}$ 是相对泊松代数 (A, P) 上的一个非退化双线性型。则存在唯一映射 $P: A \to A$，定义如下

$$\mathcal{B}(P(x), y) = \mathcal{B}(x, \hat{P}(y)), \quad \forall x, y \in A, \tag{49}$$

ˆ也就是说， P 是关于非退化双线性型 $\mathcal{B}$的 P 的伴随线性变换。

下面给出 Frobenius 相对泊松代数的一个刻画 s.

ˆ 命题 3.2. 设（$A, P, \mathcal{B}$）是一个 Frobenius 相对泊松代数。设 P是 P关于 $\mathcal{B}$的伴随映射。则 P对偶表示（A, P），也就是说，（$-\mathcal{L}^*$, ad*, P^*, A^*）是（A, P）的一个表示。此外，作为（A, P）的表示，（$-\mathcal{L}^*$, ad*, ˆP^*, A^*）与（$\mathcal{L}$, ad P, A）等价。反之，设（A, P）是一个相对泊松代数，且 Q: $A \to A$ 是一个线性映射。若（$-\mathcal{L}^*$, ad*, Q^*, A^*）是一个与（$\mathcal{L}$, ad P, A）等价的表示，则存在一个非退化双线性型 $\mathcal{B}$，使得（$A, P, \mathcal{B}$）是一个 Frobenius 相对泊松代数，且ˆ$Q = P$。

证明。L et $x, y, z, w \in A$。由于 P 是李代数 $(A, [-, -])$ 的导子，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}(P([x, y]) - [P(x), y] - [x, P(y)], z) \\ &= \mathcal{B}([x, y], \hat{P}(z)) - \mathcal{B}(P(x), [y, z]) - \mathcal{B}(x, [P(y), z]) \\ &= \mathcal{B}(x, [y, \hat{P}(z)] - \hat{P}([y, z]) - [P(y), z]). \end{aligned}$$

因此，由于 $\mathcal{B}$ 的非退化性，等式（23）成立。类似地，等式（22）成立，因为 P 是交换结合代数（A, $\cdot$）的导子。此外，由等式（6），我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}([x \cdot y, z] - x \cdot [y, z] - [x, z] \cdot y + x \cdot y \cdot P(z), w) \\ &= \mathcal{B}(z, [w, x \cdot y] + [x, y \cdot w] + [y, w \cdot x] + \hat{P}(w \cdot x \cdot y)). \end{aligned}$$

ˆ 因此等式（24）成立。所以 P 对偶表示（A, P）。定义线性映射 φ: $A \to A^*$ 如下：

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \mathcal{B}(x, y), \quad \forall x, y \in A. \tag{50}$$

由于 $\mathcal{B}$ 的非退化性， φ 是线性同构。此外，我们有

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathrm{ad}(x)y), z \rangle &= \langle \varphi([x, y]), z \rangle = \mathcal{B}([x, y], z) = -\mathcal{B}(y, [x, z]) \\ &= -\langle \varphi(y), [x, z] \rangle = \langle \mathrm{ad}^*(x)\varphi(y), z \rangle. \end{aligned}$$

因此，对于所有 $x \in A$， φad$(x) = $ ad$^*(x)\varphi$。类似地，对于所有 $x \in A$， $\varphi\mathcal{L}(x) = -\mathcal{L}^*(x)\varphi$。此外，我们有

$$\langle \varphi(P(x)), y \rangle = \mathcal{B}(P(x), y) = \mathcal{B}(x, \hat{P}(y)) = \langle \varphi(x), \hat{P}(y) \rangle = \langle \hat{P}^*(\varphi(x)), y \rangle.$$

ˆ ˆ 因此 $\varphi P = P^*\varphi$。因此，作为 (A, P) 的表示，$(-\mathcal{L}^*$, ad*, P^*, $A^*)$ 与 $(\mathcal{L}$, ad $P, A)$ 等价。

反之，设 φ: $A \to A^*$ 是一个线性同构，给出了两个表示（$-\mathcal{L}^*$,ad*, Q^*, A^*）与（$\mathcal{L}$, ad P, A）之间的等价关系。根据式（50）定义 $\mathcal{B}$ 上的双线性型 A。那么，通过与上文类似的证明， $\mathcal{B}$ 是（A, P）上的非退化不变双线性型，使得 $Q = P$。□

定义 3.3. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数。假设 (A^*, Q^*) 也是一个相对泊松代数。若向量空间的直和 $A \oplus A^*$ 上存在相对泊松代数结构，使得 $(A \oplus A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d)$ 是一个 Frobenius 相对泊松代数，其中 $\mathcal{B}_d$ 由下式给出

$$\mathcal{B}_d(x + a^*, y + b^*) = \langle x, b^* \rangle + \langle a^*, y \rangle, \quad \forall x, y \in A, a^*, b^* \in A^*, \tag{51}$$

并且（A, P）和（A^*, Q^*）都是相对泊松子代数，则称（（$A \oplus A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d$），（$A, P$），（$A^*, Q^*$））为相对泊松代数的 Manin 三元组。记作（（$A \bowtie A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d$），（$A, P$），（$A^*, Q^*$））。

记号 $A \bowtie A^*$ 之所以合理，是因为 $A \oplus A^*$ 上的相对泊松代数结构来自命题 A，P）和（A^*，Q^*）所构成的相对泊松代数匹配对 2.17。

引理 3.4. 设（（$A \bowtie A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d$），（$A, P$），（$A^*, Q^*$））是相对泊松代数的 Manin 三元组。

(1) 关于 $\mathcal{B}_d$ 的伴随 $P + Q^*$ $P+Q^*$ 是 $Q+P^*$。此外，$Q+P^*$ 对偶表示（$A \bowtie A^*$，$P + Q^*$）。（2） Q 对偶表示（A，P）。（3） P^* 对偶表示（A^*，Q^*）。

证明。设 x、$y \in A$、a^*、$b^* \in A^*$。则有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_d((P + Q^*)(x + a^*), y + b^*) &= \mathcal{B}_d(P(x) + Q^*(a^*), y + b^*) = \langle P(x), b^* \rangle + \langle Q^*(a^*), y \rangle \\ &= \langle x, P^*(b^*) \rangle + \langle a^*, Q(y) \rangle = \mathcal{B}_d(x + a^*, (Q + P^*)(y + b^*)).\end{aligned}$$

因此，伴随 $P + Q^*$ 关于 $P + Q^*$ 的 $\mathcal{B}_d$ 是 $Q + P^*$。根据命题3.2，$Q + P^*$ 对偶表示（$A \bowtie A^*$，$P + Q^*$）。根据推论2.10，当且仅当对所有x、y、$z \in A$、a^*、b^*、$c^* \in A^*$、

$$\begin{aligned}&(x + a^*) \cdot (Q + P^*)(y + b^*) - (P + Q^*)(x + a^*) \cdot (y + b^*) - (Q + P^*)((x + a^*) \cdot (y + b^*)) = 0, \\ &[x + a^*, (Q + P^*)(y + b^*)] - [(P + Q^*)(x + a^*), y + b^*] - (Q + P^*)[(x + a^*) \cdot (y + b^*)] = 0, \\ &(P + Q^* + Q + P^*)((x + a^*) \cdot (y + b^*) \cdot (z + c^*)) = 0.\end{aligned}$$

现在取 $a^* = b^* = c^* = 0$ 代入上述方程，得到方程（22）、（23）和（29）。因此，Q对偶表示（A，P）。类似地，取 $x = y = z = 0$，可得 P^* 对偶表示（A^*，Q^*）。□

定理 3.5. 设（$A, \cdot_A, [-,-]_A, P$）是一个相对泊松代数。假设对偶空间 A^* 上存在相对泊松代数结构（A^*，$\cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}, Q^*$）。那么，存在相对泊松代数的 Manin 三元组（（$A \bowtie A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d$），（$A, P$），（$A^*, Q^*$））当且仅当（（$A, P$），（$A^*, Q^*$） $-\mathcal{L}_A^*$，$\mathrm{ad}_A^*, -\mathcal{L}_{A^*}^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*$）是相对泊松代数的匹配对。

证明。已知在 [14] 上存在一个李代数结构，使得向量空间直和 $A \oplus A^*$ 的 $(A, [-,-]_A)$ 和 $(A^*$，$[-,-]_{A^*})$ 均为李子代数，且由方程 (51) 给出的 $A \oplus A^*$ 上的双线性型 $\mathcal{B}_d$ 满足方程 (48)，当且仅当 $(A, A^*, \mathrm{ad}_A^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 是李代数的匹配对。类似地，根据 [7],， $A \oplus A^*$ 上存在一个交换结合代数结构，使得 $(A, \cdot_A)$ 和 $(A^*, \cdot_{A^*})$ 均为交换结合子代数，且 $\mathcal{B}_d$ 满足方程 (47)，当且仅当 $(A, A^*, -\mathcal{L}_A^*$，$-\mathcal{L}_{A^*}^*)$ 是交换结合代数匹配对。因此，若 $((A \bowtie A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d), (A, P), (A^*, Q^*))$ 是一个相对泊松代数的 Manin 三元组，则由命题 2.17 可得

$$A_1 = A, P_1 = P, A_2 = A^*, P_2 = Q^*, \mu_1 = -\mathcal{L}_A^*, \rho_1 = \mathrm{ad}_A^*, \mu_2 = -\mathcal{L}_{A^*}^*, \rho_2 = \mathrm{ad}_{A^*}^*,$$

$((A, P), (A^*, Q^*)$ $-\mathcal{L}_A^*, \mathrm{ad}_A^*, -\mathcal{L}_{A^*}^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 是相对泊松代数的匹配对。反过来，若 $((A, P), (A^*, Q^*)$ $-\mathcal{L}_A^*, \mathrm{ad}_A^*, -\mathcal{L}_{A^*}^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 是相对泊松代数的匹配对，则再次由命题 2.17 可知，存在一个相对泊松代数 $(A \bowtie A^*, P + Q^*)$，它由该匹配对得到，且 (A, P) 和 (A^*, Q^*) 均为其相对泊松子代数。此外，双线性型 $\mathcal{B}_d$ 在 $(A \bowtie A^*, P + Q^*)$ 上是不变的。因此，$((A \bowtie A^*, P + Q^*, \mathcal{B}_d), (A, P), (A^*, Q^*))$ 是相对泊松代数的 Manin 三元组。□

3.2. 相对泊松双代数。

在引入相对泊松双代数的概念之前，我们先回顾（交换且余交换的）无穷小双代数（[7]）和李双代数（[14]）的概念。

定义 3.6. 余交换余结合余代数是一个二元组 (A,Δ)，其中 A 是一个向量空间，且 $\Delta\colon A\to A\otimes A$ 是满足以下条件的线性映射

$$\tau\Delta=\Delta, \tag{52}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta, \tag{53}$$

其中 $\tau\colon A\otimes A\to A\otimes A$ 是定义为 $\tau(x\otimes y)=y\otimes x$的交换算子，对所有 $x,y\in A$均成立。

定义 3.7. 交换且余交换无穷小双代数是一个三元组 $(A,\cdot,\Delta)$，满足：

(1) $(A,\cdot)$ 是交换结合代数；(2) (A,Δ) 是余交换余结合余代数；(3) Δ满足以下条件：

$$\Delta(x\cdot y)=(\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})\Delta(y)+(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(y))\Delta(x),\quad\forall x,y\in A. \tag{54}$$

定义 3.8. 李余代数是一个二元组 (A,δ)，其中 A是一个向量空间，且 $\delta\colon A\to A\otimes A$是一个满足下列条件的线性映射

$$\tau\delta=-\delta, \tag{55}$$

$$(\mathrm{id}+\xi+\xi^2)(\mathrm{id}\otimes\delta)\delta=0, \tag{56}$$

其中 $\xi\colon A\otimes A\otimes A\to A\otimes A\otimes A$ 是定义为 $\xi(x\otimes y\otimes z)=y\otimes z\otimes x$的线性映射，对所有$x,y,z\in A.$均成立

定义 3.9. 李双代数是一个三元组 $(A,[-,-],\delta)$，满足

(1) $(A,[-,-])$ 是李代数；(2) (A,δ) 是李余代数；(3) δ是 $(A,[-,-])$ 的一个 1-余循环，其取值于 $A\otimes A$，即，$\delta([x,y])=(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))\delta(y)-(\mathrm{ad}(y)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(y))\delta(x)\quad\forall x,y\in A.$

(57)

现在我们给出 相对泊松余代数和相对泊松双代数的定义。

定义 3.10. 设 A 是一个向量空间，Δ、$\delta\colon A\to A\otimes A$ 和 $Q\colon A\to A$ 是线性映射。那么，(A,Δ,δ,Q) 称为相对泊松余代数，如果 (A,Δ) 是余交换余结合余代数，(A,δ) 是李余代数，并且满足以下条件：

$$\Delta Q=(Q\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes Q)\Delta, \tag{58}$$

$$\delta Q=(Q\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes Q)\delta, \tag{59}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\delta(x)-(\delta\otimes\mathrm{id})\Delta(x)-(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\delta)\Delta(x)-(Q\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(x)=0,\quad\forall x\in A. \tag{60}$$

命题 3.11. 在有限维假设下，(A,Δ,δ,Q) 是相对泊松余代数，当且仅当 $(A^*,\Delta^*,\delta^*,Q^*)$ 是相对泊松代数。

证明。显然，(A,Δ) 是余交换余结合余代数，当且仅当 (A^*,Δ^*) 是交换结合代数；(A,δ) 是李余代数，当且仅当 (A^*,δ^*) 是李代数。对于任意 $a^*,b^*\in A^*$，令 $\Delta^*(a^*\otimes b^*)=a^*\cdot b^*$, $\delta^*(a^*\otimes b^*)=[a^*,b^*]$。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathrm{id}\otimes\Delta)\delta(x),a^*\otimes b^*\otimes c^*\rangle=\langle x,\delta^*(\mathrm{id}\otimes\Delta^*)(a^*\otimes b^*\otimes c^*)\rangle=\langle x,[a^*,b^*\cdot c^*]\rangle,\\
&\langle(\delta\otimes\mathrm{id})\Delta(x),a^*\otimes b^*\otimes c^*\rangle=\langle x,\Delta^*(\delta^*\otimes\mathrm{id})(a^*\otimes b^*\otimes c^*)\rangle=\langle x,[a^*,b^*]\cdot c^*\rangle,\\
&\langle(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\delta)\Delta(x),a^*\otimes b^*\otimes c^*\rangle=\langle x,\Delta^*(\mathrm{id}\otimes\delta^*)(\tau\otimes\mathrm{id})(a^*\otimes b^*\otimes c^*)\rangle=\langle x,b^*\cdot[a^*,c^*]\rangle,\\
&\langle(Q\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(x),a^*\otimes b^*\otimes c^*\rangle=\langle x,\Delta^*(\Delta^*\otimes\mathrm{id})(Q^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(a^*\otimes b^*\otimes c^*)\rangle\\
&\qquad\qquad=\langle x,Q^*(a^*)\cdot b^*\cdot c^*\rangle,
\end{aligned}$$

对于任意 $x \in A$ 和 a^*, b^*, $c^* \in A^*$。因此，若且唯若式（6）成立，则 $(A^*, \Delta^*, \delta^*, Q^*)$ 是相对泊松代数。类似地， Q^* 是 (A^*, Δ^*) 作为交换结合代数的导子，当且仅当式（58）成立；并且 Q^* 是 (A^*, δ^*) 作为李代数的导子，当且仅当式（59）成立。□

定义 3.12. 相对泊松双代数是一个由 $(A, \cdot, [-,-], \Delta, \delta, P, Q)$ 构成的集合，并满足以下条件：

(1) $(A, \cdot, [-,-], P)$ 是相对泊松代数；(2) (A, Δ, δ, Q) 是相对泊松余代数；(3) Δ 满足公式（54），因此 $(A, \cdot, \Delta)$ 是交换且余交换无穷小双代数；(4) δ 满足公式（57），因此 $(A, [-,-], \delta)$ 是李双代数；(5) Q 对偶表示 (A, P)，即公式 (22)、(23) 和 (29) 成立；(6) P^* 对偶表示 (A^*, Q^*)，即以下等式成立：

$$\Delta P = (P \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes Q)\Delta, \tag{61}$$

$$\delta P = (P \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes Q)\delta, \tag{62}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(P + Q) = 0; \tag{63}$$

(7) 下列等式成立：

$$\begin{aligned} &\delta(x \cdot y) - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}(y))\Delta(x) - (\mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})\delta(y) \\ &-(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}(x))\Delta(y) - (\mathcal{L}(y) \otimes \mathrm{id})\delta(x) - (\mathrm{id} \otimes Q)\Delta(x \cdot y) = 0, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} &\Delta([x,y]) - (\mathcal{L}(y) \otimes \mathrm{id})\delta(x) - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}(x))\Delta(y) \\ &+(\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}(y))\delta(x) - (\mathrm{ad}(x) \otimes \mathrm{id})\Delta(y) + \Delta(P(x) \cdot y) = 0, \end{aligned} \tag{65}$$

对所有的 $x, y \in A$ 均成立。

注 3.13。令 $P = Q = 0$，即可由上述相对泊松双代数的概念恢复 [37] 中给出的泊松双代数概念。

注 3.14。设 $(A, \cdot_A, [-,-]_A, \Delta_A, \delta_A, P, Q)$ 是一个相对泊松双代数。容易证明，$(A^*, \cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}, \Delta_{A^*}, \delta_{A^*}, Q^*, P^*)$ 也是一个相对泊松双代数，其中 $\cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}\colon A^* \otimes A^* \to A^*$ 和 $\Delta_{A^*}, \delta_{A^*}\colon A^* \to A^* \otimes A^*$ 分别定义为

$$a^* \cdot_{A^*} b^* = \Delta_A^*(a^* \otimes b^*), \quad [a^*, b^*]_{A^*} = \delta_A^*(a^* \otimes b^*), \tag{66}$$

$$\langle \Delta_{A^*}(a^*), x \otimes y \rangle = -\langle a^*, x \cdot_A y \rangle, \quad \langle \delta_{A^*}(a^*), x \otimes y \rangle = -\langle a^*, [x,y]_A \rangle, \tag{67}$$

对所有的 $x, y \in A, a^*, b^* \in A^*$。

定理 3.15. 设 $(A, \cdot_A, [-,-]_A, P)$ 是一个相对泊松代数。假设对偶空间 A^* 上存在一个相对泊松代数结构 $(A^*, \cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}, Q^*)$，它由一个相对泊松余代数 (A, Δ, δ, Q) 给出。那么，$(A, \cdot_A, [-,-]_A, \Delta, \delta, P, Q)$ 是一个相对泊松双代数，当且仅当 $((A, P), (A^*, Q^*)\ -\mathcal{L}_A^*, \mathrm{ad}_A^*, -\mathcal{L}_{A^*}^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 是相对泊松代数的匹配对。

证明。根据 [14]， δ 满足公式（57）当且仅当（A， A^*， ad_A^*， $\mathrm{ad}_{A^*}^*$）是李代数的匹配对；根据 [7]， Δ 满足公式（54）当且仅当（A， A^*， $-\mathcal{L}_A^*$， $-\mathcal{L}_{A^*}^*$）是交换结合代数的匹配对。此外，根据定义 2.6， Q 对偶表示（A， P）当且仅当（$-\mathcal{L}_A^*$， ad_A^*， Q^*， A^*）是（A， P）的表示；而且 P^* 对偶表示（A^*， Q^*）当且仅当（$-\mathcal{L}_{A^*}^*$， $\mathrm{ad}_{A^*}^*$， P， A）是（A^*， Q^*）的表示。接下来我们证明

$$\text{Eq. (36)} \Longleftrightarrow \text{Eq. (64)} \Longleftrightarrow \text{Eq. (39) and Eq. (37)} \Longleftrightarrow \text{Eq. (65)} \Longleftrightarrow \text{Eq. (38)}$$

在 $P_1 = P$， $P_2 = Q^*$， $\mu_1 = -\mathcal{L}_A^*$， $\mu_2 = -\mathcal{L}_{A^*}^*$， $\rho_1 = \mathrm{ad}_A^*$， $\rho_2 = \mathrm{ad}_{A^*}^*$。作为一个例子，我们给出一个明确证明，说明公式（36）$\Longleftrightarrow$ 公式（64）。其他等价关系的证明类似。令 x， $y \in A$， a^*， $b^* \in A^*$。于是有

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}_{A^*}^*(a^*)(x \cdot_A y), b^* \rangle &= \langle x \cdot_A y, [b^*, a^*]_{A^*} \rangle = \langle \delta(x \cdot_A y), b^* \otimes a^* \rangle, \\
-\langle \mathcal{L}_{A^*}^*(\mathrm{ad}_A^*(y)a^*)x, b^* \rangle &= \langle x, b^* \cdot_{A^*} (\mathrm{ad}_A^*(y)a^*) \rangle = \langle x, \Delta^*(\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_A^*(y))(b^* \otimes a^*) \rangle \\
&= -\langle (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_A(y))\Delta(x), b^* \otimes a^* \rangle, \\
-\langle x \cdot \mathrm{ad}_{A^*}^*(a^*)y, b^* \rangle &= \langle \mathrm{ad}_{A^*}^*(a^*)y, \mathcal{L}_A^*(x)b^* \rangle = \langle y, [\mathcal{L}_A^*(x)b^*, a^*]_{A^*} \rangle \\
&= \langle y, \delta^*(\mathcal{L}_A^*(x) \otimes \mathrm{id})(b^* \otimes a^*) \rangle = -\langle (\mathcal{L}_A(x) \otimes \mathrm{id})\delta(y), b^* \otimes a^* \rangle, \\
\langle \mathcal{L}_{A^*}^*(Q^*(a^*))(x \cdot_A y), b^* \rangle &= -\langle x \cdot_A y, b^* \cdot_{A^*} Q^*(a^*) \rangle = -\langle x \cdot_A y, \Delta^*(\mathrm{id} \otimes Q^*)(b^* \otimes a^*) \rangle \\
&= -\langle (\mathrm{id} \otimes Q)\Delta(x \cdot_A y), b^* \otimes a^* \rangle.
\end{aligned}$$

因此，方程（36）成立，当且仅当方程（64）成立。因此结论成立。 □

结合定理 3.5 和 3.15，可得以下结论。

推论 3.16. 设 $(A, \cdot_A, [-,-]_A, P)$ 是一个相对泊松代数。假设其对偶空间 A^* 上存在一个由相对泊松余代数 (A, Δ, δ, Q) 给出的相对泊松代数结构 $(A^*, \cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}, Q^*)$。则以下条件等价：

(1) 存在一个相对泊松代数的 Manin 三元组 $((A \bowtie A^*, P+Q^*, \mathcal{B}_d), (A, P), (A^*, Q^*))$；(2) $((A, P), (A^*, Q^*)$ $-\mathcal{L}_A^*, \mathrm{ad}_A^*, -\mathcal{L}_{A^*}^*, \mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 是相对泊松代数的匹配对；(3) $(A, \cdot_A, [-,-]_A, \Delta, \delta, P, Q)$ 是一个相对泊松双代数。

4. Coboundary relative Poisson bialgebras

我们研究余边界相对泊松双代数，由此在相对泊松代数中引入相对泊松杨-巴克斯特方程（RPYBE）。特别地，相对泊松代数中的 RPYBE 的一个反对称解给出一个余边界相对泊松双代数。我们还引入相对泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子概念，以解释 RPYBE；而一个 $\mathcal{O}$-算子给出半直积相对泊松代数中 RPYBE 的一个反对称解。最后，我们引入相对前泊松代数的概念，以构造其从属相对泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子。

4.1. 余边界相对泊松双代数。

回顾一下，交换且余交换无穷小双代数（A、 $\cdot$、 Δ）称为余边界的，如果存在一个 $r \in A \otimes A$ 使得

$$\Delta(x) = (\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})r, \quad \forall x \in A. \tag{68}$$

若存在一个 $r \in A \otimes A$，使得李双代数（$A, [-,-], \delta$）称为余边界的

$$\delta(x) = (\mathrm{ad}(x) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}(x))r, \quad \forall x \in A. \tag{69}$$

因此，我们受到启发，给出以下概念。

定义 4.1. 称相对泊松双代数（A， $\cdot$， $[-,-]$， Δ， δ， P， Q）为余边界的，若存在一个 $r \in A \otimes A$ 使得等式（68）和（69）成立。

设 A 是一个向量空间，带有双线性运算 $\diamond\colon A \otimes A \to A$。令 $r = \sum a_i \otimes b_i \in A \otimes A$。设$_i$

$$r_{12} \diamond r_{13} = \sum_{i,j} a_i \diamond a_j \otimes b_i \otimes b_j, \quad r_{12} \diamond r_{23} = \sum_{i,j} a_i \otimes b_i \diamond a_j \otimes b_j, \quad r_{13} \diamond r_{23} = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes b_i \diamond b_j.$$

设 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数，且 $\Delta\colon A \to A \otimes A$ 是由等式 (68) 定义的线性映射。那么 Δ 自动满足等式 (54)。此外，由于 [7], Δ 使 $(A, \Delta$成为一个

余交换余结合余代数，使得 $(A,\cdot,\Delta)$ 是交换且余交换无穷小双代数，当且仅当对所有 $x\in A$,

$$(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})(r+\tau(r))=0, \tag{70}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\mathbf{A}(r)=0, \tag{71}$$

其中

$$\mathbf{A}(r)=r_{12}\cdot r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}+r_{13}\cdot r_{23}. \tag{72}$$

方程 $\mathrm{A}(r)=0$ 称为 $(A,\cdot)$ 中的结合杨-巴克斯特方程（AYBE）。

设（A, $[-,-]$）是一个李代数，且 $\delta\colon A\to A\otimes A$ 是由方程（69）定义的线性映射。则δ 自动满足方程（57）。此外，根据 [14]，δ 使（A, δ）成为一个李余代数，使得（A, $[-,-]$, δ）是李双代数，当且仅当对所有 $x\in A$,

$$(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))(r+\tau(r))=0, \tag{73}$$

$$(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))\mathbf{C}(r)=0, \tag{74}$$

其中

$$\mathbf{C}(r)=[r_{12},r_{13}]+[r_{12},r_{23}]+[r_{13},r_{23}]. \tag{75}$$

方程 $\mathrm{C}(r)=0$ 称为 $(A,[-,-])$ 中的经典杨-巴克斯特方程（CYBE）。

命题 4.2. 设 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 是一个由 Q 对偶表示的相对泊松代数。设 $r=\sum a_i\otimes b_i\in A\otimes A$ 和 Δ, $\delta\colon A\to A\otimes A$ 是分别由公式 (68) 和 (69)$_i$ 定义的线性映射。分别由公式 (72) 和 (75) 定义 $\mathrm{A}(r)$ 和 $\mathrm{C}(r)$。

(1) 公式 (58) 成立当且仅当下列等式成立：

$$(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))(\mathrm{id}\otimes P-Q\otimes\mathrm{id})r+(\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r=0,\quad\forall x\in A. \tag{76}$$

(2) 公式 (59) 成立当且仅当下列等式成立：

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))(\mathrm{id}\otimes P-Q\otimes\mathrm{id})r-(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r=0,\quad\forall x\in A. \tag{77}$$

(3) 公式 (60) 成立当且仅当下列等式成立：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}+Q\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\boldsymbol{A}(r)+(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)-\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})\boldsymbol{C}(r)\\&+\sum_j(\mathrm{ad}(a_j)\otimes\mathrm{id})(\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id}-\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))(r+\tau(r))\otimes b_j+\sum_j(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x\cdot a_j))(Q\otimes\mathrm{id}-\mathrm{id}\otimes P)r\otimes b_j\\&+\sum_j(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x\cdot b_j))(\mathrm{id}\otimes\tau)((\mathrm{id}\otimes P-Q\otimes\mathrm{id})r\otimes a_j)=0,\quad\forall x\in A.\end{aligned} \tag{78}$$

(4) 公式 (61) 成立当且仅当下列等式成立：

$$(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r=0,\quad\forall x\in A. \tag{79}$$

(5) 公式 (62) 成立当且仅当下列等式成立：

$$(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r=0,\quad\forall x\in A. \tag{80}$$

(6) 方程（63）成立，当且仅当以下方程成立：

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}((P+Q)x))\boldsymbol{A}(r)=0,\quad\forall x\in A. \tag{81}$$

(7) 方程（64）成立，当且仅当以下方程成立：

$$(\mathcal{L}(x\cdot y)\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r=0,\quad\forall x,y\in A. \tag{82}$$

(8) 式（65）自动成立。

证明。设 x, $y \in A$。（1）将式（68）代入式（76），可得

$$\begin{aligned}
&\Delta Q(x) - (Q \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes Q)\Delta(x)\\
&= \sum_i (a_i \otimes Q(x) \cdot b_i - Q(x) \cdot a_i \otimes b_i - Q(a_i) \otimes x \cdot b_i + Q(x \cdot a_i) \otimes b_i - a_i \otimes Q(x \cdot b_i) + x \cdot a_i \otimes Q(b_i))\\
&\overset{(22)}{=} \sum_i (a_i \otimes P(b_i) \cdot x - P(a_i) \cdot x \otimes b_i - Q(a_i) \otimes x \cdot b_i + x \cdot a_i \otimes Q(b_i))\\
&= (\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}(x))(\mathrm{id} \otimes P - Q \otimes \mathrm{id})r + (\mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes Q - P \otimes \mathrm{id})r.
\end{aligned}$$

因此，式（58）成立当且仅当式（76）成立。

（2）与（1）的证明类似，式（59）成立当且仅当式（76）成立。（3）将式（68）和（69）代入式（60），得

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \Delta)\delta(x) - (\delta \otimes \mathrm{id})\Delta(x) - (\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta(x) - (Q \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(x)\\
&= \sum_{i,j} ([x, a_i] \otimes a_j \otimes b_i \cdot b_j - [x, a_i] \otimes b_i \cdot a_j \otimes b_j + a_i \otimes a_j \otimes [x, b_i] \cdot b_j - a_i \otimes [x, b_i] \cdot a_j \otimes b_j\\
&\quad -[a_i, a_j] \otimes b_j \otimes x \cdot b_i - a_j \otimes [a_i, b_j] \otimes x \cdot b_i + [x \cdot a_i, a_j] \otimes b_j \otimes b_i + a_j \otimes [x \cdot a_i, b_j] \otimes b_i\\
&\quad -[x \cdot b_i, a_j] \otimes a_i \otimes b_j - a_j \otimes a_i \otimes [x \cdot b_i, b_j] + [b_i, a_j] \otimes x \cdot a_i \otimes b_j + a_j \otimes x \cdot a_i \otimes [b_i, b_j]\\
&\quad -Q(a_j) \otimes a_i \cdot b_j \otimes x \cdot b_i + Q(a_i \cdot a_j) \otimes b_j \otimes x \cdot b_i + Q(a_j) \otimes x \cdot a_i \cdot b_j \otimes b_i\\
&\quad -Q(x \cdot a_i \cdot a_j) \otimes b_j \otimes b_i)\\
&= W(1) + W(2) + W(3),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
W(1): \quad &= \sum_{i,j} ([x, a_i] \otimes a_j \otimes b_i \cdot b_j - [x, a_i] \otimes b_i \cdot a_j \otimes b_j + [x \cdot a_i, a_j] \otimes b_j \otimes b_i\\
&\quad -[x \cdot b_i, a_j] \otimes a_i \otimes b_j - Q(x \cdot a_i \cdot a_j) \otimes b_j \otimes b_i)\\
&\overset{(72)}{=} (\mathrm{ad}(x) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\mathbf{A}(r) + \sum_{i,j} (-[x, a_i \cdot a_j] \otimes b_i \otimes b_j + [x \cdot a_i, a_j] \otimes b_j \otimes b_i\\
&\quad -[x \cdot b_i, a_j] \otimes a_i \otimes b_j - Q(x \cdot a_i \cdot a_j) \otimes b_j \otimes b_i)\\
&\overset{(24)}{=} (\mathrm{ad}(x) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\mathbf{A}(r) + \sum_{i,j} ([a_j, x \cdot a_i] \otimes b_i \otimes b_j + [a_j, x \cdot b_i] \otimes a_i \otimes b_j)\\
&= (\mathrm{ad}(x) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\mathbf{A}(r) + \sum_j (\mathrm{ad}(a_j) \otimes \mathrm{id})(\mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) \otimes b_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(2): \quad &= \sum_{i,j} (-a_i \otimes [x, b_i] \cdot a_j \otimes b_j + a_j \otimes [x \cdot a_i, b_j] \otimes b_i + [b_i, a_j] \otimes x \cdot a_i \otimes b_j\\
&\quad +a_j \otimes x \cdot a_i \otimes [b_i, b_j] + Q(a_j) \otimes x \cdot a_i \cdot b_j \otimes b_i)\\
&= \sum_{i,j} (-a_i \otimes [x, b_i] \cdot a_j \otimes b_j + a_j \otimes [x \cdot a_i, b_j] \otimes b_i + a_j \otimes x \cdot a_i \otimes [b_i, b_j]\\
&\quad +[a_j, a_i] \otimes x \cdot b_i \otimes b_j + Q(a_j) \otimes x \cdot a_i \cdot b_j \otimes b_i) - \sum_j (\mathrm{ad}(a_j) \otimes \mathcal{L}(x))(r + \tau(r)) \otimes b_j\\
&\overset{(75)}{=} -(\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})\mathbf{C}(r) + \sum_{i,j} (-a_i \otimes [x, b_i] \cdot a_j \otimes b_j + a_i \otimes [x \cdot a_j, b_i] \otimes b_j\\
&\quad +a_i \otimes x \cdot [b_i, a_j] \otimes b_j + Q(a_j) \otimes x \cdot a_i \cdot b_j \otimes b_i) - \sum_j (\mathrm{ad}(a_j) \otimes \mathcal{L}(x))(r + \tau(r)) \otimes b_j\\
&\overset{(6)}{=} -(\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}(x) \otimes \mathrm{id})\mathbf{C}(r) + \sum_{i,j} (-a_i \otimes x \cdot a_j \cdot P(b_i) \otimes b_j + Q(a_j) \otimes x \cdot a_i \cdot b_j \otimes b_i)\\
&\quad - \sum_j (\mathrm{ad}(a_j) \otimes \mathcal{L}(x))(r + \tau(r)) \otimes b_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})\mathbf{C}(r)+\sum_j(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x\cdot a_j)\otimes\mathrm{id})((Q\otimes\mathrm{id}-\mathrm{id}\otimes P)r\otimes b_j)\\
& -\sum_j(\mathrm{ad}(a_j)\otimes\mathcal{L}(x))(r+\tau(r))\otimes b_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W(3): \quad = \quad & \sum_{i,j}(a_i\otimes a_j\otimes[x,b_i]\cdot b_j-[a_i,a_j]\otimes b_j\otimes x\cdot b_i-a_j\otimes[a_i,b_j]\otimes x\cdot b_i\\
& -a_j\otimes a_i\otimes[x\cdot b_i,b_j]-Q(a_j)\otimes a_i\cdot b_j\otimes x\cdot b_i+Q(a_i\cdot a_j)\otimes b_j\otimes x\cdot b_i)\\
\overset{(75)}{=} \quad & (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{C}(r)+\sum_{i,j}(-a_i\otimes a_j\otimes x\cdot[b_i,b_j]+a_i\otimes a_j\otimes[x,b_i]\cdot b_j\\
& -a_i\otimes a_j\otimes[x\cdot b_j,b_i]-Q(a_j)\otimes a_i\cdot b_j\otimes x\cdot b_i+Q(a_i\cdot a_j)\otimes b_j\otimes x\cdot b_i)\\
\overset{(6)}{=} \quad & (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{C}(r)+\sum_{i,j}(a_i\otimes a_j\otimes x\cdot b_j\cdot P(b_i)-Q(a_j)\otimes a_i\cdot b_j\otimes x\cdot b_i\\
& +Q(a_i\cdot a_j)\otimes b_j\otimes x\cdot b_i)\\
\overset{(72)}{=} \quad & (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{C}(r)+\sum_{i,j}(a_i\otimes a_j\otimes x\cdot b_j\cdot P(b_i)-Q(a_i)\otimes a_j\otimes x\cdot b_i\cdot b_j)\\
& +(Q\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{A}(r)\\
= \quad & (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{C}(r)+(Q\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x))\mathbf{A}(r)\\
& +\sum_j(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(x\cdot b_j))(\mathrm{id}\otimes\tau)((\mathrm{id}\otimes P-Q\otimes\mathrm{id})r\otimes a_j).
\end{aligned}
$$

因此，式（60）成立，当且仅当式（78）成立。

（4）按照（1）的类似证明可知，式（61）成立当且仅当式（79）成立。（5）按照（1）的类似证明可知，式（62）成立当且仅当式（80）成立。（6）将式（68）代入式（63），得到

$$
\begin{aligned}
& (\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(P+Q)(x)\\
& =\sum_{i,j}(a_j\otimes a_i\cdot b_j\otimes((P+Q)x)\cdot b_i-a_i\cdot a_j\otimes b_j\otimes((P+Q)x)\cdot b_i\\
& \qquad +(((P+Q)x)\cdot a_i)\cdot a_j\otimes b_j\otimes b_i-a_j\otimes(((P+Q)x)\cdot a_i)\cdot b_j\otimes b_i)\\
& \overset{(30)}{=}\sum_{i,j}(a_j\otimes a_i\cdot b_j\otimes((P+Q)x)\cdot b_i-a_i\cdot a_j\otimes b_j\otimes((P+Q)x)\cdot b_i\\
& \qquad -a_i\otimes a_j\otimes((P+Q)x)\cdot b_i\cdot b_j)\\
& =-(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}((P+Q)x))\mathbf{A}(r).
\end{aligned}
$$

因此，式（63）成立当且仅当式（81）成立。

(7) 将式（68）和（69）代入式（64），得到

$$
\begin{aligned}
& \delta(x\cdot y)-(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(y))\Delta(x)-(\mathcal{L}(x)\otimes\mathrm{id})\delta(y)-(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))\Delta(y)-(\mathcal{L}(y)\otimes\mathrm{id})\delta(x)\\
& \qquad -(\mathrm{id}\otimes Q)\Delta(x\cdot y)\\
& =\sum_i([x\cdot y,a_i]\otimes b_i+a_i\otimes[x\cdot y,b_i]-a_i\otimes[y,x\cdot b_i]+x\cdot a_i\otimes[y,b_i]\\
& \qquad -a_i\otimes[x,y\cdot b_i]+y\cdot a_i\otimes[x,b_i]-x\cdot[y,a_i]\otimes b_i-x\cdot a_i\otimes[y,b_i]\\
& \qquad -y\cdot[x,a_i]\otimes b_i-y\cdot a_i\otimes[x,b_i]-a_i\otimes Q(x\cdot y\cdot b_i)+x\cdot y\cdot a_i\otimes Q(b_i))\\
& =\sum_i(a_i\otimes[x\cdot y,b_i]-a_i\otimes[y,x\cdot b_i]-a_i\otimes[x,y\cdot b_i]-a_i\otimes Q(x\cdot y\cdot b_i))\\
& \qquad +\sum_i([x\cdot y,a_i]\otimes b_i-x\cdot[y,a_i]\otimes b_i-y\cdot[x,a_i]\otimes b_i+x\cdot y\cdot a_i\otimes Q(b_i))\\
& \overset{(24)}{=}\sum_i([x\cdot y,a_i]\otimes b_i-x\cdot[y,a_i]\otimes b_i-y\cdot[x,a_i]\otimes b_i+x\cdot y\cdot a_i\otimes Q(b_i))
\end{aligned}
$$

$$\overset{(6)}{=}\sum_i(-x\cdot y\cdot P(a_i)\otimes b_i+x\cdot y\cdot a_i\otimes Q(b_i))$$
$$=(\mathcal{L}(x\cdot y)\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes Q-P\otimes\mathrm{id})r.$$

因此，式（64）成立，当且仅当式（82）成立。

(8) 将式（68）和（69）代入式（65），可得

$$\begin{aligned}&\Delta([x,y])-(\mathcal{L}(y)\otimes\mathrm{id})\delta(x)+(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(y))\delta(x)-(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}(x))\Delta(y)-(\mathrm{ad}(x)\otimes\mathrm{id})\Delta(y)\\&\quad+\Delta(P(x)\cdot y)\\&=\sum_i(a_i\otimes[x,y]\cdot b_i-[x,y]\cdot a_i\otimes b_i-y\cdot[x,a_i]\otimes b_i-y\cdot a_i\otimes[x,b_i]\\&\quad+[x,a_i]\otimes y\cdot b_i+a_i\otimes y\cdot[x,b_i]-a_i\otimes[x,y\cdot b_i]+y\cdot a_i\otimes[x,b_i]\\&\quad-[x,a_i]\otimes y\cdot b_i+[x,y\cdot a_i]\otimes b_i+a_i\otimes P(x)\cdot y\cdot b_i-P(x)\cdot y\cdot a_i\otimes b_i)\\&=\sum_i(a_i\otimes[x,y]\cdot b_i+a_i\otimes y\cdot[x,b_i]-a_i\otimes[x,y\cdot b_i]+a_i\otimes P(x)\cdot y\cdot b_i)\\&\quad+\sum_i(-[x,y]\cdot a_i\otimes b_i-y\cdot[x,a_i]\otimes b_i+[x,y\cdot a_i]\otimes b_i-P(x)\cdot y\cdot a_i\otimes b_i)\\&\overset{(6)}{=}0.\end{aligned}$$

因此，式（65）自动成立。 □

总结上述研究，我们得到以下结论。

定理 4.3. 设 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 是一个由 Q 对偶表示的相对泊松代数。设 $r=\sum a_i\otimes b_i\in A\otimes A$ 和 $\Delta,\delta\colon A\to A\otimes A$ 是分别由式（68）和（69）定义的线性映射。则 $(A,\cdot,[-,-],\Delta,\delta,P,Q)$ 是余边界相对泊松双代数，当且仅当式（70）、（71）、（73）、（74）和（76）—（82）成立。

设 A 是一个向量空间，且 $r=\sum a_i\otimes b_i\in A\otimes A$。$r$ 可按如下方式与从 ${}_iA^*$ 到 A 的线性映射相对应：

$$r(a^*)=\sum_i\langle a^*,a_i\rangle b_i,\quad\forall a^*\in A^*.\tag{83}$$

对于相对泊松双代数，存在 Drinfeld 经典双（[14]）的一个类似物。

定理 4.4. 设（$A,\cdot_A,[-,-]_A,\Delta_A,\delta_A,P,Q$）是一个相对泊松双代数。设（$A^*,\cdot_{A^*},[-,-]_{A^*},\ \Delta_{A^*},\delta_{A^*},Q^*,P^*$）是备注 3.14 中给出的相对泊松双代数。则在向量空间的直和 $A\oplus A^*$ 上存在一个余边界相对泊松双代数结构，该结构分别将 A 和 A^* 上的这两个相对泊松双代数结构包含为相对泊松子双代数。

证明。令 $r\in A\otimes A^*\subset(A\oplus A^*)\otimes(A\oplus A^*)$ 对应于恒等映射 id：$A\to A$。令 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 A 的一个基，并令 $\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$ 为其对偶基。根据公式（83），$r=\sum e_i\otimes e_i^*$。$_i$ 由于 $(A,\cdot_A,[-,-]_A,\Delta_A,\delta_A,P,Q)$ 是一个相对泊松双代数，因此存在一个由匹配对 $((A,P),(A^*,Q^*)\ -\mathcal{L}_A^*,-\mathcal{L}_{A^*}^*,\mathrm{ad}_A^*,\mathrm{ad}_{A^*}^*)$ 给出的相对泊松代数 $(A\bowtie A^*,P+Q^*)$，即，

$$x\cdot_{A\bowtie A^*}y=x\cdot_A y,\quad x\cdot_{A\bowtie A^*}a^*=-\mathcal{L}_A^*(x)a^*-\mathcal{L}_{A^*}^*(a^*)x,\quad a^*\cdot_{A\bowtie A^*}b^*=a^*\cdot_{A^*}b^*,$$
$$[x,y]_{A\bowtie A^*}=[x,y]_A,\quad[x,a^*]_{A\bowtie A^*}=\mathrm{ad}_A^*(x)a^*-\mathrm{ad}_{A^*}^*(a^*)x,\quad[a^*,b^*]_{A\bowtie A^*}=[a^*,b^*]_{A^*},$$

对所有 x，$y\in A$，a^*，$b^*\in A^*$。根据引理 3.4，$Q+P^*$ 对偶表示（$A\bowtie A^*$，$P+Q^*$）。分别定义两个线性映射 $\Delta_{A\bowtie A^*}$，$\delta_{A\bowtie A^*}\colon A\bowtie A^*\to(A\bowtie A^*)\otimes(A\bowtie A^*)$ 如下：

$$\Delta_{A\bowtie A^*}(u)=(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}_{A\bowtie A^*}(u)-\mathcal{L}_{A\bowtie A^*}(u)\otimes\mathrm{id})r,$$
$$\delta_{A\bowtie A^*}(u)=(\mathrm{ad}_{A\bowtie A^*}(u)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes\mathrm{ad}_{A\bowtie A^*}(u))r,$$

对所有 $u \in A \bowtie A^*$。根据 [7, 定理 2.3。6]， r 在交换结合代数（$A \bowtie A^*$， $\cdot_{A\bowtie A^*}$）中满足 AYBE，且成立以下等式：

$$(\mathrm{id} \otimes \mathcal{L}_{A\bowtie A^*}(u) - \mathcal{L}_{A\bowtie A^*}(u) \otimes \mathrm{id})(r + \tau(r)) = 0, \quad \forall u \in A \bowtie A^*.$$

根据 [14, 命题 1.4.2 和 2.1.11], r 在李代数（$A \bowtie A^*, [-,-]_{A\bowtie A^*}$）中满足 CYBE，并且下式成立：

$$(\mathrm{ad}_{A\bowtie A^*}(u) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathrm{ad}_{A\bowtie A^*}(u))(r + \tau(r)) = 0, \quad \forall u \in A \bowtie A^*.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}((P+Q^*) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (Q+P^*))r &= \sum_{i=1}^{n}((P+Q^*) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (Q+P^*))(e_i \otimes e_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(P(e_i) \otimes e_i^* - e_i \otimes P^*(e_i^*)) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((Q+P^*) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (P+Q^*))r &= \sum_{i=1}^{n}((Q+P^*) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes (P+Q^*))(e_i \otimes e_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(Q(e_i) \otimes e_i^* - e_i \otimes Q^*(e_i^*)) = 0.\end{aligned}$$

于是，根据定理 4.3, $(A \bowtie A^*, \cdot_{A\bowtie A^*}, [-,-]_{A\bowtie A^*}, \Delta_{A\bowtie A^*}, \delta_{A\bowtie A^*}, P+Q^*, Q+P^*)$ 是一个余边界相对泊松双代数。此外，再根据 [7, 定理 2.3。6] 和 [14, 命题 1.4.2 和 2.1。11], 我们有

$$\Delta_{A\bowtie A^*}(x) = \Delta_A(x), \ \delta_{A\bowtie A^*}(x) = \delta_A(x), \ \forall x \in A.$$

因此，$(A \bowtie A^*, \cdot_{A\bowtie A^*}, [-,-]_{A\bowtie A^*}, \Delta_{A\bowtie A^*}, \delta_{A\bowtie A^*}, P+Q^*, Q+P^*)$ 包含 $(A, \cdot_A, [-,-]_A, \Delta_A, \delta_A, P, Q)$ 作为相对泊松子双代数。类似地，$(A \bowtie A^*, \cdot_{A\bowtie A^*}, [-,-]_{A\bowtie A^*}, \Delta_{A\bowtie A^*}, \delta_{A\bowtie A^*}, P+Q^*, Q+P^*)$ 包含 $(A^*, \cdot_{A^*}, [-,-]_{A^*}, \Delta_{A^*}, \delta_{A^*}, Q^*, P^*)$ 作为相对泊松子双代数。□

定理 4.3 的一个直接推论如下。

推论 4.5. 设 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 是一个由 Q 对偶表示的相对泊松代数。设 $r \in A \otimes A$ and $\Delta, \delta : A \to A \otimes A$ 是分别由公式 (68) 和 (69) 定义的线性映射。若 r 是反对称的，即 $r + \tau(r) = 0$，并且满足交换结合代数 $(A, \cdot)$ 中的 AYBE、李代数 $(A, [-,-])$ 中的 CYBE 以及以下方程：

$$(P \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes Q)r = 0, \tag{84}$$

$$(Q \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes P)r = 0, \tag{85}$$

则 $(A, \cdot, [-,-], \Delta, \delta, P, Q)$ 是一个余边界相对泊松双代数。

这促使我们给出以下概念。

定义 4.6. 设 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 是一个相对泊松代数， $Q : A \to A$ 是一个线性映射，且 $r \in A \otimes A$。若 r 满足交换结合代数 $(A, \cdot)$ 中的 AYBE、李代数 $(A, [-,-])$ 中的 CYBE 以及公式 (84)-(85)，则称 r 是与 Q (Q-RPYBE) 相关的相对泊松杨-巴克斯特方程 (RPYBE) 在 (A, P) 中的一个解。

注 4.7。 若 $r \in A \otimes A$ 是反对称的，则式（84）成立当且仅当式（85）成立。另一方面，泊松代数中的泊松杨-巴克斯特方程（PYBE）的概念由 [37]给出，其解恰好是 AYBE 和 CYBE 的解。因此从形式上看， Q-RPYBE（定义在相对泊松代数中）恰好是满足附加式（84）-（85）的 PYBE（定义在泊松代数中）。

定理 4.8。设 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 是一个相对泊松代数，且 $r \in A \otimes A$ 是反对称的。设 $Q\colon A \to A$ 是一个线性映射。那么， r 是 (A, P) 中 Q-RPYBE 的一个解，当且仅当 r 满足

$$[r(a^*), r(b^*)] = r(\mathrm{ad}^*(r(a^*))b^* - \mathrm{ad}^*(r(b^*))a^*), \tag{86}$$
$$r(a^*) \cdot r(b^*) = -r(\mathcal{L}^*(r(a^*))b^* + \mathcal{L}^*(r(b^*))a^*), \tag{87}$$
$$Pr = rQ^*, \tag{88}$$

对所有的 a^*、$b^* \in A^*$。

证明。令 $r = \sum a_i \otimes b_i$。由 [28]， r 是李代数$i(A, [-,-])$ 中 CYBE 的一个反对称解，当且仅当等式（86）成立。由 [7]， r 是交换结合代数（A， $\cdot$）中 AYBE 的一个反对称解，当且仅当等式（87）成立。此外，对所有 $a^* \in A^*$，由等式（83），我们有

$$r(Q^*(a^*)) = \sum_i \langle Q^*(a^*), a_i\rangle b_i = \sum_i \langle a^*, Q(a_i)\rangle b_i, \quad P(r(a^*)) = \sum_i \langle a^*, a_i\rangle P(b_i).$$

因此，等式（84）成立，当且仅当等式（88）成立。这就完成了证明。 □

4.2. 相对泊松代数的 $\mathcal{O}$-算子。

定义 4.9。设（A， P）为一个相对泊松代数，（μ， ρ， V）为（A， P）上的一个相容结构，且 $\alpha\colon V \to V$ 为一个线性映射。若以下等式成立，则称线性映射 $T\colon V \to A$ 为与（μ， ρ， V）及 α 相关联的（A， P）的一个弱 $\mathcal{O}$-算子：

$$T(u) \cdot T(v) = T(\mu(T(u))v + \mu(T(v))u), \tag{89}$$
$$[T(u), T(v)] = T(\rho(T(u))v - \rho(T(v))u), \tag{90}$$
$$PT = T\alpha, \tag{91}$$

对所有的 $u, v \in V$。此外，若 (μ, ρ, α, V) 是 (A, P) 的一个表示，则称 T 为与 (μ, ρ, α, V) 相关联的 (A, P) 的一个 $\mathcal{O}$-算子。

注 4.10. 实际上，若 T 满足公式 (89)，则称 T 为与 (μ, V) ([7]) 相关联的交换结合代数 $(A, \cdot)$ 的一个 $\mathcal{O}$-算子；若 T 满足公式 (90)，则称 T 为与 (ρ, V) ([28]) 相关联的李代数 $(A, [-,-])$ 的一个 $\mathcal{O}$-算子。

因此，定理4.8 可改写为以 $\mathcal{O}$-算子表述如下。

推论 4.11. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数，且 $r \in A \otimes A$ 反对称。设 $Q\colon A \to A$ 是一个线性映射。那么， r 是 (A, P) 中 Q-RPYBE 的一个解，当且仅当 r 是与 $(-\mathcal{L}^*, \mathrm{ad}^*, A^*)$ 和 Q^* 相关联的 (A, P) 的一个弱 $\mathcal{O}$- 算子。此外，若 (A, P) 由 Q 对偶表示，则 r 是 (A, P) 中 Q-RPYBE 的一个解，当且仅当 r 是与表示 $(-\mathcal{L}^*, \mathrm{ad}^*, Q^*, A^*)$ 相关联的 (A, P) 的一个 $\mathcal{O}$-算子。

我们考虑对偶表示的半直积相对泊松代数。

定理 4.12. 设 (A, P) 是一个相对泊松代数，(μ, ρ, V) 是 (A, P) 上的一个相容结构。设 $Q\colon A \to A$ and $\alpha, \beta\colon V \to V$ 是线性映射。则以下条件等价。

(1) 存在一个由线性算子 $Q + \beta$ 对偶表示的相对泊松代数 $(A \ltimes_{\mu,\rho} V, P + \alpha)$；(2) 存在一个由线性算子 $Q + \alpha^*$ 对偶表示的相对泊松代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, P + \beta^*)$；(3) 满足以下条件：(a) (μ, ρ, α, V) 是 (A, P) 的一个表示；(b) β 在 (μ, ρ, V) 上对偶表示 (A, P)；

(c) Q 对偶表示 (A,P)；(d)

对任意 $x\in A, v\in V$，有

$$\mu(Q(x))v-\mu(x)\alpha(v)-\beta(\mu(x)v)=0, \tag{92}$$

$$\rho(Q(x))v-\rho(x)\alpha(v)-\beta(\rho(x)v)=0. \tag{93}$$

证明。(1) $\Longleftrightarrow$ (3)。根据命题 2.2，$(A\ltimes_{\mu,\rho}V, P+\alpha)$ 是相对泊松代数，当且仅当 (μ,ρ,α,V) 是相对泊松代数 (A,P) 的表示。令 $x,y,z\in A, u,v,w\in V$。根据推论 2.10，$Q+\beta$ 对偶表示 $(A\ltimes_{\mu,\rho}V, P+\alpha)$，当且仅当满足以下方程：

$$\begin{aligned}
0 &= (x+u)\cdot(Q+\beta)(y+v)-(P+\alpha)(x+u)\cdot(y+v)-(Q+\beta)((x+u)\cdot(y+v))\\
&= x\cdot Q(y)-P(x)\cdot y-Q(x\cdot y)+\mu(x)\beta(v)-\mu(P(x))v-\beta(\mu(x))v\\
&\quad +\mu(Q(y))u-\mu(y)\alpha(u)-\beta(\mu(y)u);\\
0 &= [x+u,(Q+\beta)(y+v)]-[(P+\alpha)(x+u),y+v]-(Q+\beta)([x+u,y+v])\\
&= [x,Q(y)]-[P(x),y]-Q([x,y])+\rho(x)\beta(v)-\rho(P(x))v-\beta(\rho(x))v\\
&\quad +\rho(Q(y))u-\rho(y)\alpha(u)-\beta(\rho(y)u);\\
0 &= (P+\alpha+Q+\beta)((x+u)\cdot(y+v)\cdot(z+w))\\
&= (P+Q)(x\cdot y\cdot z)+(\alpha+\beta)(\mu(x\cdot y)w+\mu(x\cdot z)v+\mu(y\cdot z)u).
\end{aligned}$$

若上述方程成立，则

(i) 方程 (19), (20) 和 (27)（其中 y 替换为 z）在令 $y=u=0$时成立；(ii) 方程 (22), (23) 和 (29) 在令 $u=v=w=0$时成立；(iii) 方程 (92) 和 (93)（其中 x 替换为 y，而 v 替换为 u）在令 $x=v=0$ 时成立。

反过来，显然，若方程（19）、（20）、（27）、（22）、（23）、（29）、（92）和（93）成立，则上述方程成立。因此，条件（1）成立当且仅当条件（3）成立。

（2）$\Longleftrightarrow$（3）。由条件（1）与条件（3）之间的上述等价关系可知，条件（2）成立当且仅当条件（3）中的（a）-（c）以及以下两个方程成立（对所有 $x\in A$、$u^*\in V^*$）：

$$-\mu^*(Q(x))u^*+\mu^*(x)\beta^*(u^*)+\alpha^*(\mu^*(x)u^*)=0, \tag{94}$$

$$\rho^*(Q(x))u^*-\rho^*(x)\beta^*(u^*)-\alpha^*(\rho^*(x)u^*)=0. \tag{95}$$

对于所有 $x\in A$、$u^*\in V^*$、$v\in V$，有

$$\langle -\mu^*(Q(x))u^*+\mu^*(x)\beta^*(u^*)+\alpha^*(\mu^*(x)u^*), v\rangle=\langle u^*, -\mu(Q(x))v+\mu(x)\alpha(v)+\beta(\mu(x)v)\rangle.$$

因此，方程（94）成立当且仅当方程（92）成立。类似地，方程（95）成立当且仅当方程成立。(93) 因此，条件（2）成立当且仅当条件（3）成立。□

接下来我们证明，$\mathcal{O}$-算子给出了半直积相对泊松代数上 RPYBE 的反对称解，从而导出相对泊松双代数。

定理 4.13. 设 (A,P) 是一个相对泊松代数，(μ,ρ,V) 是 (A,P) 上的一个相容结构。设 β 在 (μ,ρ,V) 上对偶表示 (A,P)，因而设 $(-\mu^*,\rho^*,\beta^*,V^*)$ 是命题 2.5 中定义的 (A,P) 的表示。设 $Q\colon A\to A$ 和 $\alpha\colon V\to V$ 是线性映射。设 $T\colon V\to A$ 是一个线性映射，并将其视为 $(A\ltimes_{-\mu^*,\rho^*}V^*)\otimes(A\ltimes_{-\mu^*,\rho^*}V^*)$ 中的一个元素。

(1) $r=T-\tau(T)$ 是相对泊松代数 $(A\ltimes_{-\mu^*,\rho^*}V^*, P+\beta^*)$ 中 $(Q+\alpha^*)$-相对泊松杨-巴克斯特方程的反对称解，当且仅当 T是与 (μ,ρ,V) 和 α相关联的 (A,P) 的弱 $\mathcal{O}$-算子，并且满足 $T\beta=QT$。

(2) 假设 (A,P) 由 Q 对偶表示，且 (μ,ρ,α,V) 是 (A,P) 的一个表示。若 T 是与 (μ,ρ,α,V) 相关联且满足 $T\beta = QT$ 的 (A,P) 的一个 $\mathcal{O}$-算子，则 $r = T - \tau(T)$ 是相对泊松代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, P+\beta^*)$ 中 $(Q+\alpha^*)$-相对泊松杨-巴克斯特方程的反对称解。此外，若公式 (92) 和 (93) 成立，则 $Q+\alpha^*$ 对偶表示相对泊松代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, P+\beta^*)$。此时，存在一个相对泊松双代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, \cdot, [-,-], \Delta, \delta, P+\beta^*, Q+\alpha^*)$，其中线性映射 Δ 和 δ 分别由公式 (68) 和 (69) 定义，并取 $r = T - \tau(T)$。

证明。 (1). 由 [6]， $r = T - \tau(T)$ 在李代数 $A \ltimes_{\rho^*} V^*$ 中满足 CYBE，当且仅当等式 (89) 成立；由 [7]， r 在交换结合代数 $A \ltimes_{-\mu^*} V^*$ 中满足 AYBE，当且仅当等式 (90) 成立。

设 V 的一组基为 $\{v_1,\cdots,v_m\}$，其对偶基为 $\{v_1^*,\cdots,v_m^*\}$。则 $T = \sum_{i=1}^m T(v_i)\otimes v_i^* \in (A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*) \otimes (A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*)$。因此

$$r = T - \tau(T) = \sum_{i=1}^m T(v_i)\otimes v_i^* - v_i^*\otimes T(v_i).$$

注意到

$$((P+\beta^*)\otimes \mathrm{id})r = \sum_{i=1}^m (P(T(v_i))\otimes v_i^* - \beta^*(v_i^*)\otimes T(v_i)),$$

$$(\mathrm{id}\otimes(Q+\alpha^*))r = \sum_{i=1}^m (T(v_i)\otimes \alpha^*(v_i^*) - v_i^*\otimes Q(T(v_i))).$$

此外

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \beta^*(v_i^*)\otimes T(v_i) &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \langle\beta^*(v_i^*),v_j\rangle v_j^*\otimes T(v_i) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v_j^*\otimes\langle v_i^*,\beta(v_j)\rangle T(v_i)\\ &= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m v_i^*\otimes T(\langle\beta(v_i),v_j^*\rangle v_j) = \sum_{i=1}^m v_i^*\otimes T(\beta(v_i)),\end{aligned}$$

m m并且类似地，$\sum T(v_i)\otimes\alpha^*(v_i^*) = \sum T(\alpha(v_i))\otimes v_i^*$。因此 $((P+\beta^*)\otimes \mathrm{id})r = (\mathrm{id}\otimes(Q+\alpha^*))r$ $i=1$ $i=1$当且仅当 $PT = T\alpha$ 和 $T\beta = QT$。故结论成立。

（2）由第（1）项和定理 4.12可得。 □

因此，从与表示（μ， ρ， α， V）相关联的相对泊松代数（A， P）的一个 $\mathcal{O}$-算子 T出发，在适当的线性映射 β和 Q 下，可以得到相对泊松代数（$A \ltimes_{-\mu^*}$， $_{\rho^*} V^*$， $P+\beta^*$）中（$Q+\alpha^*$）-RPYBE 的一个反对称解，进而在后一个代数上得到一个相对泊松双代数。 Q 和 β有一些自然的选择。例如，假设当 α和 P 可逆时，对于 $0 \neq \theta \in K$ 有 $\beta = \pm\alpha$， $Q = \pm P$或 $\beta = \theta\alpha^{-1}$， $Q = \theta P^{-1}$。注意，在这些情况下， $T\beta = QT$ 自动成立，并且根据定理 4.13，可以得到其他相应的约束条件。特别地，当 $\beta = -\alpha$ 和$Q = -P$时，不存在任何约束条件。

推论 4.14. 设 (μ,ρ,α,V) 是相对泊松代数 (A,P) 的一个表示，且 $T{:}V \to A$是与 (μ,ρ,α,V) 相关联的 ($\mathcal{O}$)-算子。则 $r = T-\tau(T)$ 是相对泊松代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, P-\alpha^*)$ 中 $(-P+\alpha^*)$-相对泊松杨-巴克斯特方程的一个反对称解。此外，相对泊松代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, P-\alpha^*)$ 由 $-P+\alpha^*$ 对偶表示，并且存在一个相对泊松双代数 $(A \ltimes_{-\mu^*,\rho^*} V^*, \cdot, [-,-], \Delta, \delta, P-\alpha^*, -P+\alpha^*)$，其中线性映射 Δ 和 δ 分别由 $r = T - \tau(T)$ 通过公式 (68) 和 (69) 定义。

证明。 根据推论 2.9，$(-\mu^*, \rho^*, -\alpha^*, V^*)$ 是 (A, P) 的一个表示，且 $-P$对偶表示 (A, P)。此外，当 92 和 (93) 在 $\beta = -\alpha, Q = -P$ 时成立。因此，当 $\beta = -\alpha, Q = -P$ 时，结论由定理 4.13 得出。□

4.3. 相对前泊松代数。

回顾 Zinbiel 代数（[32]）和前李代数（[11]）的概念。

定义 4.15. Zinbiel 代数是一个向量空间 A，其上配备双线性运算$\star$：$A \otimes A \to A$，满足

$$x \star (y \star z) = (y \star x) \star z + (x \star y) \star z, \quad \forall x, y, z \in A. \tag{96}$$

设 $(A, \star)$ 是一个 Zinbiel 代数。在 A 上定义一个新的双线性运算 $\cdot$，如下：

$$x \cdot y = x \star y + y \star x, \quad \forall x, y \in A. \tag{97}$$

那么 $(A, \cdot)$ 是一个交换结合代数。此外，$(\mathcal{L}_\star, A)$ 是交换结合代数 $(A, \cdot)$ 的一个表示，其中 $\mathcal{L}_\star(x)$ $y = x \star y$，对所有 $x, y \in A.$ 均成立

定义 4.16. 前李代数是一个向量空间 A，配备双线性运算
$\circ$：$A \otimes A \to A$，满足

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z), \quad \forall x, y, z \in A. \tag{98}$$

设 $(A, \circ)$ 是一个前李代数。定义 A 上的新双线性运算 $[-, -]$，如下：

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \quad \forall x, y \in A. \tag{99}$$

则 $(A, [-, -])$ 是一个李代数。此外，$(\mathcal{L}_\circ, A)$ 是李代数 $(A, [-, -])$ 的一个表示，其中 $\mathcal{L}_\circ(x)y = x \circ y$ 对所有 $x, y \in A.$ 均成立

定义 4.17. 相对前泊松代数是一个四元组 $(A, \star, \circ, P)$，其中 $(A, \star)$ 是一个 Zinbiel 代数，$(A, \circ)$ 是一个前李代数，P：$A \to A$ 是 $(A, \star)$ 和 $(A, \circ)$ 两者的导子，也就是说，对所有 $x, y \in A$,

$$P(x \star y) = P(x) \star y + x \star P(y), \tag{100}$$
$$P(x \circ y) = P(x) \circ y + x \circ P(y), \tag{101}$$

并且满足以下相容条件：

$$(x \star y + y \star x) \circ z - x \star (y \circ z) - y \star (x \circ z) + (x \star y + y \star x) \star P(z) = 0, \tag{102}$$
$$y \circ (x \star z) - x \star (y \circ z) + (x \circ y - y \circ x) \star z - (x \star P(y) + P(y) \star x) \star z = 0, \tag{103}$$

对所有 x、y、$z \in A$。

注记 4.18. 回顾一下，前泊松代数 ([3]) 是一个三元组 $(A$、$\star$、$\circ)$，其中 $(A$、$\star)$ 是 Zinbiel 代数，$(A$、$\circ)$ 是满足以下条件的前李代数：

$$(x \circ y - y \circ x) \star z = x \star (y \circ z) - y \circ (x \star z),$$
$$(x \star y + y \star x) \circ z = x \star (y \circ z) + y \star (x \circ z),$$

对所有 x、y、$z \in A$。因此，任意前泊松代数都是导子为 $P = 0$ 的相对前泊松代数。

下面给出一种由带有导子的 Zinbiel 代数构造相对前泊松代数的方法，这是例1.2的一个类比。

命题 4.19. 设 $(A$、$\star)$ 是一个 Zinbiel 代数，且 P 是 $(A$、$\star)$ 的一个导子。定义新的双线性运算 $\circ$：$A \otimes A \to A$，如下：

$$x \circ y = x \star P(y) - P(x) \star y, \quad \forall x, y \in A. \tag{104}$$

那么（A，$\circ$）是一个前李代数，而（A，$\star$，$\circ$，P）是一个相对前泊松代数 $a.$

证明。设 x、y、$z \in A$。那么我们有

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) &= (x\star P(y))\star P(z) - (P(x)\star y)\star P(z) - (x\star P^2(y))\star z + (P^2(x)\star y)\star z\\ &\quad -x\star(y\star P^2(z)) + x\star(P^2(y)\star z) + P(x)\star(y\star P(z)) - P(x)\star(P(y)\star z),\\ (y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z) &= (y\star P(x))\star P(z) - (P(y)\star x)\star P(z) - (y\star P^2(x))\star z + (P^2(y)\star x)\star z\\ &\quad -y\star(x\star P^2(z)) + y\star(P^2(x)\star z) + P(y)\star(x\star P(z)) - P(y)\star(P(x)\star z).\end{aligned}$$

注意，根据公式（96），我们有

$$\begin{aligned}&-x\star(y\star P^2(z)) = -y\star(x\star P^2(z)),\\ &-P(x)\star(P(y)\star z) = -P(y)\star(P(x)\star z),\\ &-(P(x)\star y)\star P(z) + P(x)\star(y\star P(z)) = (y\star P(x))\star P(z),\\ &(x\star P(y))\star P(z) = -(P(y)\star x)\star P(z) + P(y)\star(x\star P(z)),\\ &-(x\star P^2(y))\star z + x\star(P^2(y)\star z) = (P^2(y)\star x)\star z,\\ &(P^2(x)\star y)\star z = -(y\star P^2(x))\star z + y\star(P^2(x)\star z).\end{aligned}$$

因此，公式（98）成立，即（A，$\circ$）是一个前李代数。类似地，我们证明了 P 是（A，$\circ$）的一个导子，并且公式（102）和（103）成立。因此，（A，$\star$，$\circ$，P）是一个相对前泊松代数。□

例4.20. 设（A，$\star$）是一个3维Zinbiel 代数，其基为 $\{e_1, e_2, e_3\}$，其非零乘积（[24]）如下所示。

$$e_1\star e_1 = e_3,\ e_1\star e_2 = e_3.$$

定义线性映射 P： $A\to A$ 如下:

$$P(e_1) = e_1 + e_2,\ P(e_2) = 2e_2,\ P(e_3) = 3e_3.$$

则 P是（A，$\star$）的一个导子。因此，存在一个相对前泊松代数（A，$\star$，$\circ$，P），其前李代数（A，$\circ$）的非零乘积如下:

$$e_1\circ e_1 = e_3,\ e_1\circ e_2 = e_3.$$

命题4.21. 设 $(A,\star,\circ,P)$ 是一个相对前泊松代数。则 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 是一个相对泊松代数，其中 $\cdot$，$[-,-]$ 分别由公式（97）和（99）定义。此外，$(\mathcal{L}_\star,\mathcal{L}_\circ,P,A)$ 是相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 的一个表示，因此，恒等映射 id 是 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 的一个 $\mathcal{O}$-算子，该算子与 $(\mathcal{L}_\star,\mathcal{L}_\circ,P,A)$ 相关联。

证明。设 x，y，$z\in A$。根据公式（100）和（101），P是（A，$\cdot$）和（A，$[-,-]$）的导子。此外，根据公式（96）、（102）和（103），我们有

$$\begin{aligned}&[z,x\cdot y] - x\cdot[z,y] - y\cdot[z,x] - x\cdot y\cdot P(z)\\ &= (z\circ(x\star y) + z\circ(y\star x) - (x\star y)\circ z - (y\star x)\circ z) - (x\star(z\circ y) - x\star(y\circ z)\\ &\quad +(z\circ y)\star x - (y\circ z)\star x) - (y\star(z\circ x) - y\star(x\circ z) + (z\circ x)\star y - (x\circ z)\star y)\\ &\quad -((x\star y + y\star x)\star P(z) + P(z)\star(x\star y + y\star x))\\ &= (x\star P(z) + P(z)\star x)\star y + (y\star P(z) + P(z)\star y)\star x - P(z)\star(x\star y + y\star x) = 0.\end{aligned}$$

因此（A、$\cdot$ $[-,-]$，P）是一个相对泊松代数。此外，由公式（100）-（103），我们有 e

$$\begin{aligned}&P(\mathcal{L}_\star(x)y) = \mathcal{L}_\star(P(x))y + \mathcal{L}_\star(x)P(y),\\ &P(\mathcal{L}_\circ(x)y) = \mathcal{L}_\circ(P(x))y + \mathcal{L}_\circ(x)P(y),\\ &\mathcal{L}_\circ(x\cdot y)z - \mathcal{L}_\star(x)\mathcal{L}_\circ(y)z - \mathcal{L}_\star(y)\mathcal{L}_\circ(x)z + \mathcal{L}_\star(x\cdot y)P(z) = 0,\\ &\mathcal{L}_\circ(y)\mathcal{L}_\star(x)z - \mathcal{L}_\star(x)\mathcal{L}_\circ(y)z + \mathcal{L}_\star([x,y])z - \mathcal{L}_\star(x\cdot P(y))z = 0.\end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{L}_\star,\mathcal{L}_\circ,P,A)$ 是相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 的一个表示。其余结论显而易见。□

定义 4.22. 设 $(A, \star, \circ, P)$ 是一个相对前泊松代数。定义两个双线性运算 $\cdot, [-,-]$：$A \otimes A \to A$ 分别由等式（97）和（99）定义。称（$A, \cdot, [-,-], P$）为（$A, \star, \circ, P$）的伴随相对泊松代数，并称（$A, \star, \circ, P$）为相对泊松代数（$A, \cdot, [-,-], P$）上的相容相对前泊松代数结构。

由推论 4.14 和命题 4.21，可由相对前泊松代数构造相对泊松杨-巴克斯特方程的反对称解，进而构造相对泊松双代数。

命题 4.23。设（$A, \star, \circ, P$）是一个相对前泊松代数，（$A, \cdot, [-,-], P$）是其伴随相对泊松代数。设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组基，$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是其对偶基。则

$$r = \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i) \tag{105}$$

是相对泊松代数（$A \ltimes_{-\mathcal{L}_\star^*, \mathcal{L}_\circ^* A^*}, P - P^*$）中（$-P + P^*$）-相对泊松杨-巴克斯特方程的一个反对称解。此外，相对泊松代数（$A \ltimes_{-\mathcal{L}_\star^*, \mathcal{L}_\circ^* A^*}, P - P^*$）由（$-P + P^*$）对偶表示，因此存在一个相对泊松双代数（$A \ltimes_{-\mathcal{L}_\star^*, \mathcal{L}_\circ^* A^*}, \cdot, [-,-], \Delta, \delta, P - P^*, -P + P^*$），其中线性映射 Δ 和 δ 分别通过公式 (68) 和 (69)由 r定义。

5. Relative Poisson bialgebras and Frobenius Jacobi algebras

我们利用相对泊松双代数构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。特别地，可以由相对前泊松代数构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。我们给出一个例子，以明确说明这一构造。

根据注 2.19，对于相对泊松代数的双代数理论，基于匹配对的方法不再适用于雅可比代数。也就是说，对于一个相对泊松双代数 $(A, \cdot_A, [-,-]_A, \Delta, \delta, P, Q)$，不可能使$A \oplus A^*$ 上的交换结合代数结构具有单位元，同时使 $(A, \cdot_A)$ 和 $(A^*, \cdot_{A^*})$ 都具有单位元，其中 $\cdot_{A^*}$ 由 Δ的对偶给出。然而，有可能使 $A \oplus A^*$上的交换结合代数结构具有单位元，并使 $(A, \cdot_A)$ 和 $(A^*, \cdot_{A^*})$ 中的一对具有单位元。注意，在这种情况下，诱导的相对泊松代数 $A \bowtie A^*$ 是一个雅可比代数，因此，配上由方程 (51) 定义的双线性型 $\mathcal{B}_d$ 后，它就是一个弗罗贝尼乌斯雅可比代数。具体而言，

命题 5.1. 设 $(A, \cdot_A)$ 是以 1_A 为单位元的含幺交换结合代数，且 $\Delta : A \to A \otimes A$ 是一个线性映射，使得 $(A, \cdot_A, \Delta)$ 是交换且余交换无穷小双代数。若 $A \oplus A^*$ 上诱导的交换结合代数结构是含幺的，则其单位元为 1_A。此外，1_A 是 $A \oplus A^*$ 上交换结合代数结构的单位元，当且仅当 $\Delta(1_A) = 0$。特别地，若 $(A, \cdot, \Delta)$ 是余边界的，则 $\Delta(1_A) = 0$ 自动成立。

证明。根据注 2.19，若 $A \oplus A^*$ 上诱导的交换结合代数结构是含幺的，则其单位元为 1_A。注意，$A \oplus A^*$ 上的交换结合代数结构由下式给出

$$(x + a^*) \cdot (y + b^*) = x \cdot_A y - \mathcal{L}_{A^*}^*(a^*)y - \mathcal{L}_{A^*}^*(b^*)x + a^* \cdot_{A^*} b^* - \mathcal{L}_A^*(x)b^* - \mathcal{L}_A^*(y)a^*, \quad \forall x, y \in A, a^*, b^* \in A^*, \tag{106}$$

其中 $\cdot_{A^*}$ 由 Δ的对偶给出。那么，当且仅当 1_A 是 $A \oplus A^*$ 上交换结合代数结构的单位元时，

$$\begin{aligned}
&1_A \cdot a^* = -\mathcal{L}_A^*(1_A)a^* - \mathcal{L}_{A^*}^*(a^*)1_A = a^*, \quad \forall a^* \in A^*, \\
&\iff -\mathcal{L}_{A^*}^*(a^*)1_A = 0, \quad \forall a^* \in A^*, \\
&\iff \langle \Delta(1_A), a^* \otimes b^* \rangle = 0, \quad \forall a^*, b^* \in A^*, \\
&\iff \Delta(1_A) = 0.
\end{aligned}$$

特别地，若（A，$\cdot$，Δ）是余边界的，也就是说，存在$r=\sum a_i\otimes b_i\in A\otimes A$使得$_i$式（68）成立，则有

$$\Delta(1_A)=(\mathrm{id}\otimes\mathcal{L}(1_A)-\mathcal{L}(1_A)\otimes\mathrm{id})r=\sum_i(a_i\otimes b_i-a_i\otimes b_i)=0.$$

因此结论成立。 □

设 $(A,\cdot,[-,-])$ 是一个雅可比代数，而 $(A,\cdot,[-,-],\mathrm{ad}(1_A))$ 是相应的含幺相对泊松代数。根据推论 2.10，Q 对偶表示 $(A,\cdot,[-,-],\mathrm{ad}(1_A))$ 当且仅当 $Q=-\mathrm{ad}(1_A$。于是，在雅可比代数层面上有如下结论。

推论5.2. 设 $(A,\cdot,[-,-])$ 是一个雅可比代数，而 $(A,\cdot,[-,-],\mathrm{ad}(1_A))$ 是相应的含幺相对泊松代数。假设 $(A,\cdot,[-,-],\Delta,\delta,\mathrm{ad}(1_A)\ -\mathrm{ad}(1_A))$ 是一个相对泊松双代数。那么，诱导的相对泊松代数 $(A\bowtie A^*,\mathrm{ad}(1_A)\ -(\mathrm{ad}(1_A))^*)$ 是含幺的，也就是说，它是一个雅可比代数，当且仅当 $\Delta(1_A)=0$。在这种情况下，取由方程 (51) 定义的双线性型 $\mathcal{B}_d$，它是一个弗罗贝尼乌斯雅可比代数。特别地，如果 $(A,\cdot,[-,-],\Delta,\delta,\mathrm{ad}(1_A),-\mathrm{ad}(1_A))$ 是余边界的，那么 $\Delta(1_A)=0$ 自动成立。

结合推论 4.5 和 5.2，我们得到如下构造：由雅可比代数中的相对泊松杨-巴克斯特方程的反对称解构造弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

推论5.3. 设 $(A,\cdot,[-,-])$ 是一个雅可比代数，$(A,\cdot,[-,-],\mathrm{ad}(1_A))$ 是相应的含幺相对泊松代数。设 $r\in A\otimes A$ 和 $\Delta,\delta\colon A\to A\otimes A$ 是分别由公式 (68) 和 (69) 定义的线性映射。若 r 是相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],\mathrm{ad}(1_A))$ 中 Q-相对泊松杨-巴克斯特方程的反对称解，则 $(A,\cdot,[-,-],\Delta,\delta,\mathrm{ad}(1_A)\ -\mathrm{ad}(1_A))$ 是一个余边界相对泊松双代数，因此，由方程 (51) 定义的双线性型 $\mathcal{B}_d$ 所对应的诱导相对泊松代数 $(A\bowtie A^*,\mathrm{ad}(1_A)-(\mathrm{ad}(1_A))^*)$ 是一个弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

注 5.4。遗憾的是，命题 4.23 中给出的从相对前泊松代数构造相对泊松代数中 RPYBE 反对称解的方法，无法直接用于上述结论，因为相对前泊松代数（A，$\cdot$，$[-,-]$，P）的伴随相对泊松代数（A，$\star$，$\circ$，P）不是雅可比代数（因此，半直积相对泊松代数（$A\ltimes_{-\mathcal{L}_\star^*,\mathcal{L}_\circ^*}A^*$，$P-P^*$）也不是雅可比代数）。事实上，设（$A$，$\star$）是一个 Zinbiel 代数。假设由式（97）定义的交换结合代数（A，$\cdot$）具有单位元 1_A。那么我们有

$$x=x\star 1_A+1_A\star x,\quad\forall x\in A.$$

因此 $1_A=2(1_A\star 1_A)$。另一方面，我们有

$$x\star(1_A\star 1_A)=(x\cdot 1_A)\star 1_A=x\star 1_A,\quad\forall x\in A.$$

因此 $x\star 1_A=0$，从而对所有 $x\in A$，都有 $1_A\star x=x$。取 $x=1_A$，我们得到 $x=0$，这就产生了矛盾。

接下来我们给出一种方法，使得可以应用推论 5.3 所给出的构造 .

引理 5.5. 设 $(A,\cdot,[-,-],P)$ 是一个相对泊松代数。将向量空间 A 扩张为一个 $(\dim A+1)$ 维向量空间 $\tilde{A}=A\oplus\mathbb{K}e$。定义两个双线性运算 $\cdot_{\tilde{A}},[-,-]_{\tilde{A}}\colon\tilde{A}\otimes\tilde{A}\to\tilde{A}\otimes\tilde{A}\to\tilde{A}$ 以及一个线性映射 $\tilde{P}\colon\tilde{A}\to\tilde{A}$，如下：

$$x\cdot_{\tilde{A}}y=x\cdot y,\quad e\cdot_{\tilde{A}}x=x\cdot_{\tilde{A}}e=x,\quad e\cdot_{\tilde{A}}e=e,\tag{107}$$

$$[x,y]_{\tilde{A}}=[x,y],\quad[e,x]_{\tilde{A}}=-[x,e]_{\tilde{A}}=P(x),\quad[e,e]_{\tilde{A}}=0,\tag{108}$$

$$\tilde{P}(x)=P(x),\tilde{P}(e)=0,\tag{109}$$

对所有 $x, y \in A$ 均成立。于是 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}}, P)$ 是一个含幺相对泊松代数。因此，存在相应的雅可比代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}})$，称为相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 的扩张雅可比代数。

证明。显然，$(A, \cdot_{\tilde{A}})$ 是交换结合代数，且 e 是单位元。令 $x, y, z \in A$。于是有

$$[e,[x,y]_{\tilde{A}}]_{\tilde{A}} + [x,[y,e]_{\tilde{A}}]_{\tilde{A}} + [y,[e,x]_{\tilde{A}}]_{\tilde{A}} = P([x,y]) - [x,P(y)] + [y,P(x)] = 0.$$

因此，$(A, [-,-]_{\tilde{A}})$ 是李代数，且 $P = \mathsf{ad}_{\tilde{A}}(e)$。此外，有

$$\begin{aligned}
&[e,x]_{\tilde{A}} \cdot_{\tilde{A}} y + x \cdot_{\tilde{A}} [e,y]_{\tilde{A}} + x \cdot_{\tilde{A}} y \cdot_{\tilde{A}} \tilde{P}(e) = P(x)\cdot y + x \cdot P(y) = P(x\cdot y) = [e, x \cdot_{\tilde{A}} y]_{\tilde{A}},\\
&[z,x]_{\tilde{A}} \cdot_{\tilde{A}} e + x \cdot_{\tilde{A}} [z,e]_{\tilde{A}} + x \cdot_{\tilde{A}} e \cdot_{\tilde{A}} \tilde{P}(z) = [z,x] - x\cdot P(z) + x \cdot P(z) = [z, x \cdot_{\tilde{A}} e]_{\tilde{A}}.
\end{aligned}$$

因此，$(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}}, P)$ 是含幺相对泊松代数。 □

命题 5.6。设 (μ, ρ, α, V) 是相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 的一个表示。则 $(\tilde{\mu}, \tilde{\rho}, V)$ 是扩张雅可比代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}})$ 的一个表示，其中线性映射 $\tilde{\mu}, \tilde{\rho}: A \to$ 自同态代数(V) 定义为

$$\tilde{\mu}(x) = \mu(x), \quad \tilde{\mu}(e) = \mathrm{id}_V, \quad \tilde{\rho}(x) = \rho(x), \quad \tilde{\rho}(e) = \alpha, \quad \forall x \in A. \tag{110}$$

此外，$(\tilde{\mu}, \tilde{\rho}, \alpha, V)$ 是含幺相对泊松代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}}, P)$ 的一个表示。

证明。 结论的第一部分可以通过直接检验方程（31）和（32）来证明，也可以如下证明。由于 (μ, ρ, α, V) 是 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 的一个表示，$(A \ltimes_{\mu,\rho} V, P + \alpha)$ 是一个相对泊松代数。因此，存在一个扩张雅可比代数 $A \ltimes_{\mu,\rho} V$，其中 $A \oplus V$ 上的双线性运算 $\cdot_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}}$ 和 $[-,-]_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}}$ 与 $(A \ltimes_{\mu,\rho} V, P + \alpha)$ 中的运算相同，并且对于所有 $x \in A, u \in V$，

$$\begin{aligned}
&e \cdot_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}} x = x, \quad e \cdot_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}} u = u,\\
&[e,x]_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}} = (P+\alpha)x = P(x), \quad [e,u]_{\widetilde{A \ltimes_{\mu,\rho} V}} = (P+\alpha)u = \alpha(u).
\end{aligned}$$

另一方面，上述雅可比代数恰好是由雅可比代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}})$ 和线性映射 $\tilde{\mu}, \tilde{\rho}: A \to \mathrm{End}(V)$ 在直和 sum $A \oplus V = A \oplus V \oplus \mathbb{K}e$ 上定义的雅可比代数结构，其中这些映射由式（110）通过式（11）和（12）定义。因此，$(\tilde{\mu}, \tilde{\rho}, V)$ 是 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}})$ 的表示。结论的第二部分由命题 2.13 得出。□

推论 5.7。设 $T: V \to A$ 是与表示 (μ, ρ, α, V) 相关联的相对泊松代数 $(A, \cdot, [-,-], P)$ 的 $\mathcal{O}$-算子。则 $T: V \to A \subset A$ 也是与表示 $(\tilde{\mu}, \tilde{\rho}, \alpha, V)$ 相关联的含单位元相对泊松代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}}, P)$（即扩张雅可比代数 $(A, \cdot_{\tilde{A}}, [-,-]_{\tilde{A}})$）的 $\mathcal{O}$-算子。

证明。 由引理5.5 和命题 5.6可知。 □

因此，可以由相对前泊松代数构造如下的弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

定理 5.8。设（A，$\star$，$\circ$，P）为相对前泊松代数，且（A，$\cdot$，$[-,-]$，P）为其子相对泊松代数。设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组基，$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是其对偶基。则

$$r = \sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_i^* - e_i^* \otimes e_i) \tag{111}$$

是含幺相对泊松代数（$A \ltimes_{-\widetilde{\mathcal{L}_\star^*}, \widetilde{\mathcal{L}_\circ^*}} A^* := A \ltimes_{-\widetilde{\mathcal{L}_\star^*}, \widetilde{\mathcal{L}_\circ^*}} A^*, P - P^*$）中（$-P + P^*$）-相对泊松杨-巴克斯特方程的一个反对称解。此外，存在一个相对泊松双代数

$$(\tilde{A} \ltimes A^*, \cdot_{\tilde{A} \ltimes A^*}, [-,-]_{\tilde{A} \ltimes A^*}, \Delta, \delta, \tilde{P} - P^*, -\tilde{P} + P^*),$$

其中线性映射 $\Delta,\ \delta:\ A\ltimes A^*\to(A\ltimes A^*)\otimes(A\ltimes A^*)$ 分别由公式（68）和（69）通过 r 定义，使得诱导的相对泊松代数 $(A\ltimes A^*)\bowtie(A\ltimes A^*)^*$ 及由公式（$\mathcal{B}_d$ 定义的双线性型 51）构成一个弗罗贝尼乌斯雅可比代数。

证明。由命题4.21，恒等映射 id_A 是相对泊松代数 $(A,\cdot,[-,-],P)$（它与 $(\mathcal{L}_\star,\mathcal{L}_\circ,P,A)$ 相关联）的一个 $\mathcal{O}$-算子。由推论 5.7，id_A 也是含幺相对泊松代数 $(A,\cdot_{\tilde{A}},[-,-]_{\tilde{A}},P)$（它与表示 $(\mathcal{L}_\star,\mathcal{L}_\circ,P,A)$ 相关联）的一个 $\mathcal{O}$-算子。那么由推论 4.14，r 是相对泊松代数 $(A\ltimes A^*,P-P^*)$ 中 $(-P+P^*)$-相对泊松杨-巴克斯特方程的一个反对称解。此外，相对泊松代数 $(A\ltimes A^*,P-P^*)$ 由 $-P+P^*$ 对偶表示。其余部分由推论5.3得出。□

例5.9。设（A，$\star$，$\circ$，P）是例4.20给出的三维相对前泊松代数。则其伴随相对泊松代数（A，$\cdot$，$[-,-]$，P）由下列非零乘积给出：

$$e_1\cdot e_1=2e_3,\ \ e_1\cdot e_2=e_3,\ \ [e_1,e_2]=e_3.$$

根据引理 5.5，我们得到扩张雅可比代数（A，$\cdot_{\tilde{A}}$，$[-,-]_{\tilde{A}}$），其非零乘积由上述乘积及以下乘积给出：

$$\begin{aligned}&e\cdot_{\tilde{A}}e_1=e_1,\ \ e\cdot_{\tilde{A}}e_2=e_2,\ \ e\cdot_{\tilde{A}}e_3=e_3,\ \ e\cdot_{\tilde{A}}e=e,\\&[e,e_1]_{\tilde{A}}=P(e_1)=e_1+e_2,\ \ [e,e_2]_{\tilde{A}}=P(e_2)=2e_2,\ \ [e,e_3]_{\tilde{A}}=P(e_3)=3e_3.\end{aligned}$$

令 $\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ 为 A^* 的一组基，它与 $\{e_1,e_2,e_3\}$对偶。根据命题 5.6，存在一个雅可比代数（$A\ltimes A^*:=A\ltimes_{-\widetilde{\mathcal{L}_\star}^*,\widetilde{\mathcal{L}_\circ}^*}A^*$，$\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}$，$[-,-]_{\tilde{A}\ltimes A^*}$），其非零乘积由（$A$，$\cdot_{\tilde{A}}$，$[-,-]_{\tilde{A}}$）的上述非零乘积及以下乘积给出：

$$\begin{aligned}&e\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}e_1^*=-\widetilde{\mathcal{L}_\star}^*(e)e_1^*=e_1^*,\ \ e\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}e_2^*=-\widetilde{\mathcal{L}_\star}^*(e)e_2^*=e_2^*,\\&e\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}e_3^*=-\widetilde{\mathcal{L}_\star}^*(e)e_3^*=e_3^*,\ \ e_1\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}e_3^*=-\mathcal{L}_\star^*(e_1)e_3^*=e_1^*+e_2^*,\\&[e,e_1^*]_{\tilde{A}\ltimes A^*}=\widetilde{\mathcal{L}_\circ}^*(e)e_1^*=-P^*(e_1^*)=-e_1^*,\\&[e,e_2^*]_{\tilde{A}\ltimes A^*}=\widetilde{\mathcal{L}_\circ}^*(e)e_2^*=-P^*(e_2^*)=-e_1^*-2e_2^*,\\&[e,e_3^*]_{\tilde{A}\ltimes A^*}=\widetilde{\mathcal{L}_\circ}^*(e)e_3^*=-P^*(e_3^*)=-3e_3^*,\\&[e_1,e_3^*]_{\tilde{A}\ltimes A^*}=\mathcal{L}_\circ^*(e_1)e_3^*=-e_1^*-e_2^*.\end{aligned}$$

为简化记号，我们将 $A\ltimes A^*$ 替换为 J，将 $\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}$ 替换为 $\cdot$，将 $[-,-]_{\tilde{A}\ltimes A^*}$ 替换为 $[-,-]$，并将$\{e,e_1,e_2,e_3,e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ 替换为 $\{E,E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6\}$。于是（$J$，$\cdot$，$[-,-]$）是一个以 $\{E,E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6\}$为基的雅可比代数，其中 E 是单位元，其他非零乘积为

$$\begin{aligned}&E_1\cdot E_1=2E_3,\ \ E_1\cdot E_2=E_3,\ \ E_1\cdot E_6=E_4+E_5,\\&[E,E_1]=E_1+E_2,\ \ [E,E_2]=2E_2,\ \ [E,E_3]=3E_3,\ \ [E,E_4]=-E_4,\\&[E,E_5]=-E_4-2E_5,\ \ [E,E_6]=-3E_6,\ \ [E_1,E_2]=E_3,\ \ [E_1,E_6]=-E_4-E_5.\end{aligned}$$

显然 它同构于雅可比代数（$A\ltimes A^*$，$\cdot_{\tilde{A}\ltimes A^*}$，$[-,-]_{\tilde{A}\ltimes A^*}$）。根据式（111），我们设

$$r=E_1\otimes E_4-E_4\otimes E_1+E_2\otimes E_5-E_5\otimes E_2+E_3\otimes E_6-E_6\otimes E_3.$$

设 $\Delta,\ \delta:\ J\to J\otimes J$ 分别为由方程（68）和（69）给出的线性映射。于是

$$\begin{aligned}&\Delta(E_1)=\Delta(E_2)=-E_3\otimes E_4-E_4\otimes E_3,\\&\Delta(E_6)=-2E_4\otimes E_4-E_4\otimes E_5-E_5\otimes E_4,\\&\delta(E_1)=\delta(E_2)=-E_3\otimes E_4+E_4\otimes E_3,\\&\delta(E_6)=-E_4\otimes E_5+E_5\otimes E_4,\end{aligned}$$

$$\Delta(E)=\Delta(E_3)=\Delta(E_4)=\Delta(E_5)=\delta(E)=\delta(E_3)=\delta(E_4)=\delta(E_5)=0.$$

因此，$(J,\cdot,[-,-]_J,\Delta,\delta,\mathrm{ad}_J(E)\ -\mathrm{ad}_J(E))$ 是一个相对泊松双代数。此外，相对泊松代数 J^* 上的非零乘积为

$$E_3^*\cdot E_4^*=-E_1^*-E_2^*,\ \ E_4^*\cdot E_4^*=-2E_6^*,\ \ E_4^*\cdot E_5^*=-E_6^*,$$
$$[E_3^*,E_4^*]=-E_1^*-E_2^*,\ \ [E_4^*,E_5^*]=-E_6^*.$$

通过上述在 J 和 J^* 上的相对泊松代数结构，$J\bowtie J^*$ 是一个单位元为 E 的相对泊松代数，其中其他非零乘积相对于匹配对 $((J,\mathrm{ad}_J(E)),(J^*,-\mathrm{ad}_J(E)^*)\ -\mathcal{L}_J^*,-\mathcal{L}_{J^*}^*,\mathrm{ad}_J^*,\mathrm{ad}_{J^*}^*)$ 由公式（34）和（35）给出，具体如下。

$$\begin{aligned}
&E_1\cdot E_1^*=E^*,\ \ E_1\cdot E_3^*=-E_4+2E_1^*+E_2^*,\ \ E_1\cdot E_4^*=-E_3+E_6^*,\ \ E_1\cdot E_5^*=E_6^*,E_2\cdot E_2^*=E^*,\\
&E_2\cdot E_3^*=-E_4+E_1^*,\ \ E_2\cdot E_4^*=-E_3,\ \ E_3\cdot E_3^*=E^*,\ \ E_4\cdot E_4^*=E^*,E_5\cdot E_5^*=E^*,\\
&E_6\cdot E_4^*=-2E_4-E_5+E_1^*,\ \ E_6\cdot E_5^*=-E_4+E_1^*,\ \ E_6\cdot E_6^*=E^*,[E,E_1^*]=-E_1^*,\\
&[E,E_2^*]=-E_1^*-2E_2^*,\ \ [E,E_3^*]=-3E_3^*,\ \ [E,E_4^*]=E_4^*+E_5^*,\ \ [E,E_5^*]=2E_5^*,[E,E_6^*]=3E_6^*,\\
&[E_1,E_1^*]=E^*,\ \ [E_1,E_2^*]=E^*,\ \ [E_1,E_3^*]=-E_4-E_2^*,\ \ [E_1,E_4^*]=E_3+E_6^*,[E_1,E_5^*]=E_6^*,\\
&[E_2,E_2^*]=2E^*,\ \ [E_2,E_3^*]=-E_4+E_1^*,\ \ [E_2,E_4^*]=E_3,\ \ [E_3,E_3^*]=3E^*,[E_4,E_4^*]=-E^*,\\
&[E_5,E_4^*]=-E^*,\ \ [E_5,E_5^*]=-2E^*,\ \ [E_6,E_4^*]=-E_5-E_1^*,\ \ [E_6,E_5^*]=E_4-E_1^*,[E_6,E_6^*]=-3E^*.
\end{aligned}$$

因此根据定理 5.8，$(J\bowtie J^*,\ \mathcal{B}_d)$ 是一个 14 维弗罗贝尼乌斯雅可比代数，其中 $\mathcal{B}_d$由式（51）给出。

致谢。本文ได้รับ国家自然科学基金（11931009、12271265）、中央高校基本科研业务费专项资金和南开至德基金会的资助。作者感谢审稿人提出的宝贵意见。

References

[1] A. Agore 和 G. Militaru，《雅可比代数与泊松代数》，*J. Noncommt. Geom.* 9 (2015) 1295-1342。[2] M. Aguiar，《无穷小霍普夫代数》，载于：《霍普夫代数理论新趋势》，拉法尔达，1999，*Contemp. Math.* 267 2000 1 29 载于：第 卷（美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛，），页码 - 。[3] M. Aguiar，《预泊松代数》，*Lett. Math. Phys.* 54 (2000) 263-277。[4] M. Aguiar，《李双代数的结合类比》，*J. Algebra* 244 (2001) 492-532。[5] M. Aguiar，《无穷小双代数、前李代数与树状代数》，载于：《霍普夫代数》，见 *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* 237, 2004, 1 33 卷。

马塞尔·德克尔出版社，纽约，页码 - 。[6] C. Bai，《经典杨-巴克斯特方程的统一代数方法》，*J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (2007) 11073-11082。[7] C. Bai，《弗罗贝尼乌斯代数、Connes 上循环及其对偶的双构造》，*J. Noncommut. Geom.* 4 (2010) 475-530。[8] C. Bai、R. Bai、L. Guo 和 Y. Wu，《转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数与 3-李代数》，arXiv:2005.01110。[9] K. Bhaskara 和 K. Viswanath，《泊松代数与泊松流形》，朗文科技出版社，哈洛（1988）。[10] R. Brauer 和 C. Nesbitt，《论代数的正则表示》，*Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 23 (1937) 236-240。[11] D. Burde，《左对称代数，或几何与物理中的前李代数》，*Cent. Eur. J. Math.* 4 (2006) 323-357。[12] N. Cantarini 和 V. Kac，《线性紧致单 Jordan 超代数与广义泊松超代数的分类》，*J. Algebra*，313 (2007) 100-124。[13] N. Cantarini 和 V. Kac，《线性紧致单刚性超代数的分类》，*Int. Math. Res. Not.*，2010 2010 3341 3393 ( ) - 。[14] V. Chari 和 A. Pressley，《量子群指南》，剑桥大学出版社，剑桥（1994）。[15] V. Dotsenko，《通过前李代数研究 F-流形的代数结构》，*Ann. Mat. Pura Appl.* 198 (2019) 517-527。

[16] V. Drinfeld, 《李群上的哈密顿结构、李双代数与经典杨–巴克斯特方程的几何意义》, *Sov. Math. Dokl.* 27 (1983) 68-71。[17] J. M. Figueroa-O'Farrrill 和 S. Stanciu, 《论对称自对偶李代数的结构》, *J. Math. Phys.* ( ) - 。 37 1996 4121 4134
[18] G. Frobenius, 《超复数理论》, ¨, *Sitzber. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 1903 (1903) 504-537; 《超复数理论》¨, 第二部分; *ibid* 1903 (1903) 634-645。[19] M. Iovanov, 《广义弗罗贝尼乌斯代数与霍普夫代数》, *Canad. J. Math.* 66 (2014) 205-240。[20] S. A. Joni 和 G.-C. Rota, 《组合学中的余代数与双代数》, *Studies in Appl. Math.* 61 (1979) 93-139。[21] I. L. Kantor, 《由泊松代数确定的约旦超代数与李超代数》, *Amer. Math. Soc. Transl.* 151 (1992) 55-80。[22] I. Kath 和 M. Olbrich, 《具有极大各向同性中心的度量李代数》, *Math. Z.* 246 (2004) 23-53。[23] I. Kaygorodov, 《约旦括号代数与广义泊松代数》, *Linear Multilinear Algebra* 65 (2006) 1142-1157。[24] I. Kaygorodov、M. A. Alvarez 和 T. Castillo de Mello, 《三维 Zinbiel 代数的中心扩张》, *Ricerche di Matematica* (2021) 1-27。[25] D. King 和 K. McCrimmon, 《约旦超代数的 Kantor 构造》, *Comm. Algebra.* 20 (1992) 109-126。[26] A. Kirillov, 《局部李代数》, *Russian Math. Surveys* 31 (1976) 55-75。[27] J. Kock, 《Frobenius代数与二维拓扑量子场论》, 《伦敦数学学会学生教材》第59卷, 剑桥大学出版社, 剑桥（2003）。[28] B. A. Kupershmidt, 《经典 r 矩阵的本质》, *J. Nonlinear Math. Phys.* 6 (1999) 448-488。[29] T. Lambre、G. Zhou 和 A. Zimmermann, 《具有半单 Nakayama 自同构的 Frobenius代数的霍赫希尔德上同调环是一个 Batalin–Vilkovisky 代数》, *J. Algebra* 446 (2016) 103-131。[30] A. Lichnerowicz, 《泊松流形及其相关李代数》, *J. Diff. Geom.* 12 (1977) 253-300。[31] A. Lichnerowicz, 《雅可比流形及其相关李代数》, *J. Math. Pures Appl.* 57 (1978) 453-488。[32] J.-L. Loday, 《Leibniz 上同调的杯积与对偶 Leibniz 代数》, 载于: *Math. Scand.* 第77卷, 路易·巴斯德大学, 斯特拉斯堡, 1995, 页码 189-196。[33] S. Majid, 《与杨–巴克斯特方程解相关的李群匹配对》, *Pac. J. Math.* 141 (1990) 311-332。[34] C. Martnez 和 E. Zelmanov, 《括号、超代数与谱隙》, *São Paulo J. Math. Sci.* 13 (2019) 112-132。[35] A. Medina 和 P. Revoy, 《李代数与不变内积》, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 18 (1985) 553-561。[36] F. Mimura 和 A. Ikushima, 《广义泊松代数的结构》, *Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur.* ( ) - 。 *Sci* 27 1980 1 10
[37] X. Ni 和 C. Bai, 《泊松双代数》, *J. Math. Phys.* 54 (2013) 023515。[38] G. C. Sherry, 《广义泊松代数与哈密顿动力学》, *Internat. J. Theoret. Phys.* 29 (1990) 1115-1126。[39] A. Weinstein, 《辛流形讲义》, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* 29, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛, 1979。[40] P. Xu, 《非交换泊松代数》, *Amer. J. Math.* 116 (1994), 101-125。

Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, China
Email address: 1120190007@mail.nankai.edu.cn

Chern Institute of Mathematics & LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, China*Email address*: baicm@nankai.edu.cn