arXiv:2303.02327v1 [math.FA] 4 Mar 2023

通过帕斯卡平均构造分数阶差分序列空间

Salila Dutta †, 和 Diptimayee Jena‡

†乌特卡尔大学数学系，瓦尼维哈尔，布巴内斯瓦尔，印度
电子邮件：saliladutta516@gmail.com

‡乌特卡尔大学数学系，瓦尼维哈尔，印度 电子邮件：
jena.deeptimayee@gmail.com

摘要： 本文的主要目的是在序列空间 ℓ_p 和 ℓ_∞ 上引入分数阶 Pascal 差分序列空间 τ。本文还探讨了这些空间的一些拓扑性质，以及其 Schauder基、 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$对偶空间。

关键词： 差分算子 Δ^τ; Schauder基、帕斯卡平均、对偶空间、序列空间。

2010年数学主题分类： 47A10;40A05;46A45.

---

1 引言、预备知识与定义

设 $\tau \in \mathbb{R} - (\mathbb{Z}^- \bigcup \{0\})$，其中 $\mathbb{R} =$ 为全体实数的集合， $\mathbb{Z}^- =$为负整数的集合。对于任意实数 τ，欧拉伽马函数$\Gamma(\tau)$ 定义为

$$\Gamma(\tau) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\tau-1}\, dt, \tag{1.1}$$

这是一个反常积分，并具有以下性质：

1. $\Gamma(n+1) = n!$，$n \in \mathbb{N}$，（ $\mathbb{N}$ 为自然数集合）。
2. $\Gamma(\tau+1) = \tau\Gamma(\tau)$，对每个实数 $\tau \notin \{0, -1, -2, -3, ...\}$均成立。

根据序列空间的已有知识可知，所有实数或复数值序列构成的空间记为 ω。ω 的任意子空间都称为序列空间。空间 c_0、c 和 l_∞ 分别由零序列、收敛序列和有界序列构成。此外， ℓ_p 表示绝对p-可和级数空间，其中 $1 \leq p < \infty$ 配备范数 $\| x \|_{\ell_p} = (\sum_k \|x_k\|^p)^{1/p}$，它是一个 BK-空间。

设 M 和 N 是两个序列空间， $A = (a_{nk})$ 是一个无限矩阵

其元素为实数或复数。若对每个 n， $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ 收敛，则记为 $Ax = \{A_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in N$。若 $x = (x_k) \in M$ 意味着 $Ax \in N$，则称 A 定义了一个从 M 到 N 的矩阵映射，记作 $A : M \to N$。序列 Ax 称为 x 的 A–变换。Kizmaz [[26]], 引入了 $X = \{\ell_\infty, c_o, c\}$ 的差分序列空间 $X(\Delta)$ 的概念；Et 和 Çolak [[22]] 及其他许多人 [对其进行了推广，见 [23,25,27,32]]。对于一个真分数 τ，分数阶差分算子的概念由（ Baliarsingh [[8]]）、Baliarsingh 和 Dutta [[9–11, 19, 20]] 提出，而差分算子 $\Delta^{(\tau)}$ 定义为

$$\Delta^{(\tau)}x_k = \sum_i (-1)^i \frac{\Gamma(\tau+1)}{i!\Gamma(\tau-i+1)}x_{k-i} \tag{1.2}$$

$$\Delta^{-(\tau)}x_k = \sum_i (-1)^i \frac{\Gamma(-\tau+1)}{i!\Gamma(-\tau-i+1)}x_{k-i} \tag{1.3}$$

分数阶差分算子级数是收敛的。将差分算子 $\left(\Delta^{(\tau)}\right)$ 及其逆算子 $\left(\Delta^{(-\tau)}\right)$分别表示为三角矩阵也是合适的，表示如下:

$$\left(\Delta^{(\tau)}\right)_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(\tau+1)}{(n-k)!\Gamma(\tau-n+k+1)} & if\, 0 \le k \le n \\ 0 & if\, k > n \end{cases}$$

$$\left(\Delta^{(-\tau)}\right)_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-k)!\Gamma(-\tau-n+k+1)} & if\, 0 \le k \le n \\ 0 & if\, k > n \end{cases} \tag{1.4}$$

帕斯卡平均 P [[7]] （可表示为帕斯卡矩阵 $[p_{nk}]$ ）定义如下:

$$P = [p_{nk}] = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} & if\, 0 \le k \le n \\ 0 & if\, k > n \end{cases}$$

帕斯卡矩阵 $P^{-1} = [p_{nk}]^{-1}$ 的逆定义为

$$P^{-1} = \begin{cases} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} & if\, 0 \le k \le n \\ 0 & if\, k > n \end{cases} \tag{1.5}$$

Polat 引入的帕斯卡序列空间 p_∞、 p_0、 $and\, p_c$[[7]] 如下:

$$p_0 = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \zeta_k = 0\right\},$$
$$p_c = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \zeta_k \; exists\right\},$$
$$p_\infty = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \zeta_k\right| < \infty\right\}$$

Aydin 和 Polat [[18]] 引入了整数阶帕斯卡差分序列空间 m，定义如下:

$$X\left(\Delta^{(m)}\right) = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \Delta^{(m)}(\zeta) \in X\right\}, \tag{1.6}$$

其中 $X = \{p_\infty\ , p_0\ , p_c\}$。
现在，我们的研究兴趣是引入分数阶帕斯卡差分序列空间。受方程 1.6 的启发，我们引入空间 $\ell_p\left(\hat{}P\right)$，其中$1 \le p \le \infty$ 。我们证明了这些空间的若干拓扑性质，以及其 $\alpha-$、 $\beta-$、 $\gamma-$ 对偶。

2 主要结果

在此，我们将帕斯卡矩阵 P [[7]] 与分数阶差分算子 $\Delta^{(\tau)}$ [9]相乘，定义矩阵 $\hat{}P = P\left(\Delta^{(\tau)}\right)$ ，如下:

$$\hat{P} = \left(P\left(\Delta^{(\tau)}\right)\right)_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix} \frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-k)!\Gamma(\tau-i+k+1)}\ , & if\ 0 \le k \le n \\ 0, & if\ k > n \end{cases} \tag{2.1}$$

等价地，可以写成,

$$\left(\bar{P}\left(\Delta^{(\tau)}\right)\right) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ (2-\tau) & (1) & 0 & 0 & \dots \\ (3-3\tau+\frac{\tau(\tau-1)}{2!}) & (3-\tau) & (1) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

定理 2.1。 乘积矩阵 $\hat{}P = \left(P\left(\Delta^{(\tau)}\right)\right)$ 的逆由 $\hat{}P^{-1}$ =给出

$$\begin{cases} y \\ \sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} j \\ j-k \end{pmatrix}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}, & if\ 0 \le k \le n \\ 0, & if\ k > n \end{cases}$$

证明。 证明可通过例行验证结果 1.4 和 1.5 得出，因此省略。

□

现在，我们将新的分数阶 Pascal 差分序列空间 $\ell_p\left(\hat{}P\right)$ 引入为满足以下条件的所有序列的集合：对于 $1 \le p < \infty$，其 $P\left(\Delta^{(\tau)}\right)-$ 变换属于空间 ℓ_p ；对于 $\ell_\infty\left(\hat{}P\right)$，其 $P\left(\Delta^{(\tau)}\right)-$ 变换属于空间 ℓ_∞，即

$$\ell_p\left(\hat{P}\right) = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \hat{P}(\zeta) \in \ell_p\right\}, 1 \le p < \infty \ and$$
$$\ell_\infty\left(\hat{P}\right) = \left\{\zeta = (\zeta_k) \in \omega : \hat{P}(\zeta) \in \ell_\infty\right\}.$$

上述空间也可以写为:

$$\ell_p\left(\hat{P}\right) = (\ell_p)_{\left(\hat{P}\right)} \ and\ \ell_\infty\left(\hat{P}\right) = (\ell_\infty)_{\left(\hat{P}\right)}. \tag{2.3}$$

现在，我们引入的序列空间可推广以下序列空间:

(*i*)。对于 $\tau = 0$ 和 $p = \infty$，它化为 ℓ_∞(*P*)，该空间由 Polat [[7]] 研究。(*ii*)。对于 $\tau = 1$ 和 $p = \infty$，它化为 ℓ_∞(*P*(Δ))，其中 $\Delta = x_k - x_{k-1}$，该空间由 Aydin 和 Polat [[17]] 研究。

(iii) 。对于 $\tau = m$ 和 $p = \infty$，它简化为 $\ell_\infty\left(P\left(\Delta^{(m)}\right)\right)$，而 $\Delta^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} -1^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} x_{m-j}$ 由 Aydin 和 Polat [[18]]研究。

ˆ现在，通过 $x = (x_k)$ 的 P -变换，我们定义序列 $y = (y_n)$,$n \in N$ 如下:

$$y_n = \left(\hat{P}x\right)_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\begin{pmatrix} n \\ n-i \end{pmatrix}\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-k)!\Gamma(\tau-i+k+1)}x_k \ . \tag{2.4}$$

3 拓扑结构

本节讨论空间 $\ell_p\left(\hat{}P\right)$ and$\ell_\infty\left(\hat{}P\right)$ 的一些拓扑性质。

定理 3.1. 序列空间 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ *and* $\ell_\infty\left(\hat{P}\right)$ 是 $BK-$ 空间，其范数定义为

$$\| x \|_{\ell_p(\hat{P})}=\| \left(\hat{P}x\right) \|_{\ell_p}= \left(\sum_k \left|\left(\hat{P}\right)_k x\right|^p\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty \tag{3.1}$$

and

$$\| x \|_{\ell_\infty(\hat{P})}=\| \left(\hat{P}x\right) \|_{\ell_\infty}= \sup_k \left|\left(\hat{P}\right)_k x\right| \tag{3.2}$$

证明。线性的证明是例行性的验证，因而略去。ℓ_p 和 ℓ_∞ 是带有其自然范数的 BK 空间。由于等式 (2.3) 成立，且 P 是一个三角矩阵，Wilansky 的定理 4.3.2[[1]] 表明，$\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 和 $\ell_\infty\left(\hat{P}\right)$ 是 BK 空间。

□

定理 3.2。序列空间 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 和 $\ell_\infty\left(\hat{P}\right)$ 分别与 ℓ_p 和 ℓ_∞ 线性同构，其中 $1 \leq p \leq \infty$。

证明。现在定义一个映射 T: $\ell_p\left(\hat{P}\right) \to \ell_p$，其定义为 $x \to y = Tx$。显然，T是一个线性变换。如果 $Tx = \theta \; then \; x = \theta$，其中 $\theta =$(0，0，0，.....)，则 T 是一一映射。令 $y \in \ell_p$，定义序列 $x =$(x_k) 如下:

$$x_k = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-j} \left(\begin{array}{c} i \\ i-j \end{array} \right) \frac{\Gamma\left(-\tau+1\right)}{(k-i)!\Gamma\left(-\tau-k+i+1\right)} y_j, (k \in N) \tag{3.3}$$

Then

$$\| x \|_{\ell_p(\hat{P})}= \left(\sum_k \left|\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k} (-1)^{i-j} \left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array} \right) \frac{\Gamma\left(\tau+1\right)}{(i-j)!\Gamma\left(\tau-i+j+1\right)} x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_k |\delta_{kj} \; y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_k |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$where \; \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & if \; k = j \\ 0, & if \; k \neq j \end{cases}$$

因此，$x \in \ell_p\left(\hat{P}\right)$ 和 T是线性双射且保范数的。因此，空间 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 和 ℓ_p线性同构。即 $\ell_p\left(\hat{P}\right) \cong \ell_p$。其他空间的证明也可用类似方法得到。

□

定理 3.3. 对于 $1 \leq p < \infty$，空间 $\ell_p\Big(\hat{}P\Big)$ 不是希尔伯特空间，其中$p \neq 2$。

证明。 这里我们证明，对于$1 \leq p < \infty$， $\ell_2\Big(\hat{}P\Big)$是 $\ell_p\Big(\hat{}P\Big)$中唯一的希尔伯特空间。由于 $\ell_p\Big(\hat{}P\Big)$ 是 $1 \leq p < \infty$的 BK 空间，因此 $\ell_2\Big(\hat{}P\Big)$ 在该范数下也是一个 BK 空间

$$\| x \|_{\ell_2(\hat{P})} = \| \left(\hat{P}\right) \|_{\ell_2} = \left(\sum_k \left|\left(\hat{P}\right)_k x\right|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left\langle \left(\hat{P}\right)x, \left(\hat{P}\right)x \right\rangle^{1/2}$$

对于每个 $x \in \ell_2\Big(\hat{}P\Big)$，我们得出 $\ell_2\Big(\hat{}P\Big)$ 是一个希尔伯特空间。

设我们考虑两个序列 $u = (u_k) = \Big(1, \tau - 1, {}^{\tau}{}_{(9-\tau)_2} \underline{\quad -6, \quad} \ldots\ldots\Big)$和$v = (v_k) = \Big(1, \tau - 4, {}^{\tau}{}_{(5-\tau)_2}, \underline{\quad} \ldots\ldots\Big)$则有 $\Big(\hat{}P\Big)u = (1,\ 1,\ 0,\ 0\ldots\ldots)$和 $\Big(\hat{}P\Big)v = (1,\ -1,\ 0,\ 0\ldots\ldots)$。因此，根据平行四边形法则可以验证，即

$$\text{左端} = \| u + v \|^2_{\ell_p(\hat{}P)} + \| u - v \|^2_{\ell_p(\hat{}P)} = 8$$
$$\text{右端} = 2\left(\| u \|^2_{\ell_p(\hat{}P)} + \| v \|^2_{\ell_p(\hat{}P)}\right) = 4\left(2^{2/p}\right).$$

对于 $p \neq 2$，左端 $\neq$ 右端，但对于 $p = 2$，左端 $=$ 右端。
因此 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 对于 $p \neq 2$，它不是希尔伯特空间。 □

定理 3.4. </style}空间 $\hat{}P\Big)$ 对于 $1 \leq p < \infty$ 是非绝对型。

证明。 设序列 $w \in \ell_p$和 $w = (1, 1, 0, 0\ldots\ldots)$。那么，

$$\left(\hat{P}\right)(w) = \left(1,\ 1 - \tau,\ \frac{\tau(\tau-1)}{2} - 2\tau, \ldots\ldots\right)$$

and

$$\left(\hat{P}\right)(|w|) = \left(1,\ 3 - \tau,\ \frac{\tau(\tau-2)}{2} - 4\tau + 6, \ldots\ldots\right)$$

这意味着，

$$\| w \|_{\ell_p(\hat{P})} \neq \| |w| \|_{\ell_p(\hat{P})}.$$

□

4 包含关系

本节将证明与空间$\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$和 $\ell_\infty\Big(\hat{P}\Big)$有关的一些包含关系。

定理 4.1. 包含关系 $\ell_p \subset \ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 对 $1 \leq p < \infty$严格成立。

证明。为证明该定理成立，只需证明存在一个数 $M > 0$ 使得$\| x \|_{\ell_p(\hat{P})} = M. \| x \|_{\ell_p}$。对 y_k 应用 Hölder 不等式，可得

$$
\begin{aligned}
|y_k|^p &= \left|\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_k\right|^p \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}(-1)^{i-j}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}x_j\right|^p \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}|x_j|^p\right) \\
&\quad\times\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}\right)^{p-1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}|x_j|^p\right),
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\| x \|^p_{\ell_p(\hat{P})} &= \left(\sum_k\left|\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}(-1)^{i-j}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}x_j\right|^p\right) \\
&\leq \sum_k\left(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-i \end{array}\right)\frac{\Gamma(\tau+1)}{(i-j)!\Gamma(\tau-i+j+1)}|x_j|^p\right) \\
&\leq \sum_k\left(\sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-j \end{array}\right)|x_j|^p\right) = M.\sum_k(|x_k|^p) = M.\| x \|^p_{\ell_p},
\end{aligned}
$$

其中 $M = \sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ k-j \end{array}\right)$. 由此可得, $\| x \|_{\ell_p(\hat{P})} \leq M.\| x \|^p_{\ell_p}$。因此, $\ell_p \subset \ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 对 $1 \leq p < \infty$严格成立。

□

5 空间的基

本节构造了空间 $\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 的 Schauder基 [29]。根据定理（2.2），空间 $\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 与 ℓ_p 线性同构，因此，空间 ℓ_p 的基 $\left\{e^{(k)}\right\}_{k\in N}$ 的逆构成了 $\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$的基。

定理 5.1. 设 $\mu_k=\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_k$。对于 $k\in N_0$，定义 $b^{(k)}=\left\{{b_n}^{(k)}\right\}_{n\in N_0}$ 为

$$\left\{{b_n}^{(k)}\right\}=\begin{cases}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}j\\ j-k\end{pmatrix}\frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)}, & if\ 0\le k\le n\\ 0, & if\ k>n\end{cases} \tag{5.1}$$

那么，$\left\{{b_n}^{(k)}\right\}$ 是 $\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 的 *Schauder*基，因此每个 $x\in\ell_p\Big(\hat{P}\Big)$ 都有唯一的表示

$$x=\sum_k \mu_k {b_n}^{(k)},\ for\ each\ k\in N.$$

其中 $\mu_k=\left(\hat{P}\right)_k$.

证明. (i) 根据 $\left(\hat{P}\right)$ 和 ${b_n}^{(k)}$ 的定义，

$$\left(\hat{P}\right){b_n}^{(k)}=e^{(k)}\in\ell_p,$$

设 $x\in\left(\hat{P}\right)$，则对于整数 $r\ge 0$，有 $x^{[r]}=\sum_{k=0}^{r}\mu_k b^{(k)}$。

应用 $\left(\hat{P}\right)$，我们得到 $\left(\hat{P}\right)x^{[r]}=\sum_{k=0}^{r}\mu_k b^{(k)}$

$$=\sum_{k=0}^{s}\mu_k e^{(k)}=\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_k e^{(k)}$$

and

$$\left(\hat{P}\right)\left(x-x^{[r]}\right)_s=\begin{cases}0, & if\ 0\le s\le r\\ \left(\left(\hat{P}\right)x\right)_s, & if\ s>r\end{cases};for\ r,s\in N_0 \tag{5.2}$$

对于 $\epsilon > 0$，存在一个整数 m_o，使得

$$\left(\sum_r \left|\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_r\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2} \; for \; all \; r \geq m_0.$$

因此

$$\| \left(x - x^{[r]}\right) \|_{\left(\ell_p(\hat{P})\right)} = \sum_r \left(\left|\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_r\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \, , for \; all \; r \geq m_0.$$

假设 $x = \sum_k \eta_k b^{(k)}$。由于线性映射 T 从 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 到 ℓ_p 是连续的，我们有:

$$\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_k = \sum_k \eta_k \left(\left(\hat{P}\right)b^{(k)}\right)_n$$

$$= \sum_k \eta_k e^{(k)} = \eta_n \; .$$

这与我们的假设 $\left(\left(\hat{P}\right)x\right)_k = \mu_k$ 对每个 $k \in N_0$ 都成立相矛盾。因此，该表示是唯一的。

□

6 $\alpha-$, $\beta-$ 和 $\gamma-$ 对偶

这里我们确定 $\ell_p\left(\hat{P}\right)$ 和 $\ell_\infty\left(\hat{P}\right)$ 的 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$ 对偶。我们定义

$$S(X,Y) = \{u = (u)_k \in \omega : ux = (u_k x_k) \in Y, whenever \; x = (x_k) \in X\}$$

作为任意两个序列空间 X 和 Y 的乘子序列空间。分别将 $\alpha-$、$\beta-$ 和 $\gamma-$ 的对偶记为 $X^\alpha = S(X, l_1)$ $X^\beta = S(X, cs)$ $X^\gamma = S(X, bs)$。全文中，$\mathbb{N}$ 的所有有限子集记为 κ。我们考虑 $K \in \kappa$。证明定理所需的一些引理。

引理6.1。 *[24]* 令 $A = (a_{n,k})$ 为一个无限矩阵。于是，

1. $A \in (\ell_p, \ell_1)$ 当且仅当

$$\sup_{K \in \kappa} \sum_k \left|\sum_{k \in K} a_{nk}\right| < \infty, \qquad 1 < p \leq \infty; \tag{6.1}$$

2. $A \in (\ell_p,\ c)$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk}\, exists\, for\, all\, k \in N; \tag{6.2}$$

$$\sup_{n\in N}\sum_k |a_{nk}|^q < \infty,\ 1 < p < \infty. \tag{6.3}$$

3. $A \in (\ell_\infty, c)$ 当且仅当(5.2) 成立，且

$$\sup_{n\in N}\sum_k |a_{nk}| < \infty, \tag{6.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_k \left|a_{nk} - \lim_{n\to\infty} a_{nk}\right| = 0. \tag{6.5}$$

4. $A \in (\ell_p, \ell_\infty)$ 当且仅当(5.1) 与 $1 < p \le \infty$ 成立。

定理 6.1. 定义集合 $\tilde{D}_1^{(\tau)}$ 如下

$$\tilde{D}_1^{(\tau)} = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n\in N}\sum_k |\tilde{u}_{nk}|^q < \infty \right\}$$

那么，

$$\left[\ell_p\left(\hat{P}\right)\right]^\alpha = \tilde{D}_1^{(\tau)},\ 1 < p \le \infty$$

.

证明。 设 $a = (a_k) \in \omega$ ，并令序列 (x_k) 在方程 (3.3) 中定义，则可推得

$$a_n x_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} i \\ i-j \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-i)!\Gamma(-\tau-n+i+1)} y_j a_n. \tag{6.6}$$

$$= \tilde{U}_n(y),\ for\, each\, n \in N.$$

~其中矩阵 $U_n = (\tilde{u}_{nk})$ 定义为

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} j \\ j-k \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-j)!\Gamma(-\tau-n+j+1)} & if\, 0 \le k \le n, \\ 0 & if\, k > n \end{cases}$$

对所有 n、$k \in N$ 均成立。因此，我们得出： $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ 当且仅当 $x = (x_k) \in \ell_p\left(\hat{P}\right)$，因为 $Uy \in \ell_1$，且 $y = (y_k) \in \ell_p$。
根据引理 (6.1)，我们得出 $\left\{\ell_p\left(\hat{P}\right)\right\}^\alpha = \tilde{D}_1^{(\tau)}$。

□

定理 6.2. 定义集合 $\tilde{D}_2^{(\tau)}$ 、 $\tilde{D}_3^{(\tau)}$ 、 $\tilde{D}_4^{(\tau)}$ ，如下：

$$\tilde{D}_2^{(\tau)} = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \Delta^{(\tau)}(a_k d_k) \right|^q < \infty \right\};$$

$$\tilde{D}_3^{(\tau)} = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_k |a_k d_k| < \infty \right\};$$

and

$$\tilde{D}_4^{(\tau)} = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \lim_k (a_k d_k) = 0 \right\};$$

其中 $\Delta^{(\tau)}(a_n d_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} (-1)^{n-j} \begin{pmatrix} i \\ i-j \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(n-i)!\,\Gamma(-\tau-n+i+1)} a_j$,

则

$$\left[\ell_p\left(\hat{P}\right)\right]^{\beta} = \tilde{D}_2^{(\tau)} \bigcap \tilde{D}_3^{(\tau)},\ 1 < p \leq \infty$$

and

$$\left[\ell_p\left(\hat{P}\right)\right]^{\gamma} = \tilde{D}_2^{(\tau)} \bigcap \tilde{D}_3^{(\tau)},\ 1 < p \leq \infty$$

.

证明。 令 $a = (a_k) \in \omega$ ，并考虑方程 (3.3) 中定义的序列 (x_k)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \begin{pmatrix} i \\ i-j \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-i)!\Gamma(-\tau-k+i+1)} y_j \right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=i}^{k} (-1)^{k-j} \begin{pmatrix} i \\ i-j \end{pmatrix} \frac{\Gamma(-\tau+1)}{(k-i)!\Gamma(-\tau-k+i+1)} a_j \right] y_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Delta^{(\tau)}(a_k d_k) y_k$$

$$= \tilde{V}_n(y),\ for\, each\, n \in N. \tag{6.7}$$

其中矩阵 $\tilde{V}_n = (\tilde{v}_{nk})$ 定义为

$$\tilde{u}_{nk} = \begin{cases} \Delta^{(\tau)}(a_k d_k) & if\ 0 \leq k < n, \\ 1 & if\ k = n \\ 0 & if\ k > n \end{cases}$$

对所有 $n, k \in N$ 均成立。因此我们推得，只要 $x = (x_k) \in \ell_p\left(\hat{}P\right)$，当且仅当 $\tilde{V}y \in c$ 满足 $y = (y_k) \in \ell_p$ 时，$ax = (a_n x_n) \in cs$。利用引理 (6.1)，我们得出 $\left\{\ell_p\left(\hat{}P\right)\right\}^{\beta} = \tilde{D}_2^{(\tau)} \bigcap \tilde{D}_3^{(\tau)}$, $1 < p \leq \infty$。由此定理得证。其他空间的对偶也可用类似方法，借助引理 (6.1) 得到。

□

7 结论

本文将关于 m 阶 Pascal 差分序列空间（$m \in \mathbb{N}$）的某些结果推广到了分数阶 τ 的 Pascal 差分序列空间。此外，我们还介绍了新差分序列空间的某些拓扑性质。未来的工作中，我们将研究这些空间的某些几何性质以及矩阵变换。

参考文献

[1] A. Wilansky，《泛函分析中的可和性》，North Holland 数学研究丛书，第 85 卷，爱思唯尔，阿姆斯特丹，1984[2] B. Altay 和 F. Başar，“关于若干非绝对型 Euler 序列空间”，《乌克兰数学杂志》57，1-17，2005。[3] B. Altay、F. Başar 和 M. Mursaleen，“关于包含 l_p 和 $l\infty$ 的 Euler 序列空间，I”，《信息科学》176，1450-1462，2006。[4] B. Altay 和 F. Başar，“关于非绝对型赋予副范数的 Riesz 序列空间”，《东南亚数学通报》第 26 卷，第 701–715 页，2002。[5] B. Altay 和 F. Ba ̧sar，“若干非绝对型赋予副范数的 Riesz 序列空间”，《东南亚数学通报》30，591–608，2006。[6] B. Altay 和 H. Polat，“关于若干新的 Euler 差分序列空间”，《东南亚数学通报》30，209-220，2006。[7] H. Polat，若干新的帕斯卡序列空间，Fundam. J. Math. Appl.，1(1) (2018)，61-68[8] P. Baliarsingh，“若干新的分数阶差分序列空间及其对偶空间”，*Appl. Math. Comput.* 219，9737-9742，2013。

[9] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，“统一处理差分算子及其应用”，*Bol. Soc. Paran.* 33，49-57，2015。[10] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，“关于分数阶差分序列空间类及其矩阵变换”，*Appl. Math.Comput.*250，665-674，2015。[11] P. Baliarsingh 和 S. Dutta，“关于三角矩阵逆矩阵的显式公式”，*J. Egypt. Math. Soc.* 23，297-302，2015。[12] F. Başar 和 N.L. Braha，“有界、收敛和零序列的 Euler-Cesaro 差分空间”，*Tamkang J. Math.* 47，4，405–420，2016。[13] M. Başarir，“关于广义黎斯 B-差分序列空间”，*Filomat* 24，4，35–52，2010。[14] M. Başarir 和 M. Öztürk，“关于黎斯差分序列空间”，*Rend. Circ. Mat. Palermo*，2，57，377–389，2008。[15] M. Başarir 和 M. Öztürk，“关于若干广义 Bm-差分黎斯序列空间及一致奥皮亚尔性质。¨”，*J. Inequal. Appl.*，文章编号 485730，共 17 页，2011。[16] R. Brawer，帕斯卡矩阵的幂与组合学中的一个恒等式，Elem. der Math.，45 (1990)，107-110。[17] S. Aydın 和 H. Polat，“利用帕斯卡变换导出的差分序列空间”，Fundam. J. Math. Appl. 2:1 (2019)，56–62。[18] S. Aydın 和 H. Polat，“m 阶差分序列空间的若干帕斯卡空间”，Conf. Proc. Sci. Technol. 2:1 (2019)，97–103。[19] S. Dutta 和 P. Baliarsingh，“关于分数阶赋予副范数的差分序列空间及其矩阵变换的注记”，*J.Egypt. Math. Soc.*22，249-253，2014。[20] S. Dutta 和 P. Baliarsingh，“关于若干托普利茨矩阵及其求逆”，*J. Egypt. Math. Soc.* 22，420-423，2014。[21] H.B. Ellidokuzoglu 和 S. Demiriz，“Euler-黎斯差分序列空间”，*Turkish J. Math. Comput. Sci.*，7，63–72，2017。[22] M. Et 和 R. Çolak，“关于广义差分序列空间”，*Soo-chow J. Math.*，21，377-386，1995。

[23] M. Et 和 M. Basarir，《一些新的广义差分序列空间》，*Periodica Math. Hungar.* 35: 169–175, 1997.[24] K.G. Grosse-Erdmann，1993。《Maddox 序列空间之间的矩阵变换》，*J. Math. Anal. Appl.*，180，223–238，1993.[25] U. Kadak 和 P. Baliarsingh，《某些分数阶欧拉差分序列空间及相关对偶性质》，*J. Nonlinear Sci.Appl.*8: 997-1004, 2015.[26] H. Kizmaz，《某些序列空间》，*Can. Math. Bull.* 24: 169-176, 1981.[27] I.J. Maddox，《强可和序列空间》，*Q. J. Math.*，18，345–355，1967.[28] I.J. Maddox，《由无限矩阵生成的拟赋范序列空间》剑桥哲学学会数学会刊，64，335–340，1968.[29] I.J. Maddox，《泛函分析基础》，第 *2* 版，剑桥大学出版社，剑桥，1988.[30] M. Mursaleen 和 K. Noman，《与空间 l_p 和 l_∞- I 相关的若干新型非绝对型序列空间》，*Filomat.*，25，33-51，2，2011.[31] M. Mursaleen 和 K. Noman，《与空间 l_p 和 l_∞- II 相关的若干新型非绝对型序列空间》数学通讯，16，383–398，2011.[32] M. Mursaleen，《广义差分序列空间》*J. Math.Anal. Appl.*，203，738–745，1996.[33] H. Polat 和 F. Başar，《m 阶差分序列的一些欧拉空间》*Acta Math. Sci.*，27，254-266，2007.[34] S. Singh 和 S. Dutta，《某些广义 m 阶几何差分序列空间》*FJMS.*，116，1. 83-100，2019.[35] S. Singh、S. Dutta、D. Dash 和 R. Sharma，《由 Orlicz 函数定义的强可和斐波那契差分几何序列》*GANITA.*，71，2，99-109，2021.

[36]A. Sönmez 和 F. Başar, 《收敛序列与零序列的非绝对型广义差分空间》, 《抽象与应用分析》, 文章编号 435076, 共 20 页, 2012.[37] T. Yaying, 《分数阶拟赋范黎斯差分序列空间》, 《克拉古耶瓦茨数学杂志》, 46, 175-191, 2022.[38] Aydın, C. 和 Ba.sar, F., 《包含空间 ℓ_p 和 ℓ_∞ 的一些新序列空间》。《数学论证》38（2005）, 第 3 期, 641-656