arXiv:2303.02349v1 [math.CO] 4 Mar 2023

Kendall τ-度量下排列码大小的新上界

ALIREZA ABDOLLAHI、JAVAD BAGHERIAN、FATEMEH JAFARI、MARYAMKHATAMI、FARZAD PARVARESH 和 REZA SOBHANI

Abstract. 我们首先给出两种基于对称群表示论的方法，用于研究长度为 n 的排列码的最大大小 $P(n,d)$。这类排列码是集合 S_n 中所有置换的子集，其 Kendall τ-度量下的最小距离至少为 d 。第一种方法是由 S_n 的传递作用导出的整数规划问题。第二种方法可用于否证 S_n 中完美码的存在性。

在此，我们将 $P(n,3)$ 的已知上界 $(n-1)!-1$ 降至 $(n-1)!-\lceil\frac{n}{3}\rceil+2\leq(n-1)!-2$，其中 $n\geq 11$ 为任意素数。若 $n=6$ 为 7、11、13、14、15 或 17，则 $P(n,3)$ 的已知上界分别降低 3、3、9、11、1、1、4。

1. Introduction

秩调制被提出作为应对闪存所面临挑战的一种解决方案 [9]。在秩调制框架中，码是排列码，其中长度为 n 的置换码（PC），简单来说就是 S_n 的一个非空子集； S_n 是所有 $[n]$ 的排列构成的集合：$=\{1,2,\ldots,n\}$。给定一个排列 $\pi:=[\pi(1)\ \pi(2)\ldots,\pi(i)\ \pi(i+1)\ldots,\pi(n)]\in S_n$，对其应用某个 $1\leq i\leq n-1$ 的相邻换位 $(i,i+1)$，将得到排列 $[\pi(1)\ \pi(2)\ldots,\pi(i+1)\ \pi(i)\ldots,\pi(n)]$。对于两个排列 $\rho,\pi\in S_n$，它们之间的 Kendall τ-距离 $d_K(\rho,\pi)$ 定义为将 $\rho\pi^{-1}$ 表示为它们的乘积所需的最少相邻换位次数。在 Kendallτ-度量下，长度为 n 、最小距离为 d 的置换码最多可纠正 $\frac{d-1}{2}$ 个由电荷受限错误引起的错误 [9]。

长度为 n 且 Kendall τ-距离至少为 d 的置换码的最大规模记为 $P(n,d)$，达到此规模的置换码称为最优码。我们将在下文的命题 2.1 中证明：若 d 使得存在最小 Kendall τ-距离至少为 d 的最优置换码，则也存在最小距离恰好为 d 的置换码，因此，在后一种定义中，可以将最小距离条件中的“至少”去掉。已有多位研究者给出了 $P(n,d)$ 的界（见 [1, 2, 9, 11, 12, 13]），其中一些结果列于表1。已知 $P(n,1)=n!$，且 $P(n,2)=n!/2$。此外，已知若 $\frac{2}{3}\binom{n}{2}<d\leq\binom{n}{2}$，则 $P(n,d)=2$ （见 [2, 定理 10]）。然而，对于 $3\leq d\leq\frac{2}{3}\binom{n}{2}$，确定 $P(n,d)$ 并不容易。本文研究 $P(n,3)$ 的上界。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 94B25；94B65；68P30。

Key words and phrases. 秩调制、Kendall τ-度量、置换码。通讯作者：A. Abdollahi (a.abdollahi@math.ui.ac.ir)。F. Parvaresh 部分获得 IPM 项目资助，资助编号为 1401680050。

n	6	7	11	13
旧上界	$5!-1^a$	$6!-1^a$	$10!-1^a$	$12!-1^a$
UB	$5!-4$	$6!-4$	$10!-10$	$12!-12$
n	14	15	17	素数 $n\geq 19$
旧上界	$13!$ [9]	$14!$ [9]	$16!-1^a$	$(n-1)!-1^a$
UB	$13!-1$	$14!-1$	$16!-5$	$(n-1)!-\lceil\frac{n}{3}\rceil+2$

TABLE 1. $P(n,3)$ 上界的一些结果。上标表示上界所依据的参考文献，其中“a”是 [2, 5], ，灰色表示我们的主要结果。

根据球形堆积界（见 [9,定理 12 和 13]）， $P(n,3)\leq(n-1)!$。规模为 $(n-1)!$ 且 Kendall τ-距离为 3 的置换码称为 1-完美码。已证明，若 $n>4$ 是素数或 $4\leq n\leq 10$，则 S_n 中不存在 1-完美码（见 [5, 推论 2.5 和定理 2.6]，或 [2, 推论 2]）。

已有多项研究运用优化技术，在各种距离度量（汉明距离、Kendall τ、乌拉姆距离）下对置换码的大小进行界定（见[7, 10, 11]）。在第 2 节中，我们将证明，对于 S_n的任意非平凡子群，都可以导出一个整数规划问题，其目标函数的最优值给出 $P(n,3)$的一个上界。在第 3 节中，通过考察与 S_n的杨子群（见下文定义 3.1）相对应的整数规划问题，我们证明以下结果：

定理 1.1. 对所有素数 $p\geq 11$, $P(p,3)\leq(p-1)!-\lceil\frac{p}{3}\rceil+2\leq(p-1)!-2$。

随后，我们使用软件求解由下划线子群的特定选择导出的整数规划问题，并为 n 的一些较小取值求得更紧的上界。最后，我们应用 [5] 中的一种相关方法，证明 S_{14}, S_{15} 中不存在 1-完美码。

2. PRELIMINARIES

简单图 Γ 由一个非空顶点集合 $V(\Gamma)$ 和一个可能为空的边集合 $E(\Gamma)$ 构成，后者是 $V(\Gamma)$ 的所有二元素子集所组成集合的子集。若两个顶点 σ_1 和 σ_2 满足 $\{\sigma_1,\sigma_2\}\in E(\Gamma)$，则称它们相邻，记作 $\sigma_1-\sigma_2$。 H 是 Γ 的一个子图，指其顶点集合和边集合分别是 Γ 的顶点集合和边集合的子集。路径是一个简单图，其顶点集合为 $\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$，且满足 $\sigma_j-\sigma_{j+1}$（对于 $j=0$，.....， $n-1$）。路径的长度是其边的数量。

我们将最小距离至少为 d 的图码定义为简单图的顶点子集，其中任意两个不同顶点之间的距离至少为 d；两个顶点之间的距离定义为连接这两个顶点的路径的最短长度。此类码的例子包括采用 Kendall τ度量或乌拉姆度量的排列码。事实上，采用 Kendall τ 度量或乌拉姆度量的全体排列可表示为凯莱图（见下文定义 2.4），而置换码则是该凯莱图的子图。本文所用的方法依赖于这样一个事实：采用 Kendall τ度量的排列集合是一个凯莱图。

这里我们观察到，如果 d 满足存在最小距离至少为 d 的图形码，那么也存在最小距离恰为 d 的图形码。

命题 2.1. 设 Γ 为任意简单图， $d \geq 1$ 为整数。那么

$$\{|C| \mid C \subseteq V(\Gamma) \text{ and } d_\Gamma(C) = d\} = \{|C| \mid C \subseteq V(\Gamma) \text{ and } d_\Gamma(C) \geq d\},$$

其中 $d_\Gamma(C) = \min\{d_\Gamma(x, y) \mid x, y \in C$ 且 $x \neq y\}$。

证明。设 C 是最小距离至少为 d的图码。假设 $\sigma, \tau \in C$满足 $d_\Gamma(C) = d_\Gamma(\sigma, \tau) = d + \ell$，其中某个非负整数为$\ell$。若 $\ell = 0$，则结论成立；因此从现在起假设 $\ell > 0$。设 $\sigma - \sigma_1 - \cdots - \sigma_\ell - \cdots - \sigma_{d+\ell-1} - \tau$是图 Γ 中连接 σ和 τ的一条最短路径。考虑 $\hat{}\hat{}\hat{}C = (C \setminus \{\sigma\}) \cup \{\sigma_\ell\}$。我们断言 $|C| = |C|$ 且 $d_\Gamma(C) = d$，这就完成了证明。若 $\sigma_\ell \in C$，则 $d(\sigma_\ell, \tau) = d$，这意味着 $\ell = 0$，矛盾。因此 $\hat{}\hat{} |C| = |C|$。为证明 $d_\Gamma(C) = d$，只需证明对所有 $\delta \in C \setminus \{\sigma\}$，均有 $d_\Gamma(\delta, \sigma_\ell) \geq d$。由于 $d_\Gamma(C) = d + \ell$，且根据三角不等式，我们有

$$d + \ell \leq d_\Gamma(\delta, \sigma) \leq d_\Gamma(\delta, \sigma_\ell) + d_\Gamma(\sigma_\ell, \sigma) = d_\Gamma(\delta, \sigma_\ell) + \ell.$$

因此， $d_\Gamma(\delta, \sigma_\ell) \geq d$，如所要求。 □

带有汉明度量的置换码并非图码，因为两个置换之间的汉明距离绝不会等于 1，因此我们无法将命题 2.1 应用于后一种情形。我们不知道命题 2.1 的结论对于带有汉明度量的置换码是否成立。我们提出以下问题。

问题 2.2。设 d_H 为 S_n 上的汉明度量，且 $d \geq 2$ 为任意整数。是否有

$$\{|C| \mid C \subseteq S_n \text{ and } d_H(C) = d\} = \{|C| \mid C \subseteq S_n \text{ and } d_H(C) \geq d\}?,$$

其中 $d_H(C) = \min\{d_H(x, y) \mid x, y \in C$ 且 $x \neq y\}$。

定义 2.3。设 G 为一个有限群， B、 C 为 G的两个非空子集。与通常一样，我们用 BC表示集合 $\{bc \mid b \in B, c \in C\}$，其中 $g = bc$表示群运算；此外，对每个 $g \in G$，我们用 Bg 表示集合 $B\{g\}$。若 $B = B^{-1} := \{b^{-1} \mid b \in B\}$，则集合 B 称为对逆封闭。另记 ξ为 G的单位元。

设 G 是一个有限群，并用 $\mathbb{C}[G]$ 表示 G 的“复群代数”。 $\mathbb{C}[G]$ 的元素具有如下形式的形式和

$$\sum_{g \in G} a_g g, \tag{2.1}$$

其中 $a_g \in \mathbb{C}$。复群代数是一个 $\mathbb{C}$-代数，其加法、乘法和数乘定义如下:

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g)\sigma,$$

$$\Big(\sum_{g \in G} a_g g\Big)\Big(\sum_{g \in G} b_g g\Big) = \sum_{g \in G} \Big(\sum_{g = g_1 g_2} a_{g_1} b_{g_2}\Big) g,$$

$$\lambda \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g,$$

其中 $\lambda, a_g, b_g \in \mathbb{C}$。若对于某个 g， $a_g = 0$，则在 2.1 中省略项 $a_g g$，并将 $\sum_{g \in G} a_g g$记作 $a_1 g_1 + \cdots + a_k g_k$，其中 $\{g \mid a_g \neq 0\} = \{g_1, \ldots, g_k\}$非空；否则， $\sum_{g \in G} a_g g$ 记作 0。对于 G的非空有限子集Θ，我们用 Θ 表示 $\mathbb{C}[G]$的元素 $\sum_{\theta \in \Theta} \theta$。

定义 2.4。设 G 是一个有限群， S 是 G 的一个不包含单位元 ξ 的非空逆封闭子集，其中 ξ 属于 G。那么凯莱图 Γ :=Cay(G,S) 是一个简单图，其 $V(\Gamma)$ 为 $=\{g \mid g \in G\}$，且 $E(\Gamma)$ 为 $=\big\{\{g,h\}\,\big|\,g,h \in G, gh^{-1} \in S\big\}$。

设 G 为一个有限群， S 为 G 的一个非空逆封闭子集，且不包含 G的单位元 ξ 。现在，我们在 G 上定义度量 d_Γ ： Γ 表示 Cay(G,S) 中两个顶点之间路径的最短长度。例如，若 $G = S_n$ 且 $S = \{(1,2),(2,3)\ldots,(n-1,n)\}$，则度量 d_Γ 是 S_n上的 Kendall τ-度量。此外，若 $G = S_n$ 且 $S = T \cup T^{-1}$，其中 T:=$\{(a, a+1,\ldots,b) \mid a < b, a, b \in [n]\}$，则度量 d_Γ 是 S_n上的乌拉姆度量。

定义 2.5。对于正整数 r 和元素 $g \in G$，在度量 d_Γ 下， G 中半径为 r 的球记作 $B_r^\Gamma(g)$，定义为 $B_r^\Gamma(g) = \{h \in G \mid d_\Gamma(g,h) \le r\}$。

注记 2.6. 注意， $B_r^\Gamma(g) = (S^r \cup \{\xi\})g$，其中 $S^r := \{s_1 \cdots s_t \mid s_1,\ldots,s_t \in S, 1 \le t \le r\}$。另请注意，由于 S 对逆封闭，因此对所有 $r \ge 2$， $B_r^\Gamma(g) = S^r g$ 。由此可得，对所有 $g \in G$, $|B_r^\Gamma(g)| = |B_r^\Gamma(1)| = |S^r \cup \{\xi\}|$ 。

命题 2.7. 设 G是一个有限群， d_Γ 是由图 Cay(G,S) 诱导的度量。那么， G 的子集 C是一个满足 $min\{d_\Gamma(x,y) \mid x,y \in C\} \ge d$ 的码，当且仅当存在 $Y \subset G$ 使得

$$(S^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \cup \{\xi\})\widehat{C} = \widehat{G} - \widehat{Y}, \tag{2.2}$$

证明. 设 $r := \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, $Y = G \backslash \cup_{c \in C} B_r^\Gamma(c)$，且 $T := S^r \cup \{\xi\}$。因此 $G = \cup_{c \in C} B_r^\Gamma(c) \cup Y$。由注记 2.6 可知，对每个 $c \in C$， $B_r^\Gamma(c) = Tc$，因此 $\cup_{c \in C} B_r^\Gamma(c) = TC$。所以， $G = TC + Y$。另一方面，对于 C 中任意两个不同的元素c, c'， $Tc \cap Tc' = \varnothing$，否则 $d_\Gamma(c,c') \le d-1$，这与结论矛盾。因此， $TC = TC$，证明完成。□

定义 2.8. 设 G 为一个有限群， d_Γ 为由 Cay(G,S)诱导的度量。对于正整数 r， r-完美码，或称半径为 r 的 G 的完美码，是指度量 d_Γ下 G的一个子集 C，满足 $G = \cup_{c \in C} B_r^\Gamma(c)$，并且对于任意两个不同的 c、 $c' \in C$，有 $B_r^\Gamma(c) \cap B_r^\Gamma c' = \varnothing$。

备注 2.9. 通过与命题 2.7 的证明类似的论证，可以看出，如果 C 是一个 r-完美码，则 $(S^r \cup \{\xi\})C = G$。我们注意到，根据备注 2.6 C， r是一个 $|C||S^r \cup \{\xi\}| = |G|$完美码当且仅当 。

设 ρ 为有限群 G 的任意一个（复）表示，其维数为 k ，其中 k为某个正整数，即从 G 到一般线性群 GL$_k(\mathbb{C})$ 的任意群同态；该一般线性群由 $\mathbb{C}$上的 $k \times k$ 阶可逆矩阵构成。于是，根据 $\mathbb{C}[G]$的泛性质， ρ 可以扩张为一个从 $\mathbb{C}[G]$ 到矩阵代数 Mat$_k(\mathbb{C})$ 的代数同态 $\hat{}\rho$ ，其中该矩阵代数由 $\mathbb{C}$ 上的 $k \times k$ 阶矩阵构成，并且对所有 $g \in G$都有 $g^{\hat{\rho}} = g^\rho$。因此，对于 G 的任意非空子集 Θ ，在 $\hat{}\rho$ 下， Θ 的像 $\widehat{\ }$是 Mat$_k(\mathbb{C})$ 中的元素 $\sum_{\theta \in \Theta} \theta^\rho$ 。特别地，将 $\hat{}\rho$ 应用于等式 2.2，我们得到

$$\Big(\sum_{s \in S \cup \{\xi\}} s^\rho\Big)\Big(\sum_{c \in C} c^\rho\Big) = \sum_{g \in G} g^\rho - \sum_{y \in Y} y^\rho, \tag{2.3}$$

其中，后一个等式是在 Mat$_k(\mathbb{C})$ 的元素之间成立的。

下面给出一个重要定义，它将在本文主要结果的证明中发挥核心作用。

定义 2.10。给定一个群 G 和一个非空集合 Θ，回顾一下，若存在一个函数 $\Theta \times G \to \Theta$，记为 $(\theta, g) \mapsto \theta^g$，对所有 $(\theta, g) \in \Theta \times G$ 均成立（若 $(\theta^g)^h = \theta^{gh}$），且对所有 $\theta \in \Theta$ 以及所有 $g, h \in G$ 均成立，则称 G （从右侧）作用于 Θ。对于任意 $\theta \in \Theta$，集合 $\mathrm{Stab}_G(\theta) := \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}$ 称为 θ 在 G 中的稳定子群，它是 G 的一个子群。如果该作用是传递的（即对于任意两个元素 $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$，存在 $g \in G$ 使得 $\theta_1^g = \theta_2$），则所有稳定子群在 G 的元素作用下共轭；更准确地说，只要 $\theta_1^g = \theta_2$，就有 $\mathrm{Stab}_G(\theta_1)^g = \mathrm{Stab}_G(\theta_2)$，其中 $\mathrm{Stab}_G(\theta_1)^g = g^{-1}\mathrm{Stab}_G(\theta_1)g$。

现在假设 G 作用于 Θ，且 $|\Theta| = k$ 是有限的。在 Θ 的元素上固定任意一种排序，使得对于不同的元素 θ_i、$\theta_j \in \Theta$，若 $i < j$，则 $\theta_i < \theta_j$。记 ρ_Θ^G 为从 G 到 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ 的映射，其定义为 $g \mapsto P_g$；其中 P_g 是$|\Theta| \times |\Theta|$ 矩阵，当且仅当 $\theta_i^g = \theta_j$ 时，其 (i, j) 项为 1，否则为 0。

注 2.11。注意，ρ_Θ^G 的定义取决于 Θ上的排序选择；然而， G 的任意两个此类表示都可由一个置换矩阵共轭得到。

注 2.12。设 H 是有限群 G 的子群，且 X 是 G中 H的右陪集集合，即 $X := \{Hg \mid g \in G\}$。那么 G通过 $(Hg, g_0) \longrightarrow Hgg_0$ 在 X上作传递作用。已知 X将 G划分为分拆，即对于 X中任意不同的元素 x和 x'，有 $G = \cup_{x \in X} x$且$x \cap x' = \varnothing$，并且 $|X| = |G|/|H|$。

引理 2.13. 设 H 是有限群 G 的子群， $X = \{Ha_1, \ldots, Ha_m\}$是 G 中 H 的右陪集集合。若 $\mathcal{Y} \subset G$，则通过在 $i < j$ 时固定排序 $Ha_i < Ha_j$， $\sum_{y \in \mathcal{Y}} y^{\rho_X^G}$ 的 (i, j) 项为 $|\mathcal{Y} \cap {a_i}^{-1} Ha_j|$。

证明. 显然，对于任意 $y \in \mathcal{Y}$，当 $Ha_i y = Ha_j$ 时， $y^{\rho_X^G}$ 的 (i, j) 项为 1，否则为 0。因此，当 $a_i y {a_j}^{-1} \in H$ 时， $y^{\rho_X^G}$ 的 (i, j) 项为 1，进而 $y \in {a_i}^{-1} Ha_j$。于是， $\sum_{y \in \mathcal{Y}} y^{\rho_X^G}$ 的 (i, j) 项等于 $|\{y \in \mathcal{Y} \mid y \in {a_i}^{-1} Ha_j\}|$。证明完毕。□

以下结果概述了本文所采用的主要方法。

定理 2.14. 设 G 为有限群， d_Γ 为由图 $\mathrm{Cay}(G, S)$ 诱导的度量。此外，设 C为 G 中的一个码，满足 $min\{d_\Gamma(c, c') \mid c, c' \in C\} \geq d$。若 H是 G 的子群，且 X 是 H 在 G中的右陪集集合，则下列整数规划问题的目标函数的最优值给出 $|C|$的一个上界。

$$
\begin{aligned}
Maximize \quad & \sum_{i=1}^{|X|} x_i, \\
subject\ to \quad & \widehat{T^{\rho_X^G}}(x_1, \ldots, x_{|X|})^t \leq |H|\mathbf{1}, \\
& x_i \in \mathbb{Z},\ x_i \geq 0,\ i \in \{1, \ldots, |X|\},
\end{aligned}
$$

其中 $T := S^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \cup \{\xi\}$，$\mathbf{1}$ 是一个阶数为 $|X| \times 1$、各元素均等于 1 的列向量。

证明。设 $r := \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$。根据公式 2.3，存在 $Y \subset G$ 使得

$$\Big(\sum_{s\in T} s^{\rho_X^G}\Big)\Big(\sum_{c\in C} c^{\rho_X^G}\Big) = \sum_{g\in G} g^{\rho_X^G} - \sum_{y\in Y} y^{\rho_X^G}, \tag{2.4}$$

假设 $X = \{Ha_1, \ldots, Ha_m\}$。不失一般性，我们可以假设 $a_1 = 1$。每当 $i < j$ 时，我们固定排序 $Ha_i < Ha_j$。由引理 2.13 可知，$\sum_{g\in G} g^{\rho_X^G}$ 的 (i,j) 项等于 $|G \cap a_i^{-1} H a_j|$；又由于 $a_i^{-1} H a_j \subseteq G$，$\sum_{g\in G} g^{\rho_X^G}$ 的 (i,j) 项等于 $|a_i^{-1} H a_j| = |H|$。因此，如果 B 是$\sum_{g\in G} g^{\rho_X^G}$的一列，则 $B = |H|\mathbf{1}$。令 $\mathcal{C}$ 为 $\sum_{c\in C} c^{\rho_X^G}$ 的第一列。于是，引理 2.13 表明，对所有 $1 \le i \le |X|$，$\mathcal{C}$ 的第 i 行（记为 c_i）等于$|C \cap Ha_i|$。由于 $C = C \cap G = \cup_{i=1}^{|X|} (C \cap Ha_i)$ 且 $(C \cap Ha_i) \cap (C \cap Ha_j) = \varnothing$ 对于所有 $i \neq j$, $\sum_{i=1}^{|X|} c_i = |C|$。注意，由引理 2.13 可知，矩阵 $F^{\rho_X^G}$ 的所有项 $F \in \{C, G, Y, T\}$ 都是非负整数。因此，$\mathcal{C}$ 是以下不等式组的一个整数解

$$\widehat{T^{\rho_X^G}}(x_1, \ldots, x_{|X|})^t \le |H|\mathbf{1}$$

使得 $\sum_{i=1}^{|X|} c_i = |C|$，至此证明完成。 □

3. Results

设 $G = S_n$ 和 $S = \{(i, i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$，则 Cay$(G, S)$ 在 S_n 上诱导的度量是 Kendall τ-度量。本节中，我们利用第 2 节的结果，改进 $P(n, 3)$ 的上界，其中 $n \in \{6, 14, 15\}$ 或 $n \ge 7$ 为素数。注意，对于 S_n 的两个排列 σ 和 λ，它们的乘法 $\lambda \cdot \sigma$ 定义为 σ 在 λ 上的复合，即对于所有 $i \in [n]$，$\lambda \cdot \sigma(i) = \sigma(\lambda(i))$。

为了应用定理 2.14，我们需要固定子群 H，并注意到对 H 的不同选择会导致不同的结果。通常，一个传统且成熟的 H 候选是杨子群，我们将在此回顾它们 [8]。

定义 3.1. 我们将 n 的整数分拆 λ（长度为 m）定义为一个由正整数组成的 m 元组 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，满足 $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_m$ 和 $n = \sum_{i=1}^m \lambda_i$。如果 λ 和 μ 是 n 的两个分拆，我们称 λ 支配 μ，并记作 $\lambda \trianglerighteq \mu$，条件是对所有 j 都有 $\sum_{i=1}^j \lambda_i \ge \sum_{i=1}^j \mu_i$。设 λ 是 n 的一个分拆，并且 $\Delta := (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$ 是由 $[n]$ 的非空子集组成的 m 元组，构成 $[n]$ 的一个集合划分，且对所有 $i = 1, \ldots, m$ 都有 $|\Delta_i| = \lambda_i$。我们通过取 $S_\Delta = S_{\Delta_1} \times \cdots \times S_{\Delta_m}$ 关联 S_n 的一个杨子群 S_Δ，其中对于所有 $i = 1, \ldots, m$，S_{Δ_i} 是集合 Δ_i 上的对称群。

注 3.2. 设 λ 是 n 的一个划分，且 Δ、Δ' 是 $[n]$ 的两个由非空子集组成的 m 元组，它们构成 $[n]$ 的一个集合划分，并且对所有 $i = 1$、...、m，都有 $|\Delta_i| = |\Delta_i'| = \lambda_i$。众所周知，表示 $\rho_X^{S_n}$ 和 $\rho_{X'}^{S_n}$ 是等价的（即存在一个矩阵 U，使得对所有 $\sigma \in S_n$，$U^{-1}\rho_X^{S_n}(\sigma)U = \rho_{X'}^{S_n}(\sigma)$），其中 X 和 X' 分别是群 S_n 中杨子群 S_Δ 和 $S_{\Delta'}$ 的右陪集集合。因此，考虑与划分 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 对应的杨子群时，我们使用 $[n]$ 的非空子集组成的 m 元组 $[\{1, \ldots, \lambda_1\}, \{\lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+\lambda_2\}, \ldots, \{n-\lambda_m+1, \ldots, n\}]$，因为我们研究的是这些表示的等价类。

例如，若 $n=7$ 和 $\lambda=(3,2,2)$，则与划分 λ 对应的杨子群是子群 $H=\{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3\mid\sigma_1\in S_3,\sigma_2\in S_{\{4,5\}},\sigma_3\in S_{\{6,7\}}\}$。

引理 3.3. 设 H 是与划分 $\lambda:=(n-1,1)$ 对应的 S_n 的杨子群，且 X 是 S_n 中 H 的右陪集集合。若 $S=\{(i,i+1)\mid 1\le i\le n-1\}$ 且 $T:=S\cup\{\xi\}$，则 $T^{\rho_X^{S_n}}$ 是以下矩阵的一个置换矩阵共轭

$$\begin{pmatrix} n-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & n-2 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & n-2 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & n-2 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & n-1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

证明. 不失一般性，我们可以假设 λ 是 n 的划分 $\{\{1\},\{2,\dots,n\}\}$，因此 $H=\mathrm{Stab}_{S_n}(1)$。显然，对于每个 $i\in[n]$，若 $\sigma\in H(1,i)$，则 $\sigma(1)=i$，因此对于所有 $i\ne j$，$H(1,i)\cap H(1,j)=\varnothing$。所以我们可以令 $X=\{H(1,i)\mid 1\le i\le n\}$，这里使用约定 $H(1,1):=H$。固定 X 的排序，使得当 $i<j$ 时，$H(1,i)<H(1,j)$。由引理 2.13，$T^{\rho_X^{S_n}}$ 的 (i,j) 项等于 $|T\cap(1,i)H(1,j)|$。若 $i=j$，则注 2.10 意味着 $(1,i)H(1,i)=\mathrm{Stab}_{S_n}(i)$，从而 $T\cap(1,i)H(1,i)=T\setminus\{(i-1,i),(i,i+1)\}$ 若 $2\le i\le n-1$，则 $T\cap(1,n)H(1,n)=T\setminus\{(n,n-1)\}$ 且 $T\cap H=T\setminus\{(1,2)\}$。现在假设 $i\ne j$。显然 $(1,i)\cdot(i,j)\cdot(1,j)=(i,j)$。令 $h\in H$。于是$\sigma:=(1,i)\cdot h\cdot(1,j)=\pi(1,j,i)$，其中 $\pi=(1,i)\cdot h\cdot(1,i)\in\mathrm{Stab}_{S_n}(i)$。由于$\pi(i)=i$，$\sigma(j)=i$，因此 σ 是对换当且仅当 $h=(i,j)$。所以，若 $j=i+1$ 且 $i-1$，则 $T\cap(1,i)H(1,j)$ 分别等于 $\{(i,i+1)\}$ 和$\{(i-1,i)\}$；否则 $T\cap(1,i)H(1,j)=\varnothing$。证明完毕。□

定理 3.4。设 $p\ge 7$ 为素数，并考虑矩阵 $p\times p$

$$M=\begin{pmatrix} p-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & p-2 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & p-2 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & p-2 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p-1 \end{pmatrix}.$$

考虑不等式组 $M(x_1,\dots,x_p)^t\le(p-1)!1$，其中 $(x_1,\dots,x_p)^t\ge 0$，且 x_i 为整数。令 $x_{\max}:=\max\{x_i\mid i=1,\dots,p\}$。那么

(1) $|\{i\in[p]\mid x_i\le\frac{(p-1)!}{p}\}|\ge\lceil\frac{p}{3}\rceil$。(2) 如果 $\sum_{i=1}^p x_i=(p-1)!-k$，那么 $|\{i\mid x_i=x_{\max}\}|\ge p-k-2$。(3) $\sum_{i=1}^p x_i\le(p-1)!-\lceil\frac{p}{3}\rceil+2$

证明。令 $\mathcal{A}:=\{i\in[p]\mid x_i\le\frac{(p-1)!}{p}\}$ 且 $\mathcal{B}:=\{i\mid x_i=x_{\max}\}$。考虑 $[p]$ 的划分 $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8\},\dots,\{p-2,p-1,p\}\}$（若 $p\equiv 2$ 模3），以及划分 $\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8\},\dots,\{p-4,p-3,p-2\},\{p-1,p\}\}$（若 $p\equiv 1$模3）。分拆中的每一项都对应一个显然的不等式，例如 $\{1,2\}$和 $\{p-2,p-1,p\}$ 分别对应于 $(p-1)$ $x_1+x_2\le(p-1)!$ 和

$x_{p-2}+(p-2)x_{p-1}+x_p \le (p-1)!$。分拆中的每一项 P所对应的不等式都推出，对于某个 $i \in P$，有 $x_i \le (p-1)!/p$，其中 $x_i = \min\{x_j \mid j \in P\}$。由于两个分拆的大小均为 $\lceil \frac{p}{3} \rceil$，因此我们有 $|\mathcal{A}| \ge \lceil \frac{p}{3} \rceil$，第一部分得证。

由 $M(x_1,\dots,x_p)^t \le (p-1)!\mathbf{1}$ 和 $(x_1,\dots,x_p)^t \ge \mathbf{0}$ 可知，$0 \le \sum_{i=1}^p M_i \mathbf{x} = p(\sum_{i=1}^p x_i) \le p!$，其中 M_i 是 i的第 M 行，因此 $0 \le \sum_{i=1}^p x_i \le (p-1)!$ 令 $\ell \in [p]$ 满足 $x_\ell = x_{\max}$。于是 $\sum_{i=1, i\neq \ell-1,\ell+1}^p (x_\ell - x_i) = x_{\ell-1} + (p-2)x_\ell + x_{\ell+1} - \sum_{i=1}^p x_i \le (p-1)! - ((p-1)! - k)$。因此 $\sum_{i=1, i\neq \ell-1,\ell+1}^p (x_\ell - x_i) \in \{0,1,\dots,k\}$。由此可得 $|\{i \mid x_i < x_{\max}\}| \le k+2$，因此 $|\mathcal{B}| \ge p-k-2$，第二部分得证。

令 $\sum_{i=1}^p x_i = (p-1)! - k$，并反设 $k < \lceil \frac{p}{3} \rceil - 2$。于是 $|\mathcal{B}| \ge p - \lceil \frac{p}{3} \rceil + 1$，因此

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \ge |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - p \ge \lceil \frac{p}{3} \rceil + p - \lceil \frac{p}{3} \rceil + 1 - p \ge 1.$$

因此 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \varnothing$ 且 $x_{\max} \le (p-1)! /p$。由于 p 是素数，根据威尔逊定理 [4,P。27] $(p-1)! \equiv -1 \mod p$。由于 $x_{\max}$ 是整数，我们有 $x_i \le \frac{(p-1)!+1}{p} - 1$对所有 $i \in [p]$ 成立。因此

$$\sum_{i=1}^p x_i = (p-1)! - k \le p(\frac{(p-1)!+1}{p} - 1) = (p-1)! + 1 - p$$

于是

$$p \le k+1 < \lceil \frac{p}{3} \rceil - 1,$$

这就产生了矛盾。因此必有 $k \ge \lceil \frac{p}{3} \rceil - 2$。证明完毕。□

下面我们将证明定理 1.1。

定理：对于所有素数 $p \ge 11$，$P(p, 3) \le (p-1)! - \lceil \frac{p}{3} \rceil + 2 \le (p-1)! - 2$。

证明。设 C 是 S_p 中最小 Kendall τ-距离为 3 的码。设 H 是 S_p 中对应于划分 $\lambda := (p-1, 1)$ 的杨子群，X 是 H 在 S_p 中的右陪集集合。若 $S = \{(i, i+1) \mid 1 \le i \le p-1\}$ 且 $T := S \cup \{\xi\}$，

则根据引理 2.3，$\widehat{M}$ 是矩阵 M 的置换矩阵共轭矩阵，其中 M 出现在定理 3.4 中。现在，定理 2.14 表明，下列整数规划问题的目标函数的最优值给出了 $|C|$ 的一个上界

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{i=1}^p x_i, \\ \text{subject to} \quad & M(x_1,\dots,x_p)^t \le |H|\mathbf{1} = (n-1)!\mathbf{1}, \\ & x_i \in \mathbb{Z},\ x_i \ge 0,\ i \in \{1,\dots,p\}, \end{aligned}$$

其中，$\mathbf{1}$ 是一个阶为 $p \times 1$ 的列向量，其各个元素均等于 1。因此，根据定理 3.4 可得该结果。证明完毕。□

定理 3.5. 若 n 等于 6、7、11、13 和 17，则 $P(n, 3)$ 分别小于或等于 116、716、$10! - 10$、$12! - 12$ 和 $16! - 5$。

证明. 令 $S := \{(i, i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$。根据定理 2.14，我们使用 CPLEX 软件 [3] 和 GAP 软件 [6]，通过求解与 S_n 的子群 H 相对应的整数规划问题，确定了 $P(n, 3)$ 的上界。其中，当 $n = 6$时，H 是对应于划分 (2, 2, 2) 的杨子群；当 $n = 7$时，对应于 (5, 1, 1)；当 $n = 11$时，对应于 (9, 2)；当 $n = 13$ 时，对应于 (11, 2)；当 $n = 17$时，对应于 (16, 1)。对于上述每个子群，使用 GAP(软件 [6],其首先,X 我们确定了矩阵的右陪集集合，且 $\widehat{T} := S \cup \{\xi\}$，然后使用 CPLEX 软件 [3], 求解了与子群 H 对应的整数规划问题。□

为了证明 S_{14} 和 S_{15} 中不存在 1-完美码，我们采用了 [5] 中所述的技巧，具体如下列命题所示。

命题 3.6。 [5, 定理 2。2] 设 $S = \{(i, i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$ 且 $\widehat{T} := S \cup \{\xi\}$。若 S_n 含有一个子群 H，使得 $n \nmid |H|$ 且 $(T)^{\rho_X^{S_n}}$ 可逆，其中 X 是 S_n 中 H 的右陪集集合，则 S_n 不含 1- 完美码。

定理 3.7。在 $n \in \{14, 15\}$ 时， S_n 中不存在 Kendall τ-度量下的 1-完美码。

证明。令 $S = \{(i, i+1) \mid 1 \le i \le n-1\}$ 且 $T := S \cup \{\xi\}$。根据命题 3.6，要证明 S_n 中不存在 Kendall τ-度量下的 1-完美码，我们需要考虑 S_n 的杨子群 H $n \in \{14, 15\}$，其具有两个$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$性质：(1) $n \nmid |H|$; (2) 矩阵 $(T)^{\rho_X^{S_n}}$ 可逆。由于 $(T)^{\rho_X^{S_n}}$ 是一个维数为 $n!/|H|$的矩阵，通过选择大小更大的 H，矩阵 $(T)^{\rho_X^{S_n}}$ 的维数会降低。在 $n = 14$ 的情况下，我们考虑与划分 (6, 6, 2) 对应的杨子群 H。显然， $14 \nmid |H| = 6!6!2!$。此外，通过一个

软件检查矩阵 $(\widehat{T})^{\rho^S}$
x^{14}它是一个维数为 84084 的矩阵，可逆，因此在 S_{14} 中不存在 Kendall τ-度量下的 1-完美码。在 $n = 15$ 的情况下，满足条件 (1) 的最大杨子群 H 是对应于分拆 $\lambda := (4, 4, 4, 3)$ 的杨子群 S_{15}。在这种情况下，

矩阵 $(\widehat{T})^{\rho^S}$
x^{15}其维数为 1051050，软件无法检查其可逆性，因此我们使用定理 [8, 推论 2.2.22] 来检查其可逆性。$\widehat{\quad}$根据 [8, 推论 2.2.22],，如果所有满足 $\mu \trianglelefteq \lambda$ 的 n 的分拆 μ 都是可逆的，

$\widehat{\quad}$其中， ρ_μ 是对应于 μ的 S_{15} 不可约表示，那么 $T^{\rho_X^{S_{15}}}$可逆。15 的划分中有 54 个划分支配划分 λ。通过$\widehat{\quad}$软件检查，对于这 54 个划分中的每个划分 μ，矩阵 T^{ρ_μ} 均可逆（表 2 显示了这些矩阵$\widehat{\quad}$的维数以及绝对值最小的特征值），因此（T）$^{\rho_X^{S_{15}}}$可逆，由此完成证明。

□

猜想 3.8. 若 H 是对应于 S_{2p}的划分（p –1， $p-1$， 2）的杨子群，其中 $p \ge 3$ 是素数，且 X 是 S_{2p}中 H 的右陪集$\widehat{\quad}$集合，则（$S \cup \{\xi\}$）$^{\rho_X^{S_{2p}}}$ 可逆。特别地，不存在长度为 $2p$ 、关于 Kendall τ-度量的 1-完美排列码。

我们注意到，通过软件验证，猜想 3.8 对于 $p \in \{3, 5, 7\}$ 成立。

TABLE 2. 所有支配分拆（4,4,4,3）的 15 的划分对应的矩阵 T^{ρ_μ} 的维数及绝对值最小的特征值。$\widehat{\ }\ \mu$

item	划分	维数	特征值
1	(15)	1	1.5×10
2	(14, 1)	14	1.104×10
3	(13, 2)	90	7.232
4	(13, 1, 1)	91	7.217
5	(12, 3)	350	3.686
6	(12, 2, 1)	715	3.619
7	(11, 4)	910	5.467×10^{-1}
8	(8, 7)	1430	-8.095×10^{-3}
9	(10, 5)	1638	-2.611×10^{-3}
10	(11, 2, 2)	1925	3.149×10^{-1}
11	(9, 6)	2002	-4.503×10^{-3}
12	(11, 3, 1)	2835	3.745×10^{-1}
13	(7, 7, 1)	5005	1.035×10^{-2}
14	(5, 5, 5)	6006	-1.497×10^{-3}
15	(10, 4, 1)	7007	-7.028×10^{-3}
16	(10, 3, 2)	9100	1.12×10^{-2}
17	(9, 5, 1)	11375	2.99×10^{-3}
18	(8, 6, 1)	11583	-4.224×10^{-3}
19	(9, 3, 3)	12740	-4.444×10^{-3}
20	(9, 2, 2, 2)	13650	-1.825×10^{-4}
21	(6, 6, 3)	21450	-1.728×10^{-6}
22	(9, 4, 2)	22113	9.626×10^{-5}
23	(4, 4, 4, 3)	24024	-8.294×10^{-4}
24	(7, 6, 2)	25025	-2.424×10^{-4}
25	(7, 4, 4)	25025	1.108×10^{-3}
26	(6, 5, 4)	30030	1.033×10^{-5}
27	(8, 5, 2)	32032	8.217×10^{-4}
28	(8, 4, 3)	35035	-2.925×10^{-4}
29	(7, 5, 3)	45045	3.142×10^{-5}
30	(6, 3, 3, 3)	50050	3.128×10^{-5}
31	(8, 3, 2, 2)	58968	3.477×10^{-4}
32	(5, 4, 3, 3)	75075	-1.733×10^{-4}
33	(5, 4, 4, 2)	81081	-5×10^{-5}
34	(7, 3, 3, 2)	90090	2.1×10^{-5}
35	(5, 5, 3, 2)	96525	-5.987×10^{-5}
36	(6, 5, 2, 2)	100100	2.946×10^{-5}
37	(7, 4, 2, 2)	112112	-6.787×10^{-5}
38	(6, 4, 3, 2)	175175	-3.594×10^{-5}
39	(12, 1, 1, 1)	364	3.599
40	(11, 2, 1, 1)	2925	2.852×10^{-1}
41	(10, 2, 2, 1)	9450	-1.485×10^{-4}
42	(10, 3, 1, 1)	11088	5.085×10^{-3}
43	(9, 4, 1, 1)	25025	-1.767×10^{-4}

44	(7, 6, 1, 1)	27027	3.757×10^{-4}
45	(8, 5, 1, 1)	35100	-7.440×10^{-5}
46	(9, 3, 2, 1)	42042	6.633×10^{-4}
47	（6，6，2，1）	50050	-1.680×10^{-5}
48	(5, 5, 4, 1)	54054	1.934×10^{-4}
49	(8, 3, 3, 1)	57330	9.513×10^{-5}
50	(6, 4, 4, 1)	80080	-2.972×10^{-5}
51	(8, 4, 2, 1)	91000	-2.590×10^{-5}
52	(7, 5, 2, 1)	108108	-3.672×10^{-5}
53	(6, 5, 3, 1)	128700	-1.920×10^{-5}
54	(7, 4, 3, 1)	135135	-2.627×10^{-6}

4. Conclusion

由于采用 Kendall τ-度量的置换码在闪存中具有应用价值，因此吸引了许多研究人员的关注。本文研究最小 Kendall τ-距离为 3 的最大置换码的大小上界。利用群论，我们构建了一个整数规划问题，该问题取决于所选的一个非平凡子群 S_n，其目标函数的最优值给出 $P(n, 3)$ 的一个上界。随后，通过求解与 S_n 的若干子群相对应的整数规划问题，当 $n \geq 7$ 是素数或 $n \in \{6, 14, 15\}$ 时，我们改进了 $P(n, 3)$ 的上界。

5. 声明

5.1. 伦理审批与参与同意。不适用。
本文未报告或涉及任何动物或人类数据或组织的使用。

5.2. 发表同意。不适用。本文不包含任何个人的数据。

5.3. 支持性数据的可用性。本研究期间生成或分析的所有数据均已包含在这篇已发表的文章中。

5.4. 利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。

5.5. 资助。本研究获得伊斯法罕大学研究与技术副校长办公室提供的资助，款项授予研究群 CSG（代码-方案-组）。F. Parvaresh 也获得了 IPM 的部分资助，资助编号为 1401680050。

这些资助来源未参与本研究的设计，也不会参与研究的实施、分析、数据解读或结果提交决策。

5.6. 作者贡献。所有作者均已阅读并批准最终稿。

References

[1] A. Barg 和 A. Mazumdar，置换中的码与秩调制的纠错，《IEEE 信息论汇刊》，56（2010），第 7 期，3158-3165。[2] S. Buzaglo 和 T. Etzion，Kendall τ-度量下置换码大小的界，《IEEE 信息论汇刊》，61（2015），第 6 期，3241-3250。[3] CPLEX Group，12.10 版，（2019）www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-stud io.
[4] U. Dudley，《初等数论指南》，多尔恰尼数学论丛第 41 卷，MAA 指南第 5 卷。美国数学协会，华盛顿特区，2009 年。[5] P. H. Edelman 和 D. White，《码、变换与对称群的谱》，《太平洋数学杂志》，143（1990），47-67。[6] GAP Group，《GAP——群、算法与编程》，4.11.1 版，2021 年。（http://www.gap-system.org）[7] F. G¨olo˘glu、J. Lember、A.-E. Riet 和 V. Skachek，《乌拉姆度量下排列码的新界》，载于 IEEE 信息论国际研讨会（ISIT）论文集，2015 年 6 月，第 1726-1730 页。[8] G. James 和 A. Kerber，《对称群表示论》，《数学及其应用百科全书》第 16 卷，Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州，1981 年。[9] A. Jiang、R. Mateescu、M. Schwartz 和 J. Bruck，《秩调制方案中电荷受限错误的纠正》，《IEEE 信息论汇刊》，56（2010），2112-2120。[10] H. Tarnanen，《通过线性规划得到的排列码上界》，《欧洲组合学杂志》，20（1999），101-114。[11] S. Vijayakumaran，《 τ度量下 S_5 和 S_6 中最大的排列码》，《IEEE 通信快报》，20（2016），第 10 期，1912-1915。[12] X. Wang、Y. Zhang、Y. Yang 和 G. Ge，《汉明度量和 Kendall τ度量下排列码的新界》，《设计、码与密码学》，85（2017），第 3 期，533-545。[13] X. Wang、Y. Wang、W. Yin 和 F-W. Fu，《Kendall τ度量下不存在完美排列码》，《设计、码与密码学》，89（2021），第 11 期，2511-2531。
Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Universityof Isfahan, Isfahan 81746-73441, Iran. School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), 19395-5746 Tehran ,
Iran.*Email address*: a.abdollahi@math.ui.ac.irDepartment of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Universityof Isfahan, Isfahan 81746-73441, Iran.
Email address: bagherian@sci.ui.ac.irDepartment of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Universityof Isfahan, Isfahan 81746-73441, Iran.
Email address: math_fateme@yahoo.comDepartment of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Universityof Isfahan, Isfahan 81746-73441, Iran.
Email address: m.khatami@sci.ui.ac.irDepartment of Electrical Engeenering, University of Isfahan, Isfahan 81746-73441,Iran.School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), 19395-5746 Tehran ,
Iran.*Email address*: f.parvaresh@eng.ui.ac.ir

Department of Applied Mathematics and Computer Science Faculty of Mathematics , and Statistics University of Isfahan Isfahan 81746-73441 Iran.
, , ,*Email address*: r.sobhani@sci.ui.ac.ir