arXiv:2303.02354v1 [math.NT] 4 Mar 2023

正则超尖点表示的局部 Jacquet–Langlands 对应

Kazuki Tokimoto

Abstract. 我们证明，Kaletha 的正则超尖点表示局部朗兰兹对应给出了由 Deligne–Kazhdan–Vign´eras 和 Badulescu 建立的经典局部 Jacquet–Langlands 对应。与我们此前和 Oi 合作的论文类似，该论文证明了关于一般线性群的局部朗兰兹对应的一个类似结果；在我们的证明中，关键要素是 Bushnell–Henniart 的工作，他们明确描述了本质温和超尖点表示的局部 Jacquet–Langlands 对应，以及 Tam 对这一工作的重新诠释，即用 Langlands–Shelstad 的 ζ-数据来表述。虽然在适当假设下，这一结果可由 Fintzen–Kaletha–Spice 最近的工作或 Chan–Oi 的更一般定理推出，但我们的证明无需任何假设。

我们还对与 Oi 合作的前一篇论文中的证明作了几点补充。

Introduction

对于非阿基米德局部域 F 以及其上的连通约化群 G，猜想中的局部朗兰兹对应将 G(F) 的每个不可约光滑表示对应于 G 的一个 L-参数。最近，Kaletha [Kal19a]为温和分歧约化群 G 的超尖点表示定义了正则性的概念，并为（大多数）正则超尖点表示构造了局部朗兰兹对应。值得注意的是，他构造的局部朗兰兹对应是显式的，并且对各群统一适用。

在此前与 Masao Oi 合作的论文 [OT21] 中，我们证明了 Kaletha 的局部朗兰兹对应与 Harris–Taylor 针对 GL$_n$ 的局部朗兰兹对应一致。在本文中，我们针对由 Deligne–Kazhdan–Vign´eras[DKV84] 和 Badulescu [Bad02]给出的 GL$_n$ 内形式的局部 Jacquet–Langlands 对应证明了一个类似的定理。设 G 是 G* := GL$_n$ 的一个内形式，并固定一个中心单代数 A over F，使得 G(F) $= A^\times$。于是，局部 Jacquet–Langlands 对应是 G*(F) 与 G(F) 的不可约离散系列表示之间的一个自然双射 LJLC^{cl} （我们添加上标“cl”，以表明这是经典的对应）。记 LJLC^{Kal} 为由 Kaletha 的局部朗兰兹对应自然诱导的局部 Jacquet–Langlands 对应。它是 G*(F) 与 G(F) 的正则超尖点表示之间的一个双射。

本文的主定理如下（请注意，关于剩余特征的假设是 Kaletha 理论所必需的）：

定理 0.1（定理 4.1）。假设 F 的剩余特征 p 为奇数。设 π 是 G*(F) $=$ GL$_n$(F) 的一个正则超尖点表示。那么我们有

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}(\pi) = \mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}(\pi).$$

必须指出，若假设 F 的特征 ch F 为零且 p 足够大，或者对与 π相关的次数为 n 的域扩张 E/F 作出适当假设，则定理 0.1 可由 Fintzen– Kaletha–Spice [FKS21] 或 Chan–Oi [CO23], 中的更一般结果推出。定理 0.1 无需任何此类假设即可成立，根本原因在于我们使用的结果，尤其是 [BH11],，均不作任何假设（更多详情见注 4.2）。

我们也简要谈谈这与 Kaletha 最近的工作 [Kal19b] 的关系。在 [Kal19b] 中，[Kal19a] 中的理论被推广到一类更广泛的超尖点表示。特别是，文中引入了比正则性更一般的 F-非奇异性概念，并构造了 L-非奇异超尖点表示的 F 参数。人们或许会想知道，同一定理是否也适用于 F-非奇异超尖点表示。然而，这不会带来任何新结果，因为对于 GL$_n$(F)，任意 F-非奇异超尖点表示都是正则的（见注 3.3）。

定理 0.1 的证明与先前的合作论文 [OT21] 类似，并依赖于 Bushnell–Henniart [BH11] 和 Tam [Tam16b] 的工作。我们简要概述证明思路。正则超尖点表示由温和椭圆正则对 (S ξ)（即温和分歧椭圆极大环面 S 与其上的特征 ξ 组成的某些对）的共轭类参数化。由于 G* 与 G 的温和椭圆正则对之间存在自然对应，对于这样的一个对 (S ξ)，我们记 ${}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$ 和${}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$ 为相应的 G*(F) =GL$_n$(F) 及 G(F) 的正则超尖点表示。在展开 LJLC^{Kal} 的定义时，我们会发现

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi\cdot{}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon)}, \tag{0.1}$$

其中，${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon$ （分别为${}_{\mathbf{G}}\epsilon$）是 [Kal19a] 中与 G* （分别为 G）的温和椭圆正则对 (S ξ) 相关联的 S(F) 的温和分歧特征。事实上，对于群 G* 和 G，这种参数化此前已为人所知，且 Bushnell–Henniart [BH11] 研究了它与 LJLC^{cl} 的关系（尽管采用了不同的术语）。在[BH11], 中，给出了一个依赖于 (S ξ) 的温和分歧特征 ν_{rec} （“校正因子”），使得

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi\cdot\nu_{\mathrm{rec}}^{-1})}.$$

此外，Tam [Tam16b] 通过构造一组与 ν_{rec} 相关的显式 $\zeta_{\mathrm{Tam}} = \{\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}\}_\alpha$ ζ-数据，对 ν_{rec} 作了重新诠释。Langlands–Shelstad [LS87] 引入的一组 $\zeta = \{\zeta_\alpha\}_\alpha$ ζ-数据，是一组以 S 的根 α 为索引的特定特征；Tam 的 ζ ζ_{Tam} -数据则将 ν_{rec} 分解为 S(F) 的特征之积，这些特征以 S 的根的伽罗瓦轨道为索引。事实上，特征 G$^*\epsilon$ 和 Gϵ 被定义为类似的乘积，由以 S 的某些伽罗瓦轨道为索引的特征 G$^*\epsilon_\alpha$ 和 Gϵ_α 构成。因此，为了证明定理 0.1，只需证明涉及 ζ_{Tam}、α、G$^*\epsilon_\alpha$、Gϵ_α 的适当等式。然而，所采用的约定或“语言”差异相当大；在 [BH11], Tam16b] 中，中心单代数中的某些阶在构造和研究表示 ${}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$，并最终定义特征 ν_{rec}、ζ_{Tam}、α 时发挥重要作用；而在 [Kal19a] 中，Bruhat–Tits 理论和根论技巧则贯穿始终，得到广泛运用。因此，要证明所需的等式，并不像乍看之下那么直接。

除了证明定理 0.1 外，我们还补充了此前合作论文 [OT21] 中主定理证明的以下两点（更多详情请参见注 4.4）：

• 众所周知，阿廷互反映射和局部朗兰兹对应有两种常见的归一化。尽管在 [OT21] 中，我们没有特别关注 Kaletha、Langlands–Shelstad、Bushnell–Henniart 和 Tam 所采用的不同归一化，但证明可以如下说明:

– 幸运的是，Bushnell–Henniart 的定理（定理 2.3）和 Tam 的命题（命题 2.11）是从自守侧转向伽罗瓦侧的两个关键事实，在另一种规范化下同样原样成立；– [OT21] 中的主要计算完全在自守侧进行，因此与规范化无关，所以该结果仍然正确。

• 虽然我们在 F OT [中假设特征为零，但21], 证明在特征为正时也成立，这主要是因为我们引用的所有结果均与特征无关。

本文的组织如下。第1节总结本文所使用的一些标准记号和约定。第2节回顾 Bushnell–Henniart 对 G*(*F*) 的正则超尖点表示（或按其术语称为本质温和超尖点表示）的 LJLC^{cl} 描述，即通过校正因子进行描述，以及 Tam 关于校正因子的分解结果。由于稍后需要讨论前文 [OT21] ，我们还将说明 G* =GL$_n$的局部朗兰兹对应 LLC$^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}$ 的类似结果。

在第 3 节中，我们回顾 Kaletha 理论中来自 [Kal19a] 的相关部分。更具体地说，我们概述正则超尖点表示的参数化，以及如何将其应用于为一般温和分歧连通约化群部分显式地构造局部朗兰兹对应，并专门讨论该群是 G* =GL$_n$ 的内形式 G 的情形。本节的目标是解释等式 (0.1)，以及 Kaletha 的局部朗兰兹对应 LLC $^{\mathrm{Kal}}_{\mathrm{GL}_n}$ for G* =GL$_n$ 的类似表达式。

在第4节中，我们陈述定理 4.1（即上文的 =定理 0.1）。此外，在回顾截至目前所需的概念和术语之后，我们补充此前合作论文 [OT21] 的论证中上述两点的内容。在第5节中，我们回顾 [Kal19a] 中特征 $\mathbf{G}^{*\epsilon_\alpha}$、$\mathbf{G}^{\epsilon_\alpha}$ 的定义，并在一种情形下对它们进行计算，实质上是计算环面不变量——这是 [Kal15], 为我们的群引入的一种符号不变量。在第6节中，我们回顾定义特征 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}$ 所需的要素。在第7节中，我们最终通过证明涉及特征 $\mathbf{G}^{*\epsilon_\alpha}$、$\mathbf{G}^{\epsilon_\alpha}$、$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}$ 的等式，证明定理 4.1。

在附录 A 中，我们讨论一个迄今为止一直隐含的事实。在明确描述局部雅可比–朗兰兹对应 ^{Kal} 时，Bushnell–Henniart 和 Tam 使用了 [BH11] 中基于温和椭圆正则对（或按他们的术语，可容许对）构造群 $\mathbf{G}(F)$ 的超尖点表示的方法。专家们或许早已熟知，但这一构造与 Kaletha[Kal19a] 给出的构造（后者建立在 Yu [Yu01] 的工作之上）相一致，这一点并非显而易见。我们在附录 A 中简要证明这两个构造相一致，从而可以毫无歧义地写作 $\mathbf{G}^{\pi_{(\mathbf{S},\xi)}}$。

致谢。作者撰写本文耗时异常之久，期间得到了许多人的鼓励，包括 Yao Cheng、Naoki Imai、Yoichi Mieda、Masao Oi、Nobuo Sato、Takeshi Tsuji 和 Chia-Fu Yu。作者衷心感谢他们所有人，尤其是 Tsuji 和 Yu。他

还要感谢 Wen-Wei Li、Alexander Bertoloni Meli 和 Geo Kam-Fai Tam 对前一篇论文 [OT21] 提出的宝贵意见。作者感谢 Tasho Kaletha 对问题给予了有益解答。他还感谢中央研究院数学研究所提供的支持和卓越的研究环境，并感谢 NSTC 资助项目 111-2811-M-001-024 的支持。

Contents

引言 1 1. 记号与约定 4 2. Bushnell–Henniart 和 Tam 所述的局部 Jacquet–Langlands 对应 6 2.1. Bushnell–Henniart 的本质温和局部 Jacquet–Langlands 对应 6 2.2. Langlands–Shelstad 的 χ-数据及其相关的 L-嵌入 9 2.3. L-嵌入与诱导 11 2.4. Tam 对校正因子的重新诠释 13 3. Kaletha 的局部朗兰兹对应 13 3.1. 正则超尖点表示及其参数化 14 3.2. Kaletha 对正则超尖点表示的局部朗兰兹对应 16 4. 主定理 22 4.1. 主定理 22 4.2. 关于 GL$_n$ 23 的一些补充5. 预备知识 I 24 5.1. Howe 分解 24 5.2. 特征 ϵ^{ram} 与 $\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$ 26 5.3. GL$_n$ 28 的椭圆极大环面的根5.4. 环面不变量 30 6. 预备知识 II 32 6.1. 与极大子域相关的序与有限模 32 6.2. 与可容许对相关的有限模 36 6.3. t 因子 42 6.4. Tam 的 ζ-数据 44 7. 主定理的证明 45 7.1 非对称根 46 7.2. 对称非分歧根 47 7.3. 对称分歧根 49 附录 A. GL$_n$ 49 内形式的超尖点表示的两种构造之比较参考文献 57

1. 记号和约定

下面总结本文通篇使用的一些记号和约定。

局部域：设 F 是一个非阿基米德局部域。令 $\mathcal{O}_F$、$\mathfrak{p}_F$、$k_F:=\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ 分别表示 F 的赋值环、极大理想和剩余

域。记 p、q 为 k_F 的特征和基数。我们对 F 的特征 $\mathrm{ch}\ F$ 不作任何假设；它为 0 或 p。设 μ_F 为 F 中阶与 p 互素的单位根群。记 v_F 为 F 的标准化赋值。

我们还经常用以下常见记号表示$F^\times$的一些子群：

$$U_F := U_F^0 := \mathcal{O}_F^\times, \quad U_F^i := 1 + \mathfrak{p}_F^i \text{ for } i \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

对于 F的一个有限有限可分扩张 E/F，我们用 $e(E/F)$ $f(E/F)$分别表示扩张 E/F的分歧指数和剩余次数。

对于任意 F的有限可分扩张 E，我们也使用类似的记号。我们固定一个可分闭包 F^{sep}，并记 $\Gamma_F := \mathrm{Gal}(F^{\text{分}}/F)$以及 W_F分别为 F的绝对伽罗瓦群和（绝对）韦伊群。每当我们讨论 F 的一个可分扩张时，默认将其视为包含在 F^{sep}中。

阿廷互反映射：我们通过阿廷互反映射 $\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\sim} W_{\mathrm{ab}F}$，将 $F^\times$ 的特征与 W_F 的特征对应起来；若 $F^\times$的一个特征为 χ，则通常简记 $\chi \circ \mathrm{Art}_F^{-1}$ 对应的 W_F的特征 χ。

本文通常将 Art_F 规范化，使一致化元映到算术弗罗贝尼乌斯元素（即在 k_F上作用为 q次幂映射的元素），而非几何弗罗贝尼乌斯元素（即其逆元为算术弗罗贝尼乌斯元素的元素）。需要讨论规范化时，我们将它们称为算术规范化和几何规范化，并分别将相应规范化的映射记作$_{\text{算术}}\mathrm{Art}_F$ 和$_{\text{几何}}\mathrm{Art}_F$。因此，对于$x \in F^\times$，我们有$_{\text{几何}}\mathrm{Art}_F(x) = {}_{\text{算术}}\mathrm{Art}_F(x)^{-1}$。

正如 [KS12, §4]，中清楚说明的，阿廷互反映射的规范化选择决定了连通约化群局部朗兹对应的相容规范化，尤其是 GL_n 和环面的情形。

内形式与内扭曲：本文主要讨论 GL_n 及其内形式，但在某些部分也会讨论一般的内形式。下面回顾一些标准概念。

设 G、G′ 是 F 上的连通约化群。若存在一个同构 $\psi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$，定义在 F^{sep} 上，并且对任意 $\sigma \in \Gamma_F$，G 的自同构 $\psi^{-1} \circ \sigma(\psi)$ 都是内自同构，则称 G′ 是 G 的内形式。我们将这样的同构 ψ 或这样的对 (G′, ψ) 称为 G 的内扭曲。对于 G 的一个内扭曲 (G′, ψ)，映射 $\sigma \mapsto \psi^{-1} \circ \sigma(\psi)$ 是一个取值于 G 的伴随商 G_{ad} 中的 1-余循环。若 G 的两个内扭曲定义了 $H^1(F, \mathrm{G}_{\mathrm{ad}})$ 中相同的上同调类，则称它们同构。注意，这意味着其底层内形式同构，但反过来一般不成立。

设 A 是 F 上的中心单代数，满足 $\dim_F A = n^2$，并设 $\underline{A}^\times$ 是代数群，满足

$$\underline{A}^\times(R) = (A \otimes_F R)^\times$$

对于任意交换的 F-代数 R。那么 $\underline{A}^\times$ 是 GL_n 的一个内形式，而 GL_n 的每个内形式都以此方式得到。（不过请注意，我们总有 $\underline{A}^\times \simeq \underline{A}^{\mathrm{op},\times}$，而一般而言 A 与 A^{op} 并不同构。）在这种情况下，F^{sep}-代数的一个同构 $M_n(F^{\mathrm{sep}}) \xrightarrow{\sim} A \otimes_F F^{\mathrm{sep}}$ 诱导出

一个 GL_n的内扭曲 $\mathrm{GL}_n \to \underline{A}^\times$；根据 Skolem–Noether 定理，其同构类不依赖于所选的 F^{sep}-代数同构。换言之，一旦给出以内中心单代数表示的形式，GL_n 的一个内形式便典范地带有一个内扭曲（在同构意义下）。在本文的大部分内容中（即除讨论相关一般理论的部分外），我们固定 A，并令 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$，$\mathrm{G} = \underline{A}^\times$。每当需要内扭曲时，我们都使用由 A诱导的典范内扭曲，有时甚至不作明示。

布劳尔群：我们用 $\mathrm{Br}(F) := H^2(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 表示 F 的布劳尔群。存在典范同构 $\mathrm{inv}_F : \mathrm{Br}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

设 A、$\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$、$\mathrm{G} = \underline{A}^\times$ 如上，并令 $t \in H^1(F, \mathrm{G}^*_{\mathrm{ad}})$ 表示由典范内扭曲 $\mathrm{G}^* \to \mathrm{G}$ 定义的上同调类。则 A 的类 $[A] \in \mathrm{Br}(F)$ 等于 t 在与短正合序列$1 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{G}^* \to \mathrm{G}^*_{\mathrm{ad}} \to 1$相关的余边界映射$H^1(F, \mathrm{G}^*_{\mathrm{ad}}) \to H^2(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \mathrm{Br}(F)$ 下的像。

对偶群和 L-群：对于定义在 F 上的连通约化群 G，我们用“G 表示 G 在 $\mathbb{C}$ 上的对偶群，并用 ${}^L\mathrm{G} :=$ “$\mathrm{G} \rtimes W_F$ 表示该 L-群。精确定义和约定见 [Kot84, §1]。

2. Description of the local Jacquet-Langlands correspondence due to Bushnell–Henniart and Tam

本节首先回顾 Bushnell–Henniart 对 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的本质温和超尖点表示的局部 Jacquet–Langlands 对应的描述。随后，在介绍 Langlands–Shelstad 的 χ-数据和 ζ-数据后，我们回顾 Tam 使用 ζ-数据对上述描述所作的重新诠释。此外，我们还回顾 GL_n 的局部朗兰兹对应的类似结果。

2.1. Bushnell–Henniart 的本质温和局部 Jacquet–Langlands 对应。

设 $A^* := M_n(F)$ 为矩阵代数，并设 A 是 F 上的中心单代数，使得 $\dim_F A = n^2$。那么存在正整数 m、d，以及一个维数为 d^2 的 F 上的中心除代数 D，使得 $n = md$ 且 $A \simeq M_m(D)$（我们固定这样一个同构）。令 $\mathrm{G}^* := \mathrm{GL}_n$，并令 $\mathrm{G} := \underline{A}^\times$。

局部 Jacquet–Langlands 对应给出一个自然双射，记作 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$，它建立了 $\mathrm{G}^*(F) = \mathrm{GL}_n(F)$ 与 $\mathrm{G}(F) = \mathrm{GL}_m(D)$ 的不可约离散系列表示同构类集合之间的对应：

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}} : \{\mathrm{GL}_n(F) \text{ 的离散系列表示}\}/\sim \xrightarrow{1:1} \{\mathrm{GL}_m(D) \text{ 的离散系列表示}\}/\sim$$

其由一个特征标关系刻画。在零特征下，该对应由 Deligne–Kazhdan–Vign´eras[DKV84] 和 Rogawski [Rog83] 建立；在正特征下则由 Badulescu [Bad02] 建立。

在 [BH11], 中，Bushnell–Henniart 对某些超尖点表示集合上的双射 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$ 作了明确描述，这些集合记作 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 和 $\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)$。这一类表示是根据 $\mathrm{GL}_m(D)$ 的离散系列表示的两个不变量π 来定义的。

其中一个是挠数 $t(\pi)$，即满足扭曲表示 $\chi\pi$ 与 π同构的 $F^\times$的非分歧特征 χ 的数量。显然， $t(\pi)$ 是 n的一个因子。

另一个是参数次数 $\delta(\pi)$，这是 [BH11] 中定义的一个正整数。根据 $\delta(\pi)$ 的定义（这里不再赘述），可知 $t(\pi)$ 整除$\delta(\pi)$，且 $\delta(\pi)$ 整除 n。若离散级数表示 π 满足 p 不整除 $\delta(\pi)/t(\pi)$，则称其为本质温和的。此外，若 $\delta(\pi)=n$，则 π 是超尖点表示。对于 $\mathrm{GL}_n(F)$，逆命题也成立，但一般情况下并非如此。

令 $\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)$（分别地，$\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$）表示满足条件 $\delta(\pi)=n$ 且 π 本质温和的 $\mathrm{GL}_m(D)$（分别地，$\mathrm{GL}_n(F)$）的离散级数表示 π 的同构类集合。根据条件 $\delta(\pi)=n$，任何这样的 π 都是超尖点表示。这两个不变量的一个重要性质是，它们在 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$ 下保持不变。特别地，我们看到，$\mathrm{GL}_m(D)$ 的离散级数表示 π 当且仅当满足 $\delta(\pi)=n$ 时，才通过 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$ 对应于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的超尖点表示；并且 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$ 在 $\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)$ 与 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 之间诱导出一个双射。

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{discrete series rep's of } \mathrm{GL}_n(F)\}/\sim & \xrightarrow[1:1]{\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}} & \{\text{discrete series rep's of } \mathrm{GL}_m(D)\}/\sim \\
\uparrow & & \uparrow \\
\{\text{supercuspidal rep's of } \mathrm{GL}_n(F)\}/\sim & \longrightarrow & \{\text{supercuspidal rep's of } \mathrm{GL}_m(D)\}/\sim \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F) & \xrightarrow{\qquad\qquad 1:1 \qquad\qquad} & \mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)
\end{array}$$

Bushnell–Henniart 对 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$ 的显式描述涉及通过可容许对对 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 和 $\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)$ 中元素进行参数化。一个（次数为 n 的）可容许对是一个对 $(E/F,\xi)$，其中

- E/F 是一个次数为 n 的温和分歧扩张，并且
- ξ 是 $E^\times$ 的一个光滑特征，满足某个正则性条件。

如果存在一个 F-同构 $i\colon E\xrightarrow{\sim}E'$ 满足 $\xi=\xi'\circ i$，则称两个可容许对 $(E/F,\ \xi)$ 和 $(E'/F,\ \xi')$ 是 F-同构的。Bushnell–Henniart 在可容许对的 F-同构类集合与 $\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D)$ 之间建立了一个双射。这是对 [BH05a], 中 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 的类似双射的推广，而后者又建立在 Howe 的开创性工作 [How77] 之上（其中使用的是“可容许特征”一词）。我们将由次数为 n 的可容许对 $(E/F,\ \xi)$ 参数化的 $\mathrm{GL}_m(D)$（分别为 $\mathrm{GL}_n(F)$）的超尖点表示写作 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$（分别为 ${}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$）。

$$\{\text{admissible pairs of degree } n\}/F\text{-isom.} \xrightarrow{1:1} \mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D);\quad (E/F,\xi)\mapsto {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}.$$

我们将在附录 A 开头简要回顾${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$ 的构造。

[BH11] 的一项主要结果用可容许对和特征扭曲描述了 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 的 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}$（即 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的本质温和超尖点表示）：

定理 2.1（[BH11]）。设（E/F，ξ）是一个可容许对。那么存在一个显式的温和分歧特征 ν_{rec} of $E^\times$（它取决于 ξ，但只通过$\xi|_{U_E^1}$），使得

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\nu_{\mathrm{rec}}\cdot\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)},$$

或者等价地，

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\nu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi)}.$$

这里，上标“cl”代表“经典”，下标“rec”代表 [BH10]（以及 [Tam16b]）中的“校正因子”一词。

注记 2.2. 正如 [BH11]，第 470 页第二段所强调的，无论特征 ch F 如何，该结果均成立。

我们也来考虑 GL$_n$ 的局部朗兰兹对应。它是一个双射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}$，将 GL$_n(F)$ 的不可约光滑表示同构类集合对应到 GL$_n(\mathbb{C})$-共轭的 GL$_n$ L-参数共轭类集合（或者等价地，n 维 Frobenius 半单 Weil–Deligne 表示的同构类集合）；该对应在正特征下由 Laumon–Rapoport–Stuhler [LRS93] 建立，在零特征下由 Harris–Taylor [HT01] 建立。在他们早期的论文 [BH05a], [BH05b], [BH10], 中，Bushnell–Henniart 也明确给出了 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}$ 对于$\mathcal{A}^{\mathrm{et}}_n(F)$ 的描述：

定理 2.3 ([BH05a], [BH05b], [BH10])。设 $(E/F,\xi)$ 是一个可容许对。那么存在一个显式的温和分歧特征 μ_{rec}，它属于 $E^\times$（依赖于 ξ，但仅通过 $\xi|_{U_E^1}$），使得

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\mu_{\mathrm{rec}}\cdot\xi)}) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}\xi,$$

或者等价地，

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}(\mu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi).$$

注记 2.4。与阿廷互反映射（第1节）类似，我们用 算术 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}$（分别用 几何 LLC $^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}$）表示按照算术（分别为几何）规范化的 GL$_n$ 的局部朗兰兹对应。于是，正如 [KS12, §4.4], 中所说明的，对于 GL$_n(F)$ 的任意不可约光滑表示 π，n 维韦伊–德利涅表示 算术 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}(\pi)$ 与其几何规范化对应表示的对偶表示 $({}_{\mathrm{geom}}\,\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}(\pi))^\vee$ 同构。

由于本文通常采用算术规范化，若要明确说明规范化方式，定理 2.3 的（第二个）陈述如下：

$${}_{\mathrm{arith}}\,\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}\left((\mu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi)\circ {}_{\mathrm{arith}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right).$$

由于 Bushnell–Henniart 采用几何规范化，在 [BH05a], [BH05b], [BH10] 中找到的陈述，立即就是将上述等式中的两个“arith”替换为“geom”所得的等式。然而，以下不难从后一个等式推出定理 2.3：

$$\begin{aligned}
{}_{\mathrm{arith}}\,\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) &= \left({}_{\mathrm{geom}}\,\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathrm{GL}_n}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)})\right)^\vee \\
&= \left(\mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}\left((\mu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi)\circ {}_{\mathrm{geom}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right)\right)^\vee \\
&= \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}\left((\mu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi)\circ {}_{\mathrm{geom}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right)^{-1} \\
&= \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}\left((\mu_{\mathrm{rec}}^{-1}\cdot\xi)\circ {}_{\mathrm{arith}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right).
\end{aligned}$$

换言之，特征 μ_{rec} 与 [BH05a], [BH05b], [BH10] 中的完全相同，适用于算术归一化的表述。

注 2.5。再次强调，定理 2.3 无论特征 ch F 如何都成立。事实上，根据 [BH14, 第 8 页“关于特征的注记”], ，尽管 ch F 最初在 [BH05a], [BH05b], [BH10], 中被假定为零，但多亏了 [HL10], 现在该结果也适用于正特征情形。

2.2. Langlands–Shelley 的 χ—数据及相关的 L—嵌入。我们重新介绍 Langlands–Shelley 引入的 χ—数据及相关的 L—嵌入 [LS87]。本节中，设 G 是定义在 F 上的一般连通约化群，S 是 G 的一个定义在 F 上的极大环面。

伽罗瓦群 Γ_F 作用于 G 的（绝对）根的集合 Φ(S, G) 上。给定一个根 $\alpha \in \Phi$(S, G), 我们分别用 Γ_α 和 $\Gamma_{\pm\alpha}$ 表示 $\{\alpha\}$ 和 $\{\pm\alpha\}$ 的稳定子。注意到我们有 $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\pm\alpha}$，且该指标只能是 1 或 2。我们还分别用 F_α 和 $F_{\pm\alpha}$ 表示 Γ_α 和 $\Gamma_{\pm\alpha}$ 在 F^{sep} 中的不动域。遵循 Langlands–Shelley [LS87] 和 Adler–Spice [AS09], 的做法，我们称

- 根 $\alpha \in \Phi$(S, G) 是非对称的（分别地，对称的），如果 $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\pm\alpha}$ （分别地，$\Gamma_\alpha \subsetneq \Gamma_{\pm\alpha}$）并且
- 对称根 $\alpha \in \Phi$(S, G) 是非分歧的（分别地，分歧的），如果二次扩张 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 是非分歧的（分别地，分歧的）。

我们将 Φ(S,G)^{sym}、 Φ(S,G)$_{\mathrm{sym}}$、 Φ(S,G)$_{\mathrm{sym,\ ur}}$ 以及 Φ(S,G)$_{\mathrm{sym,\ ram}}$ 分别记作非对称根、对称根、对称非分歧根和对称分歧根的集合。

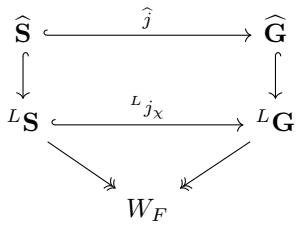
定义 2.6（[LS87]）。一组 $\chi = \{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})}$ 关于 χ数据（对于 Φ(S, G)）由满足以下性质的特征 χ_α： $F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ 组成：

（1）对于任意 $\alpha \in \Phi$(S, G) 和 $\sigma \in \Gamma_F$，我们有

$$\chi_{-\alpha} = \chi_\alpha^{-1}, \quad \chi_{\sigma\cdot\alpha} = \chi_\alpha \circ \sigma^{-1}$$

以及（2）对于对称根 $\alpha \in \Phi$(S, G)，限制 $\chi_\alpha|_{F_{\pm\alpha}^\times}$ 与二次扩张 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$ 所对应的二次特征一致。

给定一组 χ χ数据，我们可以按如下方式构造一个从 ^{L}S到 ^{L}G的嵌入（模去 G-共轭）。令 j: S $\hookrightarrow$ G表示包含映射。我们固定一个包含 S 的博雷尔子群 B $\subset$ G（它可能未定义在 F上），并暂时固定“G的一个Γ_F-不变分裂$(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}\})$。于是，存在由对(B, S)和$(\mathcal{B}, \mathcal{T})$所关联的同构 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \widehat{\ }$S，因此，通过将前一个同构的逆与包含映射 $\mathcal{T} \hookrightarrow$ G复合，也得到一个嵌入 $\widehat{j}$: $\widehat{\ }$S $\hookrightarrow$“G。进一步利用 $\{\mathcal{X}\}$ 和 χ，我们可以构造一个嵌入 $^L j_\chi$: ^{L}S $\hookrightarrow$ ^{L}G，它延拓$\widehat{j}$ 并保持到 W_F 的投影（见 [LS87, (2.6)]）。“G-共轭类 $^L j_\chi$ 取决于 χ数据的选择，但不取决于 B 和$(\mathcal{B}, \mathcal{T}, \{\mathcal{X}\})$的选择（见 [LS87, (2.6.1)和(2.6.2)]）。



注2.7。我们不回顾 ${}^L j_\chi$的构造，只指出在该构造中， χ数据中的每个 χ_α 都通过阿廷互反映射$_{\text{算术}}\mathrm{Art}_{F_\alpha}$ 与 W_{F_α} 的一个特征对应（关于$_{\text{算术}}\mathrm{Art}_{F_\alpha}$，见第1节）。为强调本文使用的算术规范化，我们有时将本文中的 ${}^L j_\chi$ 记作 ${}^L{}_{\text{算术}}j_\chi$。容易验证，若 $\chi = \{\chi_\alpha\}$ 是一组 χ数据，则 $\chi^{-1} = \{\chi_\alpha^{-1}\}$也如此。因此，我们可以自然地构造一个采用几何规范化的 L-嵌入 ${}^L{}_{\text{几何}}j_\chi$ ，即，

$$ {}^L_{\mathrm{geom}}j_\chi := {}^L_{\mathrm{arith}}j_{\chi^{-1}}. $$

注 2.8. 全文假设 [LS87], ch F 为零。不过，正如 [Dil20, §6.22], 所述，即使在正特征下，从一组 χ-数据构造一个 L-嵌入也毫无问题。

稍后我们还需要一个类似的概念，称为 ζ-数据:

定义 2.9（[LS87]）。一组 ζ-数据（针对 $\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})$）由满足以下性质的特征 ζ_α : $F_\alpha^\times \to \mathbb{C}^\times$ 组成:

(1) 对任意 $\alpha \in \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})$ 和 $\sigma \in \Gamma_F$，都有

$$ \zeta_{-\alpha} = \zeta_\alpha^{-1}, \quad \zeta_{\sigma\cdot\alpha} = \zeta_\alpha \circ \sigma^{-1} $$

and

(2′) 对于对称根 $\alpha \in \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})$，限制 $\zeta_\alpha|_{F^\times_{\pm\alpha}}$ 是平凡的。

继续之前，我们先总结一些标准事实。

注 2.10. (1) 设 G 和 S 如上。此外，设 ψ: G $\to$ G′ 是 G 的一个内扭曲，并假设限制 $\psi|_{\mathbf{S}}$: S $\to$ G′ 定义在 F 上。那么，S 在 ψ 下的像也是 G′ 中的一个极大环面，我们仍简记为 S。在这种情况下，我们有以下等式

$$ \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}) = \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}') $$

关于 S 的（绝对）特征群 X^*(S) 的子集。

现在设 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$ ，并设 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如第 2.1 节所述，且假设极大环面 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}^*$ 是椭圆的。回顾一下，我们有一个内扭曲 ψ: $\mathbf{G}^* \to \mathbf{G}$，它在同构意义下是典范的（见第1节）。根据[Kot86, §10] 和 [Kal19a，引理 3.2.1], ，存在 $g \in \mathbf{G}^*(F^{\mathrm{sep}})$，使得 $\psi \circ \mathrm{Ad}(g)|_{\mathbf{S}}$: S $\to$ G 定义在 F 上。因此，我们处于上述情形，并有 $\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*) = \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})$。

（2）设 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n = \underline{A}^{*,\times}$ 和 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如上一段所述。

众所周知，也容易看出，以下集合之间存在自然双射:

(a) F-同构类的集合，其中对象为次数为n的可分扩张 E/F ; (b1) 椭圆极大环面 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}^*$的 $\mathbf{G}^*(F)$-共轭类集合; (c1) 环面 S 的 F-嵌入 j: S $\hookrightarrow$ $\mathbf{G}^*$ 的等价类集合，其中 j(S) $\subset \mathbf{G}^*$ 是一个椭圆极大环面; 若存在一个 F-同构ι: $\mathbf{S}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}_2$，使得 j_1与 $j_2 \circ \iota$ 在 $\mathbf{G}^*(F)$ 下共轭，则称 j_1: $\mathbf{S}_1 \hookrightarrow \mathbf{G}^*$ 与 j_2: $\mathbf{S}_2 \hookrightarrow \mathbf{G}^*$ 等价; (b2) 椭圆极大环面 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}$ 的 $\mathbf{G}(F)$- 共轭类集合; 以及 (c2) 环面 S 的 F-嵌入 j: S $\hookrightarrow$ G的等价类集合，其中 j(S) $\subset$ G是一个椭圆极大环面，其等价关系与 (c1) 中的类似。

我们仅略述这些双射。从 (c1) 到 (b1) 的双射由取 j 的像诱导，而从 (b1) 到 (a) 的双射由取一个扩张 E/F 诱导，使得 S 同构于 $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$；从 (a) 到 (c1) 的双射则由取一个 F-代数嵌入 $E \hookrightarrow A^*$ 诱导，从而得到 $S := \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \hookrightarrow \underline{A}^{*,\times} = G^*$。(b1) 与 (b2) 之间的双射（以及 (c1) 与 (c2) 之间的双射）可以按照前一条备注中的类似方式诱导得到。

本文中我们频繁使用这些双射。

2.3. *L*-嵌入与诱导。设 $G^* = \mathrm{GL}_n$ 和 $G = \underline{A}^{\times}$ 如第 2.1 节所述。此外，设 $S \subset G^*$ 是一个椭圆极大环面。那么 $S \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，其中 E/F 是次数为 n的某个可分扩张。

首先，我们回顾集合 $\Phi(S, G^*) = \Phi(S, G)$ 的显式描述（参见注2.10（1））, 依据 [Tam16a，第3节1]（另见 [Tam16b，第2节1]）。典范同构

$$E \otimes_F F^{\mathrm{sep}} \xrightarrow{\sim} (F^{\mathrm{sep}})^{\Gamma_F/\Gamma_E}; \quad x \otimes a \mapsto (\sigma(x)a)_{\sigma\Gamma_E}$$

诱导出一个同构 $S_{F^{\mathrm{sep}}} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\Gamma_F/\Gamma_E}$。对于任意 $g \in \Gamma_F$，我们记 δ_g为复合映射

$$\delta_g \colon \mathbf{S}_{F^{\mathrm{sep}}} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\Gamma_F/\Gamma_E} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

再投影到 $g\Gamma_E$-分量。于是，对于 Γ_F/Γ_E 的任意一组代表元 $\{g_1, \ldots, g_n\}$，特征 δ_{g_1}、 ..... 、 δ_{g_n} 构成绝对特征群 $X^*(S)$ 的一个 $\mathbb{Z}$- 基。

记 $\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \delta_{g_1} - \delta_{g_2} \in X^*(S)$ 为 $g_1, g_2 \in \Gamma_F$。则集合 $\Phi(S, G^*)$ 可描述为

$$\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^*) = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \mid g_1\Gamma_E \neq g_2\Gamma_E \right\}.$$

注意， $\Phi(S, G^*)$ 在 Γ_F 的作用下保持不变，且该作用由下式给出

$$g \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gg_1 \\ gg_2 \end{bmatrix}$$

对于 $g \in \Gamma_F$ 和 $\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \in \Phi(S,G^*)$。此外，我们有如下双射:

$$(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)' \xrightarrow{1:1} \Gamma_F\backslash\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^*); \quad \Gamma_E g\Gamma_E \mapsto \Gamma_F \begin{bmatrix} 1 \\ g \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)' := \Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E - \{\Gamma_E\}$ 表示非平凡双陪集的集合。

现在令 ξ 为 $S(F)$ 的一个特征，令 $\chi = \{\chi_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)}$ 为一组 χ-数据。环面 S 的局部朗兰兹对应将 ξ 与 S 的一个 L-参数ϕ_ξ: $W_F \to {}^L S$ 对应起来。另一方面, χ-数据 χ 给出一个 L-嵌入${}^L j_\chi$: ${}^L S \hookrightarrow {}^L G^*$，如第 2.2 节所述。因此，通过复合, 我们得到 G^*的一个 L-参数:

$${}^L j_\chi \circ \phi_\xi \colon W_F \to {}^L\mathbf{G}^*.$$

注意，通过后复合投影 $\mathrm{pr}_{\widehat{G^*}}$: ${}^L G^* \to \widehat{G^*}$，我们也可以将这个 L-参数视为 W_F 的 n-维表示。Tam 的下述命题给出了这个表示的一个有用表达式。

命题 2.11（[Tam16a，命题 6.5]）。设 ξ 和 χ 如上。令

$$\mu_\chi := \prod_{[\alpha]\in\Gamma_F\backslash\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)} \chi_\alpha|_{E^\times},$$

其中，对于每个轨道 $[\alpha]\in\Gamma_F\backslash\Phi$(S, G*)，我们取一个形如 $\alpha=\ddot{\imath}\begin{smallmatrix}1\\ &g\end{smallmatrix}\grave{\jmath}$ 的代表元 $\alpha\in\Phi$(S, G*)，其中 $g\in\Gamma_F$ 为某个值。

那么，将 ${}^Lj_\chi\circ\phi_\xi$ 视为 W_F 的一个 n 维表示时， L-参数 ${}^Lj_\chi\circ\phi_\xi$ 与 $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\xi\cdot\mu_\chi)$ 同构。

注意，对于根 $\alpha=\ddot{\imath}\begin{smallmatrix}g_1\\ &g_2\end{smallmatrix}\grave{\jmath}\in\Phi$(S, G*)，不动域 F_α 就是合成域 $g_1(E)\cdot g_2(E)$，因此 $F_\alpha^\times$ 包含命题中 $\alpha=\ddot{\imath}\begin{smallmatrix}1\\ &g\end{smallmatrix}\grave{\jmath}$ 对应的 $E^\times$，限制 $\chi_\alpha|_{E^\times}$ 也就有意义。此外，限制 $\chi_\alpha|_{E^\times}$ 只取决于轨道 $[\alpha]$，而不取决于 $\alpha=\ddot{\imath}\begin{smallmatrix}1\\ &g\end{smallmatrix}\grave{\jmath}$ 的选择。事实上，根据 (2.1)，另一种选择 β 可写成 $\beta=\ddot{\imath}\begin{smallmatrix}1\\ &h_1gh_2\end{smallmatrix}\grave{\jmath}$，其中 $h_1,h_2\in\Gamma_E$ 为某些值。于是我们有

$$\beta=\begin{bmatrix}1\\ h_1g\end{bmatrix}=h_1\cdot\begin{bmatrix}h_1^{-1}\\ g\end{bmatrix}=h_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ g\end{bmatrix}=h_1\cdot\alpha,$$

这意味着

$$\chi_\beta(x)=\chi_{h_1\cdot\alpha}(x)=\chi_\alpha(h_1^{-1}(x))=\chi_\alpha(x)$$

对于任意 $x\in E^\times$。

注 2.12. 下面讨论算术和几何归一化。规范化通过三个对象与命题 2.11 相关:

- L-嵌入 ${}^Lj_\chi$ （注 2.7），
- S 的 L-参数 ϕ_ξ，以及
- W_E （第1节）的特征 $\xi\cdot\mu_\chi$。

我们将${}_{\mathrm{arith}}\phi_\xi$ （分别地，${}_{\mathrm{geom}}\phi_\xi$）记作 S 的 L 参数，该参数由 S(F) 的特征ξ 通过 S 的局部朗兰兹对应得到，并采用算术（分别地，几何）规范化。我们有${}_{\mathrm{arith}}\phi_\xi={}_{\mathrm{geom}}\phi_{\xi^{-1}}$。因此，命题 2.11 的表述用精确但繁琐的记号写出如下:

$$\mathrm{pr}_{\widehat{\mathbf{G}^*}}\circ{}^L_{\mathrm{arith}}j_\chi\circ{}_{\mathrm{arith}}\phi_\xi\simeq\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\left((\xi\cdot\mu_\chi)\circ{}_{\mathrm{arith}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right).$$

事实上， [Tam16a，命题 6.5] 采用几何规范化。换言之，它断言

$$\mathrm{pr}_{\widehat{\mathbf{G}^*}}\circ{}^L_{\mathrm{geom}}j_\chi\circ{}_{\mathrm{geom}}\phi_\xi\simeq\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\left((\xi\cdot\mu_\chi)\circ{}_{\mathrm{geom}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right),$$

这与命题 2.11 并不完全相同。不过，与注记 2.4 类似，可以很容易地按如下方式从一个推出另一个:

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\widehat{\mathbf{G}^*}}\circ{}^L_{\mathrm{arith}}j_\chi\circ{}_{\mathrm{arith}}\phi_\xi&\simeq\mathrm{pr}_{\widehat{\mathbf{G}^*}}\circ{}^L_{\mathrm{geom}}j_{\chi^{-1}}\circ{}_{\mathrm{geom}}\phi_{\xi^{-1}}\\&\simeq\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\left((\xi^{-1}\cdot\mu_{\chi^{-1}})\circ{}_{\mathrm{geom}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right)\\&\simeq\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\left((\xi^{-1}\cdot\mu_\chi^{-1})\circ{}_{\mathrm{geom}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right)\\&\simeq\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\left((\xi\cdot\mu_\chi)\circ{}_{\mathrm{arith}}\mathrm{Art}_E^{-1}\right).\end{aligned}$$

这里我们使用了等式 $\mu_{\chi^{-1}} = \mu_\chi^{-1}$，该等式由$\mu_\chi$的定义可直接得到。

受命题 2.11 的启发，Tam 为 ζ-数据定义了 μ_χ 的一个变体：

定义 2.13（[Tam16b，第 379] 页）。设 $\zeta = \{\zeta_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)}$ 为一组 ζ-数据。令

$$\nu_\zeta := \prod_{[\alpha]\in\Gamma_F\backslash\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)} \zeta_\alpha|_{E^\times},$$

其中，对每个轨道 $[\alpha] \in \Gamma_F\backslash\Phi$(S, G*)，我们取命题 2.11 中的一个代表元 $\alpha \in \Phi$(S, G*)。

2.4. Tam 对校正因子的重新诠释。设 G*、G、S $\simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 如上一节所述，并设 ($E/F,\xi$) 是一个可容许对。于是由定理 2.3 和定理 2.1 可得 $E^\times$ 的特征 μ_rec、ν_rec。

在 [Tam16a]（分别地，[Tam16b]）中，Tam 构造了一组显式的 χ-数据（分别地，ζ-数据），记作

$$\chi_\mathrm{Tam} = \{\chi_{\mathrm{Tam},\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)},\quad \zeta_\mathrm{Tam} = \{\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)}$$

分别。

定理 2.14（[Tam16a，定理 7.1 (ii)], [Tam16b，定理 5.5 (ii)]）。沿用上述记号，则有

$$\mu_\mathrm{rec} = \mu_{\chi_\mathrm{Tam}},\quad \nu_\mathrm{rec} = \nu_{\zeta_\mathrm{Tam}}.$$

注 2.15。该定理以及命题 2.11 均不受 ch F 的任何限制。事实上，根据 [Tam16a，注 1.3] 和 [Tam16b，注 1.3],，作出 ch $F = 0$ 这一假设仅仅是因为引用了论文 [LS87], [KS99]；但相关部分的理论在正特征下同样适用（见注 2.8）。

将定理 2.14 与定理 2.3 和定理 2.1 结合起来，可得：

推论 2.16。沿用上述记号，则有

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{G}^*}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu_{\chi_\mathrm{Tam}}^{-1}\cdot\xi),\quad \mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\nu_{\zeta_\mathrm{Tam}}^{-1}\cdot\xi)}.$$

注 2.17。根据注 2.15、2.4、2.5，定理 2.16 中 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{G}^*}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)})$ 的表达式采用算术规范化，且不受 ch F 的影响。此外，根据注 2.15、2.2，定理 2.16 中 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)})$ 的表达式不受 ch F 的影响。

3. Kaletha's local Langlands correspondence

这里我们回顾 Kaletha 在 [Kal19a], 中为正则超尖点表示所定义的局部朗兰兹对应。该理论适用于 F 上相当一般的温和分歧连通约化群；我们还将其稍作改述，以适用于我们的目的。当该理论专门应用于群 G* = GL$_n$,G $= \underline{A}^\times$ 时，我们也会引入一些记号。

严格来说，在 [Kal19a] 中对 p 施加了若干假设（参见 [Kal19a，第 2.1] 节）。我们不再重述这些假设，但指出，对于群 G* = GL$_n$、G $= \underline{A}^\times$，只需假设 $p \neq 2$。

3.1. 正则超尖点表示及其参数化。设 G 是定义在 F 上的温和分歧连通约化群。在 [Yu01], Yu 中，通过具体数据 $\Psi = ((\mathrm{G}^0 \subsetneq \mathrm{G}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{G}^t)\ \pi_{-1}, (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_t))$ 构造了 G(F) 的一个不可约超尖点表示 π_Ψ^{Yu}，其中

- 每个 G^i 都是 G 的温和扭曲 Levi 子群（即定义在 F 上的连通约化子群，并且在某个温和分歧扩张上成为 Levi 子群），
- π_{-1} 是 $\mathrm{G}^0(F)$ 的深度零超尖点表示，并且
- 每个 ϕ_i 都是 $\mathrm{G}^i(F)$ 的特征

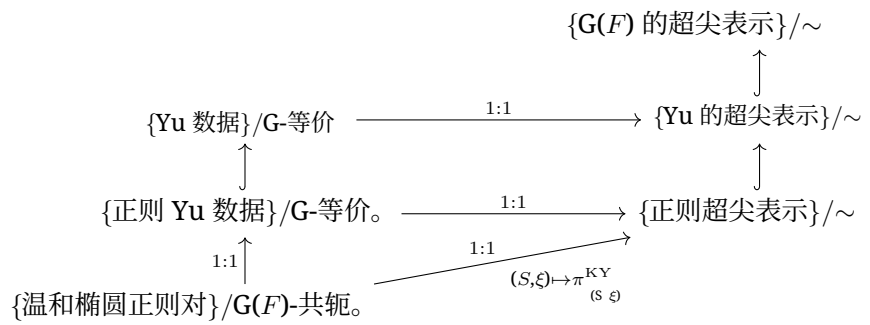
满足各种条件。在后续的一篇论文中， [HM08] 将这种数据 Ψ 称为约化泛型尖点 G-数据。本文沿用 [Kal19a], 的做法，简称 Ψ 为 Yu 数据。

在研究 [HM08] Yu 构造时，Hakim–Murnaghan 在 Yu 数据集合上定义了一种等价关系，称为 G-等价，并证明两个 Yu 数据 Ψ 和 Ψ' 产生同构的超尖点表示 π_Ψ^{Yu}和$\pi_{\Psi'}^{\mathrm{Yu}}$，当且仅当 Ψ 和 Ψ' 是 G-等价的。这一结果在 [HM08，定理 6.6] 的假设 C（$\vec{\mathrm{G}}$）下得到证明，但在 [Kal19a，第 3 节5]中证明该定理在不满足这一假设的情况下仍然成立。

基于这些结果，Kaletha [Kal19a，定义 3.7.3]通过对 π_{-1}施加某个条件，定义了 Yu 数据（的 G-等价类）的正则性。由正则 Yu 数据通过 Yu 构造得到的 G(F) 的不可约超尖点表示，称为正则超尖点表示。随后，他证明正则 Yu 数据的 G- 等价类可由更简单的对象——温和椭圆正则对（若要强调群 G，也称 G 的温和椭圆正则对）——参数化。更具体地说，一个温和椭圆正则对 $(\mathrm{S}\ \xi)$ 由以下部分组成

- G 的一个温和分歧椭圆极大环面 S，以及
- S(F) 的一个特征 ξ，满足某个正则性条件

（[Kal19a, 定义 3.7.5]），并且温和椭圆正则对的 G(F)-共轭类集合与正则 Yu 数据的 G-等价类集合之间存在一个明确的双射（[Kal19a, 命题 3.7.8]）。如果正则 Yu 数据 Ψ 的 G-等价类通过该双射对应于温和椭圆正则对 $(\mathrm{S}\ \xi)$ 的 G(F)-共轭类，我们记 $\pi_{(\mathbf{S},\xi)}^{\mathrm{KY}}\ \pi_\Psi^{\mathrm{Yu}}$。因此，关联 $(\mathrm{S}\ \xi) \mapsto \pi_{(\mathbf{S},\xi)}^{\mathrm{KY}}$ 在 G 的温和椭圆正则对的 G(F)-共轭类集合与 G(F) 的正则超尖点表示的同构类集合之间诱导出一个双射。



注 3.1。在论文 [Kal19a] 发表后，有人指出，Yu 的论文（[Yu01, 命题 14.1，定理 14.2]）中的一些陈述是错误的，因此，Yu [Yu01] 中表示 π_Ψ^{Yu} 的不可约性和超尖性的证明按原样并不正确。

幸运的是，已有两种方法可以解决这种情况。一种方法是借助 Fintzen [Fin21], 的一个结果，该结果在不使用 [Yu01, Proposition 14.1, Theorem 14.2] 的情况下证明了上述不可约性和超尖性。

另一种方法由 Fintzen–Kaletha–Spice [FKS21] 提出，即在 Yu 构造的每个步骤中都“扭转”一个微妙的二次特征，使得 [Yu01] 中的原始证明适用于这一修正构造（见 [FKS21, §4.1]）。当需要在中间步骤中出于其他目的对辅助表示应用 [Yu01, Proposition 14.1, Theorem 14.2] 时，这种方法很有用。本文所关注的重要内容如下（见 [FKS21, §4.3, §4.4]）：

- 若将通过 [FKS21], 中的修正构造从 Ψ 得到的不可约超尖点表示记为 $\pi_{\mathrm{Yu},\ \mathrm{FKS}\ \Psi}$，那么对于某个 Ψ'，有 $\pi_{\mathrm{Yu},\ \mathrm{FKS}\,\Psi} \simeq \pi_{\mathrm{Yu}\Psi'}$。过程 $\Psi \mapsto \pi_{\mathrm{Yu},\ \mathrm{FKS}\ \Psi}$ 导出了一种修正参数化：以 Yu 数据参数化 Yu 的超尖点表示，同时保持正则性；因此，也导出了一种修正参数化：以温和椭圆正则对参数化正则超尖点表示。
- 正如我们将在下文第 3.2 节回顾的，Kaletha 针对正则超尖点表示的局部朗兰兹对应 $\mathrm{LLC}_{\mathrm{Kal}(\mathbf{G}\ \psi)}$ 是通过温和椭圆正则对对这些表示进行参数化而构造的。尽管后续论文（如 [FKS21], [Kal19b] ）使用了修正参数化来研究该对应（的某个扩张），映射 $\mathrm{LLC}_{\mathrm{Kal}(\mathbf{G}\ \psi)}$（从某些正则超尖点表示到$L$-参数）仍保持不变。换言之，本文中的 Kaletha 局部朗兰兹对应与 [FKS21], [Kal19b] 中讨论的相同（限于那些正则超尖点表示）。

3.1.1. 温和椭圆正则对与可容许对。现在设 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 是 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 的一个内形式，如第 2.1 节所述。（如第 3 节开头所述，我们假设 $p \neq 2$。）那么，次数为 n 的可容许对与 G 和 $\mathbf{G}^*$ 的温和椭圆正则对实质上相同，具体而言，注 2.10 (2) 中的双射给出了以下同一化

- F次数为 n 的温和分歧扩张 E/F 与其 $E^\times$ 上的特征 ξ 所成的对 $(E/F, \xi)$ 的同构类，以及
- $\mathbf{G}^*(F)$-共轭类（分别为 $\mathbf{G}(F)$-共轭类），由一对 $(\mathbf{S}\ \xi)$ 构成，其中 S 是 $\mathbf{G}^*$（分别是 G）的温和分歧椭圆极大环面，且带有 $\mathbf{S}(F)$ 上的特征ξ 。

这进而导出以下双射：

$$\begin{aligned}\{\text{adm. pairs of degree } n\}/F\text{-isom.} &\xrightarrow{1:1} \{\text{tame ell. reg. pairs of } \mathbf{G}^*\}/\mathbf{G}^*(F)\text{-conj.} \\ &\xrightarrow{1:1} \{\text{tame ell. reg. pairs of } \mathbf{G}\}/\mathbf{G}(F)\text{-conj.}\end{aligned}$$

第一个双射见 [Kal19a，引理 3.7。7] （注意，即使 p 整除 n，证明仍然成立。）第二个双射可由温和椭圆正则对的定义（此处略去）轻易得出。

通过上述第二个双射，我们将 G^* 的 G ξ 的温和椭圆正则对 (S ξ) 与 G 的温和椭圆正则对对应起来，并用 ${}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)}$ （分别用 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)}$）表示 $\mathrm{G}^*(F)$（分别为 $\mathrm{G}(F)$）的相应正则超尖点表示。

命题 3.2. 设 (S ξ) 是 G（或 G^*）的温和椭圆正则对，且 $(E/F,\xi)$ 是次数为 n 的可容许对，使得 (S ξ) 的 $\mathrm{G}(F)$-共轭类（或 $\mathrm{G}^*(F)$-共轭类）与 $(E/F,\xi)$ 的 F-同构类在上述双射下对应。那么有以下同构：

$$ {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)} \simeq {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)}, \quad {}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)} \simeq {}_{\mathbf{G}^*}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)}. $$

这大概是众所周知的；无论如何，[OT21, 附录 A]，中概述了 G^* 的证明，但我们仍在本文附录 A 中给出 G 的证明概要。今后，我们分别将这些表示简记为 ${}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$ 和 ${}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$。

注 3.3. 在 [Kal19b] 中，Kaletha 将其在[Kal19a] 中的局部朗兰兹对应扩展到了更广泛的一类超尖点表示，即 F-非奇异超尖点表示。它们同样基于 Yu 构造，但比正则超尖点表示更一般，并且以温和椭圆 F-非奇异对作为参数。不过，对于 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 的内形式 G，这些概念是相同的。为此，只需验证 G 的任意温和椭圆 k_F-非奇异对都来自一个可容许对。这很容易做到，因为 [Kal19b, 注 3.4.4] 中已证明 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 的情形，而 F-非奇异性在稳定共轭下保持不变，见 [Kal19b, 注 3.1.4]。

3.2. Kaletha 对正则超尖点表示的局部朗兰兹对应。设 G^* 是定义在 F 上的温和分歧连通约化群，并且是准分裂的。

本节首先回顾 Kaletha 为正则超尖点表示构造的局部朗兰兹对应（[Kal19a, §5]）。在此过程中，我们还将较为详细地回顾一些必要的要素，尤其是特征 ϵ 以及一组显式的 χ-数据 χ_{Kal}。然后，我们将其重新表述为映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$：从 G^* 的内扭曲 (G ψ) 的某些正则超尖点表示映至 G^* 的 L-参数（参见图表 (3.4)）。最后，我们将讨论特例 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$。

严格来说，映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 的定义域通常未必是 $\mathrm{G}(F)$ 的所有正则超尖点表示构成的集合；不过，本文常将其称为正则超尖点表示的 Kaletha 局部朗兰兹对应（我们此前也经常如此称呼），因为当 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 时确实如此（参见下文注 3.4）。

如第 3 节开头所述，必须对 p 作出一些假设，但我们省略一般情形下的细节，只指出条件 $p \neq 2$在我们的情形下已足够。在 [Kal19a, §5], 中，还假设 F 的特征 ch F 为零。多亏 Dillery [Dil20]的工作，将 [Kal16b] 中的刚性内扭曲形式体系扩展到了任意特征情形，这一假设如今可以去掉（另见 [Kal19a]中的第 2.1 节和第 5.2 节开头）。

Kaletha 的局部朗兰兹对应针对正则超尖点表示定义，其依据两类数据：称为正则超尖点 L-分包数据和正则超尖点数据。前者与 G L 的某些 L-参数有关，

后者则与 G* 的内形式上的某些正则超尖点表示有关。

3.2.1. 正则超尖点 L-包数据与 L-参数。一个正则超尖-^点 L-包数据 (S j, χ, ξ) 由以下各项组成

- 定义在 F 上的一个温和分歧环面 S，其维数等于 G*的绝对秩^ ^ ，” ^ ”
- 一个嵌入 j: S $\hookrightarrow$ G* ，即将对偶环面 S 嵌入对偶群 G* ，其 ”G*-共轭类是 Γ_F-稳定的，
- 一组 χ 的 χ-数据，以及
- S(F) 的一个特征 ξ

它们满足各种条件。我们不回顾所施加条件的精确表述，而仅指出几点。

正如 [Kal19a, §5.1], 中所讨论的， Γ_F-稳定的 G*(Fsep)-共轭类中的嵌入 S $\hookrightarrow$ G* （定义在 F^{sep} 上）与 ” ^”Γ_F-稳定的 G*-共轭类中的嵌入 S $\hookrightarrow$ G* 之间存在自然双射。因此，给定如上所述的一个嵌入^ ”j，其 G*-共轭类对应于 Γ_F-稳定的 G*(F^{sep})-共轭类中的一个嵌入 JS $\hookrightarrow$ G* （定义在 F^{sep} 上）。由于 G* 是准分裂的，依据 [Kot82, Corollary 2.2] 和 [Dil20, Lemma 7.6], J 存在一个 Γ_F-固定元素 j: S $\hookrightarrow$ G* 。尽管上述环面 S 是抽象给出的，但许多施加的条件都是通过该嵌入 j 来表述的。例如，子环面 jS $\subset$ G* 被假定为椭圆；这一条件与 $j \in J$ 的选择无关。此外，通过 j 拉回 Φ(jS, G*)，得到一个 Γ_F-不变子集 Φ(S, G*) $\subset X^*$(S)，并且隐含地假定 χ 是 Φ(S, G*) 的一组 ot χ-数据；子集 Φ(S, G*) $\subset X^*$(S) 与 $j \in J$ 的选择无关。

类似于命题 2.11 之前的构造，对于一个正则超尖点⌢L-包数据 (S j, χ, ξ)，我们可以按如下方式关联一个 G* 的 L-参数。首先，根据环面 S 的局部朗兰兹对应，有一个与 ξ相关联的 S 的 L-参数 ϕ_ξ: $W_F \to {}^L$S。然后，由 $\widehat{j}$ 和 χ，Langlands–Shelstad 构造给出一个 L-嵌入 ${}^L j_\chi$: ^S $\to$ ”G*。将它们复合，便得到一个 L-参数

$$ {}^L j_\chi \circ \phi_\xi : W_F \to {}^L \mathbf{G}^* $$

G*的。事实上，在 [Kal19a, 定义 5.2.3] 中引入了一类称为正则超尖点 L-参数的 L-参数，并在 [Kal19a, 命题 5.2.7]中证明，上述过程在正则超尖点 L-包数据的同构类集合与正则超尖点 L-参数的 G*-共轭类集合之间诱导出一个双射。我们不回顾正则超尖点 L-参数的定义，也不回顾正则超尖点L-包数据的同构，而只将在本节的阐述中使用这一双射。

3.2.2. 正则超尖点数据和表示。正则超尖点数^据是一个组 (S j, χ, ξ, (G ψ, z) j)，其中

- (S $\widehat{j}, \chi, \xi$) 是一个正则超尖点 L–包数据，
- (G ψ, z) 是 G* 的刚性内扭，含义见 [Kal16b, §5.1]（若 ch $F = 0$）以及 [Dil20, 定义 7.1]（若 ch $F = p$），并且
- j: S $\hookrightarrow$ G 是定义在 F 上的嵌入

满足若干条件。特别是假设，$\psi^{-1}\circ j$ 的 G*(F^{sep})-共轭类，在 Kal19a 第 5 节中提及的自然双射下，对应于 $\widehat{j}$ 的 "G*-共轭类；该双射已在上述对正则超尖点L-簇数据的回顾中提及。研究局部朗兰兹对应的更精细性质时，刚性内形式至关重要，但在本文中它们仅起次要作用。因此，我们只回顾以下基本事实：

- G* 的一个刚性内扭曲 (G ψ, z) 包含 G* 的一个内扭曲 (G ψ)，以及一项额外结构 z（其精妙定义在此略去），
- 自同构群 Aut(G ψ, z) 同构于 G(F)，它以通常的内自同构作用于 G，并且
- 任意内扭曲 (G ψ) 都存在一个刚性内扭曲 (G ψ, z)，其中某个 z。

有关刚性内扭曲及其在局部朗兰兹对应中的应用，参见 [Kal16a]，以及 [Kal16b] 和 [Dil20]。

一个正则超尖点数据 (S $\widehat{j}, \chi, \xi$, G) 导出 G(F) 的一个正则超尖点表示。首先，我们将该数据替换为另一组数据 (S $\widehat{j}, \chi_{\mathrm{Kal}}, \xi\cdot\zeta^{-1}\mathbf{s}$, (G ψ, z) j)，其中

- χ_{Kal} 是 [Kal19a 第 5 节步骤 2 中针对 Φ(S, G*) 的一组显式 χ-数据3]（在上述文献中记作 χ'），并且
- $\zeta_{\mathbf{s}}$ 是由 ζ-数据 $\zeta=\{\chi_{\mathrm{Kal}\,\alpha}\cdot\chi_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)}$定义的 S($F$) 的特征，如 [Kal19a 定义 4.6 所述5]。

然后，我们考虑 jS $\subset$ G 的子环面，并通过下式定义 S(F) 的一个特征 $j\xi'$：

$$\big((\xi\cdot\zeta_{\mathbf{S}}^{-1})\circ j^{-1}\big)\cdot\epsilon_{f,\mathrm{ram}}\cdot\epsilon^{\mathrm{ram}},$$

其中，$\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$ 和 ϵ^{ram} 是 [Kal19a 第 5 节步骤 3 中 S(F) 的二次特征3]。对 (jS $j\xi'$) 构成 G 的温和椭圆正则对。最后，$\pi_{(j\mathbf{S},j\xi')}$ 是我们与给定正则超尖点数据相关联的正则超尖点表示。给定数据在上下文中明确时，我们也简写为 $\pi_j=\pi_{(j\mathbf{S},j\xi')}$。

我们来进一步说明上文用于定义特征 $j\xi'$ 的对象 $\zeta_{\mathbf{S}}, \chi_{\mathrm{Kal}}, \epsilon_{f,\mathrm{ram}}, \epsilon^{\mathrm{ram}}$。若 χ_{Kal} 与 χ 相等，则特征 $\zeta_{\mathbf{S}}$ 是平凡的。χ-数据的集合χ_{Kal} 与 ξ（以及 Φ(S, G*)，后者仅取决于 S 和 $\widehat{j}$）相关，因此特别地，它与有理嵌入 j: S $\hookrightarrow$ G 及刚性内扭曲 (G ψ, z) 无关。相比之下，特征 $\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$ 和 ϵ^{ram} 与 G 的温和椭圆正则对 (jS $j\xi$) 相关，并将在第 5.2 节中回顾。为简化记号，我们记

$$\epsilon:=\epsilon_{f,\mathrm{ram}}\cdot\epsilon^{\mathrm{ram}}. \tag{3.1}$$

同样，正则超尖点数据也有自然的同构概念（见[Kal19a，定义 5.3。3]），而正则超尖点表示 π_j 仅取决于正则超尖点数据 (S $\widehat{j}, \chi, \xi$, (G ψ, z) j) 的同构类。事实上，一旦固定了一个刚性内扭 (G ψ, z)，上述过程便诱导出一个单射（参见下文交换图 (3.3) 中的映射 ($\star$)），其将底层刚性内扭为 (G ψ, z) 的正则超尖点数据的同构类集合映到 G(F) 的正则超尖点表示的同构类集合。在本文中，我们暂且将属于该映射像的正则超尖点表示称为 FKS-超正则超尖点表示。

注 3.4。我们仅在本节的阐述中使用术语“FKS-超正则超尖点表示”。对我们而言，重要的是以下内容：

- 正则超尖点表示 $\pi = \pi_{(\mathbf{S}\ \xi)}$ 是 FKS-超正则，当且仅当温和椭圆正则对 (S $\xi \cdot \epsilon^{-1}$)（参见下文 (3.2)）满足超正则性条件（[Kal19a，定义 3.7.5]），该条件强于正则性。或者等价地，这意味着在 Fintzen–Kaletha–Spice [FKS 21] 的修正参数化下，π 对应于一个温椭圆超正则对（参见注 3.1）。

- 若 G 是 G* =GL$_n$ 的内形式，则 G(F) 的任意正则超尖点表示 π 都是 FKS-超正则。注意到 G 的任意温和椭圆正则对都是超正则的，即可看出这一点（参见 [Kal19a，引理 3.7.7]）。

为供后文使用，我们描述从 FKS-超正则超尖点表示集合出发的逆映射。设 π 是 G(F) 的一个 FKS-超正则超尖点表示。则存在 G 的一个温和椭圆正则对 (S ξ)，使得 $\pi = \pi_{(\mathbf{S},\xi)}$。注意，此处 S 是作为 G 的子环面给出的。我们将 j 记作 S $\hookrightarrow$ G 的嵌入，并将 $\Diamond\ \psi^{-1} \circ j$: $\widehat{\ }$S $\hookrightarrow$ ”G* 记作由 $\psi^{-1} \circ j$ 诱导的嵌入。于是，逆映射将 π （的同构类）映至一个正则超尖点数据（的同构类）

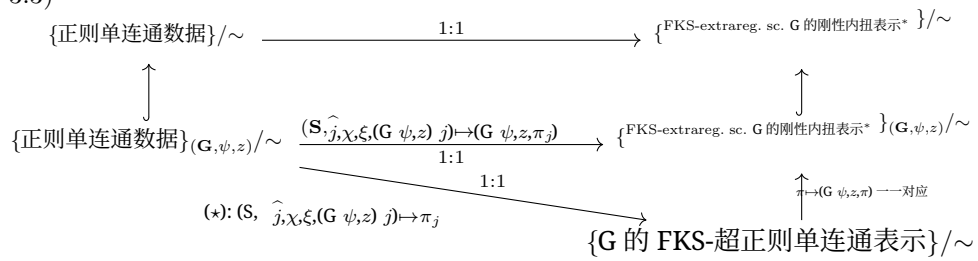
$$(\mathbf{S}, \widehat{\psi^{-1} \circ j}, \chi_{\mathrm{Kal}}, (\xi \cdot \epsilon^{-1}) \circ j, (\mathbf{G}, \psi, z), j), \tag{3.2}$$

其中

- χ_{Kal} 是与 ξ 相关联的 χ-数据集合，并且
- $\epsilon = \epsilon_{f,\ \mathrm{ram}} \cdot \epsilon_{\mathrm{ram}}$ 是与温和椭圆正则对 (S ξ) 相关联的 S(F) 的特征。

此外，如果我们将 π_j 与刚性内扭曲 (G ψ, z) 一并处理，也就是说，将元组 (G ψ, z, π_j) 视为 G* 的刚性内扭曲的表示（依照 [Kal16b，第 594] 页及 [Dil20，定义 7.9]），那么基本相同的过程甚至会在正则超尖点数据的同构类集合与 G* 的刚性内扭曲的 FKS-超正则超尖点表示的同构类集合之间诱导一个双射。由于后一个集合中底层刚性内扭曲为 (G ψ, z) 的元素构成的子集，自然可与 G(F) 的 FKS-超正则超尖点表示的同构类集合相认同，因此上一段中的双射基本上是由这个双射经由限制诱导出来的。

以下交换图概述了这一情形，其中带有下标 (G ψ, z) 的两个集合表示这样定义的子集：要求其底层刚性内扭为 (G ψ, z)：（3.3）



3.2.3. *L*-包的构造。设 ϕ 是 $\widehat{\mathbf{G}^*}$ 的一个正则超尖点 *L*-参数，它由一个正则超尖点 *L*-包数据 $(\mathbf{S}, j, \chi, \xi)$ 得到。在 [Kal19a 的第 1154] 页，Kaletha 定义了

$$\Pi_\phi = \{(\mathbf{G}, \psi, z, \pi_j) \mid (\mathbf{S}, \widehat{j}, \chi, \xi, (\mathbf{G}, \psi, z), j) \mapsto (\mathbf{S}, \widehat{j}, \chi, \xi)\},$$

其中 $(\mathbf{G}, \psi, z, \pi_j)$ 按同构类考虑。换言之，对于每个其底层正则超尖点 $\widehat{\ }$ 分包数据为 $(\mathbf{S}, j, \chi, \xi)$ 的正则超尖点数据，收集 $(\mathbf{G}, \psi, z, \pi_j)$（另见下文交换图 (3.4) 及其说明）。他将 Π_ϕ 称为复合 *L* 分包；应将其理解为 $\mathbf{G}^*$ 的刚性内扭 *L* 分包的不交并：

$$\Pi_\phi = \coprod_{(\mathbf{G}, \psi, z)} \Pi_\phi(\mathbf{G}, \psi, z),$$

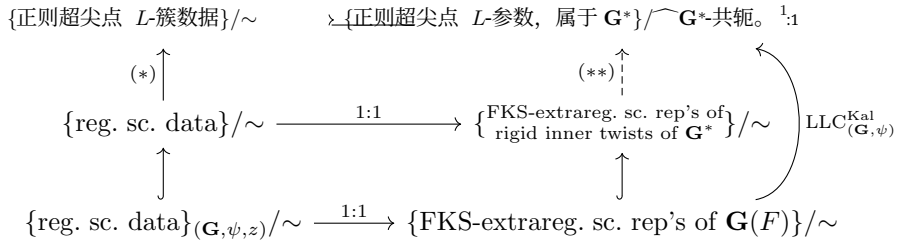
其中 $\Pi_\phi(\mathbf{G}, \psi, z)$ 表示由刚性内扭 $(\mathbf{G}, \psi, z)$ 的表示组成的子集。

3.2.4. 与 FKS-超正则超尖点表示相关的 *L*-参数。现在设 $(\mathbf{G}, \psi)$ 是 $\mathbf{G}^*$ 的一个内扭曲。我们将 Kaletha 的局部 Langlands 对应解释为映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$：从 $\mathbf{G}(F)$ 的 FKS-超正则超尖点表示的同构类集合，映至 $\mathbf{G}^*$ 的共轭类所组成的集合，其中元素为 $\mathbf{G}^*$ 的 *L*-参数；这种表述对本文的目的更为有用。

取某个 z，使得 $(\mathbf{G}, \psi, z)$ 是一个刚性内扭，并令 π 为 $\mathbf{G}(F)$ 的一个 FKS-超正则超尖点表示。根据前面讨论的双射，与 π 对应的正则超尖点数据为 $(\mathbf{S}, \widehat{j}, \chi, \xi, (\mathbf{G}, \psi, z), j)$：若 $\pi = \pi_{(\mathbf{S},\xi)}$，则 $(\mathbf{S}, \widehat{j}, \chi, \xi, (\mathbf{G}, \psi, z), j)$ 表示为 (3.2)。接着，我们将 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}(\pi)$ 定义为由正则超尖点⌣*L*-簇数据 $(\mathbf{S}, j, \chi, \xi)$ 得到的 $\mathbf{G}^*$ 的 *L*-参数。

下列交换图描述了映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 以及其他一些相关映射：

(3.4)



这里，箭头（$*$）将正则超尖点数据（的同构类）映至其底层正则超尖点 *L*-包数据（的同构类），而虚线箭头（$**$）是所诱导的、使该图交换的箭头。复合 *L*-包 Π_ϕ 恰是映射（$**$）在 ϕ 处的纤维。

展开定义即可看出，$\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}(\pi)$ 不依赖于 z 的选择（这本就理应如此）。另一方面，$\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}(\pi)$ 确实依赖于内扭曲 ψ 的选择。这是合理的，因为我们隐含地利用了 $\mathbf{G}$ 的 *L*-参数与 $\mathbf{G}^*$ 的 *L*-参数之间的同一化，该同一化由同构诱导：

${}^L\psi$: ${}^L\mathbf{G} \xrightarrow{\sim} {}^L\mathbf{G}^*$ 由 ψ 诱导。$\mathbf{G}$ 的 L-参数 ${}^L\psi^{-1} \circ \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}(\pi)$ 独立于 ψ 的选择。

我们简要讨论映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 的纤维，即集合 $\Pi_\phi(\mathbf{G}, \psi, z)$。设 ϕ 为 $\mathbf{G}^*$ 的一个正则超尖点 L-参数，且 $(\mathbf{S}, \widehat{j}, \chi, \xi)$ 为相应的正则超尖点 L-丛数据。如第 3.2.1 节所述，j 定义了一个由 Γ_F 稳定的、关于 $\mathbf{G}^*(F\text{-sep})$ 的嵌入 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}^*$ 在 F^{sep} 上的共轭类 J。于是，结合图表 (3.4)，映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 在 ϕ 处的纤维由嵌入 $j: \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 在 F 上的集合 $\mathcal{J}$ 参数化，其中 $\psi^{-1} \circ j$ 属于 J。由 [Kot86, §10] 和 [Kal19a, 引理 3.2.1] 可知，由于 $\mathbf{S}$ 满足椭圆性假设，$\mathcal{J}$ 非空。由于 ϕ 是任意的正则超尖点 L-参数，这表明 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 是满射。（此处映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 的目标是正则超尖点 L-参数的“$\mathbf{G}^*$-共轭类”集合，而非任意 L-参数。）设 ϕ 和 $\mathcal{J}$ 如上，并固定某个 $j \in \mathcal{J}$。那么 $\mathcal{J}$ 自然由集合参数化

$$\mathrm{Ker}(H^1(F, \mathbf{S}) \xrightarrow{j} H^1(F, \mathbf{G})), \tag{3.5}$$

其中，两个上同调集之间的映射是由 j 诱导的。证明这一点并不困难，既可以直接证明，也可以通过与 [Kal19a, (5.1.3)] 和 [Kal16b, page594] 中给出的复合 L-分支 Π_ϕ 的参数化进行比较来证明。

3.2.5. GL_n 的内形式情形。现在我们作具体化，回到第 2.1 节的设定：$\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 是 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 的一个内形式。我们还有一个典范内扭曲 $\psi: \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}$（见第 1 节）。因此，如第 3 节开头所述，我们假设 $p \neq 2$。根据注 3.4，$\mathbf{G}(F)$ 的任一正则超尖点表示都是 FKS-超正则，因此我们不再区分这两个概念。

在这种情形下，映射 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)}$ 和 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G}^*,\mathrm{id})}$ 均为双射。事实上，如上所述，满射性通常成立。单射性源于集合 (3.5) 的平凡性；若 ϕ 是 $\mathbf{G}^*$ 的一个正则超尖点 L-参数，且 $\widehat{(\mathbf{S}, j, \chi, \xi)}$ 是相应的正则超尖点 L-分支数据，那么此时 $\mathbf{S}$ 是一个诱导环面，因此根据 Shapiro 引理和 Hilbert 第 90 定理，$H^1(F, \mathbf{S})$ 是平凡的。

我们记

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*} := \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G}^*,\mathrm{id})}, \quad \mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}} := (\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{(\mathbf{G},\psi)})^{-1} \circ \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}.$$

为明确这些对应关系，令 $(\mathbf{S}, \xi)$ 为 $\mathbf{G}^*$ 的温和椭圆正则对。如第3.2.2节所述，一组 χ_{Kal} 个 χ-数据与 ξ相关联。根据第 3.1.1 节，$(\mathbf{S}, \xi)$ 也可视为 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆正则对。我们用${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon$（分别用${}_{\mathbf{G}}\epsilon$）表示第3.2.2节中与 $\mathbf{G}^*$（分别与 $\mathbf{G}$）的温和椭圆正则对 $(\mathbf{S}, \xi)$ 相对应的 $\mathbf{S}(F)$ 的特征 ϵ。

命题 3.5。设 $(\mathbf{S}, \xi)$ χ_{Kal}、${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon$、${}_{\mathbf{G}}\epsilon$ 如上。令${}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$为与 $(\mathbf{S}, \xi)$ 对应的 $\mathbf{G}^*(F)$ 的正则超尖点表示。我们记

$$\xi' := \xi \cdot {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1} \cdot {}_{\mathbf{G}}\epsilon.$$

于是我们有

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}({}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}(\mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}} \cdot \xi \cdot {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}), \quad \mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}({}_{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}) = {}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi')}.$$

证明。$\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}({}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)})$ 的描述见 [OT21，命题 4.6]，并且这可由第 3.2.4 节中 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{({}^{\mathbf{G}^*},\mathrm{id})} = \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}$ 的定义以及命题 2.11 推出； L-参数 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}({}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)})$ 是 ${}^L j_{\chi_{\mathrm{Kal}}} \circ \phi_{\xi\cdot{}^{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}}$，当视为 W_F 的 n 维表示时，它确实是 $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}}\cdot\xi\cdot{}^{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1})$。

类似地，我们计算

$$\begin{aligned}\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{({}^{\mathbf{G}},\psi)}({}^{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi')}) &= \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}}\cdot\xi'\cdot{}^{\mathbf{G}}\epsilon^{-1})\\ &= \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}(\mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}}\cdot\xi\cdot{}^{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}) = \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}({}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}),\end{aligned}$$

这给出了 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}({}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)})$ 的所需描述。请注意，这里我们隐含地用到了这样一个事实：与 $(\mathbf{S}\ \xi')$ 相关联的 χ_{Kal} 和 ${}^{\mathbf{G}}\epsilon$，与 $(\mathbf{S}\ \xi)$ 相关联的那些对象是相同的。虽然回顾定义便可轻易推出这一点，但我们省略细节。（只需验证 ${}^{\mathbf{G}^*}\epsilon$、${}^{\mathbf{G}}\epsilon$ 都是温和分歧的，并且 χ_{Kal}、${}^{\mathbf{G}}\epsilon$ 对 ξ 的依赖仅通过其在 $\mathbf{S}(F)_{0+} = 1+\mathfrak{p}_E$ 上的限制体现。）□

注 3.6. 根据注 2.12，命题 3.5 中 $\mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}({}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)})$ 的表达式在算术规范化下仍然成立。

4. Main theorem

设 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 和 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如第 2.1 节所述。

4.1. 主定理。

定理 4.1。假设 $p \neq 2$。则有

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}(\pi) = \mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}(\pi)$$

对于 $\mathbf{G}^*(F) = \mathrm{GL}_n(F)$ 的任意正则超尖点表示 π。

注 4.2。事实上，正如下面所解释的，如果我们对 n、p、q 等作出适当假设，那么该定理可由 [FKS21], [CO23] 中的一般结果推出。我们的证明不作任何假设（除了 $p \neq 2$，这是使右端有意义所必需的），这尤其得益于 [BH11] 的工作。

- 如果 $\mathrm{ch}\ F = 0$ 且 $p \geq (e_F+2)n$（其中 e_F 是 $F/\mathbb{Q}_p$ 的分歧指数），那么定理 4.1 由 [FKS21，定理 4.4.4。1], 推出；该定理建立了 [Kal19a] 和 [Kal19b] 中 Kaletha 的 L-丛之间内形式的端oscopic 特征关系。事实上，将其应用于 $\mathbf{G}^*$ 和 $\mathbf{G}$ 时，定理的陈述具体化为局部 Jacquet–Langlands 对应的特征标关系。注意，对 $\mathrm{ch}\,F$ 和 p 的假设确保特征公式 [FKS21，定理 4.3。5] 适用；这些假设出现在命题 4.3.2 之后紧接着的段落中。

- 令 π 如定理 4.1 中所述，并将其表示为 $\pi = {}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S}\ \xi)}$，其中 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，$E/F$ 是某个次数为 n的温和分歧扩张。在下面对 $\mathbf{S}$ 的假设下，[CO23 定理 9.10]用 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆正则对来描述 $\mathrm{LJLC}_{\mathrm{cl}}(\pi)$，因此可以验证它与 $\mathrm{LJLC}_{\mathrm{Kal}}(\pi)$ 一致，从而推出定理 4.1（注意，我们在注 3.1 中提到的 [FKS21], 的修正参数化，在 [CO23] 中被采用）。在我们的设定中，[CO23] 的基本假设是 p 不整除 $n!$ 此外，[CO23 定理

9.10] 要求满足以下条件之一（这里我们记作$e = e(E/F)$ $f = f(E/F)$，且 ϕ是欧拉函数）：

– E/F是非分歧的， n是满足 $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$ 的素数； – E是全分歧的； – f 是满足 $\frac{e}{e-\phi(e)} > 2f$ 的素数，并且 q 足够大。

我们简要评述一下这一假设以及所采用的方法。在[CO23], 中，证明了许多结果，其中包括：若存在足够多的此类元素（[CO23，定理 9.7]），则可以通过将正则超尖点表示的特征限制在“椭圆非常正则元素”上来刻画该表示，因为这些元素上的特征值更容易计算。作为该定理的一个示例应用，$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}(\pi)$ 在[CO23，定理 9.10]中通过研究特征的限制得以确定。上述假设确保“Henniart 不等式”成立，该不等式量化了椭圆非常正则元素的充分性。

我们对定理 4.1 的证明在思路上或许与 [CO23], a 类似，因为前者依赖于 Bushnell–Henniart [BH11], ，而 $\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}(\pi)$ 主要通过在某些特殊元素处计算特征来研究。

我们将在第7节证明定理 4.1。

4.2. GL_n 的一些补充。以下定理基本上已在与 Masao Oi 的合作论文 [OT21] 中得到证明。

定理 4.3（[OT21，定理 6.1]）。假设 $p \neq 2$。则有

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{G}^*}(\pi) = \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}(\pi)$$

对于 $\mathbf{G}^*(F) = \mathrm{GL}_n(F)$ 的任意正则超尖点表示 π。

注 4.4。我们补充说明 [OT21] 中证明的几点。

首先，我们回顾证明的概要。存在一个温和椭圆正则对 $(\mathbf{S}, \xi)$，其中 S 属于 $\mathbf{G}^*$，使得 $\pi \simeq_{\mathbf{G}^*} \pi_{(\mathbf{S},\xi)}$。令 E/F 为一个次数为 n 的温和分歧扩张，使得 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，于是 $(\mathbf{S}, \xi)$ 可识别为一个可容许对 $(E/F, \xi)$。如第 2.4 节所述，我们得到与 $(E/F, \xi)$ 相关联的 χ_{Tam}。类似地，Kaletha 理论（在第 3.2 节和第 3.2.5 节中回顾）给出与 $(\mathbf{S}, \xi)$ 相关联的 χ_{Kal} 和 $\mathbf{G}^*\epsilon$。由推论 2.16 和命题 3.5，我们有

$$\mathrm{LLC}^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{G}^*}(\pi) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}(\mu^{-1}_{\chi_{\mathrm{Tam}}} \cdot \xi), \quad \mathrm{LLC}^{\mathrm{Kal}}_{\mathbf{G}^*}(\pi) = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}(\mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}} \cdot \xi \cdot {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}).$$

因此，只需证明 $E^\times$ 上的特征等式：

$$\mu^{-1}_{\chi_{\mathrm{Tam}}} = \mu_{\chi_{\mathrm{Kal}}} \cdot {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1} \tag{4.1}$$

即可证明该定理。 [OT21] 的很大一部分都用于确立 (4.1)。

我们指出，尽管论文 [OT21] 没有讨论 [BH05a], [BH05b],[BH10], [Tam16a], [LS87] 与 [Kal19a], 中所使用的局部朗兰兹对应的归一化之间的差异，但这并不会造成什么严重问题。事实上，由注释2.17、3.6可知，化归到等式 (4.1) 是成立的。现在， $E^\times$ 上的特征等式 (4.1) 不涉及规范化，因此是合理的。

此外，假设 $\mathrm{ch}\, F = 0$ in [OT21] 并非必要。事实上，根据注 2.17，将问题约化为等式 (4.1) 在正特征下同样成立，而且不难验证， [OT21] 中的任何计算都没有用到这一假设。

注 4.5。正如我们在第 2.1 节中所看到的，Bushnell–Henniart [BH05a], [BH05b],[BH10] 和 Tam [Tam16a] 都没有假设 $p \neq 2$。因此，或许值得尝试将第 3 节中回顾的 Kaletha 理论的某些部分推广到这一情形（至少对于类型 A而言，因为在该类型中， $p = 2$ 不是坏素数）。

为了按照定理 4.3 的证明思路证明定理 4.1，我们需要仔细考察命题 3.5 中的特征 $\mathbf{G}^{*}\epsilon$、$\mathbf{G}\epsilon$，以及推论 2.16 中 ζ_{Tam} ofζ-数据的集合。我们将在接下来的两节中进行讨论。

5. Preliminaries I

我们先回顾 Howe 分解（Kaletha 版本）以及特征 ϵ^{ram},$\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$（从而也包括 $\mathbf{G}^{*}\epsilon$、$\mathbf{G}\epsilon$）的定义。然后，在回顾了 [Tam16a] 和 [OT21], 中关于 GL$_n$ 中的对称根的一些事实之后，我们证明一个与特征$\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$有关的等式。

5.1. Howe 分解。设 G 是定义在 F 上的连通约化群。我们回顾 Howe 分解的概念以及 [Kal19a, §3.6] 中的相关对象。同样，我们不回顾一般情形下关于 p 的精确假设，只指出对于 G* = GL$_n$ 和 G = $\underline{A}^{\times}$，这些假设仅意味着 $p \neq 2$，但对于更一般的群，条件会稍微严格一些。

本节中的材料将立即用于第 5.2 节中对特征 ϵ^{ram}、$\epsilon_{f,\ \mathrm{ram}}$ 的定义，也将用于第6.2节和附录 A。

设 S $\subset$G 是一个温和分歧极大环面，且 ξ: S(F) $\to \mathbb{C}^{\times}$ 是一个特征。设 L 为 S 的分裂域。对于实数 $r > 0$，我们令

$$\Phi_r := \{\alpha \in \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}) \mid \xi(\mathrm{Nr}_{L/F}(\alpha^{\vee}(L_r^{\times}))) = 1\}.$$

这里， $\alpha^{\vee}$ 是与 α 相关的余根，而 $L_r^{\times}$表示 $L^{\times}$ 的第 r 个 Moy–Prasad 子群（更准确地说，是环面 Res$_{L/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的子群），或者显式地，

$$L_r^{\times} = 1 + \mathfrak{p}_L^{\frac{r}{e(L/F)}}.$$

于是， $\{\Phi_r\}_{r\in\mathbb{R}_{>0}}$给出 Φ(S, G) 的一个 Γ_F-不变递增滤链，并且当 r充分大时，我们有 $\Phi_r = \Phi$(S, G)。我们还令

$$\Phi_{r+} := \bigcap_{s>r} \Phi_s$$

对于 $r \geq 0$，并令 $r_{t-1} > \cdots > r_0 > 0$ 为断点的集合（即满足 $\Phi_r \neq \Phi_{r+}$ 的实数 $r > 0$）。若 $\Phi_{0+} = \Phi$(S, G)，则设 $t := 0$。此外，我们令 $r_{-1} := 0$，并令 $r_t :=$ depth(ξ)。根据 [Kal19a, Lemma 3.6.1], ，每个子集 $\Phi_r \subset \Phi$ 都是一个 Levi 子系统。对于 $0 \leq i \leq t$，我们定义 G^i 为 G 的 Levi 子群，其极大环面为 S，根系为 $\Phi_{r_{i-1}+}$。我们还定义 G^{-1} :=S。

定义 5.1（[Kal19a，定义 3.6.2]）。(S ξ) 的一个 Howe 分解是一组特征

$$\phi_i \colon \mathbf{G}^i(F) \to \mathbb{C}^{\times} \quad (i = -1, \ldots, t)$$

，满足以下条件:

（1）我们有

$$\xi = \prod_{i=-1}^{t} \phi_i|_{\mathbf{S}(F)},$$

（2）对于 $0 \le i \le t$，特征 ϕ_i 在 $\mathbf{G}^i_{\mathrm{sc}}(F)$ 上是平凡的（在 $\mathbf{G}^i(F$ 中的像 ）导出子群的单连通覆盖的 F 值点集 d $\mathbf{G}^i$ 的子群），（3）对于 $0 \le i \le t-1$，特征 ϕ_i 的深度为 r_i，且是 $\mathbf{G}^{i+1}$-泛型的；（4）对于 $i = t,\ -1$，特征 ϕ_i 满足以下条件：

$$\phi_t \begin{cases} \text{is trivial} & \text{if } r_t = r_{t-1} \\ \text{has depth } r_t & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \phi_{-1} \begin{cases} \text{is trivial} & \text{if } \mathbf{G}^0 = \mathbf{S} \\ \text{is trivial on } \mathbf{S}(F)_{0+} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

关于 $\mathbf{G}^{i+1}$-泛型性的定义，请参阅 [HM08，定义 3.9] 。根据 [Kal19a，命题 3.6.7], , $(\mathbf{S}\ \xi)$ 的 Howe 分解总是存在。

5.1.1. 与经典 Howe 分解的关系。上文所述的 $(\mathbf{S}\ \xi)$ 的 Howe 分解概念适用于一般的温和分歧约化群（对 p 有一些温和条件），其模型是 Howe [How77] 所提出的可容许特征的经典分解。由于本文也将用到后者，我们在此简要回顾其形式及其与上述 $(\mathbf{S}\ \xi)$ 的分解之间的关系（更多细节请见 [HM08，第 3.5] 节）。

可容许对 $(E/F, \xi)$ 的 Howe 分解由以下部分组成

- 一个子域序列 $F = E_t \subsetneq E_{t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq E_1 \subsetneq E_0 \subset E_{-1} = E$, 以及
- 特征 ξ_i: $E_i^\times \to \mathbb{C}^\times$ 对于 $-1 \le i \le t$ 满足

$$\xi = \prod_{i=-1}^{t} (\xi_i \circ \mathrm{Nr}_{E/E_i})$$

以及其他一些条件（精确定义见例如 [HM08，定义 3.33] ）。

设 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如第 2.1 节所述，且 $(\mathbf{S}\ \xi)$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个温和椭圆正则对。在此情形下，根据第 3.1.1 节中的双射，$(\mathbf{S}\ \xi)$ 对应于一个次数为 n 的可容许对 $(E/F, \xi)$。$(\mathbf{S}\ \xi)$ 的 Howe 分解可导出可容许对 $(E/F, \xi)$ 的 Howe 分解，具体如下。嵌入 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}$，连同同构 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的选取，给出了一个 F-代数的嵌入 $E \hookrightarrow A$；借此，我们将 E 视为 A 的一个 F-子代数。于是可以证明，存在一个子域序列 $F = E_t \subsetneq E_{t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq E_1 \subsetneq E_0 \subset E_{-1} = E$，使得若将 $A_i \subset A$ 记作 A 中 E_i 的中心化子所给出的中心单纯 E_i-代数，则有

$$\mathbf{G}^i = \mathrm{Res}_{E_i/F}\, \underline{A_i}^\times$$

对于任意 $-1 \le i \le t$，在 $\mathbf{G}$ 中。条件 (2) 蕴含 ϕ_i 可经由约化范数映射 Nrd_{A_i/E_i}: $A_i^\times = \mathbf{G}^i(F) \to E_i^\times$，其中 $0 \le i \le t$；我们取 $E_i^\times$的一个特征ξ_i，使得

$$\phi_i = \xi_i \circ \mathrm{Nrd}_{A_i/E_i}.$$

我们设 $\xi_{-1} := \phi_{-1}$。由于 Nrd^{A_i/E_i} 在 $E^\times$ 上的限制为范数映射 Nr^{E/E_i}，条件 (1) 可改写为

$$\xi = \prod_{i=-1}^{t} (\xi_i \circ \mathrm{Nr}_{E/E_i}).$$

此外，如果我们令

$$a_i := r_i e(E/F)$$

对于 $-1 \le i \le t$，那么定义 5.1 中的条件 (3) 和 (4) 表明（除其他事项外）

- 对于 $0 \le i \le t-1$，特征 $\xi_i \circ \mathrm{Nr}^{E/E_i}$ 具有 E 层级 a_i，其含义是 $\min\{a \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid U_E^{a+1} \subset \mathrm{Ker}(\xi_i \circ \mathrm{Nr}^{E/E_i})\} = a_i$，并且
- 对于 $i = -1$，t，特征 $\xi_i \circ \mathrm{Nr}^{E/E_i}$ 在 $U_E^{a_i+1}$ 上是平凡的。

（这些断言可由例如 [OT21 第 2013] 页“乘法特征的层级与深度”以及 [HM08 引理 2.52], 推出；由于 E/F是温和分歧的，因此这些结果适用。）这些数据 $(E_i)_{i=-1}^t$、$(\xi_i)_{i=-1}^t$ 构成了 $(E/F, \xi)$ 的 Howe 分解。稍后我们还将使用整数序列 $(a_i)_{i=-1}^t$。

5.2. 特征 ϵ^{ram} 和 $\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$。我们按照 [Kal19a 第 4.3 节、引理 4.7.4]回顾 $\mathsf{S}(F)$ 的二次特征 ϵ^{ram} 和 $\epsilon_{f,\mathrm{ram}}$ 的定义。

设 $(\mathsf{S}\ \xi)$ 是 G 的一个温和椭圆正则对。根据第 5.1 节回顾的步骤，我们有

- an integer $t \ge 0$ and real numbers $r_t \ge r_{t-1} > \cdots > r_0 > r_{-1} = 0$, and
- Levi subgroups $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1} \subset \mathbf{G}^0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^{t-1} \subsetneq \mathbf{G}^t = \mathbf{G}$.

我们先回顾二次特征 ϵ^{ram} 的定义。它定义为一系列二次特征的乘积，这些特征描述了对于 $0 \le i \le t-1$，“根在$\Phi(\mathsf{S}, \mathsf{G}^{i+1}) - \Phi(\mathsf{S}, \mathsf{G}^i)$中的贡献”。我们将每个二次特征记作 $\epsilon^{\mathrm{ram},\ \mathbf{G}^i \subset \mathbf{G}^{i+1}}$。因此，我们最终将定义

$$\epsilon^{\mathrm{ram}} := \prod_{i=0}^{t-1} \epsilon^{\mathrm{ram},\mathbf{G}^i \subset \mathbf{G}^{i+1}}. \tag{5.1}$$

现在固定 $0 \le i \le t-1$，并回顾 $\epsilon^{\mathrm{ram},\ \mathbf{G}^i \subset \mathbf{G}^{i+1}}$ 的定义。为此，我们需要一些记号。

由于 Bruhat–Tits 建筑对于温和分歧扩张具有良好的性质（[Pra01]），我们可以将 S 在 F 上的 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}(\mathsf{S}\ F)$ 视为 G 的 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}(\mathsf{G}\ F)$ 的子集。由于 S 是椭圆的，$\mathcal{B}(\mathsf{S}\ F)$ 在约化建筑 $\mathcal{B}_{\mathrm{red}}(\mathsf{G}\ F)$ 中的像仅由一个点组成，我们将其记作 x。

对于 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S}, \mathsf{G})$ 和 $r \in \mathbb{R}$，我们记

$$\mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)_{x,r} := \mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha) \cap \mathfrak{g}(F_\alpha)_{x,r},$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是 α 和 $\mathfrak{g}(F_\alpha)_{x,\ r}$ 的根子空间，r 阶 Moy–Prasad 过滤 $\mathfrak{g}(F_\alpha)$。我们定义

$$\mathrm{ord}_x(\alpha) := \{r \in \mathbb{R} \mid \mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)_{x,r} \supsetneq \mathfrak{g}_\alpha(F_\alpha)_{x,r+}\}.$$

对于 $\gamma \in \mathsf{S}(F)$，我们令

$$\Phi_\gamma := \{\alpha \in \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^{i+1}) - \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^i) \mid \alpha(\gamma) \ne 1\},$$
$$\Phi_{\frac{r_i}{2}} := \left\{\alpha \in \Phi_\gamma \mid \frac{r_i}{2} \in \mathrm{ord}_x(\alpha)\right\}.$$

注意，严格来说，此处的符号 $\Phi_{\frac{r_i}{2}}$ 与第 5.1 节中的 Φ_r 相冲突，但我们将不再使用后一个符号，因此这不应造成混淆。

特征 $\epsilon^{\mathrm{ram},\mathbf{G}^i \subset \mathbf{G}^{i+1}}$ 由以下公式定义：

$$\epsilon^{\mathrm{ram},\mathbf{G}^i \subset \mathbf{G}^{i+1}}(\gamma) := \prod_{\alpha \in \Gamma_F \times \{\pm 1\} \backslash (\Phi_{\frac{r_i}{2}})^{\mathrm{sym}}} \left(\frac{\overline{\alpha(\gamma)}}{k_{F_\alpha}^\times}\right) \cdot \prod_{\alpha \in \Gamma_F \backslash (\Phi_{\frac{r_i}{2}})_{\mathrm{sym,ur}}} \left(\frac{\overline{\alpha(\gamma)}}{k_{F_\alpha}^1}\right) \tag{5.2}$$

对于 $\gamma \in \mathsf{S}(F)$，其中我们记

$$(\Phi_{\frac{r_i}{2}})^{\mathrm{sym}} := \Phi_{\frac{r_i}{2}} \cap \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})^{\mathrm{sym}}, \quad (\Phi_{\frac{r_i}{2}})_{\mathrm{sym,ur}} := \Phi_{\frac{r_i}{2}} \cap \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})_{\mathrm{sym,ur}},$$

且 $\ddot{A}\dot{\overline{k^\times_{F_\alpha}}}\ddot{a}$（分别为 $\ddot{A}\overline{k^1_{F_\alpha}}\ddot{a}$）是偶数阶循环群 $k^\times_{F_\alpha}$（分别为 $k^1_{F_\alpha} := \mathsf{Ker}(\mathrm{Nr}^{k_{F_\alpha}/k_{F_{\pm\alpha}}}: k^\times_{F_\alpha} \to k^\times_{F_{\pm\alpha}})$）中唯一的二阶特征（回想一下，由我们的假设，$p \neq 2$）。正如 [Kal19a] 的 (4.3.3) 后所解释的（另见 [OT21，第2024]页），在第一个乘积中，$\gamma(\alpha)$ 属于 $\mathcal{O}^\times_{F_\alpha}$，我们取其在 $k^\times_{F_\alpha}$ 中的像 $\gamma(\alpha)$。类似地，在第二个乘积中，$\alpha(\gamma)$ 的 $F_\alpha/F_{\pm\alpha}$-范数平凡，我们取其在 $k^1_{F_\alpha}$ 中的像 $\gamma(\alpha)$。

有了 $\epsilon^{\mathrm{ram},\ \mathbf{G}^i\subset\mathbf{G}^{i+1}}$，我们便通过 (5.1) 定义 ϵ^{ram}。

现在我们来关注 $\epsilon_{f,\ \mathrm{ram}}$。其定义涉及 $\zeta_{\mathrm{ram}} = \{\zeta_{\mathrm{ram},\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})}$ Kal19a 第 1132] 页上的一组明确的 ζ 数据（在该文中记作 $\{\epsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})}$），我们现在回顾一下。对于非对称或对称非分歧根 α，我们令 $\zeta_{\mathrm{ram},\ \alpha}$ 为 $F^\times_\alpha$ 的平凡特征。对于对称分歧根 α，我们令

$$\zeta_{\mathrm{ram},\alpha}(x) := f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha)^{v_{F_\alpha}(x)}$$

对于 $x \in F^\times_\alpha$。这里 $f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha) \in \{\pm 1\}$ 是 [Kal15 §4.1] 中定义的环面不变量。它是与对称根 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G})^{\mathrm{sym}}$ 及一对 (S, G) 相关联的一个符号，并且对 α 的依赖仅通过其 Γ_F-轨道体现。我们不回顾环面不变量的定义，但稍后将在命题 5.4 中利用 [Kal15 命题 4.3.1] 中的公式计算一个涉及它的等式。

特征 $\epsilon_{f,\ \mathrm{ram}}$ 通过对 ζ_{ram} 应用一种通用过程得到，该过程从 Φ(S, G) 的一组 ζ-数据构造出 $\mathsf{S}(F)$ 的特征。其内容基本见于 [LS87, Lemma 3.3.A, Lemma 3.3.D]，并概述于 [Kal19a, Def- inition 4.6.5]。这里我们只回顾由此得到的特征 $\epsilon_{f,\ \mathrm{ram}}$。对于 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G})^{\mathrm{sym},\ \mathrm{ram}}$ 的对称分歧根，我们将复合映射记为 $\zeta_{\Gamma_F\cdot\alpha}$

$$\mathbf{S}(F) \xrightarrow{\alpha} F^1_\alpha \xleftarrow{\sim} F^\times_\alpha/F^\times_{\pm\alpha} \xrightarrow{\zeta_{\mathrm{ram},\alpha}} \mathbb{C}^\times, \tag{5.3}$$

其中 α 将 $\mathsf{S}(F)$ 映入 $F^1_\alpha := \mathsf{Ker}(\mathrm{Nr}^{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}: F^\times_\alpha \to F^\times_{\pm\alpha})$，因为 α 是对称的，而且中间的同构将 $\gamma \in F^\times_\alpha$ 映至 $\tau^{\gamma(\alpha)} \in F^1_\alpha$，其中 $\tau \in \mathsf{Gal}(F_\alpha/F_{\pm\alpha})$ 是生成元。正如记号所示，$\zeta_{\Gamma_F\cdot\alpha}$ 仅取决于 Γ_F-轨道。接着我们定义

$$\epsilon_{f,\mathrm{ram}} := \prod_{\alpha\in\Gamma_F\backslash\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})_{\mathrm{sym,ram}}} \zeta_{\Gamma_F\cdot\alpha}. \tag{5.4}$$

鉴于（5.1）、（5.2）、（5.4），我们为每个 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G})$ 定义二次特征 ϵ_α 如下。首先，假设 α 是非对称或对称非分歧，并令 $-1 \le i \le t-1$ 为满足 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G}^{i+1}) - \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G}^i)$ 的唯一整数。我们定义

$$\epsilon_\alpha(\gamma) := \begin{cases} \left(\frac{\overline{\alpha(\gamma)}}{k^\times_{F_\alpha}}\right) & \text{if } i \neq -1 \text{ and } \frac{r_i}{2} \in \mathrm{ord}_x(\alpha) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.5}$$

对于 $\alpha \in \Phi(\mathsf{S},\mathsf{G})^{\mathrm{sym}}$ 和

$$\epsilon_\alpha(\gamma) := \begin{cases} \left(\frac{\overline{\alpha(\gamma)}}{k^1_{F_\alpha}}\right) & \text{if } i \neq -1 \text{ and } \frac{r_i}{2} \in \mathrm{ord}_x(\alpha) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.6}$$

对于 $\alpha \in \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G})_{\mathrm{sym},\ \mathrm{ur}}$。接下来假设 α 是对称分歧的。那么我们定义

$$\epsilon_\alpha := \zeta_{\Gamma_F \cdot \alpha}. \tag{5.7}$$

根据定义，我们有

$$\epsilon^{\mathrm{ram}} = \prod_{\alpha \in \Gamma_F \times \{\pm 1\} \backslash \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})^{\mathrm{sym}}} \epsilon_\alpha \cdot \prod_{\alpha \in \Gamma_F \backslash \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})_{\mathrm{sym,ur}}} \epsilon_\alpha, \tag{5.8}$$

$$\epsilon_{f,\mathrm{ram}} = \prod_{\alpha \in \Gamma_F \backslash \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G})_{\mathrm{sym,ram}}} \epsilon_\alpha. \tag{5.9}$$

现在我们专门考虑 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$ 和 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如第 2.1 节所述的情形，并引入适应该情形的一些记号。在此情形下，$\mathbf{G}^*$ 和 $\mathbf{G}$ 的温和椭圆正则对可自然地相互对应（见第 3.1.1 节），因此在第 3.2.5 节中，我们将相关特征 $\epsilon = \epsilon_{f,\ \mathrm{ram}} \cdot \epsilon^{\mathrm{ram}}$ 记作 ${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon$ 和 ${}_{\mathbf{G}}\epsilon$。类似地，对于特征 ϵ_α、ϵ^{ram}、$\epsilon_{f,\ \mathrm{ram}}$，我们在左侧以下标形式加上 $\mathbf{G}$ 或 $\mathbf{G}^*$，以指明这些特征是相对于哪个群构造的。尽管我们有 $\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^*) = \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G})$（见注2.10（1）），但集合 $\mathrm{ord}_x(\alpha) \subset \mathbb{R}$ 和环面不变量取决于群，因此各种特征也同样取决于群。因此，对于相对于 $\mathbf{G}$（分别为 $\mathbf{G}^*$）定义的集合 $\mathrm{ord}_x(\alpha)$，我们记作 ${}_{\mathbf{G}}\mathrm{ord}_x(\alpha)$（分别记作 ${}_{\mathbf{G}^*}\mathrm{ord}_x(\alpha)$）。对于环面不变量，我们继续使用相同的符号 $f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha) = f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha)$，因为这些符号已经表明了其对群的依赖关系。

5.3. GL_n 的椭圆极大环面的根。我们继续令 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$，并令 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$。设 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}^*$ 是一个温和分歧椭圆极大环面。那么 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，其中 E/F 是一个次数为 n 的温和分歧扩张。令 $e = e(E/F)$ 和 $f = f(E/F)$ 分别为 E/F 的分歧指数和剩余次数。回顾双射 (2.1)

$$(\Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E)' \xrightarrow{1:1} \Gamma_F \backslash \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^*); \quad \Gamma_E g \Gamma_E \mapsto \Gamma_F \begin{bmatrix} 1 \\ & g \end{bmatrix}.$$

本节回顾 [Tam16a, §3.2] 和 [OT21, §5.1] 的部分内容（[Tam16b, §2.2] 中也有回顾），其中引入了 Γ_F/Γ_E 的方便代表元，以便更明确地讨论根及其轨道。

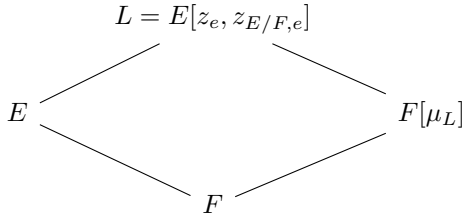
众所周知，可以选取一致化元 $\varpi_E \in E$ 和 $\varpi_F \in F$，使得

$$\varpi_E^e = z_{E/F} \varpi_F$$

对于一个单位根 $z_{E/F} \in \mu_E$。我们还固定一个 e 次根 $z_{E/F,\ e}$ 属于 $z_{E/F}$，以及一个本原 e 次单位根 z_e，并令 $z_\phi = z_{E/F,\ e}^{q-1}$。然后我们设

$$L := E[z_e, z_{E/F,e}].$$

容易看出，L 是 F 的伽罗瓦扩张，包含 E，且在E上非分歧。



L/F的伽罗瓦群 $\Gamma_{L/F}$是半直积 $\Gamma_{L/F} = \langle\sigma\rangle \rtimes \langle\phi\rangle$，其中

$$\sigma\colon \varpi_E \mapsto z_e\varpi_E, \quad z \mapsto z \quad (\text{for } z \in \mu_L),$$
$$\phi\colon \varpi_E \mapsto z_\phi\varpi_E, \quad z \mapsto z^q \quad (\text{for } z \in \mu_L).$$

如 Tam16a 的命题 3.3 (i) 中所述，集合

$$\{\sigma^i\phi^j \mid 0 \le i \le e-1, 0 \le j \le f-1\}$$

在自然同一化 $\Gamma_F/\Gamma_E \xrightarrow{1} \Gamma_{L/F}/\Gamma_{L/E}$ 下构成 Γ_F/Γ_E 的一组代表元。因此，当我们通过双射 (2.1) 处理根 $\alpha \in \Phi(S, G^*)$ 或其轨道时，通常会取上述集合中的一个代表元 g （这里我们同样将 $\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E$ 与 $\Gamma_{L/E}\backslash\Gamma_{L/F}/\Gamma_{L/E}$ 同一化）。

对于 $g \in \Gamma_F$，我们用 $[g]$ 表示双陪集 $\Gamma_E g \Gamma_E$。如果一个双陪集$[g] \in (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'$ 所对应的根轨道具有非对称或对称这一性质，我们就称该双陪集为非对称或对称。换言之，$[g]$ 是非对称（分别为对称）当且仅当 $[g] \ne [g^{-1}]$ （分别为 $[g] = [g^{-1}]$）。类似地，我们也根据相应根轨道的性质，称对称双陪集为非分歧或分歧。

令 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{asym}} \subset (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'$（分别为 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{sym}} \subset (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'$）表示非平凡非对称（分别为对称）双陪集的集合。此外，令 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)^{\mathrm{asym}/\pm}$ 为 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)^{\mathrm{asym}}$ 的商集，其中对每个 $[g] \in (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)^{\mathrm{asym}}$，将$[g]$ 与 $[g^{-1}]$ 视为相同。

命题 5.2. 记号同上。
(1) 若 $\alpha = \sigma^i\phi^j \in \Phi(S, G^*)$ $(0 \le i \le e-1, 0 \le j \le f-1)$ 是对称的，则$j = 0$ 或 $j = \frac{f}{2}$ （此时 f 为偶数）。(2) 集合 $\Phi(S, G^*)$ 存在对称分歧根，当且仅当 e 为偶数。在此情形下，存在唯一这样的轨道，且它由 $\sigma^{\frac{e}{2}}$ 表示。

证明。断言 (1) 见 [Tam16a, 命题 3.3 (iii)] （或 [Tam16b, 命题 2.2]）。断言 (2) 见 [OT21, 命题 5.3], , 其证明对 [Tam16a, §3.2] 中的论证作了略微改进。□

注 5.3。上述对称非分歧陪集和分歧陪集的定义，源于 Adler–Spice [AS09] 在第 2.2 节开头回顾的根所具有的同一性质。事实上，在 [Tam16a], [Tam16b] Tam 使用了相同的术语，但含义不同。下表概述了两者的区别（这里取 $0 \le i \le e-1$）。本文通常按 Adler–Spice 的含义使用这些术语，除非某些部分明确说明另有所指。

	Adler–Spice 意义下	Tam 意义下
对称陪集 $[\sigma^i\phi^{\frac{f}{2}}]$	非分歧	非分歧
对称陪集 $[\sigma^i]$ $(i \ne \frac{e}{2})$	非分歧	分歧
对称陪集 $[\sigma^{\frac{e}{2}}]$	分歧	分歧

5.4. 环面不变量。设 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n$、$\mathbf{G} = \underline{A}^\times$、$\mathbf{S} = \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_\mathrm{m} \subset \mathbf{G}^*$ 如上一节所述。我们来证明一个涉及环面不变量$f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha)$的等式。

下面我们使用布劳尔群 $\mathrm{Br}(F)$（参见第1节）。回顾 $A = M_m(D)$。我们将 A 的 Hasse不变量记为$\frac{h}{d}$，其中 h、$d = \frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$ 互素，即

$$\mathrm{inv}_F([A]) = \frac{h}{d}$$

在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中。我们还使用同构

$$\mathbf{e}\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu(\mathbb{C}) := \{\text{roots of unity in } \mathbb{C}\}; \quad x \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$$

从加法记号转换为乘法记号。

命题 5.4。使用上述记号，我们有如下结论。

(1) 设 $\alpha \in \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{G}^*)$ 是一个对称根，并令 $n_\alpha := [F_{\pm\alpha}\colon F]$。令 $[A] \in \mathrm{Br}(F)$ 表示 A 的类。那么 $n_\alpha \cdot [A]$ 属于 $\mathrm{Br}(F)$ 的 2-挠子群，因此可视为一个符号：$\mathbf{e}(\mathrm{inv}_F(n_\alpha \cdot [A])) \in \{\pm 1\}$。我们有

$$f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha) \cdot f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha) = \mathbf{e}(\mathrm{inv}_F(n_\alpha \cdot [A]))$$

在 $\{\pm 1\}$ 中。

（2）对于对称分歧根 $\alpha \in \Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)_{\mathrm{sym},\ \mathrm{ram}}$，我们有

$$({}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha)(\gamma) = (-1)^{m v_E(\gamma)}$$

对于 $\gamma \in \mathbf{S}(F) = E^\times$。

注 5.5。事实上，我们有 $f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha) = 1$ 根据 [OT21，命题 4.4]，从而${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha = {}_{\mathbb{I}}$。然而，在下文中我们并不需要这一事实。

证明。我们来证明（1）。由于 F_α 包含 E 的一个共轭元，从而 $2n_\alpha = [F_\alpha\colon F]$可被 n 整除，因此我们看到 $2n_\alpha \cdot [A]$ 是平凡的，正如所要求的那样。

为证明符号的等式，我们使用 [Kal15，命题 4.3。1], 现在回顾该命题。令 $\mathbf{S}_{\mathrm{ad}}$ 为 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}^*$ 在伴随商 $\mathbf{G}^*_{\mathrm{ad}}$中的像。如注 2.10（1）所述，我们可以在替换为一个同构扭曲后，假设典范内扭曲 $\psi\colon \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}$ 在 $\mathbf{S}$ 上定义于 F。于是，映射 $(\Gamma_F \ni \tau \mapsto \psi^{-1} \circ \tau(\psi))$ 定义了一个取值于 $\mathbf{S}_{\mathrm{ad}}$ 中的 1-余循环，从而得到一个上同调类 $t \in H^1(F, \mathbf{S}_{\mathrm{ad}})$。令 $\mathbf{S}_\alpha$ 为 $F_{\pm\alpha}$ 上的一维各向异性环面，该环面在 F_α 上分裂，即

$$\mathbf{S}_\alpha = \mathrm{Ker}(\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\colon \mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m}) \simeq \mathrm{Coker}(\mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\mathbb{G}_\mathrm{m}).$$

由于它是对称的，定义在 F_α 上的根 $\alpha\colon \mathbf{S}_{\mathrm{ad}} \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$ 下降为定义在 $F_{\pm\alpha}$ 上的同态 $\mathbf{S}_{\mathrm{ad}} \to \mathbf{S}_\alpha$，我们仍将其记作 α。此外，我们有一个典范同构 $\kappa_\alpha^{\mathrm{coh}}\colon H^1(F_{\pm\alpha}, \mathbf{S}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$。令 $\eta_{t,\ \alpha}$ 为 $t \in H^1(F,\mathbf{S}_{\mathrm{ad}})$ 在以下映射下的像

$$H^1(F, \mathbf{S}_{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(F_{\pm\alpha}, \mathbf{S}_{\mathrm{ad}}) \xrightarrow{\alpha} H^1(F_{\pm\alpha}, \mathbf{S}_\alpha).$$

现在，[Kal15，命题 4.3.1] 断言

$$f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha) \cdot f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha) = \kappa_\alpha^{\mathrm{coh}}(\eta_{t,\alpha}).$$

因此，我们用布劳尔群来计算 $\eta_{t,\ \alpha}$。为此，我们使用正合列

$$1 \to \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbf{S}_{\mathrm{ad}} \to 1$$

在 F 上将 $\mathbf{S}_{\mathrm{ad}}$ 表示为商，并注意到将上述正合列基变换到 $F_{\pm\alpha}$ 后，得到如下关于 $F_{\pm\alpha}$ 上正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & (\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{F_{\pm\alpha}} & \longrightarrow & \mathbf{S}_{\mathrm{ad}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathbf{S}_{\alpha} & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

这里,

- 项 $(\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{F_{\pm\alpha}}$ 是 $\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 到 $F_{\pm\alpha}$ 的基变换,
- 从 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 出发的两个水平同态都是到目标的自然嵌入,
- 若 $\alpha = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ 是第2.3节中的记号，则 $\tilde{\alpha}$ 由下式诱导

$$\begin{aligned} (\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{F_{\pm\alpha}}(F_{\pm\alpha}) = (E\otimes_F F_{\pm\alpha})^\times \to F_\alpha^\times = \mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(F_{\pm\alpha}) \\ x\otimes a \mapsto g_1(x)a, \end{aligned}$$

and

- 同态 $\mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbf{S}_\alpha$ 由下式诱导

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(F_{\pm\alpha}) = F_\alpha^\times \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Nr}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\colon F_\alpha^\times \to F_{\pm\alpha}^\times) = \mathbf{S}_\alpha(F_{\pm\alpha}) \\ x \mapsto \frac{x}{\tau(x)}, \end{aligned}$$

其中 τ 是 $\mathrm{Gal}(F_\alpha/F_{\pm\alpha})$ 的生成元。

这些正合序列诱导出如下具有正合行的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F,\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) & \longrightarrow & H^1(F,\mathbf{S}_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^2(F,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ H^1(F_{\pm\alpha},(\mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{F_{\pm\alpha}}) & \longrightarrow & H^1(F_{\pm\alpha},\mathbf{S}_{\mathrm{ad}}) & \longrightarrow & H^2(F_{\pm\alpha},\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ H^1(F_{\pm\alpha},\mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) & \longrightarrow & H^1(F_{\pm\alpha},\mathbf{S}_\alpha) & \longrightarrow & H^2(F_{\pm\alpha},\mathbb{G}_{\mathrm{m}}). \end{array}$$

回忆一下，$\eta_{t,\ \alpha}$ 是由中间的垂直箭头将 $t \in H^1(F,\mathbf{S}_{\mathrm{ad}})$映射所得的像。由于根据 Shapiro 引理和 Hilbert 第 90 定理，左下项 $H^1(F_{\pm\alpha},\mathrm{Res}_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$是平凡的，我们可以考虑下右项 $H^2(F_{\pm\alpha},\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$中$\eta_{t,\ \alpha}$ 的像 $[\eta_{t,\alpha}]$ 。现在，所需的等式

$$[\eta_{t,\alpha}] = \mathbf{e}(\mathrm{inv}_F(n_\alpha\cdot[A]))$$

这是显然的，因为 t 在 $H^2(F,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 中的像为 $[A]$ （通过考虑与带有显然映射的短正合序列相关联的余边界映射，很容易看出这一点

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathbf{S}_{\mathrm{ad}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \longrightarrow & \mathsf{G}^* & \longrightarrow & \mathsf{G}^*_{\mathrm{ad}} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

并且限制映射 Res: $H^2(F,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \to H^2(F_{\pm\alpha},\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 在典范同一化下诱导出乘以 n_α 的映射

$$\mathrm{inv}_F\colon H^2(F,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \mathrm{inv}_{F_{\pm\alpha}}\colon H^2(F_{\pm\alpha},\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

（例如，参见 [Ser79，第十三章，§3，命题 7]。）

令 α 为对称分歧根，现在我们证明 (2)。首先证明 $\mathbf{e}(\mathrm{inv}_F(n_\alpha\cdot[A])) = (-1)^m$，再应用 (1) 得到以下等式

$$f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha)\cdot f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha) = (-1)^m. \tag{5.10}$$

根据命题 5.2 (2)，不妨设 e 为偶数且 $\alpha = \sigma^{\frac{e}{2}}$。特别地，$n$ 为偶数，并且有 $F_\alpha = E$ 和 $n_\alpha = [F_{\pm\alpha}\colon F] = \frac{n}{2}$。现在我们计算

$$\mathbf{e}(\mathrm{inv}_F(n_\alpha\cdot[A])) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{h}{d}\right) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\cdot\frac{mh}{2}\right) = (-1)^{mh} = (-1)^m$$

在 $\{\pm1\}$中，其中我们有 $m(h-1)\in 2\mathbb{Z}$，因为若 m 为奇数，则 $d=\frac{n}{m}$为偶数，因此 h 必为奇数。由此，我们证明了 (5.10)。

利用 α 和 F_α的具体表达式，我们看到 (5.3) 中前两个映射的复合就是约化映射 $S(F) = E^\times = F_\alpha^\times \to F_\alpha^\times/F_{\pm\alpha}^\times$。现在由 (5.10) 计算得

$$(\mathbf{G}^*\epsilon_\alpha\cdot\mathbf{G}\epsilon_\alpha)(\gamma) = (f_{(\mathbf{G}^*,\mathbf{S})}(\alpha)\cdot f_{(\mathbf{G},\mathbf{S})}(\alpha))^{v_E(\gamma)} = (-1)^{mv_E(\gamma)}$$

如所需。 □

6. Preliminaries II

本节中，我们令 $\mathbf{G}^* = \mathrm{GL}_n = \underline{A}^{*,\times}$ 并令 $\mathbf{G} = \underline{A}^\times$ 如第 2.1 节所述。回忆一下，$A^* = M_n(F)$ 和 $A = M_m(D)$。本节的主要目标是回顾 Tam 的 ζ-数据 ζ_{Tam}所需的一些要素。我们还记录一个结果（命题 6.11），比较 Kaletha 和 Tam 的约定。

6.1. 与极大子域相关的序与有限模。

本节总结 [BH11, §2.1-§2.3], [Tam16b, §2.4、§2.5、§4.1] 中的部分内容，并回顾与极大子域 $E\subset A$相关的一些对象。特别地，我们引入有限模 $\mathfrak{U}_{[g]}$，并回顾 [Tam16b, 命题 4.2]（命题 6.3）。

6.1.1. 主序。

与 F的记号类似，我们用 $\mathcal{O}_D$、$\mathfrak{p}_D$、k_D分别表示极大序 $\mathcal{O}_D\subset D$、极大理想 $\mathfrak{p}_D\subset\mathcal{O}_D$ 和剩余域$k_D = \mathcal{O}_D/\mathfrak{p}_D$。若一个 $\mathcal{O}_F$-序 $\mathfrak{A}\subset A$（即 A的一个子环，同时也是一个 $\mathcal{O}_F$-格）满足其雅各布森根 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$ 由一个元素$a\in\mathfrak{A}$生成，则称其为主序：$\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}a = a\mathfrak{A}$（[BF85, §1.3]）。具体而言，$A$ 中的主 $\mathcal{O}_F$-序可刻画为这样的 $\mathcal{O}_F$-序 $\mathfrak{A}$：它们与分块矩阵构成的序 $A^\times$-共轭：

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{O}_D) & (\mathcal{O}_D) & \cdots & (\mathcal{O}_D)\\ (\mathfrak{p}_D) & (\mathcal{O}_D) & \cdots & (\mathcal{O}_D)\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ (\mathfrak{p}_D) & \cdots & (\mathfrak{p}_D) & (\mathcal{O}_D)\end{pmatrix},$$

其中，对于 m 的某个因子 s，每个 $(\mathcal{O}_D)$（分别为 $(\mathfrak{p}_D)$）表示元素取自 $\mathcal{O}_D$（分别为 $\mathfrak{p}_D$）的 $s\times s$-矩阵（参见 [BF85, (1.2.15), (1.3.2) 定理], 或 [Gra07, §0.2, §0.3], 其中给出了与此形式相近的表述）。换言之，后一个序是

通过自然映射 $M_m(\mathcal{O}_D) \to M_m(k_D)$，将 $M_m(k_D)$ 中相对于 m 的划分 $(s,\cdots,s)$ 而成的分块上三角矩阵子集取原像。在相同记号下，后一个序的雅各布森根是

$$\begin{pmatrix} (\mathfrak{p}_D) & (\mathcal{O}_D) & \dots & (\mathcal{O}_D) \\ (\mathfrak{p}_D) & (\mathfrak{p}_D) & \dots & (\mathcal{O}_D) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\mathfrak{p}_D) & \dots & (\mathfrak{p}_D) & (\mathfrak{p}_D) \end{pmatrix}.$$

文献中也常考虑遗传的 $\mathcal{O}_F$-阶（例如 [BF85, §1.2]），它比主 $\mathcal{O}_F$-阶更一般。然而，由于本文涉及的所有阶都是主阶，因此这里不作讨论。

设 $\mathfrak{A}$ 为上述主 $\mathcal{O}_F$-阶，并令 $r = \frac{m}{s}$。则有

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}} \simeq M_s(k_D)^r.$$

我们将 $\mathfrak{A}$ 的这些不变量记为 $s(\mathfrak{A}) = s, r(\mathfrak{A}) = r$。定义如下：

$$\begin{aligned} &\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^x := \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{\lceil x \rceil}, && \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{x+} := \bigcup_{y>x} \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^y \quad \text{for } x \in \mathbb{R} \\ &U_{\mathfrak{A}} := U_{\mathfrak{A}}^0 := \mathfrak{A}^\times, && U_{\mathfrak{A}}^i := 1 + \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^i \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}_{>0} \\ &U_{\mathfrak{A}}^x := U_{\mathfrak{A}}^{\lceil x \rceil}, && U_{\mathfrak{A}}^{x+} := \bigcup_{y>x} U_{\mathfrak{A}}^y \quad \text{for } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

显然，$U_{\mathfrak{A}}, U_{\mathfrak{A}}^i, U_{\mathfrak{A}}^x, U_{\mathfrak{A}}^{x+}$ 是 $A^\times$的紧开子群。我们还记

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}} := \{g \in A \mid g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\}$$

为 $A^\times$中 $\mathfrak{A}$ 的正规化子。于是 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ 构成一个正合列

$$1 \to U_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{K}_{\mathfrak{A}} \xrightarrow{v_{\mathfrak{A}}} \mathbb{Z} \to 0,$$

其中 $v_{\mathfrak{A}}$ 由条件 $g\mathfrak{A} = \mathfrak{A}g = \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{A}}(g)}\mathfrak{A}$（见 $g \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$ ([BH11, 第484]页）定义；事实上，它是 $U_{\mathfrak{A}}$ 与无限循环群 $\langle a \rangle$的半直积：

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}} = U_{\mathfrak{A}} \rtimes \langle a \rangle,$$

其中，$a \in \mathfrak{A}$ 是如前所述的 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}$ 的生成元（例如参见 [Zin99，第 52]页）。

我们通过$v_{\mathfrak{A}}|_{F^\times} = e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_F) \cdot v_F$定义 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_F) \in \mathbb{Z}_{>0}$，或等价地通过 $\mathfrak{p}_F\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_F)}$ 定义。于是我们有

$$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_F) = dr(\mathfrak{A}).$$

6.1.2. 与极大子域相关的主序。现在设 E/F 是次数为 n的可分扩张。记 $e = e(E/F)$ 以及 $f = f(E/F)$。取一个 F-嵌入$E \hookrightarrow A$，它在 $A^\times$-共轭意义下唯一。于是，在 A 中存在唯一的主$\mathcal{O}_F$-序 $\mathfrak{A}$，使得 $E^\times \subset \mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}$（例如参见 [Zin99，0. 定理]，或 [BH11，（2.3.1）（2）、（2.3.2）]）。

在回顾 $r(\mathfrak{A})$ 和 $s(\mathfrak{A})$ 关于 e 和 f 的表达式之前，先用以下等式定义一些辅助整数 m_0、f_0、d_0、e_0：

$$\begin{aligned} m &= m_0 \cdot \gcd(m,f), && f = f_0 \cdot \gcd(m,f), \\ d &= d_0 \cdot \gcd(d,e), && e = e_0 \cdot \gcd(d,e). \end{aligned}$$

由于 $md = n = ef$，容易验证 $m_0 = e_0$ 和 $f_0 = d_0$。根据 [Tam16b] 中 (2.6) 之后的说明（或该文第4.1节的第一句话），我们有

$$r(\mathfrak{A}) = \frac{e}{\gcd(d,e)} = e_0 = m_0, \quad s(\mathfrak{A}) = \gcd(f,m) = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{r(\mathfrak{A})}. \tag{6.1}$$

与之前一样，我们将 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) \in \mathbb{Z}_{>0}$ 定义为 $v_{\mathfrak{A}}|_{E^\times} = e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) \cdot v_E$。于是我们看到

$$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) = \frac{e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_F)}{e(E/F)} = \frac{dr(\mathfrak{A})}{e} = \frac{de_0}{e} = d_0 = f_0. \tag{6.2}$$

我们还取一个 F-嵌入 $E \hookrightarrow A^*$，并将诱导的主 $\mathcal{O}_F$-阶记为 $\mathfrak{A}^* \subset A^*$。

6.1.3. 与极大子域相关的有限模。进一步假设 E/F 是温和分歧扩张。由于 $E^\times$ 在 A 上的共轭作用保持 $\mathfrak{A}$，更一般地说，保持 $\mathfrak{P}^j$，因此对于任意 $j \in \mathbb{Z}$，它在 k_E-向量空间 $\mathfrak{P}^j/\mathfrak{P}^{j+1}$ 上诱导一个作用。此作用通过一个有限群 $\Psi_{E/F} := E^\times/F^\times U_E^1$ 因子化，其序与 p 互素。我们回顾描述 $\mathfrak{P}^j/\mathfrak{P}^{j+1}$ 的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模结构的结果。

我们首先处理 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{A}^*} := \mathfrak{A}^*/\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}^*}$ 的特殊情形，以引入模 $\mathfrak{U}_{[g]}$。考虑以下两个同构

$$E \otimes_F E \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_F(E); \quad x \otimes y \mapsto (v \mapsto \mathrm{tr}_{E/F}(yv) \cdot x),$$
$$E \otimes_F E \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E); \quad x \otimes y \mapsto (x \cdot g(y))_{[g]}$$

F-向量空间的。这里，$E \cdot g(E)$ 表示合成域。通过复合，它们诱导出标准同构 $\mathrm{End}_F(E) \simeq \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E)$。此外，一旦固定一个 F-同构 $E \simeq F^n$，便得到一个 F-同构$A^* = M_n(F) \simeq \mathrm{End}_F(E)$，从而

$$A^* \simeq \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E). \tag{6.3}$$

我们安排同构 $E \simeq F^n$，使复合映射 $E \hookrightarrow \mathrm{End}_F(E) \simeq A^*$ 与已固定的嵌入一致。通过此同构 (6.3)，$E^\times$ 在 A^* 上的共轭作用在 $\bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E)$ 上诱导出一个作用。具体而言，$t \in E^\times$ 的作用为

$$\bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E) \to \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} E \cdot g(E); \quad (x)_{[g]} \mapsto \Big(\frac{t}{g(t)} \cdot x\Big)_{[g]}.$$

如 [Tam16a, §4.1]（尤其是 §4.1.1）中所证明的，利用E/F 温和分歧这一假设，同构 (6.3) 限制为

$$\mathfrak{A}^* \simeq \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} \mathcal{O}_{E \cdot g(E)}, \quad \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}^*} \simeq \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} \mathfrak{p}_{E \cdot g(E)}.$$

因此我们有一个同构（参见 [Tam16a，命题 4.4]）

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{A}^*} = \mathfrak{A}^*/\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}^*} \simeq \bigoplus_{[g] \in \Gamma_E \backslash \Gamma_F / \Gamma_E} \mathfrak{U}_{[g]} \tag{6.4}$$

$k_F[\Psi_{E/F}]$-模，其中我们定义

$$\mathfrak{U}_{[g]} := k_{E\cdot g(E)} = \mathcal{O}_{E\cdot g(E)}/\mathfrak{p}_{E\cdot g(E)}$$

带有如下诱导的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模结构。明确地说，若在第 5.3 节的记号中 $g=\sigma^i\phi^j$，则 $z\in\mu_E$ 和 ϖ_E 在 $\mathfrak{U}_{[g]}=k_{E\cdot g(E)}$ 上的作用分别为乘以

$$\begin{bmatrix}1\\ \sigma^i\phi^j\end{bmatrix}(z)=z^{1-q^j}\ \text{and}\ \begin{bmatrix}1\\ \sigma^i\phi^j\end{bmatrix}(\varpi_E)=(z_e^i z_{\phi^j})^{-1}$$

。

将 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 的对偶模记为 $\mathfrak{U}_{[g]}^\vee := \mathrm{Hom}^{k_F[\Psi_{E/F}]}(\mathfrak{U}_{[g]}, k_F)$，则由一个 $\Psi_{E/F}$-不变的非退化 k_F-双线性配对诱导出 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模之间的自然同一化 $\mathfrak{U}_{[g^{-1}]}\simeq\mathfrak{U}_{[g]}^\vee$

$$k_{E\cdot g(E)}\times k_{E\cdot g^{-1}(E)}\to k_F;\quad (a,b)\mapsto\langle a,b\rangle := \mathrm{tr}_{k_{E\cdot g(E)}/k_F}(a\cdot g(b)). \tag{6.5}$$

注6.1。 (1) 容易让人以为 (6.4) 是简单模的分解。然而， $\mathfrak{U}_{[g]}$ 一般不是简单的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模。事实上，若滥用记号，将 ï $\frac{1}{g}$ ò 视为 $\mathrm{Hom}(\Psi_{E/F}, \bar{k}_F^\times)$ 中的一个元素，则当且仅当 ï $\frac{1}{g}$ ò 在 Γ_{k_F} 的作用下的轨道长度等于 $\dim_{k_F}\mathfrak{U}_{[g]}$ 时， $\mathfrak{U}_{[g]}$ 才是简单的。比如，若 $g=\sigma$，则容易计算出轨道长度等于 $[k_F[z_e]:\ k_F]$，而我们有 $\dim_{k_F}\mathfrak{U}_{[g]}=[k_E[z_e]:\ k_F]$。

此外，即使 $[g_1]\neq[g_2]$，模 $\mathfrak{U}_{[g_1]}$ 和 $\mathfrak{U}_{[g_2]}$ 也可能同构。例如，取 $g_1=\sigma$ 和 $g_2=\sigma^q$。那么 $\mathfrak{U}_{[g_1]}=k_{E\cdot g_1(E)}=k_E[z_e]$和 $\mathfrak{U}_{[g_2]}=k_{E\cdot g_2(E)}=k_E[z_e^q]$ 是同构的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模，因为 z_e和 z_e^q 在 k_F上共轭。进一步假设 $q\not\equiv 1$ (模 e)（或等价地 $\sigma\neq\sigma^q$）且 $k_E=k_F[z_e]$ （这意味着 $\sigma^{q^f}=\sigma$）。那么我们断言 $[g_1]\neq[g_2]$。事实上，由于 $\Gamma_{L/E}$ 由 k_L上的 q^f次幂 Frobenius 元的一个提升 ϕ_E 生成，且该元满足 $\phi_E\sigma\phi_E^{-1}=\sigma^{q^f}$，我们有

$$[\sigma]\cap\{\sigma^t\mid t\in\mathbb{Z}\}=\{\sigma^{q^{ft}}\mid t\in\mathbb{Z}\}=\{\sigma\},$$

这表明 $\sigma^q\notin[\sigma]$，正如所期望的那样。

(2) 若进一步考虑 k_E-结构，并将 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 视为 $k_E[\Psi_{E/F}]$-模，则上述两种复杂情况都不会出现；可以证明，对于任意 $[g]\in\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E$，$\mathfrak{U}_{[g]}$ 都是一个简单的 $k_E[\Psi_{E/F}]$-模，而且 $\mathrm{Hom}^{k_E[\Psi_{E/F}]}(\mathfrak{U}_{[g_1]},\mathfrak{U}_{[g_2]})\neq 0$ 蕴含 $[g_1]=[g_2]$。

然而， $k_E[\Psi_{E/F}]$-模结构在其他方面存在问题；例如，配对 (6.5) 一般不是 k_E-双线性的，因此无法得到关于 $\mathfrak{U}_{[g^{-1}]}$ 的类似描述（以对偶模表述）。因此，下文中我们只使用 $\mathfrak{U}_{[g]}$的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模结构。

注记 6.2。回顾 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'=\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E-\{\Gamma_E\}$ 与 $\Gamma_F\backslash\Phi(S,G^*)$ 之间的双射 (2.1)。若我们取 $g\in\Gamma_F-\Gamma_E$ 并令 $\alpha=$ ï $\frac{1}{g}$ ò，使得 $[g]$ 通过上述双射对应于 α 的轨道，那么 $E\cdot g(E)$ 就是定义 χ-数据和 ζ-数据时出现的不动域 F_α。此外，

$t \in E^\times = \mathsf{S}(F)$ 在 $E \cdot g(E)$ 上（分别在 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 上）的作用，可视为 F_α 上乘以 $\alpha(t)$（分别为 k_{F_α} 上乘以 $\alpha(t)$）。

回顾第5.4节，$\frac{h}{d}$ 是 A 的 Hasse不变量，其中 d与 $h \in \mathbb{Z}$ 互素。以下命题描述一般情形下 $\mathfrak{P}^j/\mathfrak{P}^{j+1}$ 的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模结构，其中 A。

命题 6.3. 对每个 $j' \in \mathbb{Z}$，我们都有一个同构

$$\mathfrak{P}^{j'}/\mathfrak{P}^{j'+1} \simeq \bigoplus_{\substack{[g]=[\sigma^i\phi^j]\in \Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E \\ j\equiv hj' \mod f_0}} \mathfrak{U}_{[g]}$$

$k_F[\Psi_{E/F}]$-模之间的同构。

注意，对于任意双陪集 $[\sigma^i\phi^j] \in \Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E$，$j$在 $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ 中的像（特别是在 $\mathbb{Z}/f_0\mathbb{Z}$中的像）与代表元 $\sigma^i\phi^j$ 的选取无关（考察其在 $\mu_E \subset L$上的作用即可验证）。另请注意，h 与d 互素，因而也与 $f_0 = d_0$互素。

证明。这是 Tam16b 的命题 4.2] 的 [。 □

注记6.4. 当 $A = A^*$，因而 $f_0 = 1$时，模 f_0 的条件 $j \equiv hj'$ 是空的。特别地，对于所有 $j \in \mathbb{Z}$，我们都有 $\mathfrak{A}/\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}^j/\mathfrak{P}^{j+1}$。这一点也可直接看出；此时任意一致化元 $\varpi_E \in E$ 都满足 $\mathfrak{P} = \varpi_E\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\varpi_E$，而乘以 ϖ_E^j 则诱导出一个 $\Psi_{E/F}$-等变同构。

6.2. 与可容许对相关的有限模。本节将为可容许对 $(E/F, \xi)$ 关联各种 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模 ${}_A\mathfrak{V}, {}_A\mathfrak{V}_k, {}_A\mathfrak{V}_{[g]}$，并概述它们的一些性质。这基于 [Tam16b 的部分内容，§3.3、§3.6、§4.2]。此外，我们将陈述一个事实（命题 6.11），它联系了 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 与$_{\mathbf{G}}\mathrm{ord}_x(\alpha)$，后者见第 5.2 节。

设 $(E/F, \xi)$ 是一个可容许对，并取一个 F-嵌入 $E \hookrightarrow A$，使得由此诱导出一个嵌入 $\mathsf{S} = \mathsf{Res}_{E/F}\mathbb{G}_\mathrm{m} \hookrightarrow \underline{A}^\times = \mathsf{G}$。回顾第 5.1.1 节，此时我们有

- subfields $F = E_t \subsetneq E_{t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq E_1 \subsetneq E_0 \subset E_{-1} = E$ and
- integers $a_t \geq a_{t-1} > \cdots > a_0 > a_{-1} = 0$

与 $(E/F, \xi)$ 相关。（注意，此处的指标约定与 [Tam16b] 中的略有不同；我们令 $F = E_t$，而在 [Tam16b] 中则令 $F = E_{t+1}$。）此外，对每个 $-1 \leq k \leq t$，A 中 E_k 的中心化子 $A_k \subset A$ 是一个定义在 E_k 上的中心单代数，且固定的嵌入 $E \hookrightarrow A$ 经由 $E \hookrightarrow A_k$ 分解。因此，第 6.1 节回顾的设定适用于 E_k 和 A_k，以代替 F 和 A；与嵌入 $E \hookrightarrow A_k$ 相关的主 $\mathcal{O}_E$- 序为 $\mathfrak{A}_k := A_k \cap \mathfrak{A}$，并且我们还有

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_k}, \quad U_{\mathfrak{A}_k}, \quad U^x_{\mathfrak{A}_k}, \quad U^{x+}_{\mathfrak{A}_k}$$

对 $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 等情况也是如此。中心的简单 E_k-代数 A_k 同构于$M_{m(A_k)}(D_k)$，其中 E_k-代数 D_k 是中心除代数，其维数为 $d(A_k)^2$, ，其中

$$m(A_k) = \gcd(m, [E : E_k]), \quad d(A_k) = \frac{d}{\gcd(d, [E_k : F])} \tag{6.6}$$

（例如，参见 [Tam16b，第 357] 页或 [BH11，（2.1.1）]）。由 (6.2)、(6.6) 可得

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E) &= \frac{f(E/E_k)}{\gcd(m(A_k), f(E/E_k))} = \frac{f(E/E_k)}{\gcd(m, [E:E_k], f(E/E_k))} \\ &= \frac{f(E/E_k)}{\gcd(m, f(E/E_k))}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

特别地，我们看到，对于 $-1 \le k \le t-1$，$e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)$ 整除 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$。我们定义 G 的紧开子群 J^1、H^1，以及 A 的格 $\mathfrak{J}^1$、$\mathfrak{H}^1$ 如下：

$$\begin{aligned} J^1 &:= U^1_{\mathfrak{A}_0} U^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_1} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{t-1}} U^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}}, \\ H^1 &:= U^1_{\mathfrak{A}_0} U^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_1} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{t-1}} U^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}}, \\ \mathfrak{J}^1 &:= \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_1} + \cdots + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{t-1}} + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}}, \\ \mathfrak{H}^1 &:= \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_1} + \cdots + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{t-1}} + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

子群 J^1、H^1 以及格 $\mathfrak{J}^1$、$\mathfrak{H}^1$ 依赖于 ξ，但我们在记号中省略这种依赖关系。下文定义的 ${}_A\mathfrak{V}$ 及相关对象也同样如此。

商 ${}_A\mathfrak{V} := J^1/H^1 = \mathfrak{J}^1/\mathfrak{H}^1$ 是一个 k_F-向量空间。与之前一样，$E^\times$ 的共轭作用诱导出 $\Psi_{E/F} = E^\times/F^\times U^1_E$ 在 ${}_A\mathfrak{V}$ 上的作用。对于 $0 \le k \le t-1$，令

$$\begin{aligned} {}_A\mathfrak{V}_k &:= \frac{U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1}}}{U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_k} U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1}}} \\ &\simeq \frac{\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1}}}{\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_k} + \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1}}}. \end{aligned}$$

注意，模 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 可与 ${}_A\mathfrak{V}$ 的滤链的逐次商相识别，该滤链由以下子群的像给出：

$$U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1}} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{t-1}} U^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}}$$

当 $0 \le k \le t-1$ 时，J^1 的。因此，它们是 ${}_A\mathfrak{V}$ 的子商，并且我们有一个同构

$${}_A\mathfrak{V} \simeq {}_A\mathfrak{V}_0 \oplus {}_A\mathfrak{V}_1 \oplus \cdots \oplus {}_A\mathfrak{V}_{t-1} \tag{6.8}$$

因为 p 的阶与 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模的特征互素。

注记 6.5. 按照 [Tam16b],，我们将 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 定义为 ${}_A\mathfrak{V}$ 的一个子商。事实上，正如下述命题所示，我们也可以将 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 定义为 ${}_A\mathfrak{V}$ 的一个 $k_F[\Psi_{E/F}]$-子模，这使得同构 (6.8) 成为典范同构（这在 [Tam16b] 的某些部分中可能是隐含的）。本文中我们不会采用此定义。

命题 6.6. 考虑非退化对称双线性配对

$$B\colon A \times A \to F; \quad (x,y) \mapsto \mathrm{Trd}_{A/F}(xy)$$

在 $A^\times$ 的共轭作用下保持不变。对于 $0 \le k \le t-1$ 和 $r \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\mathfrak{P}^r_{\mathfrak{A}_{k+1},\mathfrak{A}_k} := \mathfrak{P}^r_{\mathfrak{A}_{k+1}} \cap A_k^\perp,$$

其中 $A_k^\perp$ 是相对于 B 的 A_k 的正交补。类似地，我们定义 $\mathfrak{P}^{r+}_{\mathfrak{A}_{k+1},\,\mathfrak{A}_k}$。由 B 的 $A^\times$-不变性可知，模 $\mathfrak{P}^{r}_{\mathfrak{A}_{k+1},\,\mathfrak{A}_k}$ 和 $\mathfrak{P}^{r+}_{\mathfrak{A}_{k+1},\,\mathfrak{A}_k}$ 在 $E^\times$ 的共轭作用下都是稳定的。因此我们有

$$\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_0} \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_0} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{t-1},\mathfrak{A}_{t-2}} \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_t,\mathfrak{A}_{t-1}},$$
$$\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}_0} \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_0} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-2} e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{t-1},\mathfrak{A}_{t-2}} \oplus \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_t,\mathfrak{A}_{t-1}}.$$

特别地，我们有典范同一

$${}_A\mathfrak{V} \simeq \bigoplus_{0\le k\le t-1} \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1},\mathfrak{A}_k} / \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1},\mathfrak{A}_k},$$
$${}_A\mathfrak{V}_k \simeq \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1},\mathfrak{A}_k} / \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1},\mathfrak{A}_k}.$$

证明。一旦用 Moy–Prasad 过滤（参见附录 A）描述了相关的格，便可通过反复应用 [Adl98，命题 1.9。3], 该命题基于 [Adl98，命题 1.4。1]并且由于假设 E/F 是温和的，故其适用。我们略去细节。□

我们令

$$j_k = \frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

于是我们有

$$\mathfrak{P}^{j_k}_{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{A}_{k+1} = \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{k+1}}.$$

命题 6.7。对于 $0 \le k \le t-1$，$k_F[\Psi_{E/F}]$-模 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 可如下描述。

（1）若 $a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为奇数，则 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 为平凡的。（2）若 $a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，则

$${}_A\mathfrak{V}_k \simeq \bigoplus_{\substack{[g]=[\sigma^i\phi^j]\in\Gamma_E\backslash(\Gamma_{E_{k+1}}-\Gamma_{E_k})/\Gamma_E \\ j\equiv hj_k \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}} \mathfrak{U}_{[g]}.$$

与命题 6.3 一样，这里有两点需要说明。首先，j 在 $\mathbb{Z}/e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)\mathbb{Z}$中的像与陪集代表元的选取无关（回想一下，$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) = f_0$），因此 (2) 中的直和是良定义的。此外，$h$ 与 d 互素，因而也与$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) = d_0$互素。

此外，如果 $a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$是偶数，那么 $a_k e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$也是偶数，因此 j_k 属于$\mathbb{Z}$，所以 (2) 中的求和是有意义的。

证明。这只是对 [Tam16b，命题 4.6], 的略微改述；该命题在相同假设下断言如下：

(T1) 若 a_k 为奇数且 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$为奇数，则 ${}_A\mathfrak{V}_k$ 是平凡的。
(T2) 若 a_k 为奇数，$e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)$为奇数且 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$为偶数，则

$${}_A\mathfrak{V}_k \simeq \bigoplus_{\substack{[g]=[\sigma^i\phi^j]\in\Gamma_E\backslash\Gamma_{E_{k+1}}/\Gamma_E \\ j\equiv hj_k \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}} \mathfrak{U}_{[g]}.$$

(T3) 若 a_k 为偶数，或 $e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，则

$${}_A\mathfrak{V}_k \simeq \bigoplus_{\substack{[g]=[\sigma^i\phi^j]\in\Gamma_E\backslash(\Gamma_{E_{k+1}}-\Gamma_{E_k})/\Gamma_E \\ j\equiv hj_k \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}} \mathfrak{U}_{[g]}.$$

需要指出的是，这一结论基本上是通过根据以下各项是否

$$\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E), \frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

属于 $\mathbb{Z}$，并应用 [Tam16b，命题 4.2]（重述为命题 6.3）到$\mathfrak{A}_{k+1}$ 和 $\mathfrak{A}_k$。

我们来由 [Tam16b，命题 4.6] 推出命题 6.7。由于 (1) 和 (T1) 显然等价，我们只需证明 (T2) 和 (T3) 蕴含 (2)。为此，只需验证：若 $a_k e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)$ 为奇数，$e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，且 $g = \sigma^i\phi^j \in \Gamma_{E_{k+1}}$ 满足 $j \equiv hj_k$ (模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$)，那么 g 不属于 Γ_{E_k}。

由于 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$ 也为偶数，因此 h 为奇数，因为正如命题陈述之后紧接着指出的，它与 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$ 互素。结合假设 a_k 为奇数，这说明

$$j \equiv hj_k \equiv \frac{1}{2}e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E).$$

因此，我们可以将 $j = (l + \frac{1}{2}) \cdot e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$，其中 $l \in \mathbb{Z}$。现在我们断言，$f(E_k/F)$ 不整除 j。事实上，由 (6.2) 可得

$$\frac{j}{f(E_k/F)} = (l + \frac{1}{2}) \cdot \frac{e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}{f(E_k/F)} = (l + \frac{1}{2}) \cdot \frac{f(E/E_k)}{\gcd(m, f(E/F))}.$$

另一方面，由于根据 (6.7) 我们有

$$e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E) = \frac{f(E/E_k)}{\gcd(m, f(E/E_k))},$$

由假设可知它是奇数，因此 $f(E_k/F)$ 不整除 j，如所断言。考察其在剩余域上的作用，我们现在看到 $g \notin \Gamma_{E_k}$。□

注 6.8. 当 $A = A^*$ 且因此对任意 k 都有 $e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E) = 1$ 时，上述陈述可简化为以下较简单的形式。

(1) 若 a_k 为奇数，则 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_k$ 是平凡的。(2) 若 a_k 为偶数，则

$${}_{A^*}\mathfrak{V}_k \simeq \bigoplus_{[g]=[\sigma^i\phi^j]\in\Gamma_E\backslash(\Gamma_{E_{k+1}}-\Gamma_{E_k})/\Gamma_E} \mathfrak{U}_{[g]}.$$

根据命题 6.7，对于 $[g] \in (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'$，我们按以下方式定义一个 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$。若 $g \in \Gamma_{E_0}$，则定义 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} = 0$ 为平凡模。若 $g \notin \Gamma_{E_0}$，则令 $0 \le k \le t-1$ 为满足 $g \in \Gamma_{E_{k+1}} - \Gamma_{E_k}$ 的唯一整数。此外，我们将 $[g] = [\sigma^i\phi^j]$ 表示为某个 $0 \le i \le e-1$ 和 $0 \le j \le f-1$。然后我们定义

$$(6.9) \quad {}_A\mathfrak{V}_{[g]} := \begin{cases} \mathfrak{U}_{[g]} & \text{if } a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E) \text{ is even and } j \equiv hj_k \pmod{e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们还定义了

$$\mathfrak{U}_{[g]} := \begin{cases} \mathfrak{U}_{[g]} \oplus \mathfrak{U}_{[g^{-1}]} & \text{if } [g] \text{ is asymmetric} \\ \mathfrak{U}_{[g]} & \text{if } [g] \text{ is symmetric,} \end{cases}$$

使得 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 是一个自对偶的 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模。同样，我们定义

$${}_A\mathfrak{V}_{[g]} := \begin{cases} {}_A\mathfrak{V}_{[g]} \oplus {}_A\mathfrak{V}_{[g^{-1}]} & \text{if } [g] \text{ is asymmetric} \\ {}_A\mathfrak{V}_{[g]} & \text{if } [g] \text{ is symmetric.} \end{cases}$$

注意，${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 要么是平凡的，要么与 $\mathfrak{U}_{[g]}$同构。事实上，我们需要验证，若 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} = \mathfrak{U}_{[g]}$，则将 g^{-1} 替换为 g后，结论仍成立。这是显然的，因为如果 $a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 是偶数，$0 \le j \le f-1$ 和 $j \equiv hj_k$（模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$），那么$-j \equiv -hj_k = -\frac{h}{2}a_k e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) \equiv \frac{h}{2}a_k e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E) = hj_k$（模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$）。

根据 (6.8) 和命题 6.7，我们得到 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模的同构（$(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{sym}}$、$(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{asym}}/\pm$ 的定义见第 5.3 节）：

$$(6.10)\quad {}_A\mathfrak{V} \simeq \bigoplus_{[g]\in(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)'} {}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq \bigoplus_{[g]\in(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{sym}}\amalg(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{asym}}/\pm} {}_A\mathfrak{V}_{[g]}.$$

注 6.9。根据注6.1 (1)，或许无法将 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 简单地定义为 ${}_A\mathfrak{V}$ 的“ $\mathfrak{U}_{[g]}$-同型部分”。

然而，与命题 6.6 类似，我们再次可以使用 [Adl98，命题 1.4。1]并证明存在如下形式的直和分解:

$$\mathfrak{J}^1 = \bigoplus_{[g]\in\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E} \mathfrak{J}^1_{[g]},\quad \mathfrak{H}^1 = \bigoplus_{[g]\in\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E} \mathfrak{H}^1_{[g]},$$

该分解由根空间分解诱导而来。因此，$\mathfrak{U}_{[g]}$ 更自然的定义或许可以是 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}:= \mathfrak{J}^1_{[g]}/\mathfrak{H}^1_{[g]}$。这样，同构 (6.10) 将成为典范的。

本文将不采用这一定义，而采用上述临时定义。

命题 6.10. 设 $[g] \in (\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{sym}}$ 是一个非平凡的对称双陪集。那么，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 当且仅当 $[g] = [\sigma^i]$，其中某个 i 或 m 为偶数。

证明. 我们通过研究 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$的条件来证明该命题。

不妨设 $g = \sigma^i\phi^j$ 对某个 $0 \le i \le e-1, 0 \le j \le f-1$ 成立。令 k 为满足 $g = \sigma^i\phi^j \in \Gamma_{E_{k+1}} - \Gamma_{E_k}$ 的唯一整数。那么，根据${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 的定义 (6.9) 和注 6.8 可知，${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 当且仅当以下情形之一成立:

- a_k 和 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为奇数,
- a_k 为奇数，$e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$为偶数，且
$$j \not\equiv hj_k \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E),$$
- a_k 为偶数，且
$$j \equiv hj_k \mod e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E).$$

注意，在前两种情况下，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} = 0 = {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$；而在最后一种情况下，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq \mathfrak{U}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$。

回想一下，由于假设 $g = \sigma^i\phi^j$ 是对称的，根据命题 5.2 (1)，我们有 $j = 0$ 或 $j = \frac{f}{2}$（特别是，在后一种情况下，f 为偶数）。我们要证明，当且仅当 $j = 0$ 或 m 为偶数时，${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 成立。根据上述将条件 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 改写为三种情形的表述，我们只需证明以下三个断言。

(1) 假设 a_k 和 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为奇数，则 $j = 0$ 或 m 为偶数。(2) 假设 a_k 为奇数且 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，则 $j \not\equiv hj_k$（模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$）当且仅当 $j = 0$ 或 m 为偶数。(3) 假设 a_k 为偶数，则 $j \equiv hj_k$（模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$）当且仅当 $j = 0$ 或 m 为偶数。

为研究 j 和 hj_k 之间的同余条件，我们使用

$$\frac{j-hj_k}{e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}=\begin{cases}\frac{-ha_k}{2} & \text{if } j=0\\ \frac{s-ha_k}{2} & \text{if } j=\frac{f}{2}.\end{cases} \tag{6.11}$$

这里我们简单记作 $s=s(\mathfrak{A})$ = 最大公约数(f,m)（参见 (6.1)、(6.2)）。

我们先处理断言 (1)。设 a_k 和 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 均为奇数，且 $j=\frac{f}{2}$（因此 f 为偶数）。那么条件 $\sigma^i\phi^{\frac{f}{2}}\in\Gamma_{E_{k+1}}$ 表明，$f(E_{k+1}/F)$ 整除 $\frac{f}{2}$，或者等价地，

$$\frac{f}{f(E_{k+1}/F)}=f(E/E_{k+1})$$

为偶数。现在，由 (6.7) 可知

$$e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)=\frac{f(E/E_{k+1})}{\gcd(f(E/E_{k+1}),m)},$$

根据假设，它是奇数，因此 m 为偶数，正如所要求的。

接下来我们证明断言 (2)。设 a_k 为奇数，而 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数。由于 $e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)$ 为偶数，$e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$ 也为偶数，因此 h 与 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$ 互素，故为奇数。结合 a_k 为奇数这一假设，可知 ha_k 为奇数。由 (6.11) 可知，当且仅当以下两种情况之一成立时，我们有 $j\not\equiv hj_k$ (模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$):

- $j=0$, or
- $j=\frac{f}{2}$ and s is even.

后者又等价于 $j=\frac{f}{2}$ 和 m 为偶数这一条件，因为$s=f$、m的$s=$ 最大公约数$s=$。因此，断言 (2) 得证。

最后，断言 (3) 也可类似地证明。假设 a_k 为偶数，我们看到 ha_k 为偶数。再次由 (6.11)，$j\equiv hj_k$ (模 $e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)$) 当且仅当以下两者之一成立：

- $j=0$, or
- $j=\frac{f}{2}$ and s is even,

后者如前所述，等价于 $j=\frac{f}{2}$ 和 m 为偶数这一条件。□

下面的命题给出了 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 与第 5.2 节中的对象之间的关系。

命题 6.11. 设 $g\in\Gamma_F-\Gamma_E$，并令 $\alpha:=\overset{1}{\text{ï}}g\text{ò}\in\Phi(\mathrm{S},\mathrm{G})$。令 $-1\le k\le t-1$ 为满足 $\alpha\in\Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^{k+1})-\Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^k)$ 的唯一整数（或等价地，$[g]\in\Gamma_E\backslash(\Gamma_{E_{k+1}}-\Gamma_{E_k})/\Gamma_E$）。令 $r_k\in\mathbb{R}_{\ge0}$ 和 $\mathrm{G}\,\mathrm{ord}_x(\alpha)\subset\mathbb{R}$ 如第 5.2 节中所述。

当 $k=-1$ 时，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}=0$。当且仅当 $\frac{r_i}{2}\in\mathrm{G}\mathrm{ord}_x(\alpha)$ 时，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}\neq0$。

将 A 和 G 分别替换为 A^* 和 G*，同样的结论仍然成立。

证明。对于 A^* 和 G*，这是 [OT21, Proposition 5.12], ，其依据是 [AS09, Proposition 3.8] 和 [DS18, Proposition 4.21]。同样的证明也适用于 A 和 G。□

6.3. t 因子。正如我们将在下文第 6.4 节回顾的，Tam 的 ζ-数据 ζ_{Tam} （见第 2.4 节）是用 Bushnell–Fr¨ohlich [BF83 第 8] 章以及 Bushnell–Henniart [BH05b, §4], [BH10, §3] 中引入的若干不变量 $t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V)$、$t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ 和 $t_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ 定义的，而 Tam [Tam16b, 第 376]页还给出了它们的变体。它们在[Tam16b] 和 [Tam16a]中被称为 t 因子。这里我们只回顾一些形式性质。

设 $\mathbf{\Gamma}$ 是一个阶与 p 互素的循环群。Bushnell–Henniart [BH10], 在 Bushnell–Fr¨ohlich 的工作 [BF83] 基础上，定义了有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模 (V,h) 的两个不变量（即，V 是 $\mathbf{\Gamma}$ 上的有限维表示，且 $h\colon\ V\times V\to\mathbb{F}_p$ 是一个 $\mathbf{\Gamma}$-不变的非退化交替 $\mathbb{F}_p$-双线性形式）：

- a sign $t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V)\in\{\pm1\}$ and
- a quadratic character $t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V)\colon\mathbf{\Gamma}\to\{\pm1\}$ of $\mathbf{\Gamma}$.

据 [BF83，命题 8.2.3 (c)] 证明，有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模的等距类由其底层 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模的同构类决定。正因如此，在上文及下文讨论这些不变量时，我们不再注明 $\mathbf{\Gamma}$-不变的非退化交替 $\mathbb{F}_p$-双线性形式。我们指出，它们在 V 中具有可加性：对于有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$- 模 V_1,V_2,

$$t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V_1\oplus V_2)=t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V_1)\cdot t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V_2),\quad t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V_1\oplus V_2)=t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V_1)\cdot t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V_2)$$

对于平凡的有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模 $V=0$，且均为平凡：

$$t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V)=1,\quad t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V)=\mathbb{1}_{\mathbf{\Gamma}}.$$

此外，符号 $t_{\mathbf{\Gamma}}(V)\in\{\pm1\}$ 定义为

$$t_{\mathbf{\Gamma}}(V):=t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V)\cdot t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V)(\gamma)$$

对于生成元 $\gamma\in\mathbf{\Gamma}$。显然，$t_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ 与 γ 的选择无关。下文中，$t^0_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ $t^1_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ $t_{\mathbf{\Gamma}}(V)$ 统称为 t 因子。

回到第 6.2 节的情形。我们考虑 $\Psi_{E/F}=E^\times/F^\times U_E^1$ 的以下两个循环子群：

- $\boldsymbol{\mu}:=\mu_E/\mu_F$ 和
- $\langle\varpi\rangle:=$（由 ϖ_E 的像生成的循环子群）。

存在一个在 $\Psi_{E/F}$ 作用下不变的非退化交错 $\mathbb{F}_p$-双线性形式定义在 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 上（见下文注记 6.12），因此我们可以将 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 视为针对 $\mathbf{\Gamma}=\boldsymbol{\mu}$ 的有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模，$\langle\varpi\rangle$，从而 t 因子（如 $t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})$、$t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})$）便有意义。

注记 6.12. 可以通过至少两种方式证明，${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 存在一个在 $\Psi_{E/F}$ 作用下不变的非退化交错 $\mathbb{F}_p$-双线性形式。

(1) 仿照 [BF83 命题（8.2.3）]（另见 [BH05b，引理 4.7]）中构造有限辛 $\mathbb{F}_p[\mathbf{\Gamma}]$-模的方法，在具有一定补充论证的对称情形下处理 $k_F[\Psi_{E/F}]$-模，我们可以直接如下定义一个在 $\Psi_{E/F}$ 作用下不变的非退化交错 k_F-双线性形式，特别是，通过复合 $\mathrm{tr}_{k_F/\mathbb{F}_p}$，得到一个类似的交错 $\mathbb{F}_p$-双线性形式。

首先，假设 $[g]$ 是非对称的。根据定义，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}={}_A\mathfrak{V}_{[g]}\oplus{}_A\mathfrak{V}_{[g^{-1}]}$。在自然同一化 ${}_A\mathfrak{V}_{[g^{-1}]}\simeq{}_A\mathfrak{V}_{[g]}^\vee$下，

标准的 $\Psi_{E/F}$-不变非退化交错 k_F-双线性形式

$$\begin{aligned}({}_A\mathfrak{V}_{[g]} \oplus {}_A\mathfrak{V}_{[g]}^\vee) \times ({}_A\mathfrak{V}_{[g]} \oplus {}_A\mathfrak{V}_{[g]}^\vee) &\to k_F \\ \big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) &\mapsto \langle v_1, w_2\rangle - \langle v_2, w_1\rangle\end{aligned}$$

在 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \oplus {}_A\mathfrak{V}_{[g]}^\vee$ 上诱导出 ${}_A\mathfrak{W}_{[g]}$ 上类似的交错形式。

现在假设 $[g]$ 是对称的，因此根据定义有 ${}_A\mathfrak{W}_{[g]} = {}_A\mathfrak{V}_{[g]}$。我们还可以假设 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡。我们断言，此时它是对称非分歧的。事实上，若它是对称分歧的，那么根据命题 5.2 (2)， e 将是偶数，而 $\alpha = \ï\frac{1}{g}\ò$ 的轨道将由 $\ï\frac{1}{\sigma^{\frac{e}{2}}}\ò$ 表示。于是根据命题 6.10 和 [Tam16a, 命题 5.3 (ii)], ，我们将有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]} = 0$，这与假设矛盾。

令 $\alpha = \ï\frac{1}{g}\ò$。由于 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡，我们有 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq k_{E\cdot g(E)} = k_{F_\alpha}$。由于 α 是对称的，存在一个元素 $x \in \Gamma_F$ 使得

$$x \cdot \alpha = -\alpha. \tag{6.12}$$

注意到 x 属于 $\Gamma_{F_{\pm\alpha}}$，且其像生成伽罗瓦群 $\Gamma_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}$，对此我们使用相同的字母。此外，由于 α 是对称非分歧的，我们有一个非平凡扩张 $k_{F_\alpha}/k_{F_{\pm\alpha}}$，且伽罗瓦群 $\Gamma_{k_{F_\alpha}/k_{F_{\pm\alpha}}}$ 由 $x \in \Gamma_{F_\alpha/F_{\pm\alpha}}$的像生成，我们仍将其记作 x。我们可以取一个元素 $\gamma \in k_{F_\alpha}^\times$，使得 $x(\gamma) = -\gamma$。在同一化 $k_{F_\alpha} \simeq {}_A\mathfrak{V}_{[g]}$下，非退化交替 k_F-双线性形式

$$k_{F_\alpha} \times k_{F_\alpha} \to k_F; \quad (a, b) \mapsto \mathrm{tr}_{k_{F_\alpha}/k_F}(a \cdot \gamma \cdot x(b))$$

在 k_{F_α} 上诱导出 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 上的类似交替形式，该形式根据 (6.12) 具有 $\Psi_{E/F}$-不变性。

(2) 实际上， ${}_A\mathfrak{V}$ 带有一个 $\Psi_{E/F}$-不变的非退化交替 $\mathbb{F}_p$-双线性形式，在 [Tam16b], 中记作 h_θ，它自然地出现在 $\mathrm{G}^{\pi_{(\mathbf{S},\xi)}}$ 的构造中。可以证明，典范分解

$${}_A\mathfrak{V} = \bigoplus_{[g]\in(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{sym}}\amalg(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)_{\mathrm{asym}}/\pm} {}_A\mathfrak{W}_{[g]}$$

注 6.9 中的对象关于 h_θ 是正交的（参见 [Tam16b, 命题 4.4]）。特别地，将 h_θ 限制到每个子模 ${}_A\mathfrak{W}_{[g]} \subset {}_A\mathfrak{V}$ 上，便得到一个 $\Psi_{E/F}$-不变的非退化交替 $\mathbb{F}_p$-双线性型。

令 $g = \sigma^i\phi^j \in \Gamma_F$ 为第 5.3 节中的一个元素，并令

$$\boldsymbol{\mu}_g := \mu_{E\cdot g(E)}/\mu_F.$$

在 [Tam16b 的第 376], 页，Tam 定义了

- a sign $t^0_{\boldsymbol{\mu}_g}(\mathfrak{U}_{[g]}) \in \{\pm 1\}$ and
- a quadratic character $t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}(\mathfrak{U}_{[g]})\colon \boldsymbol{\mu}_g \to \{\pm 1\}$ of $\boldsymbol{\mu}_g$.

下列定义也在 [Tam16b]中隐含使用：

$$t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_A\mathfrak{W}_{[g]}) := \begin{cases} t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}(\mathfrak{U}_{[g]}) & \text{if } {}_A\mathfrak{W}_{[g]} \simeq \mathfrak{U}_{[g]} \\ \mathbb{1}_{\boldsymbol{\mu}_g} & \text{if } {}_A\mathfrak{W}_{[g]} \text{ is trivial.} \end{cases}$$

我们仅记录以下命题。

命题 6.13. 设 $g=\sigma^i\phi^j\in\Gamma_F$ 如上。则有

$$t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})|_{\boldsymbol{\mu}}=t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}).$$

证明. 这由 [Tam16b，命题 4.12] 得出。 □

6.4. Tam 的 ζ-数据。为了回顾 Tam 的 ζ-数据 $\zeta_{\mathrm{Tam}}=\{\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}\}_{\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)}$，我们固定 Γ_F 的相关商集的若干代表元集。

我们固定集合 $\mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm}\subset\Gamma_F$（分别为 $\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}\subset\Gamma_F$）作为 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)^{\mathrm{asym}/\pm}$（分别为 $(\Gamma_E\backslash\Gamma_F/\Gamma_E)^{\mathrm{sym}}$）的代表元集。我们对其进行安排，使得有

$$\mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm},\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}\subset\{\sigma^i\phi^j\mid 0\le i\le e-1,0\le j\le f-1\}.$$

我们还定义以下子集（参见注 5.3）：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sym,ur}}:=\{\sigma^i\phi^j\in\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}\mid j=f/2\},\quad \mathcal{D}_{\mathrm{sym,ram}}:=\{\sigma^i\phi^j\in\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}\mid j=0\},$$

从而根据命题 5.2 (1)，有 $\mathcal{D}_{\mathrm{sym,ur}}\cup\mathcal{D}_{\mathrm{sym,ram}}=\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$。

下文将回顾 Tam 在 [Tam16b, 定理 5.5] 中的 ζ-数据，并以适用于本文目的的形式呈现。请注意，虽然一组 ζ-数据由以 $\alpha\in\Phi(\mathbf{S},\mathbf{G}^*)$ 为指标的特征组成，但我们只需指定 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}$ 对于 $\alpha=\ï^1_g\grave{o}$ 的特征，其中 $g\in\mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm}\cup\mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$ 如 [Tam16b, 定理 5.5] 所示。根据ζ-数据的公理，这唯一确定了一组 ζ-数据。

6.4.1. 非对称根。令 $g\in\mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm}$，并设 $\alpha:=\ï^1_g\grave{o}$ 以及 $\alpha':=\ï^1_{g^{-1}}\grave{o}$。

根据 [Tam16b, 定理 5.5 (i)],，特征 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}\colon F_\alpha^\times=(E\cdot g(E))^\times\to\mathbb{C}^\times$ 满足

$$\begin{cases}\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}\text{ is trivial on }1+\mathfrak{p}_{F_\alpha},\\ \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_{F_\alpha}}=t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})\cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}).\end{cases}$$

请注意，等式

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E)\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}(\varpi_E)=t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})\cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$$

在 [Tam16b, 定理 5.5 (i) (b)] 中看似施加了某种条件，但事实上$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E)$ 可以取任意值。确实，我们有

$$\alpha'=g^{-1}\cdot\begin{bmatrix}g\\1\end{bmatrix}=g^{-1}\cdot(-\alpha),\quad \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}=\zeta_{\mathrm{Tam},g^{-1}\cdot(-\alpha)}=\zeta_{\mathrm{Tam},-\alpha}\circ g=\zeta^{-1}_{\mathrm{Tam},\alpha}\circ g,$$

因此

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(z)\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}(z)=\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(z)\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(g(z))^{-1}=\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\alpha(z))\tag{6.13}$$

对任意 $z\in E^\times(\subset F_\alpha^\times\cap F_{\alpha'}^\times)$。特别地，由于 $\alpha(\varpi_E)$ 属于 μ_{F_α}，值$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E)\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}(\varpi_E)$ 仅取决于限制 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_{F_\alpha}}$，并且确实等于 $t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})\cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$，其计算见 [Tam16b, (5.3)]。我们稍后会使用一个更具体的表达式

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E)\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}(\varpi_E)=\mathrm{sgn}_{\alpha(\varpi_E)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})\cdot\mathrm{sgn}_{\alpha(\varpi_E)}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$$

在同一等式 [Tam16b, (5.3)] 中。这里，右端的记号如下：

- 对于有限模 $\mathfrak{V}$ 及其自同构 x，我们将 x 作为集合 $\mathfrak{V}$ 的置换时的符号记为 $\mathrm{sgn}_x(\mathfrak{V})$，并且

- 如果该模同构于 $\mathfrak{U}_{[g]}$ （分别地，若其为平凡模），则我们考虑 $\alpha(\varpi_E) \in \mu_{F_\alpha} \simeq k_{F_\alpha}^\times$ 在 $\mathfrak{U}_{[g]} \simeq k_{F_\alpha}$ 上的乘法作用（分别地，平凡作用）。

同样，等式

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(z) \cdot \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}(z) = \mathrm{sgn}_{\alpha(z)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot \mathrm{sgn}_{\alpha(z)}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$$

对于 $z \in \mu_E$，出现在 [Tam16b, (5.3)] 之前的方程中；其中，$\mathrm{sgn}^{\mu_E}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})$（分别地，$\mathrm{sgn}^{\mu_E}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$）表示将 $x \in \mu_E$ 映射为 $\mathrm{sgn}_x({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \in \{\pm 1\}$（分别地，$\mathrm{sgn}_x({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) \in \{\pm 1\}$）的特征 $\mu_E \to \{\pm 1\}$。

此外，由 (6.13) 可立即得出，$\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}|_{E^\times} \cdot \zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha'}|_{E^\times}$ 在 $1+\mathfrak{p}_E$ 上平凡。总之，乘积 $\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}|_{E^\times} \cdot \zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha'}|_{E^\times}$ 满足

(6.14)

®$\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}|_{E^\times} \cdot \zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha'}|_{E^\times}$ 在 $1+\mathfrak{p}_E$ 上平凡，$(\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}|_{E^\times} \cdot \zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha'}|_{E^\times})(z) = \mathrm{sgn}^{\alpha(z)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot \mathrm{sgn}^{\alpha(z)}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$ 对于 $z \in \mu_E \cup \{\varpi_E\}$.

6.4.2. 对称根。令 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$ 并置 $\alpha := \ï^1_g \grave{o}$。

根据 [Tam16b，定理 5.5 (i)], ，我们有

$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha} \text{ is trivial on } 1+\mathfrak{p}_{F_\alpha}, \\ \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_{F_\alpha}} = t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}_g}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}), \text{ and} \\ \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E) = \iota_g \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}), \text{ where} \end{cases}$$

$$\iota_g = \begin{cases} 1 & \text{if } g \in (\mathcal{D}_{\mathrm{sym,ram}} - \{\sigma^{\frac{e}{2}}\}) \cup W_{F[\varpi_E]} \\ (-1)^m & \text{if } g \in (\mathcal{D}_{\mathrm{sym,ur}} - W_{F[\varpi_E]}) \cup \{\sigma^{\frac{e}{2}}\}. \end{cases}$$

让我们通过以不同方式划分情形来稍微改写 ι_g。由注 5.3 和命题 5.2 (2)，我们看到，如果 α 是对称非分歧的（依照第 2.2 节中回顾的定义），那么

$$\iota_g = \begin{cases} 1 & \text{if } g = \sigma^i \text{ for some } i \text{ or } g(\varpi_E) = \varpi_E \\ (-1)^m & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.15}$$

并且，如果 α 是对称分歧的（依照第 2.2 节中回顾的定义），那么

$$\iota_g = (-1)^m. \tag{6.16}$$

稍后我们只需要将限制 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}$ 限制到 $E^\times$。根据命题 6.13，它满足

$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times} \text{ is trivial on } 1+\mathfrak{p}_E, \\ \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_E} = t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}), \text{ and} \\ \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E) = \iota_g \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}). \end{cases} \tag{6.17}$$

7. 证明主定理

最后，让我们证明定理 4.1。

设 π 是定理 4.1 中的 $\mathbf{G}^*(F) = \mathrm{GL}_n(F)$ 的一个正则超尖点表示。存在一个 $\mathbf{G}^*$ 的温和椭圆正则对 $(\mathbf{S}, \xi)$，使得 $\pi \simeq {}^{\mathbf{G}^*}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}$。设 E/F 是一个次数为 n 的温和分歧扩张，使得 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，从而 $(\mathbf{S}, \xi)$ 可识别为一个可容许对 $(E/F, \xi)$。如第 2.4 节所述，借助 [Tam16b]，我们有与 $(E/F, \xi)$ 相关联的 χ_{Tam}。类似地，Kaletha 的

第 3.2 节（以及第 3.2.5 节）中回顾的理论给出与 (S ξ) 相关联的 $\mathbf{G}^*\epsilon$。由推论 2.16 和命题 3.5，我们有

$$\mathrm{LJLC}^{\mathrm{cl}}(\pi) = {}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\nu_{\zeta_{\mathrm{Tam}}}^{-1}\cdot\xi)}, \quad \mathrm{LJLC}^{\mathrm{Kal}}(\pi) = {}_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi\cdot{}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon)}.$$

由于根据定义（见 (3.1) 和第 3.2.5 节），我们有 ${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_{f,\mathrm{ram}}\cdot{}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{\mathrm{ram}}$ 以及关于 ${}_{\mathbf{G}}\epsilon$ 的类似等式，因此只需证明 $E^\times$ 的特征相等：

$$\nu_{\zeta_{\mathrm{Tam}}}^{-1} = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_{f,\mathrm{ram}}^{-1}\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon_{f,\mathrm{ram}}\cdot({}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{\mathrm{ram}})^{-1}\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon^{\mathrm{ram}}.$$

由于此等式中的所有特征都是二次的，我们可以并且确实在全文省略逆元符号。

根据定义 2.13、(5.8) 和 (5.9)，我们可以分别处理每个根轨道，并证明如下结论：

非对称根：对于 $\alpha = \mathrm{ï}g\,\grave{\mathrm{o}} \in \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^*)^{\mathrm{sym}}$，其中 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm}$，我们有

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}|_{E^\times} = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha, \tag{7.1}$$

where $\alpha' := \begin{bmatrix} 1 & \\ & g^{-1} \end{bmatrix}\alpha$ as in Section 6.4.1.

对称非分歧根：对于 $\alpha = \mathrm{ï}g\,\grave{\mathrm{o}} \in \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^*)_{\mathrm{sym},\ \mathrm{ur}}$，其中 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$，我们有

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times} = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha. \tag{7.2}$$

对称分歧根：对于 $\alpha = \mathrm{ï}g\,\grave{\mathrm{o}} \in \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^*)_{\mathrm{sym},\ \mathrm{ram}}$，其中 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$，我们有

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times} = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha. \tag{7.3}$$

7.1 非对称根。设 $\alpha = \mathrm{ï}g\,\grave{\mathrm{o}} \in \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^*)^{\mathrm{sym}}$ 使得 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{asym}/\pm}$，并证明（7.1）。置 $\alpha' := \mathrm{ï}\begin{smallmatrix} 1 & \\ & g^{-1} \end{smallmatrix}\grave{\mathrm{o}}$。令 $-1 \le k \le t-1$ 为满足 $\alpha \in \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^{*,k+1}) - \Phi(\mathrm{S},\mathrm{G}^{*,k})$ 的唯一整数。

下面的论证与 [OT21, §6.2] 中的论证非常相似。

回顾由（6.14）我们有

$\mathrm{®}\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}|_{E^\times}$ 在 $1+\mathfrak{p}_E$ 上是平凡的，$(\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}|_{E^\times})(z) = \mathrm{sgn}^{\alpha(z)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]})\cdot\mathrm{sgn}^{\alpha(z)}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$，其中 $z \in \mu_E \cup \{\varpi_E\}$.

另一方面，由 (5.5) 可得

$${}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha(z) = \begin{cases} \left(\frac{\overline{\alpha(z)}}{k_{F_\alpha}^\times}\right) & \text{if } k \neq -1 \text{ and } \frac{r_k}{2} \in {}_{\mathbf{G}}\,\mathrm{ord}_x(\alpha) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于 $z \in \mathrm{S}(F) = E^\times$，以及对 ${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha$ 也有类似的等式。

由于 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}\cdot\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha'}|_{E^\times}$ 和 ${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha\cdot{}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha$ 在 $1+\mathfrak{p}_E$ 上都平凡，因此只需证明

$$\mathrm{sgn}_{\alpha(z)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) = {}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha(z), \quad \mathrm{sgn}_{\alpha(z)}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha(z)$$

对于 $z \in \mu_E \cup \{\varpi_E\}$。后者的证明基本相同，因此我们只证明 w 前一个等式。

假设 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 是平凡的。那么 $\mathrm{sgn}^{\alpha(z)}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) = 1$。此外，由命题 6.11 可得 $k = -1$ 或 $\frac{r_k}{2} \notin \mathrm{Gord}_x(\alpha)$，且在两种情况下 ${}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha(z) = 1$。

现在假设 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡，因此同构于 $\mathfrak{U}_{[g]}$。同样由命题 6.11 可得 $k \neq -1$ 和 $\frac{r_k}{2} \in \mathrm{Gord}_x(\alpha)$。因此，在这种情况下，我们要证明

$$\mathrm{sgn}_z(\mathfrak{U}_{[g]}) = \left(\frac{z}{k_{F_\alpha}^\times}\right)$$

对于 $z \in \mu_{F_\alpha}$。这基本上可由 [OT21 第 6 节最后一段中的 2] showin 得出 g

$$\mathrm{sgn}_z({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) = \left(\frac{z}{k_{F_\alpha}^\times}\right) \tag{7.4}$$

当 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡时的 $z \in \mu_{F_\alpha}$（注意，本文中的 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 在 [OT21] 中仅记作 $\mathfrak{V}_{[g]}$，因为那里只考虑 G* ）。尽管 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 可能是平凡的，但显然，将 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 换成 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 后，(7.4) 的证明仍然成立。 1

7.2. 对称非分歧根。设 $\alpha = \ddot{\imath}g$ ò$\in \Phi$(S, G*)$_{\mathrm{sym,\ ur}}$ 使得 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$，并令我们证明 (7.2)。设 $-1 \leq k \leq t-1$ 为满足 $\alpha \in \Phi$(S, G*, $^{k+1}$) $- \Phi$(S, G*, ^{k}) 的唯一整数。

回顾由 (6.17) 和 (6.15) 可得

- $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}$ is trivial on $1 + \mathfrak{p}_E$,
- $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_E} = t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$, and
- $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E) = \iota_g \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$, where

$$\iota_g = \begin{cases} 1 & \text{if } g = \sigma^i \text{ for some } i \text{ or } g(\varpi_E) = \varpi_E \\ (-1)^m & \text{otherwise.} \end{cases}$$

另一方面，由 (5.6) 可得

$${}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha(z) := \begin{cases} \left(\frac{\overline{\alpha(z)}}{k_{F_\alpha}^1}\right) & \text{if } k \neq -1 \text{ and } \frac{r_k}{2} \in \mathrm{ord}_x(\alpha) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于 $z \in$S(F) $= E^\times$，以及对于 ${}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha$ 的类似等式。

我们首先假设 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$。根据命题 6.10，这意味着对于某个 i 有 $[g] = [\sigma^i]$，或者 m 为偶数。在这两种情况下，我们都有 $\iota_g = 1$。由于 $t^1_{\boldsymbol{\mu}}(\cdot)$ 是二次的且 $t_{\langle\varpi\rangle}(\cdot) \in \{\pm 1\}$，我们看到 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}$ 在此情况下是平凡的。另一方面，根据命题 6.11，我们有 ${}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha = {}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha$，因而 ${}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha$ 是平凡的，(7.2) 在此情况下得证。

接下来我们假设 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \not\simeq {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$，从而 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]} \oplus {}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]} \simeq \mathfrak{U}_{[g]}$。由于 $\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{E^\times}$ 和 ${}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha$ 在 $1 + \mathfrak{p}_E$ 上都是平凡的，我们需要证明

$$\zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_E} = ({}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha)|_{\mu_E}, \quad \zeta_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E) = ({}^{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}^{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha)(\varpi_E).$$

此外，由于 t 因子的可加性，我们有

$$t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) = t^1_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{U}_{[g]}), \quad t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) = t_{\langle\varpi\rangle}(\mathfrak{U}_{[g]}).$$

由命题 6.10（以及命题 5.2 (1)）可知，对于某个 i，有 $[g] = [\sigma^i \phi^{\frac{f}{2}}]$（特别地，$f$ 为偶数），且 m 为奇数。因此，关于 ι_g 的方程可转化为

$$\iota_g = \begin{cases} 1 & \text{if } g(\varpi_E) = \varpi_E \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7.5}$$

另一方面，由命题 6.11 可知

$$(\mathbf{G}^*\epsilon_\alpha \cdot {}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha)(\gamma) = \left(\frac{\alpha(\gamma)}{k^1_{F_\alpha}}\right)$$

对于 $\gamma \in E^\times$。因此，我们必须证明

$$t^1_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{U}_{[g]})(\gamma) = \left(\frac{\alpha(\gamma)}{k^1_{F_\alpha}}\right) \text{ for } \gamma \in \mu_E, \tag{7.6}$$

$$\iota_g \cdot t_{\langle\varpi\rangle}(\mathfrak{U}_{[g]}) = \left(\frac{\alpha(\varpi_E)}{k^1_{F_\alpha}}\right). \tag{7.7}$$

正如我们将在下文解释的，(7.6) 和 (7.7) 均可由 [OT21, §6.2]，中相关命题的证明推出；而这些证明实质上是通过结合 Tam 对 t 因子的计算以及对二次特征的初等运算完成的（参见第 7.1 节中较简略但类似的论证）。

等式 (7.6) 可由 [OT21, 命题 6.3] 的证明推出。事实上，该命题断言等式 $\chi^{-1}_{\mathrm{Tam}\ \alpha}|_{\mu_E} = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}_\alpha|_{\mu_E} \cdot \chi_{\mathrm{Kal},\ \alpha}|_{\mu_E}$（与 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 一样，本文中的特征 ${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha$ 在 [OT 21] 中记作 ϵ_α）。如 [OT21, 第 2050 页，(3)]，所述，这归结为

$${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha|_{\mu_E} = \chi_{\mathrm{Tam},\alpha}|_{\mu_E}$$

由 $\chi_{\mathrm{Kal},\ \alpha}|_{\mu_E}$ 的平凡性可得。若 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡，因而与 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 同构，则有

$${}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha(z) = \left(\frac{\alpha(z)}{k^1_{F_\alpha}}\right) \text{ and } \chi_{\mathrm{Tam},\alpha}(z) = t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})(z)$$

对于 $z \in \mu_E$（后者是 [Tam16a, 定理 7.1 (i)] 的一部分，且出现在 [OT21 第 2050] 页中紧接着 (3) 的显示公式里）。因此，[OT21 命题 6.3] 的证明主要致力于证明

$$\left(\frac{\alpha(z)}{k^1_{F_\alpha}}\right) = t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})(z) \tag{7.8}$$

对于 $z \in \mu_E$ 在 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡的情形。尽管 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 可能是平凡的，(7.8) 的证明显然也适用于 $\mathfrak{U}_{[g]}$，而非 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$，因此可得 (7.6)。（注意，相关情形（即 $g = \sigma^i\phi^{\frac{f}{2}}$）的证明见 [OT21 命题 6.3] 证明的最后一段。）

类似地，等式 (7.7) 可由 [OT21 命题 6.4] 的证明推出。事实上，该命题断言 $\chi^{-1}_{\mathrm{Tam}\ \alpha}(\varpi_E) = {}_{\mathbf{G}^*}\epsilon^{-1}_\alpha(\varpi_E) \cdot \chi_{\mathrm{Kal},\ \alpha}(\varpi_E)$。如同 [OT21 命题 6.4]，证明中的第一个显示公式，这归结为

$$({}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot \chi^{-1}_{\mathrm{Tam},\alpha})(\varpi_E) = -1$$

因为 $\chi_{\mathrm{Kal},\ \alpha}(\varpi_E) = -1$。如果 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡，因而同构于 $\mathfrak{U}_{[g]}$，那么，如 [OT21 命题 6.4]，的证明中的第二个和第三个展示公式所示，我们有

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha(\varpi_E) &= \left(\frac{\alpha(\varpi_E)}{k^1_{F_\alpha}}\right), \\
\chi_{\mathrm{Tam},\alpha}(\varpi_E) &= t^0_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) \cdot t^0_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) \\
&= t^0_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}),
\end{aligned}$$

其中，${}_{A^*}\mathfrak{V}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}$ 表示 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 的 $\langle\varpi\rangle$不动部分，并且根据 $t_{\langle\varpi\rangle}(\cdot)$的定义，我们有 $t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) = t^0_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$。（注意，在本文中，$\langle\varpi\rangle$

而 [Tam16b] 在 [OT21] 和 [Tam16a]中记为 ϖ 。）因此，证明 [OT21，命题 6.4] 的主要部分是要确立

$$\left(\frac{\alpha(\varpi_E)}{k^1_{F_\alpha}}\right) = -t^0_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}) \tag{7.9}$$

在 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 非平凡的情形下。同样，(7.9) 的证明显然也适用于以 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 代替 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ ，因此我们得到

$$\left(\frac{\alpha(\varpi_E)}{k^1_{F_\alpha}}\right) = -t^0_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{U}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}(\mathfrak{U}_{[g]}). \tag{7.10}$$

此外，与 [OT21 第 2052]，页所示的第二个等式一样，我们有

$$t^0_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) = \begin{cases} -1 & \text{if } \beta := \alpha(\varpi_E) = 1 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

然而，再一次， [Tam16a 注 7.3] 中这个等式的证明对以 $\mathfrak{U}_{[g]}$ 代替 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 仍然成立。将所得等式与 (7.5) 比较，我们得到

$$t^0_{\boldsymbol{\mu}}(\mathfrak{U}^{\langle\varpi\rangle}_{[g]}) = -\iota_g.$$

将此与 (7.10) 结合，我们最终推出 (7.7)。

(7.2) 的证明至此完成。 1

7.3. 对称分歧根。设 $\alpha =$ ïg ò $\in \Phi(\mathrm{S}, \mathrm{G}^*)_{\mathrm{sym,\ ram}}$ 使得 $g \in \mathcal{D}_{\mathrm{sym}}$ ，我们来证明

(7.3)。由命题 5.2 (2)，当且仅当 e 为偶数时，此情形才会出现；此时 α 的轨道由 ï $\frac{1}{\sigma^{\frac{e}{2}}}$ ò 表示。因此我们假设 e 为偶数且 $g = \sigma^{\frac{e}{2}}$。

回顾一下，由 (6.17) 和 (6.16) 可得

- $\zeta_{\mathrm{Tam}\ \alpha}|_{E^\times}$ 在 $1 + \mathfrak{p}_E$ 上是平凡的，
- $\zeta_{\mathrm{Tam}\ \alpha}|_{\mu_E} = t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t^1_{\boldsymbol{\mu}}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$，并且
- $\zeta_{\mathrm{Tam}\ \alpha}(\varpi_E) = (-1)^m \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_A\mathfrak{V}_{[g]}) \cdot t_{\langle\varpi\rangle}({}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]})$.

另一方面，由命题 5.4 (2) 可得

$$({}_{\mathbf{G}^*}\epsilon_\alpha \cdot {}_{\mathbf{G}}\epsilon_\alpha)(\gamma) = (-1)^{mv_E(\gamma)}$$

对于 $\gamma \in \mathrm{S}(F) = E^\times$。

根据命题 6.10，这两个模 ${}_{A^*}\mathfrak{V}_{[g]}$ 和 ${}_A\mathfrak{V}_{[g]}$ 同构。这意味着 $\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}|_{E^\times}$ 在 $\mathcal{O}_E^\times$ 上平凡，且 $\zeta_{\mathrm{Tam},\ \alpha}(\varpi_E) = (-1)^m$。因此，(7.3) 得证。

Appendix A. Comparison of the two constructions of supercuspidal representations of inner forms of GL_n

在本附录中，我们概述命题 3.2 的证明。由于 $\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$的情形已在 [OT21, 附录 A], 中处理，我们将重点讨论 $\mathrm{G} = \underline{A}^\times$。事实上，G 的证明与 G*的证明大体相同。因此，我们基本上遵循 [OT21, 附录 A],，同时试图强调需要格外谨慎处理之处。

设 (S ξ) 是 G 的温和椭圆正则对，$(E/F, \xi)$ 是次数为 n 的可容许对，并且 (S ξ) 的 G(F)-共轭类与 $(E/F, \xi)$ 的 F-同构类在第 3.1.1 节的双射下对应。我们的目标是证明 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$ 与 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)}$ 同构。

首先，我们详细回顾 Bushnell–Henniart 在 [BH11] 中构造 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$ 的过程。参数化

$$\{\text{admissible pairs of degree } n\}/F\text{-isom.} \xrightarrow{1:1} \mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D); \quad (E/F,\xi) \mapsto {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$$

是 [BH05a] 中 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{et}}(F)$ 参数化的推广。然而，由于“某些新的技术困难”（[BH11，第 472] 页），[BH11] 中构造的映射实际上是反向的；该双射

$$\mathcal{A}_m^{\mathrm{et}}(D) \xrightarrow{1:1} \{\text{admissible pairs of degree } n\}/F\text{-isom.}$$

定义于 [BH11，第 4 节和第 6.1 节参数化定理]。在这里，我们实质上求出了逆映射，并明确给出了中间步骤中的各种子群和特征 θ。

ξ的分解：固定一个一致化元 $\varpi_F \in F$。我们取满足以下条件的分解 $\xi = \xi_{\mathrm{t}} \cdot \xi_{\mathrm{w}}$：

- 特征 ξ_{t} 是温和分歧的。换言之，$\xi_{\mathrm{w}}|_{U_E^1} = \xi|_{U_E^1}$。
- 我们有 $\varpi_F \in \mathrm{Ker}\xi_{\mathrm{w}}$。特别地，$\xi_{\mathrm{w}}$ 具有有限阶。
- 特征 ξ_{w} 具有 p-幂阶。特别地，$\mu_E \subset \mathrm{Ker}\xi_{\mathrm{w}}$。

容易验证，这样的分解唯一存在。

接下来，我们将利用 $\xi_{\mathrm{t}}, \xi_{\mathrm{w}}$ 构造开子群 $\mathbf{J} \subset \mathbf{G}(F)$ 的不可约光滑表示 Λ_{t}, Λ_{w}。关于 $\mathbf{J}$ 及相关开子群的定义，以及特征 θ 的定义，我们遵循 [Tam16b, §3.4, §3.5]，其表述比 [BH11] 更为明确。

开子群的定义：为了继续推进，我们需要固定一个 F-嵌入 $E \hookrightarrow A$。我们取一个诱导出 $\mathbf{S} \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \hookrightarrow \underline{A}^{\times} = \mathbf{G}$ 嵌入的 F-嵌入。尽管由此得到的表示 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$（在同构意义下）与 F-嵌入的选择无关，但为方便后续讨论，我们仍作此选择。

回顾第 6.2 节中与该情形相关的各种对象。可容许对 $(E/F,\xi)$ 和 F-嵌入 $E \hookrightarrow A$ 定义了一个子域序列和一列整数：

$$F = E_t \subsetneq E_{t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq E_0 \subset E_{-1} = E, \quad a_t \geq a_{t-1} > \cdots > a_1 > a_0 > a_{-1} = 0.$$

此外，与 F-嵌入 $E \hookrightarrow A$ 一起，它还为 $-1 \leq k \leq t$ 导出 E_k-子代数 $A_k \subset A$ 和 $\mathcal{O}_E$-阶 $\mathfrak{A}_k \subset A_k$，以及 $A^{\times}$ 的紧开子群：

$$J^1 := U^1_{\mathfrak{A}_0} U^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_1} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-2}e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}_{t-1}} U^{\frac{1}{2}a_{t-1}e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)}_{\mathfrak{A}},$$
$$H^1 := U^1_{\mathfrak{A}_0} U^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_1} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-2}e(\mathfrak{A}_{t-1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{t-1}} U^{\frac{1}{2}a_{t-1}e(\mathfrak{A}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}}.$$

我们还需要另外两个开子群：

$$J^0 := U_{\mathfrak{A}_0} J^1, \quad \mathbf{J} := E^{\times} J^0 = E_0^{\times} J^0.$$

这里，最后一个等式成立，是因为根据可容许对的一条公理，E/E_0 是非分歧的。为使论述简洁，我们也固定A_0 和 $\mathfrak{A}_0$的一个具体表达式。由于根据（6.1），$r(\mathfrak{A}_0)$整除 $e(E/E_0) = 1$，我们看到 $\mathfrak{A}_0 \subset A_0$ 是一个极大 $\mathcal{O}_{E_0}$-序。将（6.6）中的 $m(A_0)$简记为 l，我们看到存在一个同构

$$A_0 \simeq M_l(D_0)$$

E_0-代数之间的同构，它在 $\mathfrak{A}_0$ 和 $M_l(\mathcal{O}_{D_0})$之间诱导出一个同构。从现在起，我们固定这样一个同构。于是有

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}_0} = D_0^\times U_{\mathfrak{A}_0}.$$

注意，所有这些对象仅取决于 $\xi|_{U_E^1} = \xi_{\mathrm{w}}|_{U_E^1}$（以及 $E \hookrightarrow A$）。

不可约表示 Λ_{t} of J 的定义：由 ξ_{t} 构造 J 的不可约光滑表示 Λ_{t}，它在 J^1 上平凡，具体如下。注意，我们有

$$\mathbf{J}/J^1 \simeq (\mathbf{J} \cap A_0^\times)/(J^1 \cap A_0^\times), \quad \mathbf{J} \cap A_0^\times = E^\times U_{\mathfrak{A}_0} = E_0^\times U_{\mathfrak{A}_0}, \quad J^1 \cap A_0^\times = U_{\mathfrak{A}_0}$$

特别地，$E_0^\times$是 J$\cap A_0^\times$中的中心元素。由于 ξ_{t} 是温和的，$\xi_{\mathrm{t}}|_{U_E}$ 是特征 $\overline{\xi}_{\mathrm{t}}$ 在 $k_E^\times$ 上的膨胀。根据 Green 参数化 [Gre55]，$\overline{\xi}_{\mathrm{t}}$ 给出 $\mathrm{GL}_l(k_{D_0})$ $\simeq U_{\mathfrak{A}_0}/U_{\mathfrak{A}_0}^1 \simeq J^0/J^1$的不可约尖点表示 $\overline{\lambda}$。令λ 为$\overline{\lambda}$ 到 J^0的膨胀。我们通过要求 $\Lambda|_{E_0^\times}$ 是 $\xi_{\mathrm{t}}|_{E_0^\times}$ -同型的，定义 λ 到 J $= E_0^\times J^0$的一个扩张 Λ_{t}。

关于这一部分，参见 [BH11，第 4.3、4.2、2 节。4], 尤其是第 4.3 节引理 2 之后的段落。

注 A.1. 可容许对的一个公理意味着 $\overline{\xi}_{\mathrm{t}}$ 是 k_E/k_{E_0}-正则的（其含义见 [BH11, §2.4 注 1]）。尽管 Green 参数化也适用于更一般的 k_E/k_{D_0}-正则特征，并产生 $\mathrm{GL}_l(k_{D_0})$ 的不可约尖点表示，但 k_E/k_{E_0}-正则性这一更强性质最终确保 $\delta(_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}) = n$；等价地说，$\lambda$在 $A_0^\times$中的正规化子是 J $\cap A_0^\times = E_0^\times U_{\mathfrak{A}_0}$（而非 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}_0} = D_0^\times U_{\mathfrak{A}_0}$ 中 $\mathfrak{A}_0$ 在 $A_0^\times$中的正规化子所包含的更大子群）。关于参数次数 δ的定义，见[BH11, §2.4, §2.6]。

特征 θ 的定义（属于 H^1）：由 ξ 构造 θ 的特征如下。显然，这一构造仅取决于 $\xi|_{U_E^1} = \xi_{\mathrm{w}}|_{U_E^1}$。

回顾第 5.1.1 节，我们有关于 $E_k^\times$ 的特征 ξ_k 对 ξ 的分解：

$$\xi = \xi_{-1} \cdot (\xi_0 \circ \mathrm{Nr}_{E/E_0}) \cdots (\xi_t \circ \mathrm{Nr}_{E/E_t}).$$

除其他性质外，这些特征满足以下条件：

- 对于 $k = -1$，特征 ξ_{-1} 是温和分歧的。
- 对于 $0 \le k \le t-1$，ξ_k 的 E 级别 Nr^{E/E_k} 是 a_k。

我们利用 $0 \le k \le t$ 的 ξ_k 来定义 θ。固定 F 的一个特征 ψ_F，它在 $\mathfrak{p}_F$ 上是平凡的，但在 $\mathcal{O}_F$ 上不是平凡的。令 $c_k \in \mathfrak{p}_E^{-a_k} \cap E_k$ 为满足以下条件的元素

$$\xi_k(1+x) = \psi_F(\mathrm{Tr}_{E_k/F}(c_k x))$$

对于 $x \in \mathfrak{p}_E^{\frac{a_k}{2}+} \cap E_k$。注意，该条件唯一确定了陪集 $c_k + (\mathfrak{p}_E^{-\frac{a_k}{2}} \cap E_k)$。我们通过以下方式定义 $U^{\frac{1}{2}a_k e}(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E+)$ 的一个特征 ψ_{c_k}：

$$\psi_{c_k}(1+x) := \psi_F(\mathrm{Trd}_{A_t/F}(c_k x))$$

对于 $x \in \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}a_k e}(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E+)$。借助 ψ_{c_k}，我们定义 θ_k的特征

$$U_{\mathfrak{A}_k}^{\frac{1}{2}a_{k-1}e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)+} U_{\mathfrak{A}_{k+1}}^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+} \cdots U_{\mathfrak{A}_t}^{\frac{1}{2}a_{t-1}e(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E)+}$$

对于 $0 \le k \le t$，由 $k = t$ 归纳定义如下。我们首先通过以下方式定义 θ_t

$$\theta_t := \xi_t \circ \mathrm{Nrd}_{A/F}|_{U^{\frac{1}{2}a_{t-1}e(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_t}}.$$

然后归纳地， θ_k 由 θ_{k+1} 定义如下:

$$\theta_k := \begin{cases} \psi_{c_k}\theta_{k+1} \text{ on } U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1}} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-1}e(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_t}, \\ (\xi_k \circ \mathrm{Nrd}_k)\cdot(\xi_{k+1}\circ\mathrm{Nrd}_{k+1})\cdots(\xi_t\circ\mathrm{Nrd}_t) \text{ on } U^{\frac{1}{2}a_{k-1}e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_k}, \end{cases}$$

其中我们用 Nrd_k: $A_k^\times \to E_k^\times$ 表示约化范数映射。最后，令 $\theta := \theta_0$。容易验证， θ 不依赖于$(\xi_k)_{k=-1}^t$ 的选择，而只依赖于 $\xi|_{U^1_E} = \xi_{\mathrm{w}}|_{U^1_E}$。

注意，我们有

$$\begin{aligned} \theta|_{U^1_{\mathfrak{A}_0}} &= (\xi_0\circ\mathrm{Nrd}_0)\cdot(\xi_1\circ\mathrm{Nrd}_1)\cdots(\xi_t\circ\mathrm{Nrd}_t)|_{U^1_{\mathfrak{A}_0}} \\ &= (\xi_0\cdot(\xi_1\circ\mathrm{Nr}_{E_0/E_1})\cdots(\xi_t\circ\mathrm{Nr}_{E_0/E_t}))\circ\mathrm{Nrd}_0|_{U^1_{\mathfrak{A}_0}}. \end{aligned}$$

因此，由 θ我们可以恢复 $\xi_0\cdot(\xi_1\circ\mathrm{Nr}^{E_0/E_1})\cdots(\xi_t\circ\mathrm{Nr}^{E_0/E_t})|_{U^1_{E_0}}$，从而也可以恢复

$$\xi_{\mathrm{w}}|_{U^1_E} = \xi|_{U^1_E} = (\xi_0\cdot(\xi_1\circ\mathrm{Nr}_{E_0/E_1})\cdots(\xi_t\circ\mathrm{Nr}_{E_0/E_t}))\circ\mathrm{Nr}_{E/E_0}|_{U^1_E}.$$

注记 A.2。这部分看起来可能与 [BH11]中的对应部分有很大不同。在 [BH11, §4.3], 的第二段和引理 1 中， ξ_{w} 由 θ 定义如下:

- 限制$\theta|_{U^1_{\mathfrak{A}_0}}$ 可经由 Nrd_0分解，也就是说，存在唯一的特征 ξ' 属于$U^1_{E_0}$，使得
$$\theta|_{U^1_{\mathfrak{A}_0}} = \xi'\circ\mathrm{Nrd}_0.$$
- 存在唯一的特征ξ_{w} 满足 $E^\times$，使得
  - $\xi_{\mathrm{w}}|_{U^1_E} = \xi'\circ\mathrm{Nr}^{E/E_0}$，
  - $\varpi_F \in \mathrm{Ker}\,\xi_{\mathrm{w}}$，且
  - ξ_{w} 的序为 p-次。

请注意，记号并不完全一致；例如，本文中的 A_0 写作 B 在 [BH11] 中的形式，而上文中的 ξ' 在 ξ_0 BH[中记作11]。

这里我们遵循 [Tam16b, §3.4], 并利用 θ 是一个简单特征这一事实（即 θ属于 $\mathcal{C}(\mathfrak{A},\beta,\psi_F)$；参见 [BH11, §2.5], [S´ec04]），从 ξ_{w}显式定义特征 θ。 [Tam16b, 第 362] 页中有一些小的笔误，我们已在上文予以更正（对于$\mathrm{G}^* = \mathrm{GL}_n$的情形，见 [Tam16a, 第1731页 (i)]）。

不可约表示 η J^1的定义：存在唯一一个包含 θ的不可约光滑表示 η J^1。我们只指出，证明基于这样一个事实： $J^1/\mathrm{Ker}\,\theta$ 是一个 Heisenberg p-群，而 $H^1/\mathrm{Ker}\,\theta$ 是其中心。

关于这一部分，请参见 [BH11, (2.5.1) (2)] 以及 4.3 引理 1 之后的段落。

J 的不可约表示 Λ_{w} 的定义：回想一下，我们固定了 F的一个一致化元 ϖ_F。我们将 η 扩张为 J 的一个不可约光滑表示 Λ_{w}，其特征由以下条件刻画:

(Ext1)：限制$\Lambda_{\mathrm{w}}|_{J^1}$同构于 η。(Ext2)：限制 $\Lambda_{\mathrm{w}}|_{J^0}$ 由 $A_0^\times$交织，也就是说，对任意$a \in A_0^\times$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{J^0\cap J^{0,a}}(\Lambda_{\mathrm{w}}|_{J^0\cap J^{0,a}}, \Lambda_{\mathrm{w}}^a|_{J^0\cap J^{0,a}}) \neq 0,$$

其中，$J^{0,\,a} = a^{-1}J^0 a$ 是共轭，而 Λ_{w}^a 是$_{J^{0,\,a}}$ 的表示，由 Λ_{w}共轭得到。

(Ext3)：我们有 $\varpi_F \in \mathrm{Ker}\,\Lambda_{\mathrm{w}}$。特别地，$\det\,\Lambda_{\mathrm{w}}$ 是有限阶的。
(Ext4)：行列式特征 $\det\Lambda_{\mathrm{w}}$ 具有 p阶。

注意，Λ_{w} 取决于 $\xi|_{U_E^1} = \xi_{\mathrm{w}}|_{U_E^1}$ 以及 ϖ_F的选择。将 η 扩张为 J 的不可约光滑表示，且满足 (Ext1) 和 (Ext2)，称为 [BH11]中 η 的宽扩张。满足 (Ext3) 和 (Ext4) 的宽扩张的存在性和唯一性已在[BH11, §4.3 引理 2]中证明。

注 A.3。事实上，刻画表示 Λ_{w}并不需要 (Ext2)。这可以用与 [OT21, 注 A.1]相同的方法证明。在下文命题 A.7 的证明中，我们只需验证 (Ext1)、(Ext3) 和 (Ext4)，即可说明在构造$_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}^{\mathrm{KY}}$ 时出现的某个表示与 Λ_{w}同构。

$_{\mathbf{G}}\pi_{(E/F,\xi)}^{\mathrm{BH}}$的定义：令 $\Lambda_\xi := \Lambda_{\mathrm{t}}\otimes\Lambda_{\mathrm{w}}$，最后定义 $_{\mathbf{G}}\pi_{(E/F,\xi)}^{\mathrm{BH}}$:=紧诱导$_{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}(F)}\,\Lambda_\xi$。我们很容易验证，$\Lambda_\xi$ 与$\varpi_F \in F$的选择无关，并且 $_{\mathbf{G}}\pi_{(E/F,\xi)}^{\mathrm{BH}}$ 与 F-嵌入 $E \hookrightarrow A$的选择无关。

另一方面，Kaletha 的构造首先通过 [Kal19a 命题 3.7.8]（第 3.1 节中回顾）取一个与 (S ξ) 对应的正则 Yu 数据，然后 Yu 构造 [Yu01] 得到 G(F) 的一个开子群 K 以及 K 的一个不可约光滑表示 κ，由此构造出一个超尖点表示 $_{\mathbf{G}}\pi_{(\mathbf{S},\xi)}^{\mathrm{KY}}$：= 紧诱导$_K^{\mathbf{G}(F)}\,\kappa$。与 [Kal19a 命题 3.7.8], 满射性的证明中一样，我们使用第 5.1 节中的 (S ξ) 的 Howe 分解来构造上述正则 Yu 数据。我们将 Howe 分解和相应的正则 Yu 数据分别记为 ϕ_k: G^k(F) $\to \mathbb{C}^\times$ ($k = -1, \ldots, t$) 和 Ψ =(G^0 $\subsetneq$ G^1 $\subsetneq \cdots \subsetneq$ G^t, π_{-1}, ($\phi_0, \ldots, \phi_t$))。为方便起见，我们采用 Howe 分解 $(\phi_k)_{k=-1}^t$，它诱导出 $(\xi_k)_{k=-1}^t$，后者以第 5.1.1 节所述的方式出现在 $_{\mathbf{G}}\pi_{(E/F,\xi)}^{\mathrm{BH}}$ 的构造中。特别地，我们有如下结论：

- G^k 如第 5.1 节所述,
- $\phi_k = \xi_k \circ \mathrm{Nrd}_k$对于 $k = -1, \ldots, t$ 满足 ξ_k且 Nrd$_k$ 如 θ的定义所述,
- $\xi = \prod_{k=-1}^t \phi_k|_{\mathbf{S}(F)}$，或等价地 $\xi = \prod_{k=-1}^t(\xi_k \circ \mathrm{Nr}^{E/E_k})$，并且
- π_{-1}：$= \pi_{\mathbf{G}^0\,(\mathbf{S}\,\phi_{-1})}$ 与 (S ϕ_{-1}) 相关联的 G^0(F) 的不可约深度零超尖点表示（在 [Kal19a, §3.4] 中记作 $\pi_{(\mathbf{S}\,\phi_{-1})}$）。

根据 [HM08, §3.4], ，我们可以将 κ 表示为不可约光滑表示的张量积 $\bigotimes_{k=-1}^t \kappa_k$，其中每个 κ_k 仅取决于 $0 \le k \le t$ 的 ϕ_k，而 κ_{-1} 仅取决于 π_{-1}。由于这种表达形式更便于我们的论证，下文中我们常引用 [HM08]。

在下文中，我们将看到 $K \supset$ J 成立，并进一步证明：若我们取一个合适的正则 Yu 数据 $\underline{\Psi}$，且它与 Ψ G-等价，则 κ_{-1}（分别为

$\bigotimes_{k=0}^{t}\kappa_k$）与 Λ_{t}（分别为 Λ_{w}）之间存在一种简单的关联。所需的同构 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)} \simeq {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$ 将由此立即得出。

注 A.4。严格来说，正则 Yu 数据 Ψ 仅在共轭意义下定义 (K、κ) 及相关对象（当然，这不会影响由此得到的超尖点表示 紧诱导$_K^{\mathbf{G}(F)}\kappa$ 的同构类）。这是因为定义中涉及某个表达式的选择

$$\pi_{-1} \simeq \mathrm{c\text{-}Ind}_{\mathbf{G}^0(F)_{[x]}}^{\mathbf{G}^0(F)}\rho$$

，且对 ($\mathbf{G}^0(F)_{[x]}$、ρ) 而言，由 π_{-1} 确定的对象仅在 $\mathbf{G}^0(F)$-共轭意义下确定（参见 [HM08] 第151页的第一段）。不过，我们会默认作出一个与当前情形自然关联的选择；也就是说，我们选择x 为 $\mathbf{G}^0$ 在 F 上的扩张 Bruhat–Tits 建筑中与 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}^0$ 相关联的点（参见第 5.2 节），并选择 ρ 为 $\mathbf{G}^0(F)_{[x]}$ 的不可约光滑表示，该表示由构造 $\pi^{\mathbf{G}^0}(\mathbf{S}, \phi_{-1})$ 从 ($\mathbf{S}$, ϕ_{-1}) 典范地得到（见下文命题 A.6 的证明）。

在 [Yu01 第 591] 页（以及 [HM08 第 52] 页）中，开子群 $K \subset \mathbf{G}(F)$ 根据 Moy–Prasad 子群定义为

$$K := K^t := \mathbf{G}^0(F)_{[x]}\mathbf{G}^1(F)_{x,s_0}\cdots\mathbf{G}^t(F)_{x,s_{t-1}},$$

其中

- $[x] \in \mathcal{B}_{\mathrm{red}}(\mathbf{G}^0, F)$ 是与 $\mathbf{S} \subset \mathbf{G}$ 相关联的约化 Bruhat–Tits 建筑中的点（参见第 5.2 节），
- $x \in \mathcal{B}(\mathbf{G}^0, F)$ 是一个映射到 $[x] \in \mathcal{B}_{\mathrm{red}}(\mathbf{G}^0, F)$ 的点；对于 $0 \le k \le t$，该点也被视为 $\mathcal{B}(\mathbf{G}^k, F)$ 中的像，并且
- $s_k := \frac{r_k}{2} =$ ~~深度(ϕ_k) 2~~ 对于 $k = 0, \ldots, t-1$.

回顾一下，我们安排了嵌入 $E \hookrightarrow A$ 使其与到 $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{G}$ 的嵌入相容，因此可以比较构造 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$ 中出现的各种子群与 Moy–Prasad 子群。这在 [MY21, § 6]，中使用 [BL02] 完成。特别地，我们有以下等式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^0(F)_{[x]} &= \mathfrak{K}_{\mathfrak{A}_0} = D_0^{\times}U_{\mathfrak{A}_0},\\
\mathbf{G}^k(F)_{x,s} &= U_{\mathfrak{A}_k}^{se(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_F)},\\
\mathbf{G}^k(F)_{x,s+} &= U_{\mathfrak{A}_k}^{se(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_F)+}
\end{aligned}$$

对于任意 $0 \le k \le t$ 和 $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$。因此我们有 $K \supset \mathbf{J}$（这也可由 [MY21，命题 10.2（2）、（3）]推出）。类似地，我们发现紧开子群

$$K_+^t := \mathbf{G}^0(F)_{x,0+}\mathbf{G}^1(F)_{x,s_0+}\cdots\mathbf{G}^t(F)_{x,s_{t-1}+}$$

在 [Yu01，第 591]页（以及 [HM08，第 52]页）中定义的对象不过就是 H^1（这也以 [MY21，命题 10.2（1）]的形式出现）。

对分解 $\xi = \xi_{\mathrm{t}}\xi_{\mathrm{w}}$ 所要求的条件与定义 5.1（[Kal19a，定义 3.6.2]）中对 Howe 分解所施加的条件并不完全一致，因此我们在下述命题中对后一个分解略作修改，以最终得到一个 G-等价的正则 Yu 数据。

命题 A.5. 存在一个正则 Yu 数据 $\underline{\Psi} = (\mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^t, \underline{\pi}_{-1}, (\underline{\phi}_0, \ldots, \underline{\phi}_t))$，它与 Ψ G-等价，并满足以下性质：

(i) $\underline{\pi}_{-1} \simeq \pi^{\mathbf{G}^0}{}_{(\mathbf{S}\,\xi_{\mathrm{t}})}$，(ii) $\prod_{k=0}^{t} \underline{\phi}_k|_{\mathbf{S}(F)} = \xi_{\mathrm{w}}$，
(iii) $\underline{\phi}_k|_{\mathbf{G}^k(F)_{x,\,0+}} = \phi_k|_{\mathbf{G}^k(F)_{x,\,0+}}$对于 $k = 0, \ldots,$ t，以及 (iv) $\underline{\phi}_k$对于 $k = 0, \ldots, t$具有有限的 p-次序。

证明。该证明与 [OT21 命题 A.3] 的证明类似。这里我们仅勾勒 $\underline{\Psi}$ 的构造。为此，我们需要为 $k = 0, \ldots, t$ 定义 $\underline{\pi}_{-1}$ 和 $\underline{\phi}_k$。至于 $\underline{\pi}_{-1}$，我们只需令其为

$$\underline{\phi}_{-1} := \xi_{\mathrm{t}}, \quad \underline{\pi}_{-1} := \pi^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S},\underline{\phi}_{-1})}.$$

为了为 $k = 0,\ldots, t$ 定义 $\underline{\phi}_k$，我们取 $E_k^\times$ 的辅助特征 $\underline{\xi}_k$，使其满足以下条件：

- $\underline{\xi}_k|_{U^1_{E_k}} = \xi_k|_{U^1_{E_k}}$，
- $\varpi_F \in \mathrm{Ker}(\underline{\xi}_k \circ \mathrm{Nr}^{E/E_k})$，
- $\underline{\xi}_k$ 具有有限的 p-幂序，且
- 若 $\phi_t = \mathbb{1}$，则 $\underline{\xi}_t = \mathbb{1}$。

那么我们定义

$$\underline{\phi}_k := \underline{\xi}_k \circ \mathrm{Nrd}_k.$$

注意，上述条件并未唯一确定特征 $\underline{\xi}_k$，但这种不确定性不会影响论证。□

设 $\underline{\Psi}$ 是命题 A.5 中的正则 Yu 数据，κ_k 是由 $\underline{\Psi}$ 为 $k = -1, \ldots, t$构造的 K 的不可约光滑表示。此处同样如注 A.4 所述，我们隐式地采用与之前相同的 x，以及通过构造$\underline{\pi}_{-1} = \pi^{\mathbf{G}^0}{}_{(\mathbf{S}\,\xi_{\mathrm{t}})}$典范地得到的 $\mathbf{G}^0(F)_{[x]}$ 的不可约光滑表示 $\underline{\rho}$。

命题 A.6. 取命题 A.5 中的正则 Yu 数据 $\underline{\Psi} = (\mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^t, \underline{\pi}_{-1}, (\underline{\phi}_0, \ldots, \underline{\phi}_t))$，则有 $\kappa_{-1} \simeq$ 紧诱导$_{\mathbf{J}}^{K} \Lambda_{\mathrm{t}}$。

证明。证明与 [OT21，命题 A.4] 类似，尽管在该文中我们有 $K = \mathbf{J}$，因此紧诱导 $_{\mathbf{J}}^{K} \Lambda_{\mathrm{t}}$ 就是 Λ_{t}。这相当于直接比较由 ξ_{t} 构造 Λ_{t} 的过程与由 $\underline{\pi}_{-1} = \pi^{\mathbf{G}^0}{}_{(\mathbf{S}\,\xi_{\mathrm{t}})}$ 构造 κ_{-1} 的过程（后者的细节见 [Kal19a，§3.4]和 [HM08，第 67]页）。

我们先简要概述后一种构造，并勾勒一下两者的比较。为此，记住下面的图示或许会有所帮助：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}(F)\mathbf{G}^0(F)_{x,0} = E_0^\times U_{\mathfrak{A}_0} & \longhookrightarrow & K^0 = \mathbf{G}^0(F)_{[x]} = D_0^\times U_{\mathfrak{A}_0} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbf{J} = E_0^\times J^0 & \longhookrightarrow & K = D_0^\times J^0. \end{array}$$

如 [HM08 第 50 页所述，页 67], 处取一个表达式

$$\underline{\pi}_{-1} \simeq \text{c-Ind}_{\mathbf{G}^0(F)_{[x]}}^{\mathbf{G}^0(F)} \underline{\rho}$$

如 [Yu01 第 590 页所述，D4]，并执行膨胀运算 $\kappa_{-1} = \mathrm{inf}_{K^0}^{K}(\underline{\rho})$，将 $K^0 = \mathbf{G}^0(F)_{[x]} \subset \mathbf{G}^0(F)$ 映射到 $K \subset \mathbf{G}(F)$。在我们的情形中，

$\underline{\pi}_{-1} = \pi^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 为 $\underline{\rho}$ 提供了一个自然的选择，具体如下。我们回顾一下 [Kal19a 第 1095] 页的内容： $\pi^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 定义为

$$\pi^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S},\xi_t)} := \text{c-Ind}^{\mathbf{G}^0(F)}_{\mathbf{S}(F)\mathbf{G}^0(F)_{x,0}} \kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S},\xi_t)}$$

对于与 (S ξ_t) 相关的某个表示 $\kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$。因此，我们设

$$\underline{\rho} := \text{c-Ind}^{\mathbf{G}^0(F)_{[x]}}_{\mathbf{S}(F)\mathbf{G}^0(F)_{x,0}} \kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S},\xi_t)}.$$

现在，考察 [Kal19a 第 1095] 页中 $\kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 的构造可知，通过同构 $\mathbf{S}(F)\mathbf{G}^0(F)_{x,0}/\mathbf{G}^0(F)_{x,0+} = E_0^\times U_{\mathfrak{A}_0}/U^1_{\mathfrak{A}_0} \simeq E_0^\times J^0/J^1$，以及 $\kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 在 $\mathbf{G}^0(F)_{x,0+} = U^1_{\mathfrak{A}_0}$ 上平凡这一事实，可得 Λ_t 同构于从 $\kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 膨胀得到的表示。于是我们容易得出所需结论： $\kappa_{-1} \simeq$ 紧诱导$^K_{\mathbf{J}}\ \Lambda_t$。

注意，在 $\kappa^{\mathbf{G}^0}_{(\mathbf{S}\ \xi_t)}$ 的定义中，通过与 $\text{Res}_{k_E/k_F}\mathbb{G}_\text{m} \subset \text{Res}^{k_{D_0}/k_F}\mathbf{GL}_{l,k_{D_0}}$ 相关的 Deligne–Lusztig 诱导 [DL76]，将 $k_E^\times$ 上的一个特征对应到 $\mathbf{GL}_l(k_{D_0})$ 的一个不可约尖点表示。根据 [Dig99，第 3.2]，条 Corollaire，这自然等同于与 $\text{Res}_{k_E/k_{D_0}}\mathbb{G}_\text{m} \subset \mathbf{GL}_{l,k_{D_0}}$ 相关的 Deligne–Lusztig 诱导；众所周知，这给出了 $\mathbf{GL}_l(k_{D_0})$ 的 Green 参数化。□

命题 A.7。在命题 A.5 中所选取的正则 Yu 数据 $\underline{\Psi} = (\mathbf{G}^0 \subsetneq \mathbf{G}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{G}^t, \underline{\pi}_{-1}, (\underline{\phi}_0, \ldots, \underline{\phi}_t))$ 下，我们有 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}} \simeq \Lambda_\text{w}$。

证明。该证明与 [OT21，命题 A.5] 的证明类似，尽管在该文献中我们有 $\mathbf{J} = K$，因而 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}}$ 就是 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k$。此处我们仅概述论证。

我们需要验证 J 的表示 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}}$ 满足 Λ_w 的刻画条件。根据注 A.3，只需验证条件 (Ext1)、(Ext3) 和 (Ext4)。

我们来证明 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}}$ 满足 (Ext1)，即，

$$\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{J^1} \simeq \eta.$$

在构造 κ_k 的第一步中，根据 Yu01 第 591] 页的 [，构造了一个 $\underline{\phi}_k$ 的特征 $\hat{\underline{\phi}}_k$。MY21 命题 10.4]，的证明结合 [BL02],^，给出了 $\underline{\phi}_k$ 的以下表达式：

$$\hat{\underline{\phi}}_k = \begin{cases} \psi_{\underline{c}_k} & \text{on } U^{\frac{1}{2}a_k e(\mathfrak{A}_{k+1}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+1}} U^{\frac{1}{2}a_{k+1} e(\mathfrak{A}_{k+2}/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_{k+2}} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{t-1} e(\mathfrak{A}_t/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_t} \\ \underline{\xi}_k \circ \text{Nrd}_k & \text{on } U^{\frac{1}{2}a_{-1} e(\mathfrak{A}_0/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_0} U^{\frac{1}{2}a_0 e(\mathfrak{A}_1/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_1} \cdots U^{\frac{1}{2}a_{k-1} e(\mathfrak{A}_k/\mathcal{O}_E)+}_{\mathfrak{A}_k}, \end{cases}$$

其中

- $\underline{\xi}_k$ 与命题 A.5 的证明中相同，
- $\underline{c}_k$ 的定义方式与 c_k 相同，只需用$\underline{\xi}_k$ 替代 ξ_k，即为$\mathfrak{p}_E^{-a_k} \cap E_k$ 中的一个元素，使得

$$\underline{\xi}_k(1+x) = \psi_F(\text{Tr}_{E_k/F}(\underline{c}_k x))$$

对于 $x \in \mathfrak{p}_E^{\frac{a_k}{2}+} \cap E_k$，并且

• $\psi_{\underline{c}_k}$ 的定义方式与命题 A.5 的定义中 ψ_{c_k} 的定义相同，只需用 $\underline{c}_k$ 替代 c_k。由命题 A.5 的 (iii)，可得$\underline{\xi}_k|_{U^1_{E_k}} = \xi_k|_{U^1_{E_k}}$，因此 $\psi_{\underline{c}_k} = \psi_{c_k}$。于是，我们得到等式

$$\prod_{k=0}^{t} \hat{\underline{\phi}}_k = \theta$$

$K_+^t = H^1$的特征。如前所述，η 被定义为 J^1 的唯一包含 H^1的特征 θ 的不可约光滑表示。由于根据 [HM08，引理 3.27]，，$\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{K_+^t}$ 确实包含 $\prod_{k=0}^t \hat{\ }\underline{\phi}_k$，因此只需证明 $\dim \bigotimes_{k=0}^t \kappa_k = \dim \eta$。这在 [MY21，命题 10.5]的证明中完成。因此，$\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}}$ 确实满足 (Ext1)。

(Ext3) 条件很容易验证。记 Z(G)为 G 的中心，我们利用$\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{Z(\mathbf{G})(F)}$是 $\prod_{k=0}^t \underline{\phi}_k|_{Z(\mathbf{G})(F)}$同型这一事实；这一点很容易检查，而等式 $\prod_{k=0}^t \underline{\phi}_k|_{Z(\mathbf{G})(F)} = \xi_{\mathrm{w}}|_{Z(\mathbf{G})(F)}$则直接由命题 A.5 的 (ii) 得出。

为验证 $\bigotimes_{k=0}^t \kappa_k|_{\mathbf{J}}$ 满足 (Ext4)，我们证明一个稍强的断言：K 的特征 $\det \kappa_k$ 对 $0 \le k \le t$具有 p-幂序。为此，我们考察 HM08, §3.4] 中 [对 κ_k 的定义，并使用命题 A.5 的 (iv)。证明的关键步骤是证明 $\det \omega_k$ 具有 p-幂序，其中 ω_k 是 κ_k 定义中使用的某个表示，并通过 Heisenberg–Weil 构造定义。□

现在我们证明 ${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)} \simeq {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}$。根据命题 A.6、“投影公式”和命题 A.7，我们得到

$$\begin{aligned}\kappa = \bigotimes_{k=-1}^{t} \kappa_k &\simeq (\text{c-Ind}_{\mathbf{J}}^K \Lambda_{\mathrm{t}}) \otimes \bigotimes_{k=0}^{t} \kappa_k \simeq \text{c-Ind}_{\mathbf{J}}^K \left(\Lambda_{\mathrm{t}} \otimes \bigotimes_{k=0}^{t} \kappa_k|_{\mathbf{J}}\right) \\ &\simeq \text{c-Ind}_{\mathbf{J}}^K (\Lambda_{\mathrm{t}} \otimes \Lambda_{\mathrm{w}}) = \text{c-Ind}_{\mathbf{J}}^K \Lambda_\xi.\end{aligned}$$

因此，我们得出：

$${}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{KY}}_{(\mathbf{S},\xi)} = \pi_\Psi \simeq \pi_{\underline{\Psi}} = \text{c-Ind}_K^{\mathbf{G}(F)} \kappa \simeq \text{c-Ind}_{\mathbf{J}}^{\mathbf{G}(F)} \Lambda_\xi = {}_{\mathbf{G}}\pi^{\mathrm{BH}}_{(E/F,\xi)}.$$

References

[Adl98] J. D. Adler, *Refined anisotropic K-types and supercuspidal representations*, 《太平洋数学杂志》185（1998），第1期，1–32。[AS09] J. D. Adler 和 L. Spice, *Supercuspidal characters of reductive p-adic groups*, 《美国数学杂志》131（2009），第4期，1137–1210。[Bad02] A. I. Badulescu, *Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de car-actéristique non nulle*, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）35（2002），第5期，695–747。[BF83] C. J. Bushnell 和 A. Fr¨ohlich, *Gauss sums and p-adic division algebras*, 《数学讲义》第987卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1983年。[BF85] C. J. Bushnell 和 A. Fr¨ohlich, *Nonabelian congruence Gauss sums and p-adic simple algebras*, 《伦敦数学会会刊》（3）**50**（1985），2, 207–264。[BH05a] C. J. Bushnell 和 G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondence. I*, 《美国数学会杂志》（）**18**（2005），710–。[BH05b] C. J. Bushnell 和 G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondence. II. Totally ramified representations*, 《组合数学》（）**141**（2005），4, 979–1011，第3期，685–。[BH10] C. J. Bushnell 和 G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondence, III: the general case*, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）101（2010），第2期，497–553。

[BH11] , *The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of* GL(n), 《纯粹与应用数学季刊》7（2011），第3期，雅克·蒂茨荣誉专辑，469–538。[BH14] , *To an effective local Langlands correspondence*, 《美国数学会回忆录》231（2014），第1087号，v+88。[BL02] P. Broussous 和 B. Lemaire, *Building of* GL(m, D) *and centralizers*, 《变换群》7（2002），第1期，15–50。[CO23] C. Chan 和 M. Oi, *Characterization of supercuspidal representations and very regular elements* 2301 , arXiv: . 09812，2023年。[Dig99] F. Digne, *Descente de Shintani et restriction des scalaires*, 《伦敦数学会杂志》（第2辑）59（1999），第3期，867–880。[Dil20] P. Dillery, *Rigid inner forms over local function fields*, arXiv:2008.04472v3，2020年。[DKV84] P. Deligne、D. Kazhdan 和 M.-F. Vign´eras, *Représentations des algèbres centralessimples p-adiques*, 《局部域上约化群的表示》，《当代研究》，Hermann，巴黎，1984年，第33–117页。[DL76] P. Deligne 和 G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, 《数学年刊》（第2辑）103（1976），第1期，103–161。[DS18] S. DeBacker 和 L. Spice, *Stability of character sums for positive-depth supercuspidal* , , 《莱茵应用 *representations* **742** 2018 47 78 数学杂志》（），–。[Fin21] J. Fintzen, *On the construction of tame supercuspidal representations*, 《组合数学》157（2021），第12期，2733–2746。[FKS21] J. Fintzen、T. Kaletha 和 L. Spice, *A twisted Yu construction Harish-Chandra char-* , *acters* 2106 09120 *and endoscopy*, arXiv: . v2，2021年。[Gra07] M. Grabitz, *Simple characters for principal orders in* M$_m$(D), 《数论杂志》126（2007），第1期，1–51。[Gre55] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, 《美国数学会汇刊》80（1955），402–447。[HL10] G. Henniart 和 B. Lemaire, *Formules de caractères pour l'induction automorphe*, 《莱茵应用数学杂志》645（2010），41–84。[HM08] J. Hakim 和 F. Murnaghan, *Distinguished tame supercuspidal representations*, 《国际数学研究论文集》（2008），第2期，文章编号rpn005，共166页。[How77] R. E. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of* Gl$_n$, 《太平洋数学杂志》73（1977），第2期，437–460。[HT01] M. Harris 和 R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* , 《数学年刊研究》第151卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2001年，附有 Vladimir G. Berkovich 的附录。[Kal15] T. Kaletha, *Epipelagic L-packets and rectifying characters*, 《发明数学》202（2015），第1期，1–89。[Kal16a] , *The local Langlands conjectures for non-quasi-split groups*, 《自守形式族与迹公式》，《西蒙斯研讨会论文集》，施普林格出版社，[查姆], 2016, ，第217–257页。[Kal16b] , *Rigid inner forms of real and p-adic groups*, 《数学年刊》（第2辑）184（2016），第2期，559–632。[Kal19a] , ——— *Regular supercuspidal representations* **32** 2019 4, , 1071 1170 《美国数学会杂志》（），第–期。[Kal19b] T. Kaletha, *Supercuspidal L-packets*, arXiv:1912.03274v2，2019年。[Kot82] R. E. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, 杜克数学期刊49（1982），第4期，785–806。[Kot84] , ——— *Stable trace formula: cuspidal tempered terms* **51** 1984 3, , 杜克数学期刊 611 650 （），第–期。[Kot86] , ——— *Stable trace formula: elliptic singular terms* **275** 1986 3, , 数学年刊（）， 365 399 第–期。[KS99] R. E. Kottwitz 和 D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, 《艺文》（1999），第255期，vi+190。[KS12] R. Kottwitz 和 D. Shelstad, *On splitting invariants and sign conventions in endoscopic transfer* 1201 5658, 2012 , arXiv: . 。[LRS93] G. Laumon、M. Rapoport 和 U. Stuhler, *D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence* **113** 1993 2, 217 338 , 《发明数学》（），第–期。

[LS87] R. P. Langlands 和 D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, 数学年刊 278 (1987年), 第 1–4 期, 219–271。[MY21] A. Mayeux 和 Y. Yamamoto, *Comparing Bushnell-Kutzko and Sécherre's constructions of types for $_N$ and its inner forms with Yu's construction* 2112 12367, GL, arXiv:。

2021年。[OT21] M. Oi 和 K. Tokimoto, *Local Langlands correspondence for regular supercuspidal representations of GL n* 2021 3, 2007 2073 ( ), 国际数学研

究通报 ( ), 第 – 期。[Pra01] G. Prasad,
Galois-fixed points in the Bruhat-Tits building of a reductive group, 法国数学会通报 129 (2001年), 第 2 期, 169–174。[Rog83] J. D. Rogawski, *Representations of* GL(n)
and division algebras over a p-adic field, 杜克数学期刊 50 (1983年), 第 1 期, 161–196。[S´ec04] V. S´echerre, *Représentations lisses de* GL(m, D). *I. Caractères simples*, 法国数学会通报 132 (2004年), 第 3 期, 327–396。[Ser79] J.-P. Serre, *Local fields*, 数学研究生教材, 第 67 卷, 施普林格出版社, 纽约-柏林, 1979年。由 Marvin Jay Greenberg 从法文译出。[Tam16a] K.-F. Tam, *Admissible embeddings of L-tori and the essentially tame local Langlands correspondence* 2016 6, 1695 1775 , 国际数学研究

通报 ( ), 第 – 期。[Tam16b] *Some endoscopic properties of the essentially tame Jacquet-Langlands correspondence* **21** 2016 345 389 , 《文献数学》

( ), –。[Yu01] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, 美国数学会杂志 14 (2001年), 第 3 期, 579–622。[Zin99] E.-W. Zink,
More on embeddings of local fields in simple algebras, 数论杂志 77 (1999年), 第 1 期, 51–61。

Institute of Mathematics, Academia Sinica, Astronomy-Mathematics Building, No. 1, Sec. 4 Roosevelt Road Taipei 10617 Taiwan. , „
Email address: tokimoto@gate.sinica.edu.tw