arXiv:2303.02359v1 [math.AG] 4 Mar 2023

正特征下 Λ-模的模空间上的 HITCHIN 映射

DAVID ALFAYA 和 CHRISTIAN PAULY

ABSTRACT. 在 Simpson 对复数域上的原始定义基础上，我们引入定义在正特征域上的代数簇的微分算子受限层 Λ 这一概念。我们定义 p-曲率以及 Λ-模的概念，并给出 Λ-模模空间上 Hitchin 映射的类比。我们证明，在某些条件下，这一 Hitchin 映射可经由底层代数簇的 Frobenius 映射下降，并给出一些例子。

1. INTRODUCTION

定义在代数闭域 $\mathbb{K}$ 上的光滑代数簇 X上的微分算子环层 Λ ，以及相应的 X 上的 $\mathcal{O}_X$-模的 Λ-模这一概念，由 [Sim94] 于 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$复数域上引入，旨在为 X上的 $\mathcal{D}_X$-模（即带有可积联络的向量丛）和 Higgs 层提供一种统一的结构。 Λ-模的其他例子包括沿叶状结构的联络或对数联络。

本文考虑 Simpson 关于定义在特征为 $p>0$ 的域 $\mathbb{K}$ 上的微分算子环层 Λ 的原始定义。注意，作为李代数丛 T_X 的包络代数所定义的晶体微分算子环层 $\mathcal{D}_X$ （见 [BO78] 或 [BMR08]）就是这样的微分算子环层，而通常的微分算子层（例如见 [Gro67，第 16] 节）则不是。正特征下环层 $\mathcal{D}_X$ 的一个主要特征是其具有很大的中心；该中心可借助李代数丛 T_X 上的 p 次幂映射，或 p-结构，来描述。我们对正特征下 Λ-模的一般研究所作的首个贡献，是通过为 Λ 赋予一个 p-结构而得到的受限微分算子环层的定义（见定义 2.6）。微分算子环的受限层的例子早已在 [Lan14] 中作为受限李锚丛的包络代数出现。新的非分裂例子例如包括某个定义在 X 上的线丛 L 所对应的扭曲微分算子环层 $\mathcal{D}_X(L)$（见第 4.5 小节）。

本文的主要目的是证明正特征下射影代数簇 X 上受限 Λ-模的 Hitchin 映射类比所具有的一项性质。首先，我们在第 5 节验证， X 上 Λ-模 E 的 p-曲率 ψ_∇ 概念能够适用于我们的广义设定，从而为层 E 上的每个 Λ-模结构定义一个取值于 $F^*H^\vee$ 的 Higgs 场，该 Higgs 场定义在 E 上，其中 H 是与滤过 $\Lambda_0\subset\Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda$ 相关联的第一个商 Λ_1/Λ_0，而 F 是 Frobenius

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14D20, 14G17.*Key words and phrases.* Hitchin 映射，Lambda-模，联络，希格斯丛，正特征，模空间。

X 的映射。因此，将经典 Hitchin 映射应用于 Higgs 场 ψ_∇ ，我们得到一个态射

$$h_\Lambda : \mathcal{M}_X^\Lambda(r,P) \to \mathcal{A}_r(X, F^*H^\vee),$$

其中， $\mathcal{M}_X^\Lambda(r,P)$ 是参数化 X 上秩为 r、Hilbert 多项式为 P 的 Giesecker 半稳定 Λ-模的模空间，而 $\mathcal{A}_r(X,F^*H^\vee)$ 是向量丛 $F^*H^\vee$ 的 Hitchin 基。在锚映射$\delta : \Lambda_1/\Lambda_0 \to T_X$ （该映射由 Λ_1 中元素与 $\mathcal{O}_X$ 中局部正则函数之间的交换子诱导）一般满射这一假设下，我们的主要结果（定理 6.6）表明， ψ_∇ 的特征多项式系数可经代数簇 X 的 Frobenius 映射 F 下降。等价地，这意味着 Hitchin 态射 h_Λ 可分解为

$$h'_\Lambda : \mathcal{M}_X^\Lambda(r,P) \to \mathcal{A}_r(X, H^\vee), \tag{1.1}$$

随后再经整体截面的 Frobenius 映射 F 作拉回。这个定理最初由 [LP01] 对光滑射影曲线 X 和 $\Lambda = \mathcal{D}_X$ 证明。 [EG20, 第 2 节5] 指出，在 $\Lambda = \mathcal{D}_X$ 的情形下，证明相当直接地源于这样一个事实： p-曲率 ψ_∇ 关于层 End(E) $\otimes F^*\Omega^1_X$ 上的自然联络是平坦的；这一点已在 [Kat70, 命题5.23], 中证明。此外，他们的论证与代数簇 X 的维数无关。本文表明，在锚映射 $\delta : \Lambda_1/\Lambda_0 \to T_X$ 一般满射的假设下， [EG20] 中给出的优雅论证可以推广到一般的受限 Λ-模。我们还给出一个例子，说明当 δ 不一般满射时，该结果不成立。

在最后一节中，我们通过对由微分算子环层 Λ 在 X 上得到的 Λ^R 在 $\mathbb{A}^1$ 上的 Rees构造 $X \times \mathbb{A}^1$ ，给出了主定理在相对情形下的一个类似结果。这里我们需要将注意力限制在由 X 上的受限 Lie 代数丛 H 的包络代数得到的层 Λ 上。于是，我们的定理（定理7.1）给出了仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 上从 $H^\vee$ 值 Higgs 层的经典 Hitchin 映射到 Λ-模的 Hitchin 映射（1.1） h'_Λ 的显式变形。对于光滑射影曲线 X ，在 $\Lambda = \mathcal{D}_X$ 且 $H = T_X$ 的情形下，这一结果已在 [LP01] 中得到；另见 Lan14 第 4 节 [，其中给出了一些部分推广。5]

最后，我们提及，光滑射影曲线 X 且 $\Lambda = \mathcal{D}_X$ 时，Hitchin 映射（1.1） h'_Λ 的纤维已在 [Gro16] 中得到描述。对于一般的 X 和 Λ，文献中似乎尚无对 h'_Λ 的纤维的描述，对其进行研究将是未来一个有趣的方向。

我们谨此感谢 Carlos Simpson 在本文撰写过程中进行的许多有益讨论。

致谢。本文始于第一作者于2017年在蔚蓝海岸大学 J.-A. Dieudonné 实验室进行的一次研究访问期间，他谨向该实验室致谢，感谢其热情接待。本研究部分由 MINECO（资助项目 MTM2016-79400-P、PID2019-108936GB-C21 和 ICMAT Severo Ochoa项目 SEV-2015-0554）以及欧盟第七框架计划（玛丽·居里 IRSES资助 612534 项目 MODULI）资助。在本研究开展期间，第一作者还获得了 La Caixa 基金会的博士前资助（Severo Ochoa国际博士项目），以及与 ICMAT Severo Ochoa 项目相关的博士后职位支持。

2. Preliminaries on sheaves of rings of differential operators

2.1. 定义与性质。设 $\mathbb{K}$ 是一个代数闭域。设 X 和 S 是有限型 $\mathbb{K}$ 上的概形，并设

$$\pi : X \longrightarrow S$$

是一个态射。我们回顾 [Sim94 第 2] 节中关于 S 上 X 的微分算子环层的定义。注意，[Sim94] 中的原始定义是在 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 上给出的，但也可以将其视为定义在任意基域 $\mathbb{K}$ 上。

定义 2.1. S 上 X 的微分算子环层，是一个定义在 X 上的结合且含幺的 $\mathcal{O}_S$-代数层 Λ，带有满足以下性质的滤过 $\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \cdots$

(1) $\Lambda = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda_i$ 和 $\Lambda_i \cdot \Lambda_j \subset \Lambda_{i+j}$。(2) $\mathcal{O}_X \to \Lambda$ 的像等于 Λ_0。(3) $\pi^{-1}(\mathcal{O}_S)$ 在 $\mathcal{O}_X$ 中的像包含于 Λ 的中心。(4) $\mathrm{Gr}_i(\Lambda) := \Lambda_i/\Lambda_{i-1}$ 上的左、右 $\mathcal{O}_X$-模结构相同。(5) $\mathcal{O}_X$-模 $\mathrm{Gr}_i(\Lambda)$ 是相干的。(6) 分次 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathrm{Gr}^\bullet(\Lambda) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathrm{Gr}_i(\Lambda)$ 由 $\mathrm{Gr}_1(\Lambda)$ 生成。

由于性质 (4)，对于每个 $D \in \Lambda_1$，交换子 $[D, f]$ 与 $f \in \mathcal{O}_X$ 是 Λ_0 的一个元素。此外，对于每个 $D \in \Lambda_1$ 和每个 f、$g \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$[D, fg] = Dfg - fgD = Dfg - fDg + fDg - fgD = [D, f]g + f[D, g].$$

因此，假设 $\Lambda_0 = \mathcal{O}_X$，我们看到映射 $[D, -] : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ 是一个 $\mathcal{O}_S$-导子，我们将其记为 δ_D（即，$\delta_D(f) = [D, f]$）。此外，记 $H = \Lambda_1/\Lambda_0$。于是我们得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow \Lambda_0 = \mathcal{O}_X \longrightarrow \Lambda_1 \xrightarrow{\mathrm{sb}} H \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

我们称映射 $\Lambda_1 \longrightarrow H$ 为符号映射，并将其记为 sb。我们还注意到，$\mathcal{O}_X$-线性映射 $\delta :\ D \mapsto \delta_D$ 可经由 H 分解，因此得到一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射，也记为

$$\delta : H \longrightarrow \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = T_{X/S},$$

称为锚映射。其中，$T_{X/S}$ 是相对切层。

注 2.2. 容易看出，锚映射 $\delta = 0$ 这一条件等价于 Λ 上的右、左 $\mathcal{O}_X$-模结构相同。

本文有时会关注具有更多性质的微分算子环层。

定义 2.3. 设 Λ是定义在 S 上、具有$H = \Lambda_1/\Lambda_0$的 X 上的微分算子环层。称 Λ 为

- 几乎阿贝尔的，如果分次代数 $\mathrm{Gr}^\bullet(\Lambda)$ 是阿贝尔的。
- 几乎多项式，如果 $\mathcal{O}_X = \Lambda_0$，$H$ 局部自由，且分次代数 $\mathrm{Gr}^\bullet(\Lambda)$ 等于对称代数 $\mathrm{Sym}^\bullet(H)$。

- 几乎多项式分裂，如果 Λ 几乎多项式，且正合序列 (2.1) 分裂。

为完整起见，我们回顾如下内容

定义 2.4。在 X 上的 $\mathcal{O}_S$-李代数丛是指一个三元组（H，$[-,-]$，δ），由一个 $\mathcal{O}_X$-模 H组成，其中 H同时还是一个 $\mathcal{O}_S$-李代数层，并且具有一个 $\mathcal{O}_X$-线性锚映射 $\delta: H \to T_{X/S}$，对所有局部截面$f \in \mathcal{O}_X$ 和 D_1，满足以下条件 $D_2 \in H$

$$[D_1, fD_2] = f[D_1, D_2] + \delta_{D_1}(f)D_2.$$

注记 2.5。若 Λ是几乎阿贝尔的，则（$H = \Lambda_1/\Lambda_0$，$[-,-]$，δ）是 X 上的一个 $\mathcal{O}_S$-李代数丛（关于“受限”版本，参见命题 3.4）。

2.2. 受限微分算子环层。从现在起，我们假设 $\mathbb{K}$ 的特征为 $p > 0$。在这种情况下，我们引入如下定义

定义 2.6. X 上关于 S 的受限微分算子环层是指 S 上 X 的一个微分算子环层 Λ，连同一个映射

$$\begin{aligned} [p] \quad : \quad \Lambda_1 &\longrightarrow \Lambda_1 \\ D &\longmapsto D^{[p]} \end{aligned}$$

称为一个 p-结构，使得对于任意局部截面 D、D_1、$D_2 \in \Lambda_1$ 以及任意局部截面 $f \in \mathcal{O}_X$，以下性质成立

(1) $\mathrm{ad}(D^{[p]}) = \mathrm{ad}(D)^p$
(2) $(D_1 + D_2)^{[p]} = D_1^{[p]} + D_2^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2)$
(3) $(fD)^{[p]} = f^p D^{[p]} + \delta_{fD}^{p-1}(f)D$
(4) $f^{[p]} = f^p$

其中，$s_i(x, y)$ 是结合代数 Λ 中交换子的泛Lie多项式，由 $\Lambda[t]$ 中如下表达式定义

$$\mathrm{ad}(tx + y)^{p-1}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(x, y)t^{i-1}.$$

注 2.7. 注意，性质 (1) 等价于对于任意局部截面 D、$E \in \Lambda_1$，等式 $\mathrm{ad}(D^{[p]})(E) = \mathrm{ad}(D)^p(E)$ 成立。事实上，根据 Jacobson 恒等式，我们有 $\mathrm{ad}(D)^p = \mathrm{ad}(D^p)$，因此若 $D^{[p]} - D^p$ 与任意 $E \in \Lambda_1$ 交换，则它与任意 $E \in \Lambda$ 交换，因为 Λ 由 Λ_1 生成。

注 2.8. 设 $F: X \to X$ 表示 X 的绝对Frobenius，并设 $Z(\Lambda)$ 表示 Λ 的中心。我们注意到，中心 $Z(\Lambda)$ 不具有 $\mathcal{O}_X$-模结构。然而，直接像 $F_*(Z(\Lambda))$ 上的左、右 $\mathcal{O}_X$- 模结构一致，因为对于任意局部截面 $D \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$[D, f^p] = \delta_D(f^p) = 0.$$

命题2.9. 对于任意局部截面 $D \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$\delta_{fD}^{p-1}(f) = f\delta_D^{p-1}(f^{p-1}).$$

证明. 相对切层 $T_{X/S} \cong \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ 配备标准交换子后，是一个 $\mathcal{O}_S$-李代数丛。此外，这个李代数丛还配备了一个 p-结构 $\nu \mapsto \nu^p \in T_{X/S}$ （另见注 3.2）。因此，根据 Hochschild 恒等式（参见 [Hoc55，引理 1], [Lan14，引理 4.3], [Sch16，引理 2.1]），对于任意局部导子 $\nu \in T_{X/S}$ 和任意局部截面 $f \in \mathcal{O}_X$，等式成立

$$(f\nu)^p = f^p\nu^p + (f\nu)^{p-1}(f)\nu$$

在结合 $\mathcal{O}_S$-代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X)$ 中。另一方面，我们有以下来自 Deligne 的恒等式（参见 [Kat70，命题 5.3]）

$$(f\nu)^p = f^p\nu^p + f\nu^{p-1}(f^{p-1})\nu.$$

因此，对于每个 $\nu \in T_X$，我们都有

$$(f\nu)^{p-1}(f)\nu = f\nu^{p-1}(f^{p-1})\nu.$$

如果 $\nu = 0$，那么显然 $(f\nu)^{p-1}(f) = f\nu^{p-1}(f^{p-1}) = 0$。否则，等式两边都是无挠层 $T_{X/S}$ 的同一个非零截面的倍数，因此它们相等当且仅当

$$(f\nu)^{p-1}(f) = f\nu^{p-1}(f^{p-1}).$$

因此，对每个局部导子 $\nu \in T_{X/S}$ 和每个局部截面 $f \in \mathcal{O}_X$，后一个等式都成立。将前一个等式应用于 $\nu = \delta_D$，并注意到 $f\delta_D = \delta_{fD}$，即锚映射 δ 是 $\mathcal{O}_X$-线性的，即可得到该命题。□

推论 2.10. 若 Λ 是 S上的 X 受限微分算子层，则对任意局部截面 $D \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，有

$$(fD)^{[p]} = f^pD^{[p]} + f\delta_D^{p-1}(f^{p-1})D.$$

2.3. 映射 $\iota : \Lambda_1 \to Z(\Lambda)$。利用 Λ上的 p-结构，我们可以定义以下映射，它将向量场上的 p 次幂映射之差推广开来

$$\begin{array}{rccc} \iota & : & \Lambda_1 & \longrightarrow & \Lambda \\ & & D & \longmapsto & \iota(D) = D^p - D^{[p]}. \end{array}$$

命题 2.11. 映射 $\iota : \Lambda_1 \to \Lambda$ 是一个 p-线性映射，即对任意局部截面 D、D_1、$D_2 \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，有
a) $\iota(D_1 + D_2) = \iota(D_1) + \iota(D_2)$,
b) $\iota(fD) = f^p\iota(D)$.
证明。a) 我们在结合环 $\Lambda(U)$ 中应用 Jacobson 恒等式，其中 U 是 D_1 和 D_2 均有定义的任意开子集

$$(D_1 + D_2)^p = D_1^p + D_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2).$$

另一方面，由于 $[p]$ 是 Λ 上的 p-结构，我们有

$$(D_1 + D_2)^{[p]} = D_1^{[p]} + D_2^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2).$$

因此，两式相减得到

$$\iota(D_1+D_2)=(D_1+D_2)^p-(D_1+D_2)^{[p]}=D_1^p+D_2^p-D_1^{[p]}-D_2^{[p]}=\iota(D_1)+\iota(D_2).$$

b) 将 $f\in\mathcal{O}_X=\Lambda_0$ 视为 Λ的一个局部截面。于是，我们可以在结合环 $\Lambda(U)$ 中对开子集U 应用 Deligne 恒等式（参见 [Kat70，命题 5.3]），使得 $f\in\mathcal{O}_X(U)$ 且 $D\in\Lambda(U)$，从而得到

$$(fD)^p=f^pD^p+f\,\mathrm{ad}(D)^{p-1}(f^{p-1})D.$$

由于 D 作用于任意局部函数时，其伴随恰为 δ_D，我们得到

$$(fD)^p=f^pD^p+f\delta_D^{p-1}(f^{p-1})D.$$

另一方面，由推论 2.10 可得

$$(fD)^{[p]}=f^pD^{[p]}+f\delta_D^{p-1}(f^{p-1})D.$$

因此，将两者相减可得

$$\iota(fD)=(fD)^p-(fD)^{[p]}=f^pD^p-f^pD^{[p]}=f^p\iota(D).$$

□

命题 2.12。 ι 的像属于 Λ的中心 $Z(\Lambda)$。

证明。利用 Jacobson 恒等式 $\mathrm{ad}(D^p)=\mathrm{ad}(D)^p$，我们得到对于任意局部截面 D, $E\in\Lambda_1$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\iota(D))(E)=\mathrm{ad}(D^p-D^{[p]})(E) &= \mathrm{ad}(D^p)(E)-\mathrm{ad}(D^{[p]})(E)\\ &= \mathrm{ad}(D)^p(E)-\mathrm{ad}(D)^p(E)=0.\end{aligned}$$

因此， $\iota(D)$ 与 Λ_1 中的每个元素都交换。由于 Λ_1 生成 Λ， $\iota(D)$ 与 Λ 中的每个元素都交换。□

注意，对于每个 $f\in\mathcal{O}_X$，我们有 $\iota(f)=f^{[p]}-f^p=0$；并且对于每个$f\in\mathcal{O}_X$ 和 $D\in\Lambda_1$，我们有

$$\iota(f+D)=\iota(f)+\iota(D)=\iota(D).$$

因此， ι 经由商分解

$$\iota:\Lambda_1/\Lambda_0=H\longrightarrow Z(\Lambda).$$

于是，由于 ι 是一个 p-线性映射，它诱导出一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射

$$\iota:H\longrightarrow F_*(Z(\Lambda)),$$

其中 F 表示 X的绝对Frobenius。此外， $F_*(Z(\Lambda))$ 是一个交换$\mathcal{O}_X$-代数（参见注 2.8），因此根据对称代数的泛性质，映射 ι 诱导出一个交换 $\mathcal{O}_X$-代数层的映射

$$\iota:\mathrm{Sym}^\bullet(H)\longrightarrow F_*(Z(\Lambda)).$$

命题 2.13. 假设 Λ是几乎多项式。那么诱导映射ι: $\mathrm{Sym}^\bullet(H)\to F_*(Z(\Lambda))$ 是单射。

证明. 注意到符号映射 $\mathrm{sb}: \Lambda \longrightarrow \mathrm{Gr}^\bullet(\Lambda) \cong \mathrm{Sym}^\bullet(H)$ 是一个乘法映射（但不是 $\mathcal{O}_X$-线性的），因此与 ι 复合后，我们得到一个乘法映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^\bullet(H) & \xrightarrow{\iota} & F_*(Z(\Lambda)) \\ & \searrow^{\mathrm{sb}(\iota)} & \downarrow \mathrm{sb} \\ & & F_*(\mathrm{Sym}^\bullet(H)). \end{array}$$

要证明 $\ker(\iota) = 0$，只需证明 $\ker(\mathrm{sb}(\iota)) = 0$。由于 Λ 几乎多项式，对于每个非零局部 $D \in H$ 以及任意代表元 $\overline{D} \in \Lambda_1$，若 $\mathrm{sb}(\overline{D}) = D$

$$\mathrm{sb}(\overline{D}^p) = D^p \in \mathrm{Sym}^p(H).$$

So

$$\mathrm{sb}(\iota(D)) = \mathrm{sb}(\overline{D}^p) = D^p \neq 0.$$

此外，对于每个局部截面 $D \in \mathrm{Sym}^\bullet(H)$，存在 $D_1, \ldots, D_k \in H$ 使得 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$，满足 $D = D_1 \cdots D_k + D$，其中 D 的次数为 $< k$。因此

$$\mathrm{sb}(\iota)(D) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{sb}(\iota)(D_j) = \prod_{j=1}^{k} D_j^p \neq 0.$$

□

3. Properties of almost abelian restricted sheaves of rings of differential operators

假设 $\mathbb{K}$ 的特征为 $p > 0$。令 $\pi: X \to S$ 为 $\mathbb{K}$ 上有限型概形之间的一个态射。

3.1. 受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛。我们需要回顾一些定义（[Hoc55],[Rum00，第 3.1], [节; Lan14，定义 4.2], [; Sch16，定义 2.2]）。

定义 3.1. X 上的受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛是一个四元组 $(H, [-,-], \delta, [p])$，由一个 $\mathcal{O}_X$-模 H 构成，它同时也是受限 $\mathcal{O}_S$-李代数的层；一个映射 $[p]: H \to H$；以及一个 $\mathcal{O}_X$-线性的锚映射 $\delta: H \to T_{X/S}$，并满足以下条件：对所有局部截面 $f \in \mathcal{O}_X$ 以及 $D, D_1, D_2 \in H$

(1) $[D_1, fD_2] = f[D_1, D_2] + \delta_{D_1}(f)D_2$,
(2) $(fD)^{[p]} = f^p D^{[p]} + \delta_{fD}^{p-1}(f)D$.

注 3.2. X 上的 $\mathcal{O}_S$ 受限李代数丛的标准例子是相对切层 $T_{X/S} \cong \mathrm{Der}^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$，它配备标准李括号、$[p]$ p 次幂映射以及 δ 恒等映射。注意，此时条件 (2) 等价于 Hochschild 恒等式（[Hoc55，引理 1]）。

3.2. 几乎阿贝尔受限微分算子环层的例子。我们考虑定义 2.6 中的微分算子环的受限层 Λ 。在本小节中，我们假设 Λ 几乎阿贝尔，即分次代数 $\mathbf{Gr^\bullet(\Lambda)}$ 是阿贝尔的。那么，对于任意两个局部截面 D_1、$D_2 \in \Lambda_1$ ，有

$$[\mathrm{sb}(D_1), \mathrm{sb}(D_2)]_{\mathrm{Gr}^\bullet(\Lambda)} = 0 \in \Lambda_2/\Lambda_1,$$

因此 $[D_1, D_2] \in \Lambda_1$，并由此 Λ_1，配备诱导的交换子和锚映射 $\delta_D(f) = [D, f]$。对于 $D \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，它成为一个 $\mathcal{O}_S$-李代数丛。在这种情况下，定义 2.6 的条件 (1)-(3) 等价于要求 $(\Lambda_1, [-,-], \delta, [p])$ 是一个受限的$\mathcal{O}_S$-李代数丛。此时，条件 (4) 等价于要求 $\mathcal{O}_S$-李代数丛的包含映射

$$(\mathcal{O}_X, [-,-] = 0, \delta = 0, (-)^p) \hookrightarrow (\Lambda_1, [-,-], \delta, [p])$$

是受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛的同态。

我们首先需要了解一些定义 2.6 中使用的泛李多项式的信息。

引理 3.3. 设 Λ 是 X 上、S 上的任意微分算子环层。设$D \in \Lambda_1$ 且 $f \in \mathcal{O}_X$。那么，对于每个 $i < p-1$

$$s_i(D, f) = 0$$

and

$$s_{p-1}(D, f) = \delta_D^{p-1}(f).$$

证明。在任意特征为 p 的结合代数中，经典结果表明，我们可以将 $1 \le i \le p-1$ 的李多项式 $s_i(x_1, x_2)$ 写成如下形式

$$s_i(x_1, x_2) = -\frac{1}{i} \sum_{\substack{\sigma : \{1,\dots,p-1\} \to \{1,2\} \\ |\sigma^{-1}(1)| = i}} \mathrm{ad}(x_{\sigma(1)}) \cdots \mathrm{ad}(x_{\sigma(p-1)})(x_2).$$

O注意，对于 $x_1 = D \in \Lambda_1$ 和 $x_2 = f \in \mathcal{O}_X$，我们有以下等式

$$\mathrm{ad}(x_1)(x_2) = \delta_D(f) \in \mathcal{O}_X, \quad \mathrm{ad}(x_1)(x_1) = 0, \quad \mathrm{ad}(x_2)(g) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{O}_X.$$

特别地，注意，对于任意指标 i 和 j

$$\mathrm{ad}(x_i)(x_j) \in \mathcal{O}_X, \quad \mathrm{ad}(x_i)(g) \in \mathcal{O}_X \quad \forall g \in \mathcal{O}_X.$$

因此，对于 $i = 1$、2 和 $g \in \mathcal{O}_X$

$$\mathrm{ad}(x_2)\,\mathrm{ad}(x_i)(g) = 0.$$

特别地，若对于某个 $j < p-1$，$\sigma(j) = 2$，则有

$$\mathrm{ad}(x_{\sigma(j+1)}) \cdots \mathrm{ad}(x_{\sigma(p-1)})(x_2) \in \mathcal{O}_X.$$

So

$$\mathrm{ad}(x_2)\,\mathrm{ad}(x_{\sigma(j+1)}) \cdots \mathrm{ad}(x_{\sigma(p-1)})(x_2) = 0,$$

而在 $s_i(D, f)$ 的表达式中，相应的求和项将为零。同样，如果 $\sigma(p-1) = 2$，则有 $\mathrm{ad}(x_2)(x_2) = 0$，整个表达式也为零。因此

要使求和非零，必须对所有 $j = 1, \dots, p-1$ 都有 $\sigma(j) = 1$。最后，我们有，对于 $i = p-1$

$$s_{p-1}(D, f) = -\frac{1}{p-1}\operatorname{ad}(D) \cdot \operatorname{ad}(D)(f) = -\frac{1}{p-1}\delta_D^{p-1}(f) = \delta_D^{p-1}(f).$$

□

命题 3.4. 若 Λ 是 S 上 X 的几乎阿贝尔受限微分算子环，则 $H = \Lambda_1/\Lambda_0$ 具有受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛结构（$H, [-,-]_H, \delta, [p]$），使得短正合列 (2.1) 成为受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛的正合序列。

证明。首先，对每个 $D_1, D_2 \in H$，定义 $[D_1, D_2]_H = \mathrm{sb}([\overline{D_1}, \overline{D_2}]_\Lambda)$，其中任取满足 $\mathrm{sb}(\overline{D_i}) = D_i$ 的 $\overline{D_i}$，对 $i = 1, 2$。为证明其定义良好，注意到对每个 $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$\mathrm{sb}([f_1 + \overline{D_1}, f_2 + \overline{D_2}]_\Lambda) = \mathrm{sb}([\overline{D_1}, \overline{D_2}]_{\Lambda_1} + \delta_{\overline{D_1}}(f_2) - \delta_{\overline{D_2}}(f_1)) = \mathrm{sb}([\overline{D_1}, \overline{D_2}]_{\Lambda_1}).$$

同样，由于对每个 $f, g \in \mathcal{O}_X$ 都有 $\delta_f(g) = [f, g]_\Lambda = 0$，显然 δ 可经由 H 分解。

最后，定义 $D^{[p]} = \mathrm{sb}(\overline{D}^{[p]})$。于是，对每个 $f \in \mathcal{O}_X$，利用 p-结构定义中的性质 (2) 和引理 3.3，我们有

$$\mathrm{sb}((\overline{D}+f)^{[p]}) = \mathrm{sb}(\overline{D}^{[p]} + f^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D, f)) = \mathrm{sb}(\overline{D}^{[p]} + f^p + \delta_{\overline{D}}^{p-1}(f)) = \mathrm{sb}(\overline{D}^{[p]}).$$

根据构造，对 (1)、(2) 和 (3) 中相应表达式取符号后，这些性质对于诱导在 H上的 p-结构也成立，并且符号映射 $\mathrm{sb} : \Lambda_1 \longrightarrow H$ 是受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛的态射。□

另一方面，考虑一个受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 $(H, [-,-], \delta, [p])$。如 Tor12 第 4 节3] 或 Lan14 第 515], 页 [中所定义， $\mathcal{O}_S$-李代数丛 H的包络代数[1] Λ_H，通过如下方式取p-结构，便成为 X 上、相对于 S 的分裂几乎多项式受限微分算子环层：我们有一个作为 $\mathcal{O}_X$-模的分裂

$$(\Lambda_H)_1 = \mathcal{O}_X \oplus H,$$

并且我们对每个 $D \in H$ 和每个 $f \in \mathcal{O}_X$定义

$$(f + D)^{[p]} = f^p + D^{[p]} + \delta_D^{p-1}(f).$$

我们将在下一个命题中证明，这个映射赋予 Λ_H 受限微分算子环层的结构。首先，我们需要两个引理。

引理 3.5. 对任意局部截面 f_1、$f_2 \in \mathcal{O}_X$ 和 D_1、$D_2 \in H$，我们在 Λ_H 中有以下等式

$$\delta_{D_1}^{p-1}(f_1) + \delta_{D_2}^{p-1}(f_2) + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(f_1 + D_1, f_2 + D_2) = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2) + \delta_{D_1+D_2}^{p-1}(f_1 + f_2).$$

[1]这个代数层称为与 H 在 [Lan14]中关联的微分算子的包络代数

证明. 我们将使用 Jacobson公式，以两种不同的方式计算 $(f_1 + D_1 + f_2 + D_2)^p \in \Lambda_H$。一方面，考虑到引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned}((f_1 + D_1) + (f_2 + D_2))^p &= (f_1 + D_1)^p + (f_2 + D_2)^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(f_1 + D_1, f_2 + D_2) \\ &= f_1^p + D_1^p + \delta_{D_1}^{p-1}(f_1) + f_2^p + D_2^p + \delta_{D_2}^{p-1}(f_2) + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(f_1 + D_1, f_2 + D_2).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}((f_1 + f_2) + (D_1 + D_2))^p &= f_1^p + f_2^p + (D_1 + D_2)^p + \delta_{D_1+D_2}^{p-1}(f_1 + f_2) \\ &= f_1^p + f_2^p + D_1^p + D_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2) + \delta_{D_1+D_2}^{p-1}(f_1 + f_2).\end{aligned}$$

两边表达式相减即可得到所需的等式。 □

Lem引理 3.6。对于任意局部截面 f、$g \in \mathcal{O}_X$ 以及任意局部截面 $D \in H$，我们有

$$\delta_{gD}^{p-1}(gf) = g^p \delta_D^{p-1}(f) + \delta_{gD}^{p-1}(g) f.$$

证明。由于这是 $\mathcal{O}_X$ 中局部截面的一个等式，只需证明这些截面的差在某个开集上为零。特别地，由于当 $f = 0$ 时该等式显然成立，我们可以假设 $f \neq 0$，并限制在 f 可逆的开子集上。于是 $D' = D/f$ 是 H 的一个元素，并且根据 H 上的 p- 结构，我们得到以下两个恒等式

$$((gf)D')^{[p]} = g^p f^p (D')^{[p]} + \delta_{gfD'}^{p-1}(gf) D',$$

$$(g(fD'))^{[p]} = g^p (fD')^{[p]} + \delta_{gfD'}^{p-1}(g)(fD') = g^p f^p (D')^{[p]} + g^p \delta_{fD'}^{p-1}(f) D' + \delta_{gfD'}^{p-1}(g) f D'.$$

相减并比较 D' 的系数，得到等式

$$\delta_{gfD'}^{p-1}(gf) = g^p \delta_{fD'}^{p-1}(f) + \delta_{gfD'}^{p-1}(g) f.$$

考虑到 $D = fD'$，我们得到所需结果。 □

命题 3.7. 设 H 是 S上的 X 上的受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛。那么映射 $[p]:$ $\mathcal{O}_X \oplus H \longrightarrow \mathcal{O}_X \oplus H$ 定义为

$$(f + D)^{[p]} = f^p + D^{[p]} + \delta_D^{p-1}(f)$$

是包络代数 Λ_H 上的一个 p-结构，使得符号映射 $\mathrm{sb} : (\Lambda_H)_1 \longrightarrow H$ 成为受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛的一个态射。

证明. 只需验证定义 2.6 的四个性质。

(1) 根据 Λ_H 中的 Jacobson公式以及引理 3.3，我们得到等式

$$(f + D)^p = f^p + D^p + \delta_D^{p-1}(f).$$

So

$$\mathrm{ad}(f + D)^p = \mathrm{ad}(f^p) + \mathrm{ad}(D^{[p]}) + \mathrm{ad}(\delta_D^{p-1}(f)) = \mathrm{ad}((f + D)^{[p]}).$$

(2) 为证明可加性，我们使用引理 3.5 得到

$$\begin{aligned}
&(f_1+D_1+f_2+D_2)^{[p]}\\
=\ &((f_1+f_2)+(D_1+D_2))^{[p]}=f_1^p+f_2^p+(D_1+D_2)^{[p]}+\delta^{p-1}_{D_1+D_2}(f_1+f_2)\\
=\ &f_1^p+f_2^p+D_1^{[p]}+D_2^{[p]}+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(D_1,D_2)+\delta^{p-1}_{D_1+D_2}(f_1+f_2)\\
=\ &f_1^p+f_2^p+D_1^{[p]}+D_2^{[p]}+\delta^{p-1}_{D_1}(f_1)+\delta^{p-1}_{D_2}(f_2)+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(f_1+D_1,f_2+D_2)\\
=\ &(f_1+D_1)^{[p]}+(f_2+D_2)^{[p]}+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(f_1+D_1,f_2+D_2).
\end{aligned}$$

(3) 设 f、$g\in\mathcal{O}_X$ 和 $D\in H$。那么由引理 3.6 可得

$$\begin{aligned}
&(g(f+D))^{[p]}\\
=\ &(gf+gD)^{[p]}=g^pf^p+(gD)^{[p]}+\delta^{p-1}_{gD}(gf)\\
=\ &g^pf^p+g^pD^{[p]}+\delta^{p-1}_{gD}(g)D+\delta^{p-1}_{gD}(gf)\\
=\ &g^pf^p+g^pD^{[p]}+\delta^{p-1}_{gD}(g)D+g^p\delta^{p-1}_{D}(f)+\delta^{p-1}_{gD}(g)f\\
=\ &g^p(f+D)^{[p]}+\delta^{p-1}_{gD}(g)(f+D)=g^p(f+D)^{[p]}+\delta^{p-1}_{g(f+D)}(g)(f+D).
\end{aligned}$$

(4) 取 $D=0$ 即可显然看出此性质。

□

总之，我们已经证明，受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 H 的包络代数 Λ_H 上的 p-结构定义，以及晶体微分算子的通常 p 次幂概念，都是我们针对受限微分算子环层所给出的 p-结构一般定义（定义 2.6）的特例。

4. Some examples of restricted sheaves of rings of differentialoperators

本节中我们假设 $\pi\colon\ X\to S$ 是一个光滑态射。

4.1. 晶体微分算子层 $\mathcal{D}_{X/S}$。晶体微分算子层（例如参见 [BMR08]）

$$\Lambda^{dR}=\mathcal{D}_{X/S}$$

是一个分裂几乎多项式受限微分算子环层。其对应的受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 $\Lambda_1^{dR}/\Lambda_0^{dR}$ 是相对切层 $T_{X/S}$，其中向量场的李括号取为交换子，锚映射取为恒等映射。$\mathcal{D}_{X/S}$-模对应于带有相对可积联络的相干 $\mathcal{O}_X$-模。

对于每个导子 $\nu \in T_{X/S}$，其 p 次幂 ν^p 仍是导子，因为应用莱布尼茨法则可得，对于每个局部截面 f、$g \in \mathcal{O}_X$

$$\nu^p(fg) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \nu^k(f)\nu^{p-k}(g) = \nu^p(f)g + f\nu^p(g)$$

因此，取 $\nu^{[p]} = \nu^p$ 可得到一个 p-结构 $[p] : T_{X/S} \to T_{X/S}$，使 $T_{X/S}$ 具有受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 $(T_{X/S}, [-,-], \mathrm{id}^{T_{X/S}}, [p])$ 的结构，从而在 $\mathcal{D}_X$ 上诱导出一个 p-结构。

4.2. 对称代数上的平凡 p-结构。设 X 上有一个局部自由 $\mathcal{O}_X$-模 H，其对称代数

$$\Lambda^{\mathrm{Higgs}} = \mathrm{Sym}^\bullet(H)$$

在 $\Lambda_1 = \mathcal{O}_X \oplus H$ 上取平凡的 p-结构时，它是一个分裂几乎多项式受限微分算子环层，即取 $[p] : H \to H$ 为 H 上的零映射

$$D^{[p]} = 0.$$

那么，一个 Λ^{Higgs}-模对应于一个取值于 $H^\vee$ 的 Higgs丛 (E, ϕ)，其中 E 是 X 上的向量丛，且 ϕ：$E \to E \otimes H^\vee$ 是一个 $\mathcal{O}_X$-模的态射，并满足 $\phi \wedge \phi = 0$。

由于 Λ^{Higgs} 是阿贝尔的，我们有

$$\mathrm{ad}_{\Lambda_1}(D)^p = 0 = \mathrm{ad}_{\Lambda_1}(D^{[p]}).$$

此外，对所有的 $D_1, D_2 \in H$，$= 0$ $s_i(D_1, D_2)$，因此

$$(D_1 + D_2)^{[p]} = 0 = D_1^{[p]} + D_2^{[p]} = D_1^{[p]} + D_2^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2).$$

最后，Λ^{Higgs} 是阿贝尔的，这意味着 $\delta = 0$，所以我们显然有

$$0 = (fD)^{[p]} = f^p D^{[p]} + \delta_{fD}^p(f)D = 0.$$

4.3. $\mathcal{D}_{X/S}$的伴随分次化上的 p-结构。将经典的 Rees构造应用于滤过层 $\Lambda^{dR} = \mathcal{D}_{X/S}$（见第 4.1 小节），我们得到 $X \times$Spec($\mathbb{K}[t]$)上的一个环层 $= X \times \mathbb{A}^1$，其定义为

$$\Lambda^{dR,R} = \bigoplus_{i \geq 0} t^i \Lambda_i,$$

其中，t 通过在 $\Lambda^{dR,\ R}$ 上乘以 t 起作用，利用包含映射 $\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$。由构造可知，$\mathbb{A}^1$ 在闭点 0 和 1 上的纤维等于

$$(\Lambda^{dR,R})_0 = \mathrm{Sym}^\bullet(T_{X/S}) \quad \text{and} \quad (\Lambda^{dR,R})_1 = \mathcal{D}_{X/S} = \Lambda^{dR}.$$

我们注意到，$\Lambda^{\mathrm{dR},\ R}$ 是相对于 $S \times \mathbb{A}^1$、定义在 $X \times \mathbb{A}^1$ 上的微分算子分裂的几乎多项式环层，其在每个 $\lambda \in \mathbb{A}^1$ 上的纤维对应于 $\mathcal{O}_S$-李代数丛（$T_{X/S}, \lambda[-,-], \lambda\mathrm{id}^{T_{X/S}}$）的包络代数。

我们可以按如下方式赋予 $\Lambda^{dR,R}$ 一个 p-结构。注意，

$$\Lambda_1^{dR,R} = \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1} \oplus T_{X \times \mathbb{A}^1/S \times \mathbb{A}^1} \quad \text{and} \quad T_{X \times \mathbb{A}^1/S \times \mathbb{A}^1} = T_{X/S}.$$

那么， $\Lambda^{dR}{}_{,1}{}^{R}$ 上的 p-结构由下式定义：

$$[p]^R : T_{X/S} \to T_{X/S} \qquad D^{[p]^R} = t^{p-1} D^{[p]},$$

其中， t 是 $\mathbb{A}^1$ 上的坐标，而 $D^{[p]}$ 是相对向量场 $D \in T_{X/S}$ 的 p 次幂。根据 Λ^{dR} 的构造， ${}^{R}\ \Lambda^{\mathrm{dR}}$ 中元素的交换子， ${}_{1}{}^{R}$ 是微分算子的交换子乘以坐标 t，即对于任意 $D \in \Lambda^{\mathrm{dR},}{}_{1}{}^{R}$

$$\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{\mathrm{dR},R}}(D) = t \,\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{dR}}(D)$$

此外，由于李多项式 $s_i(x,y)$ 是 $p-1$ 次齐次的，我们有

$$s_i^{\Lambda^{\mathrm{dR},R}}(x,y) = t^{p-1} s_i^{\Lambda^{dR}}(x,y).$$

因此，对于任意局部截面 $D \in T_{X/S}$ 和 $f \in \mathcal{O}_{X\times\mathbb{A}^1}$，以下等式成立

$$\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{\mathrm{dR,R}}}(D^{[p]^R}) = t \,\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{dR}}(tD^{[p]}) = t^p \,\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{dR}}(D)^p = (t \,\mathrm{ad}_{\Lambda_1^{dR}}(D))^p = \mathrm{ad}_{\Lambda_1^{\mathrm{dR},R}}(D)^p,$$

$$\begin{aligned}(D_1+D_2)^{[p]^R} = t^{p-1}(D_1+D_2)^{[p]} &= t^{p-1}D_1^{[p]} + t^{p-1}D_1^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} t^{p-1} s_i^{\Lambda^{dR}}(D_1,D_2) \\ &= D_1^{[p]^R} + D_2^{[p]^R} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i^{\Lambda^{\mathrm{dR},R}}(D_1,D_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(fD)^{[p]^R} = t^{p-1}(fD)^{[p]} &= t^{p-1} f^p D^{[p]} + t^{p-1}\left(\delta_{fD}^{\Lambda^{dR}}\right)^{p-1}(f)D \\ &= f^p D^{[p]^R} + \left(\delta_{fD}^{\Lambda^{\mathrm{dR},R}}\right)^{p-1}(f)D.\end{aligned}$$

这证明了 $[p]^R$ 是 $\Lambda^{\mathrm{dR},\ R}$ 上的 p-结构。

4.4. 约化到伴随分次上的 p-结构：一般情形。更一般地，设 $\Lambda = \Lambda_H$ 是定义在 X 上的受限微分算子环层，它是受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 $(H,[-,-],\delta,[p])$ 的包络代数——参见命题 3.7。考虑滤过环层 Λ 关于 $S\times\mathbb{A}^1$ 的 Rees构造 Λ^R，其定义在 $X\times\mathbb{A}^1$ 上。那么， Λ^R 在 $\lambda\in\mathbb{A}^1$ 上的纤维是 $\mathcal{O}_S$- 李代数丛 $(H,\lambda[-,-],\lambda\delta)$ 的包络代数。我们还注意到 $\Lambda_1^R/\Lambda_0^R = p_X^*(H)$，其中 $p_X\colon X\times\mathbb{A}^1\to X$ 是到 X 的投影。 Λ^R 的锚映射 δ^R 等于

$$\delta^R = t\delta : \Lambda_1^R/\Lambda_0^R = p_X^*(H) \to p_X^*(T_{X/S}).$$

那么，前面的论证证明了映射 $[p]^R$ ： $p_X^*(H)$ $\to$ $p_X^*(H)$ over$X\times\mathbb{A}^1$ 由下式给出

$$D^{[p]^R} = t^{p-1} D^{[p]}$$

是 Λ^R 的 p-结构。这也给出了从 Λ 上的 p-结构到 $\mathbf{Gr}^\bullet(\Lambda)\ \cong \mathbf{Sym}^\bullet(H)$ 上平凡的 p-结构的显式变形。

4.5. 线丛的 Atiyah丛上的 p-结构。我们来研究一个几乎多项式但不分裂的例子。设 L 是 X 上的一个线丛，并令 Λ 为 L 上的晶体微分算子层，即子代数

$$\Lambda = \mathcal{D}_{X/S}(L) \subset \mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(L)$$

由相对Atiyah丛 $\mathrm{At}^{X/S}(L) = \mathrm{Diff}^1_{\mathcal{O}_S}(L,L)$ 生成。注意

$$\Lambda_1 = \mathrm{At}_{X/S}(L).$$

$\mathrm{At}^{X/S}(L)$ 的局部截面可与局部截面 $D \in \mathrm{End}_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_S)}(L)$ 等同，其中对每个 $f \in \mathcal{O}_X$，$[D,f] \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(L) = \mathcal{O}_X = \mathcal{D}^0(L)$。于是，对每个$D \in \mathrm{At}^{X/S}(L)$，记 $\delta_D : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ 为映射

$$\delta_D(f) = [D,f] \in \mathcal{O}_X.$$

注意，由于 Λ 是结合的，对每个 $f,g \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$\begin{aligned} \delta_D(fg) = [D,fg] &= Dfg - fgD = Dfg - fDg + fDg - fgD \\ &= [D,f]g + f[D,g] = \delta_D(f)g + f\delta_D(g) \end{aligned}$$

因此， δ_D 是一个 $\mathcal{O}_S$-导子，我们可以考虑映射 $\delta : \mathrm{At}^{X/S}(L) \longrightarrow T_{X/S}$。由此得到短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathrm{At}_{X/S}(L) \xrightarrow{\delta} T_{X/S} \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

因此，三元组 $(\mathrm{At}^{X/S}(L)\ [-,-], \delta)$ 成为一个 $\mathcal{O}_S$-李代数丛。现在我们将为这个李代数丛赋予一个 p-结构。

引理4.1. 设 $D \in \mathrm{At}^{X/S}(L)$。那么对于每个 $f \in \mathcal{O}_X$, $[D^p, f] \in \mathcal{O}_X$，因此 D^p可以视为 $\mathrm{At}^{X/S}(L)$ 中的一个元素，记作 $D^{[p]}$。

证明. 由于 Λ 是一个特征为 p 的结合 $\mathcal{O}_X$-代数，我们可以应用 Jacobson公式，因此对于每个 $D \in \mathrm{At}^{X/S}(L)$ 以及每个 $f \in \mathcal{O}_X$，

$$[D^p, f] = \mathrm{ad}(D^p)(f) = \mathrm{ad}(D)^p(f) = \delta_D^p(f) \in \mathcal{O}_X.$$

□

命题4.2. 前一引理中所述的映射 $[p] : \mathrm{At}^{X/S}(L) \to \mathrm{At}^{X/S}(L)$ 是 Λ 的一个 p-结构。

证明. 性质 (1) 已在前一引理中证明。对于可加性 (2)，注意到在 Λ 中，Jacobson公式给出

$$(D_1 + D_2)^p = D_1^p + D_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2).$$

由于这确实是 $\mathcal{O}_X$-代数 Λ 中的一个等式，因此用 $\mathcal{O}_X$ 中的一个元素与等式两边取交换子，必然得到 $\mathcal{O}_X$ 中的同一个元素，所以在将 D_i^p 与对应的元素 $D_i^{[p]} \in \mathrm{At}^{X/S}(L)$ 进行识别后，等式两边仍然相等。对于 (3)，由于 Λ 是结合的，我们可以应用 Deligne 恒等式 [Kat70，命题 5.3] ，从而得到

$$(fD)^p = f^p D^p + f\,\mathrm{ad}(D)^{p-1}(f^{p-1})D = f^p D^p + f\delta_D^{p-1}(f^{p-1})D.$$

现在，应用命题2.9，我们有

$$f^pD^p + f\delta_D^{p-1}(f^{p-1})D = f^pD^p + \delta_{fD}^{p-1}(f)D$$

并且，对前一性质应用类似的论证，我们得到所需的等式。最后，根据构造，对于每个 $f \in \mathcal{O}_X$, $f^{[p]} = f^p$，显然有 □

最后，我们提到， $\Lambda = \mathcal{D}_{X/S}(L)$ 与由 [Tor12 第 4 节构造的、与李代数丛 $T_{X/S}$ 经由 $\mathcal{O}_X$ 的非分裂扩张（4.1）相关联的 Sridharan包络代数 $\Lambda_{\mathrm{At}_{X/S}(L)}$ 重合 3] （关于这一特例，另见 [Tor11，例 3.2。3]），或见 [Lan14，第 516] 页。

4.6. 对称代数上的 p-结构。回到阿贝尔情形，固定某个局部自由 $\mathcal{O}_X$-模 H，并令 $\Lambda = \mathrm{Sym}^\bullet(H)$，接下来我们研究 Λ 上可能存在的 p-结构。与之前一样， Λ 是阿贝尔的，这意味着对于任意 $D \in H$

$$\mathrm{ad}_{\Lambda_1}(D)^p = 0 = \mathrm{ad}_{\Lambda_1}(D^{[p]})$$

并且对于任意 $D_1, D_2 \in H$, $s_i(D_1, D_2) = 0$。此外，对于任意 $D \in H$, $\delta_D = 0$。因此，映射 $[p] : H \longrightarrow H$ 若要赋予 Λ 一个 p-结构，需满足以下条件

(1) $(D_1 + D_2)^{[p]} = D_1^{[p]} + D_2^{[p]}$,
(2) $(fD)^{[p]} = f^pD^{[p]}$.

因此，$\mathrm{Sym}^\bullet(H)$ 上的 p-结构由一个从 H 到 H 的 p-线性映射给出，或者等价地，由一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射给出

$$\alpha : F^*H \to H,$$

其中 F 表示 X 的绝对Frobenius。

4.7. 一般 Λ 上的 p-结构的分类。本小节将描述给定微分算子环层 Λ 上的所有 p-结构。

命题 4.3。设 $[p] : \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 是 Λ 的一个 p-结构。那么，任何其他的 p-结构 $[p]' : \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 均由下式给出

$$[p]' = [p] + \varphi \circ \mathrm{sb}$$

其中 $\varphi : H \longrightarrow Z(\Lambda_1)$ 是一个从 $H = \Lambda_1/\Lambda_0$ 到 Λ_1 在 Λ_1 中的中心化子 $Z(\Lambda_1)$ 的 p-线性映射。

证明。我们令 $\varphi(D) = D^{[p]} - D^{[p]'}$。于是，对任意局部截面 $D, E \in \Lambda_1$，都有

$$\mathrm{ad}(\varphi(D))(E) = \mathrm{ad}(D^{[p]})(E) - \mathrm{ad}(D^{[p]'})(E) = \mathrm{ad}(D)^p(E) - \mathrm{ad}(D)^p(E) = 0.$$

因此，对任意 $D \in \Lambda_1$，有 $\varphi(D) \in Z(\Lambda_1)$。令 $D_1, D_2 \in \Lambda_1$。于是

$$\varphi(D_1+D_2) = D_1^{[p]}+D_2^{[p]}+\sum_{i=0}^{p-1} s_i(D_1,D_2)-D_1^{[p]'}-D_2^{[p]'}-\sum_{i=0}^{p-1} s_i(D_1,D_2) = \varphi(D_1)+\varphi(D_2).$$

类似地

$$\varphi(fD) = f^pD^{[p]} + \delta_{fD}^{p-1}(f)D - f^pD^{[p]'} - \delta_{fD}^{p-1}(f)D = f^p\varphi(D).$$

因此， $\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 是 p-线性的。此外，显然

$$\varphi(f) = f^{[p]} - f^{[p]'} = f^p - f^p = 0.$$

因此， φ 通过商 $\varphi : H \longrightarrow Z(\Lambda_1)$进行分解。

反之，设 $[p]: \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 是 Λ 上的一个 p-结构，并设 $\varphi: H \to Z(\Lambda_1)$ 是一个 p-线性映射。于是我们定义 $D^{[p]'} = D^{[p]} + \varphi(\mathrm{sb}(D))$。那么，对于每个局部截面 D_1、D_2、D、$E \in \Lambda_1$ 以及每个局部截面 $f \in \mathcal{O}_X$

$$\mathrm{ad}(D^{[p]'})(E) = \mathrm{ad}(D^{[p]}) + \mathrm{ad}(\varphi(\mathrm{sb}(D)))(E) = \mathrm{ad}(D)^p(E),$$

$$(D_1 + D_2)^{[p]'} = (D_1 + D_2)^{[p]} + \varphi(\mathrm{sb}(D_1) + \mathrm{sb}(D_2))$$
$$= D_1^{[p]} + D_2^{[p]} + \sum_{i=0}^{p-1} s_i(D_1, D_2) + \varphi(\mathrm{sb}(D_1)) + \varphi(\mathrm{sb}(D_2)) = D_1^{[p]'} + D_2^{[p]'} + \sum_{i=0}^{p-1} s_i(D_1, D_2)$$

$$(fD)^{[p]'} = (fD)^{[p]} + \varphi(\mathrm{sb}(fD)) = f^p D^{[p]} + \delta_{fD}^{p-1}(f)D + f^p\varphi(\mathrm{sb}(D))$$
$$= f^p D^{[p]'} + \delta_{fD}^{p-1}(f)D,$$

$$f^{[p]'} = f^{[p]} + \varphi(\mathrm{sb}(f)) = f^p + \varphi(0) = f^p.$$

因此， $[p]': \Lambda_1 \to \Lambda_1$ 在 Λ 上诱导出一个 p-结构。 □

推论 4.4。 $\Lambda^{dR} = \mathcal{D}_{X/S}$ 上的 p-结构由全局 1-形式 $\omega \in H^0(F^*\Omega^1_{X/S})$ 分类，并且表示为

$$(f + v)^{[p]'} = f^p + v^{[p]} + v^{p-1}(f) + \omega(F^*v)$$

对于 $f \in \mathcal{O}_X$ 和 $v \in T_{X/S}$，其中 $[p]: T_{X/S} \to T_{X/S}$ 表示相对切丛上的典范 p-结构，该结构由向量场的 p 次幂给出。

证明。我们知道， $T_{X/S}$ 上的 p 次幂诱导出 $\mathcal{D}_{X/S}$ 上的一个 p-结构 $[p]$ ，其表示为

$$(f + v)^{[p]} = f^p + v^{[p]} + v^{p-1}(f)$$

对于 $f \in \mathcal{O}_X$ 和 $v \in T_{X/S}$。因此，根据命题 4.3，任何其他 p-结构都可通过添加一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $\varphi: F^*T_X \longrightarrow Z(\mathcal{D}^1_{X/S})$（与符号复合）得到。我们来计算中心 $Z(\mathcal{D}^1_{X/S})$。 $Z(\mathcal{D}^1_{X/S})$中的任何元素都必须与 $\mathcal{D}^0_{X/S} = \mathcal{O}_X$中的所有元素交换。但 $T_{X/S}$ 中与 $\mathcal{O}_X$ 交换的元素，正是锚映射 $\delta: T_{X/S} \to T_{X/S}$的核中的元素，而该锚映射是恒等映射。因此，我们得到 $Z(\mathcal{D}^1_{X/S}) \subset \mathcal{O}_X$ ，并且有

$$F_*(Z(\mathcal{D}^1_{X/S})) = \mathcal{O}_X = \ker(d : F_*\mathcal{O}_X \to F_*\Omega^1_{X/S}).$$

因此，任何其他 p 结构 $[p]'$ 都必须等于 $[p] + \varphi \circ \mathrm{sb}$，其中 $\varphi: F^*T_{X/S} \longrightarrow F^*\mathcal{O}_X$ 是 $\mathcal{O}_X$-线性的，它对应于 $H^0(F^*\Omega^1_{X/S})$ 中的一个全局 1-形式，从而得出所需结果。 □

5. p-curvature of a restricted Λ-module的 p-曲率

设 Λ 是定义在 X 上、取值于 S 的微分算子环层，并设 E 是一个相干的 $\mathcal{O}_X$-模。

定义 5.1. E 上的 Λ-模结构是一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射

$$\nabla : \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} E \longrightarrow E$$

它满足通常的模公理，并且由 $\mathcal{O}_X \to \Lambda$ 诱导的 E 上的 $\mathcal{O}_X$-模结构与原结构一致。

我们将 Λ-模 E 记为 (E, ∇)。对于任意局部截面 $D \in \Lambda$，由 D 的作用所诱导的 E 的 $\mathcal{O}_S$-线性自同态记为 $\nabla_D \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(E)$。给定一个 Λ-模 (E, ∇) 和一个局部截面 $D \in \Lambda_1$，我们将 p-曲率 $\psi_\nabla(D) : E \longrightarrow E$ 定义为以下映射

$$\psi_\nabla(D) = (\nabla_D)^p - \nabla_{D^{[p]}} \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_S}(E).$$

我们注意到，可以利用第2.3小节中定义的映射 $\iota : \Lambda_1 \to \Lambda$ 来定义 p-曲率，具体如下

$$\psi_\nabla(D) = (\nabla_D)^p - \nabla_{D^{[p]}} = \nabla_{D^p} - \nabla_{D^{[p]}} = \nabla_{D^p - D^{[p]}} = \nabla_{\iota(D)}.$$

命题5.2. 对任意 $D \in \Lambda_1$, $\psi_\nabla(D) : E \to E$，都是一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射。

证明。根据定义，由 Λ 在 E 上的作用所诱导的 $\mathcal{O}_X$-模结构与 E 的 $\mathcal{O}_X$-模结构一致，因此对于任意局部截面 $s \in E$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，我们有

$$fs = \nabla_f(s).$$

此外，由于 $\iota(D) \in Z(\Lambda)$，对于任意局部截面 $D \in \Lambda_1$，我们有

$$\begin{aligned} \psi_\nabla(D)(fs) &= \nabla_{\iota(D)} \circ \nabla_f(s) = \nabla_{\iota(D)f}(s) \\ &= \nabla_{f\iota(D)}(s) = \nabla_f \circ \nabla_{\iota(D)}(s) = f\psi_\nabla(D)(s). \end{aligned}$$

□

结合命题 2.11 以及 ι 可经由符号分解这一事实，即可证明 p-曲率诱导出一个 p-线性映射

$$\psi_\nabla : H \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E),$$

其中 $H = \Lambda_1/\Lambda_0$。因此我们得到一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射

$$\psi_\nabla : F^*H \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E).$$

命题 5.3. 对每个 Λ-模 (E, ∇)，p-曲率 ψ_∇ 在 E 上诱导出一个取值于 $F^*H^\vee$ 的 Higgs 场，即一个 $\mathcal{O}_X$-代数的态射

$$\tilde{\psi}_\nabla : \mathrm{Sym}^\bullet F^*H \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E).$$

此外，对于任意局部截面 $D \in H$ 和 $D' \in \Lambda$，$\nabla_{D'}$ 与 $\psi_\nabla(D)$ 对易。

证明。我们已经证明，p-曲率诱导出一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $\psi_\nabla : F^*H \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E)$。为了使该映射提升为代数同态 $\mathrm{Sym}^\bullet F^*H \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E)$，必须对每个 $D_1, D_2 \in H$

$$[\psi_\nabla(D_1), \psi_\nabla(D_2)] = 0.$$

但是，考虑到根据命题 2.12，我们知道 $\iota\colon F^*H \to \Lambda$ 的像属于中心 $Z(\Lambda)$，因此有

$$[\psi_\nabla(D_1), \psi_\nabla(D_2)] = \left[\nabla_{\iota(D_1)}, \nabla_{\iota(D_2)}\right] = \nabla_{[\iota(D_1),\iota(D_2)]} = \nabla_0 = 0.$$

第二部分可通过类似的计算得出

$$[\psi_\nabla(D), \nabla_{D'}] = \left[\nabla_{\iota(D_1)}, \nabla_{D'}\right] = \nabla_{[\iota(D),D']} = \nabla_0 = 0.$$

□

备注 5.4。前一个命题已在 [Lan14，引理 4.9]中针对受限 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 H上的模得到，这些模对应于 Λ-模，其中 $\Lambda = \Lambda_H$ 是 $\mathcal{O}_S$-李代数丛 H的包络代数。我们注意到，前两个命题的证明与 [Lan14], 中的证明类似，但依赖于命题 2.12 中针对一般受限微分算子环的层所得到的更一般的结论。

6. Hitchin map for restricted Λ-modules

本节假设 X 是 S =Spec($\mathbb{K}$) 上的整射影概形。主定理 6.6 需要这一假设。关于相对情形下 Hitchin 映射的构造，请参阅 [Lan14] 的第 3.5 节和第 4.5 节。

给定 X 上微分算子环 Λ 的一个受限层，以及 X 上秩为 r 的 Λ-模 (E,∇)，我们已在命题 5.3 中证明，(E,∇) 的 p-曲率在 E 上诱导出一个取值于 $F^*H^\vee$ 的 Higgs 场

$$\psi_\nabla \in H^0(X, \mathrm{End}(E) \otimes F^*H^\vee).$$

然后，通过取秩为 r 的 Higgs 层的（经典）Hitchin 映射 h，我们得到 Hitchin 基 $\mathcal{A}_r(X, F^*H^\vee)$ 中的一个点

$$h(E,\psi_\nabla) = (\mathrm{tr}(\wedge^k\psi_\nabla))_{k=1}^r \in \mathcal{A}_r(X, F^*H^\vee) := \bigoplus_{k=1}^r H^0(X, \mathrm{Sym}^k(F^*H^\vee)).$$

因此， p-曲率映射 $(E,\nabla) \mapsto \psi_\nabla$ 与 Hitchin 映射 h 复合后，定义了一个映射 h_Λ

$$h_\Lambda : \mathcal{M}_X^\Lambda(r,P) \longrightarrow \mathcal{A}_r(X, F^*H^\vee), \qquad (E,\nabla) \mapsto h(E,\psi_\nabla), \tag{6.1}$$

其中， $\mathcal{M}_X^\Lambda(r,P)$ 表示参数化 X 上秩为 r、Hilbert 多项式为 P 的 Giesecker 半稳定 Λ-模的粗模空间（[Sim94], [Lan04b],[Lan04a]）。

为了理解映射 h_Λ 的结构，我们先考虑由对称代数 $\mathrm{Sym}^\bullet(H)$ 上的平凡 p-结构给出的例子——参见第 4.2 小节。在这种情况下，$\mathrm{Sym}^\bullet(H)$-模是一个取值于 $H^\vee$ 的 Higgs 层，其 p-曲率就是 Higgs 场的 p 次幂

$$\psi_\nabla(D) = \nabla_{D^p} = (\nabla_D)^p.$$

于是很容易看出， ψ_∇ 的特征多项式的系数是 $H^0(X,\mathrm{Sym}^k(H^\vee))$ 中整体截面在 Frobenius 映射下的拉回。

在证明关于映射 h_Λ 的主要结果之前，我们需要回顾典范联络的定义

$$\nabla^{\mathrm{can}} : F^*\mathcal{G} \longrightarrow F^*\mathcal{G} \otimes \Omega^1_X$$

即绝对 Frobenius 映射 F （定义在 X 上）下，一个相干 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{G}$ 的拉回层 $F^*\mathcal{G}$ 上的定义。在仿射开子集 $\mathrm{Spec}(A) = U \subset X$ 上，我们将局部截面 $\mathcal{G}(U)$ 的 A-模记为 M。那么，拉回 $F^*\mathcal{G}(U)$ 的局部截面对应于具有由左乘法给出的 A- 模结构的 $A \otimes_A M$，且 A 在 A 上的作用由 Frobenius 映射 F 给出。换言之，对于任意 λ、$a \in A$ 和 $m \in M$，我们有如下恒等识别 $\lambda^p a \otimes_A m = a \otimes_A \lambda m$。于是，在此记号下，典范联络定义为

$$\nabla^{\mathrm{can}} : a \otimes_A m \mapsto da \otimes_A m,$$

或者等价地，对于任意向量场 ∂， $\nabla^{\mathrm{can}}_\partial(a \otimes_A m) = \partial a \otimes m$。

引理 6.1. 设 $\mathcal{G}$ 是整概形 X 上的无挠 $\mathcal{O}_X$-模，并设 $s \in H^0(X, F^*\mathcal{G})$ 是一个整体截面。假设存在一个开子集 $\Omega \subset X$，使得

$$\nabla^{\mathrm{can}}_\partial(s_{|\Omega}) = 0$$

对 Ω 上的任意向量场 ∂ 均成立。则 s 在 Frobenius 映射下可下降，即存在 $s' \in H^0(X, \mathcal{G})$，使得 $s = F^*(s')$。

证明. 只需在 X 的一个仿射开子集 $\mathrm{Spec}(A)$ 上局部证明该命题。接着，我们在 $\mathrm{Spec}(K)$ 上应用 Cartier 定理，其中 K 是 A 的分式域，从而得到 Frobenius 下降 s' 在 $\mathrm{Spec}(K)$ 上存在。由于 $\mathcal{G}$ 是无挠的，截面 s 也能在 $\mathrm{Spec}(A)$ 上下降。计算很直接，留给读者完成。□

引理 6.2. 设 (E, ∇) 是一个 Λ-模。则对任意局部截面 $D \in H = \Lambda_1/\Lambda_0$ 和 $D' \in \Lambda_1$，有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F^*H^\vee & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes D} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nabla}_{D'}} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_{D'}} \\ E \otimes F^*H^\vee & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes D} & E, \end{array}$$

˜其中我们将自同态 $\nabla_{D'}$ 定义为

$$\tilde{\nabla}_{D'} = \nabla_{D'} \otimes \mathrm{Id}_{F^*H^\vee} + \mathrm{Id}_E \otimes \nabla^{\mathrm{can}}_{\delta \circ \mathrm{sb}(D')}.$$

证明。只需在仿射开子集 $U = \mathrm{Spec}(A)$ 上进行局部考察。考虑不可约张量 $v \otimes a \otimes h \in (E \otimes F^*H^\vee)(U)$，其中 $v \in E(U)$、 $h \in H^\vee(U)$、$a \in A = \mathcal{O}_X(U)$，且最后一个张量积取在 Frobenius 映射上，即

$$\lambda^p v \otimes a \otimes h = v \otimes \lambda^p a \otimes h = v \otimes a \otimes \lambda h.$$

然后，利用环 Λ 的结合律以及对于任意 $D' \in \Lambda_1$ 和 $f \in \mathcal{O}_X$，$[D', f] = \delta_{\mathrm{sb}(D')}(f)$ 的事实，可得如下

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{D'}(v \otimes a \otimes h) &= \nabla_{D'}(v) \otimes a \otimes h + v \otimes \nabla^{\mathrm{can}}_{\delta \circ \mathrm{sb}(D')}(a \otimes h) \\ &= \nabla_{D'}(v) \otimes a \otimes h + v \otimes \delta_{\mathrm{sb}(D')}(a) \otimes h.\end{aligned}$$

对局部截面 $D \in H$ 应用 $\mathrm{Id} \otimes D$，可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} \otimes D) \circ \tilde{\nabla}_{D'}(v \otimes a \otimes h) &= \nabla_{D'}(v) \otimes a \otimes \langle h, D\rangle + v \otimes \delta_{\mathrm{sb}(D')}(a) \otimes \langle h, D\rangle \\ &= \langle h, D\rangle^p a \nabla_{D'}(v) + \langle h, D\rangle^p \delta_{\mathrm{sb}(D')}(a) v,\end{aligned}$$

where $\langle -, -\rangle$ 表示 $H^\vee$ 与 H 之间的标准配对。另一方面

$$\begin{aligned}\nabla_{D'} \circ (\mathrm{Id} \circ D)(v \otimes a \otimes h) = \nabla_{D'}(\langle h, D\rangle^p a v) &= \langle h, D\rangle^p a \nabla_{D'}(v) + \delta_{\mathrm{sb}(D')}(\langle h, D\rangle^p a) v \\ &= \langle h, D\rangle^p a \nabla_{D'}(v) + \langle h, D\rangle^p \delta_{\mathrm{sb}(D')}(a) v\end{aligned}$$

因此，对于不可约张量，我们得到了所需的等式。由可加性可知，对于 $E \otimes F^* H^\vee$ 的任意局部截面，等式均成立。□

推论 6.3. 设 (E, ∇) 是一个 Λ-模，且 $\psi_\nabla \colon E \longrightarrow E \otimes F^* H^\vee$ 表示其p-曲率。那么，对于任意局部截面 $D' \in \Lambda_1$，下图交换

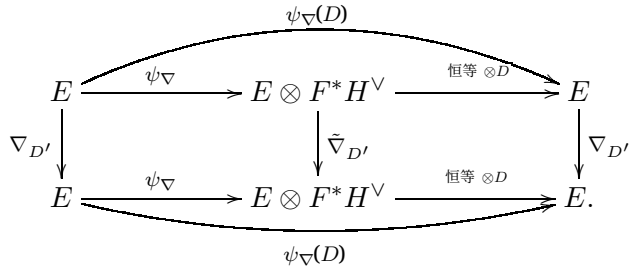
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi_\nabla} & E \otimes F^* H^\vee \\ {\scriptstyle \nabla_{D'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nabla}_{D'}} \\ E & \xrightarrow{\psi_\nabla} & E \otimes F^* H^\vee, \end{array}$$

其中 $\nabla_{D'}$ 在前一个引理中定义。

证明。根据命题 5.3，我们知道，对于任意局部截面 $D \in H$ 和 $D' \in \Lambda_1$，两个自同态 $\psi_\nabla(D)$ 和 $\nabla_{D'}$ 彼此交换。此外，$\psi_\nabla(D) \colon E \to E$ 是以下映射的复合

$$E \xrightarrow{\psi_\nabla} E \otimes F^* H^\vee \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes D} E$$

因此我们得到以下图表，其中我们知道外方形和右侧内方形（根据引理 6.2）是交换的



因此，对于任意 $D \in H$ 和 $D' \in \Lambda_1$

$$\begin{aligned}0 = \nabla_{D'} \circ \psi_\nabla(D) - \psi_\nabla(D) \circ \nabla_{D'} &= \nabla_{D'} \circ (\mathrm{Id} \otimes D) \circ \psi_\nabla - (\mathrm{Id} \otimes D) \circ \psi_\nabla \circ \nabla_{D'} \\ &= (\mathrm{Id} \otimes D) \circ \tilde{\nabla}_{D'} \circ \psi_\nabla - (\mathrm{Id} \otimes D) \circ \psi_\nabla \circ \nabla_{D'} \\ &= (\mathrm{Id} \otimes D) \circ \left(\tilde{\nabla}_{D'} \circ \psi_\nabla - \psi_\nabla \circ \nabla_{D'} \right).\end{aligned}$$

由于对于任意 $D \in H$，这个复合映射都为零，而且$F^*H^\vee$ 中求值映射的核是平凡的，我们得到

$$\tilde{\nabla}_{D'} \circ \psi_\nabla - \psi_\nabla \circ \nabla_{D'} = 0.$$

□

Th下一个命题将用于证明主要结果（定理 6.6）。

命题 6.4。假设 p =char($\mathbb{K}$) > 2。设 Λ 是定义在 X 上、相对于 S 的一个受限微分算子层，且设 $\mathcal{E}$ 是一个凝聚 $\mathcal{O}_X$-模，并带有一个 $\mathcal{O}_S$-模态射 $\nabla\colon \Lambda_1 \longrightarrow$ End$_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E})$，满足对于任意局部截面$f$、$g \in \mathcal{O}_X$、 $s \in \mathcal{E}$和 $D \in \Lambda_1$

$$\nabla_D(fs) = f\nabla_D(s) + \delta_{\mathrm{sb}(D)} \quad and \quad \nabla_g(s) = gs.$$

设 $\mathcal{G}$是一个凝聚 $\mathcal{O}_X$-模，且设 $\psi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes F^*\mathcal{G}$是一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射。假设对于 $D \in \Lambda_1$，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathcal{E} \otimes F^*\mathcal{G} \\ {\scriptstyle \nabla_D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\nabla}_D} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathcal{E} \otimes F^*\mathcal{G}, \end{array}$$

˜其中右侧的自同态 ∇_D 定义为

$$\tilde{\nabla}_D = \nabla_D \otimes \mathrm{Id}_{F^*\mathcal{G}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \otimes \nabla^{\mathrm{can}}_{\delta \circ \mathrm{sb}(D)}.$$

则在 X 的一个开稠密子集上，我们有

$$\nabla^{\mathrm{can}}_{\delta \circ \mathrm{sb}(D)}(\mathrm{tr}(\psi)) = 0,$$

其中，tr(ψ) $\in H^0(X, F^*\mathcal{G})$表示 $\mathcal{O}_X$-线性自同态 ψ的迹。

证明。由于 X 是整的，我们可以将注意力限制在开稠密子集 $\Omega \subset X$上，在该子集上 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{G}$ 都是局部自由的。此外，只需局部验证该等式即可。对于 $x \in \Omega$，我们用 $\mathcal{O}$ 表示 $\mathcal{O}_X$ 在点 x处的局部环。于是可以写成

$$\nabla_D = \partial + A,$$

其中， $\partial = \delta \circ$ sb(D)是 $\mathcal{O}$ 上的一个导子，而 A 是一个取值于$\mathcal{O}$ 且 $r =$ rk($\mathcal{E}$)的 $r \times r$ 矩阵。类似地，令 $n =$rk($\mathcal{G}$)，并选取 $\mathcal{G}_x$ 的一个 $\mathcal{O}$-基，则 ψ对应于取值于 $\mathcal{O}$的 $n\,r \times r$ 个矩阵 B_1, ..., B_n。于是，交换关系转化为以下关于 End($\mathcal{O}^{\oplus r}$) 中 $i = 1$, ..., n 的 n 等式

$$\begin{aligned} B_i(\partial + A) &= ((\partial + A) \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \partial)B_i \\ \iff B_i\partial + B_iA &= \partial B_i + AB_i + \partial.B_i \\ \iff [B_i, A] &= [\partial, B_i] + \partial.B_i = 2\partial.B_i, \end{aligned}$$

其中， $\partial.B_i$ 表示将导子 ∂ 应用于 B_i 的所有系数后得到的矩阵。我们还使用了众所周知的恒等式 $[\partial, B_i] = \partial.B_i$。取迹可得

$$0 = \mathrm{tr}([B_i, A]) = 2\mathrm{tr}(\partial.B_i) = 2\partial(\mathrm{tr}(B_i)).$$

因此，由于 $p > 2$，我们得到

$$\partial(\mathrm{tr}(B_i)) = 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

这就证明了该结论。 □

命题 6.5. 设 (E,∇) 是秩为 r 的受限 Λ-模，并令 $\psi_\nabla: E \to E\otimes F^*H^\vee$ 表示其 p-曲率。那么，对于 $i=1,\dots,r$， $\mathcal{O}_X$-线性复合映射

$$\psi_i : \Lambda^i E \xrightarrow{\Lambda^i\psi_\nabla} \Lambda^i(E\otimes F^*H^\vee) \xrightarrow{pr} \Lambda^i E\otimes F^*\operatorname{Sym}^i H^\vee$$

$\Lambda^i\psi_\nabla$ 与自然投影映射 pr 的复合，满足命题 6.4 中关于 $\mathcal{E}=\Lambda^i E$, $\mathcal{G}=\mathrm{Sym}^i H^\vee$, $\psi=\psi_i$ 的交换关系，以及由 ∇ 诱导的 Λ_1 在 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{G}$ 上的自然作用。

证明。注意，若 (E,∇) 是一个 Λ-模，则外幂 $\Lambda^i E$ 未必是 Λ-模，但 $\Lambda^i E$ 可以赋予 Λ_1 的作用，使其满足命题 6.4 中给出的性质。由于 ψ_i 是复合映射，只需验证映射 $\Lambda^i\psi_\nabla$ 和 pr 满足交换关系。根据映射的定义，这两项验证都可立即得出。□

现在我们可以陈述主要结果。

定理 6.6。假设 $p=\mathrm{char}(\mathbb{K})>2$。令 Λ 为 X上的受限微分算子环层。我们假设 $H=\Lambda_1/\Lambda_0$ 是局部自由的，且锚映射 $\delta: H\to T_X$ 在一般点上是满射的。那么，Λ-模 (E,∇) 在 X上的 p-曲率 ψ_∇ 的特征多项式的系数 $\mathrm{tr}(\psi_i)$ 是 p 次幂，即在 Frobenius 映射 F of X下下降。这意味着上面定义的 Hitchin 映射 h_Λ (6.1) 分解如下

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_X^\Lambda(r,P) & \xrightarrow{h_\Lambda} & \mathcal{A}_r(X,F^*H^\vee) \\ & \searrow^{h'_\Lambda} & \uparrow{\scriptstyle F} \\ & & \mathcal{A}_r(X,H^\vee), \end{array}$$

其中，竖直映射是整体截面在 Frobenius 映射 F of X下的拉回映射。

证明。设 (E,∇) 是一个秩为 r、具有 p-曲率 ψ_∇ 的受限 Λ-模。命题 6.5 表明，通过投影 $\Lambda^i\psi_\nabla$ 得到的整体截面 $\psi_i: \Lambda^i E\to \Lambda^i E\otimes F^*\operatorname{Sym}^i H^\vee$ 满足命题 6.4 的交换关系。因此，应用命题 6.4，我们可以得出，对于任意局部截面 $D\in\Lambda_1$

$$\nabla^{\mathrm{can}}_{\delta\circ\mathrm{sb}(D)}(\mathrm{tr}(\psi_i))=0$$

在 Ω_1 的一个开子集上。令 Ω_2 为锚映射 δ 是满射的开子集。那么在 $\Omega_1\cap\Omega_2$ 上，对于任意局部向量场 ∂，我们有 $\nabla^{\mathrm{can}}_\partial(\mathrm{tr}(\psi_i))=0$。现在，由于 X 是整的且 H 局部自由，我们可以应用引理 6.1。□

注 6.7. 以下示例表明，在定理 6.6 中，不能去掉 $\delta: H\to T_X$ 是泛 surjective 这一假设。设 X 是亏格为 $g\geq 2$、定义在 $S=\mathrm{Spec}(\mathbb{K})$ 上的光滑射影曲线，且令 T_X （分别为 K_X）表示其切线丛（分别为典范线丛）。我们选取一个非零整体截面 $\varphi\in H^0(X,K_X^{p-1})$，其零除子约化。按照第 4.6 小节的说明，我们考虑对称代数 $\Lambda=\mathrm{Sym}^\bullet(T_X)$，其 p-结构由以下 $\mathcal{O}_X$-线性

映射 $\alpha\colon F^*T_X = T_X^{\otimes p} \to T_X$ 给出，该映射对应于与 φ 相乘。注意，在此情形下 $\delta = 0$。于是， X 上的一个 Λ-模 (E,∇) 对应于一个向量丛E及一个 Higgs 场，即一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $\nabla\colon E \to E \otimes K_X$。随后，$(E,\nabla)$ 的 p-曲率 ψ_∇ 对应于 $\mathcal{O}_X$-线性映射 $E \to E \otimes F^*K_X$

$$\psi_\nabla = \nabla^p - \alpha.\nabla,$$

其中 $\alpha.\nabla$ 表示复合映射 $(\mathrm{id}_E \otimes \alpha^\vee) \circ \nabla$。那么显然，$\mathrm{tr}(\psi_\nabla)$ 不会在 Frobenius 映射下下降。

注 6.8. 前面的注释表明，要求锚映射 $\delta : H \longrightarrow T_X$ 一般满射对于该定理确实是必要的；但可以证明，在某些情形下，该条件一般成立。例如，若 X 是一条光滑曲线，则任意非零映射 $\delta : H \longrightarrow T_X$ 一般满射。因此，对于光滑曲线， X 上任何具有非零锚映射的受限微分算子环层Λ 都满足定理 6.6。特别地，当Λ 是任意受限 Lie 代数丛 $(H, [-.-], \delta, [p])$ 的包络代数且 $\delta \neq 0$ 时，结论成立；更一般地，对于任何左、右 $\mathcal{O}_X$-模结构不同的 Λ ，结论也成立（见注 2.2）。

7. Hitchin map for restricted Λ^R-modules

证明定理 6.6 所用的论证可以推广到以下特殊的相对情形：对于一个定义在 S =Spec($\mathbb{K}$) 上的整射影概形 X ，考虑通过 Rees构造从受限 Lie 代数丛 $(H, [-,-], \delta, [p])$ 的包络代数 $\Lambda = \Lambda_H$得到的、相对于 $\mathbb{A}^1$ 的受限微分算子环层 Λ^R（见第4.4小节）。

我们考虑模空间 $\mathcal{M}^{\Lambda^R}_{X\times\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1}(r,P)$，它参数化 $X \times \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1$ 上秩为 r 且 Hilbert 多项式为 P 的 Giesecker 半稳定 Λ^R-模。由于$\Lambda^R_1/\Lambda^R_0 = p_X^*(H)$，相对情形下的 Hitchin 映射 h_{Λ^R} （见 [Lan14，第 3.5 节和第 4.5] 节）对应于一个态射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\Lambda^R}_{X\times\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1}(r,P) & \xrightarrow{h_{\Lambda^R}} & \mathcal{A}_r(X, F^*H^\vee)\times\mathbb{A}^1 \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathbb{A}^1}} \\ & & \mathbb{A}^1 \end{array} \tag{7.1}$$

在 $\mathbb{A}^1$ 上。因此我们得到

定理7.1. 假设 $p = \mathrm{char}(\mathbb{K}) > 2$。令 $\Lambda = \Lambda_H$ 为整射影概形 X 上受限李代数丛 $(H, [-,-], \delta, [p])$ 的泛包络代数，并令 Λ^R 为相对于 $\mathbb{A}^1$ 、由 Λ_H 经 Rees构造得到的 $X \times \mathbb{A}^1$ 上的受限微分算子环层。假设 $H = \Lambda_1/\Lambda_0$ 局部自由，且锚映射 $\delta : H \to T_X$ 在一般点处

满射。则上述定义的 Hitchin 映射 h_{Λ^R} (7.1) 可分解如下

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\Lambda^R}_{X\times\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1}(r,P) & \xrightarrow{h_{\Lambda^R}} & \mathcal{A}_r(X,F^*H^\vee)\times\mathbb{A}^1 \\ & \searrow^{h'_{\Lambda^R}} & \uparrow{\scriptstyle F\times\mathrm{id}} \\ & & \mathcal{A}_r(X,H^\vee)\times\mathbb{A}^1, \end{array}$$

其中，垂直映射是由 F 的 Frobenius 映射 X 诱导的整体截面拉回映射。

证明。由于锚映射 $\delta\colon H\to T_X$ 在 X 上一般满射，锚映射 $\delta^R = t\delta\colon p_X^*(H)\to p_X^*(T_X)$ 在 $X\times\mathbb{A}^1$ 上也一般满射。因此，我们可以对局部相对向量场 $\partial\in T_{X\times\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1} = p_X^*(T_X)$ 应用定理 6.6 证明中的相同论证。□

References

[BMR08] R. Bezrukavnikov、I. Mirkovic 和 D. Rumynin。素特征下半单李代数的模的局部化。附录由 R. Bezrukavnikov 和 S. Riche 撰写。*Ann. of Math.*, 167 (2):945–991, 2008。[BO78] P. Berthelot 和 A. Ogus。《晶体上同调札记》(MN-

21 *Princeton Uni-*)。 , 。[

versity Press 1978

EG20] H. Esnault 和 M. Groechenig。刚性联络与 F-等晶体。 *Acta Math.*, 225:103– 158, 2020。[Gro67] A. Grothedieck。代数几何基础 IV：概形及概形态射的局部研究。´ements de g´eom´etrie alg´ebrique IV: Etude locale des sch´emas et des morphismes de sch´emas。 *Publ. IHES*, 32:5–361, 1967。[Gro16] M. Groechenig。正特征下的平坦联络模空间。 *Math. Res. Lett.*, 23 (4):989–1047, 2016。[Hoc55] G. Hochschild。具有指数 1 纯不可分裂域的单代数。

Trans. Amer. Math. Soc., 79:477–489, 1955。[Kat70] N. M. Katz。幂零联络与单值化定理：Turrittin 结果的应用。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 39:175–232, 1970。[Lan04a] A. Langer。混合特征下的层模空间。 *Duke Math. J.*, 124 586, 2004 571: – 。[Lan04b] A. Langer。正特征下的半稳定层。 *Ann. Math.*, 159:241–270, 2004。[Lan14] A. Langer。正特征下李代数丛上的半稳定模。

Documenta

Math. 19 509 540, 2014 , : – 。[

LP01] Y. Laszlo 和 C. Pauly。正特征下的 Hitchin 态射。

Internat. , ( ): – 。[

Math. Res. Notices 3 129 143, 2001

Rum00] D. Rumynin。Hopf 代数的对偶性。 *J. Algebra*, 223:237–255, 2000。[Sch16] P. Schauenburg。关于受限 Lie-Rinehart 代数的受限万有包络代数的一则注记。

Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 23(5):769–777, 2016。[Sim94] C. T. Simpson。光滑射影簇基本群的表示模空间 I。 *Publi. Math. I.H.E.S.*, 79:47–129, 1994。[Tor11] P. Tortella。

Λ-*modules and holomorphic Lie algebroids*。博士论文，里尔第一大学，2011。[Tor12] P. Tortella。 Λ-模与全纯李锚丛联络。 *Cent. Eur. J. Math.*, 10 4 1422 1441, 2012 ( ): – 。

Department of Applied Mathematics and Institute for Research in Technology, ICAI School of Engineering, Comillas Pontifical University, C/Alberto Aguilera 25, 28015 Madrid, Spain*Email address*: dalfaya@comillas.edu

Laboratoire J.-A. Dieudonné, Université Côte d'Azur, Parc Valrose, 06108 NiceCedex 02, France*Email address*: pauly@unice.fr