arXiv:2303.02361v1 [math.CO] 4 Mar 2023

组合　　多重选择秘书问题的组合证明

Xujun Liu* Olgica Milenkovic† George V. Moustakides‡

2023年3月7日

摘要

秘书问题是一项经典的序贯决策问题，可简要描述如下：一组按排名排序的申请者依次接受面试，以填补一个职位。面试一名申请者后，必须立即且不可撤销地决定是否向其提供职位；决策过程中只能依据截至当时已面试的申请者。我们关注的问题是找出一种停止规则，使录用排名最高的申请者的概率最大化。秘书问题的一个多重选择版本称为嫁妆问题，其假设是给定一个固定的整数预算，用于限定选拔最佳申请者的总次数。该问题已运用动态规划和最优停止理论工具得到解决。我们首次为一种相关的新型基于查询的模型 提供组合证明；在该模型中，我们可以向专家征询意见，以确定某位申请者是否为最佳申请者。由于选拔标准不同于嫁妆问题，我们得到的期望停止时间也不相同。

我们的结果表明，最优策略是（$a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1$）策略，即对于第 i^{th} 次选择，当 $1 \le i \le s$ 且 $1 \le j = s+1-i \le s$ 时，我们拒绝前 a_j 位申请者，等待作出第（$i-1$）th 次选择的时机（如果 $i \ge 2$），然后接受下一位资历优于此前所有申请者的申请者。此外，我们的最优策略是右端型的，即总共有 s_1 次和 s_2 次选择的两个模型（$s_1 < s_2$）的最优策略，从右侧观察时，共享相同的序列$a_1, a_2, \ldots, a_{s_1}$。当申请者总数趋于无穷时，我们的结果与 Gilbert and Mosteller 得到的阈值一致。

1 引言

经典的秘书问题可表述如下： N 位申请者竞争一个空缺的秘书职位，根据其资历，可以将这组 N 位申请者从优到劣进行排序，且不存在并列。申请者按随机顺序依次出现。每面试一位申请者，都必须立即决定接受还是拒绝其担任该职位，且该决定之后不能撤销。此外，决策时只能利用截至目前已经观察到的申请者信息。我们关心的问题是找出最佳停止规则，即使录用排名最高的申请者的概率最大化的规则。

秘书问题由 Gardner [11, 12]正式提出，并被视为序贯分析、优化和决策理论中的一个典型例子。Lindley [19] 利用代数方法确立了最佳策略，而 Dynkin [7] 则通过将选择过程视为马尔可夫链，独立地解决了该问题。对于足够大的 N，该问题的解竟然出奇地简单：雇主需要拒绝前 N/e 名申请者，其中 e 是自然对数的底数，然后接受下一位资历优于此前所有已观察申请者的申请者。识别出最佳申请者的概率在 N 趋于无穷大时趋于 $1/e$。

*西交利物浦大学基础数学系，中国江苏省苏州，215123，xujun.liu@xjtlu.edu.cn

†伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校电气与计算机工程系，美国伊利诺伊州厄巴纳，61801，milenkov@illinois.edu

‡帕特雷大学电气与计算机工程系，希腊里约，26500，moustaki@upatras.gr

经典秘书问题已在许多方向上得到推广 [2, 3, 4, 6, 9, 10, 13, 15, 14, 17,18, 20, 21, 23, 24, 26], ，其中包括先知不等式模型。其中一种推广是 Gilbert and Mosteller [15], 提出的嫁妆问题（多重选择），它假设总共有 s次机会来选拔最佳申请者，其中 $s \geq 1$。Sakaguchi [25] 采用Dynkin方法，严格确定了嫁妆问题设定下的最优选择时机。

受近期关于带查询的学习的研究启发 [1, 5, 22], ，我们提出了基于查询的序贯选择问题。在这一新模型中，我们假设决策主体有固定数量的$s-1$ 次机会向一位绝对可靠的专家查询。当经过探索过程后，某位申请者被认定为可能排名最高的申请者时，专家会给出“该申请者是最佳申请者”或“该申请者不是最佳申请者”的答复。如果答复是“该申请者是最佳申请者”，序贯考察过程便会终止。然而，如果专家回答“该申请者不是最佳申请者”，只要查询预算允许，就会开始新的探索—利用阶段。预算耗尽后，仍可以在不咨询专家的情况下进行最后一次选拔。因此，预算为 $s-1$次查询时，我们最多可以进行 s 次选择。我们的目标是找到能够最大化选中最佳申请者概率的策略。

我们提出的预算为 $s-1$ 次查询的新型基于查询的模型，与允许 s 次选择的嫁妆问题有关，但并不相同。对于这两种模型，我们的结果表明，最优策略都是一个（a_s， a_{s-1}，……， a_1）策略；也就是说，在第 i^{th}次选择中，当 $1 \leq i \leq s$且 $1 \leq j = s+1-i \leq s$时，我们拒绝前a_j位申请者，等待作出（$i-1$）th次选择的决定（如果 $i \geq 2$），然后接受下一位资历优于此前所有申请者的申请者。此外，从右侧来看，两种模型中总共进行 s_1 次和 s_2 次选择的最优策略（不失一般性， $s_1 < s_2$）具有相同的序列a_1， a_2，……， a_{s_1}。当 $N \to \infty$时，我们的结果与 Gilbert and Mosteller [15] 得出的阈值一致。另一方面，从期望终止时间的角度来看，这两种模型差异很大，尤其是在选择总次数较多时。

Fowlkes 和 Jones [8], 及 Jones [16, 17]通过一系列论文，提出了一种重要的组合方法，用于研究非均匀排序模型下的序贯问题。为保持一致，我们采用了 Jones [17] 中的部分记号和定义，同时也引入了一些新概念和组合证明技巧。尤其是，与秘书问题相比，为多次选择推导递推关系要困难得多，而且最优策略也与经典策略大不相同，因为我们的结果包含多个停止阈值。

本文结构如下。第2节介绍本文所用的相关概念、术语和模型，并给出证明主要结果所需的技术性引理。第3节阐述最优选择策略，第4节则介绍该最优策略的精确阈值，以及识别最佳申请者的最大概率。

2 预备知识

样本空间是由 N 个元素构成的所有排列的集合，即对称群 S_N，其底层 σ-代数为 S_N 的幂集。最佳申请者的编号为 N，次佳申请者的编号为 $N-1$、.. . 、最差申请者的编号为 1。在我们的模型中，预算为 $s-1$ 次查询（s 次选择，其中 $s \geq 1$）。在面试过程开始前，从 S_N 中均匀随机抽取一个排列 $\pi \in S_N$。面试过程中， π 的各项从左到右逐一呈现。所呈现的 π 各位置的相对顺序，是决定是否接受当前申请者时唯一可用的信息。

对于按均匀分布抽取的给定排列 $\pi \in S_N$，如果某个策略获胜，我们就说它在展示 π 时，能在 s 次选择次数内正确识别出最佳申请者。引入前缀这一概念，用以表示申请者当前的相对顺序。

定义1. 给定一个 $\pi \in S_N$， π的 $k^{(th)}$ 前缀记作 $\pi|_k$，它是 S_k 中的一个排列，表示按照相对顺序对 π 的前 k 个元素重新标记。例如，若 $\pi = [635124] \in S_6$且 $k = 4$，则 $\pi|_4 = [4231]$。

定义2. 设 $\sigma \in \bigcup S_i$，并假设排列的长度 $|\sigma|$等于 k。若 $\pi|_k = \sigma$，则称排列$i=1\pi \in S_N$ 是 σ-前缀的。例如，$\pi = [165243] \in S_6$ 是 $\sigma = [1432]$-前缀的。

定义 3. 称 π 以 σ 为前缀。若接受前缀 σ，即在遇到顺序为 σ 的面试时接受第 $|\sigma|^{\text{th}}$ 位申请者，便能选中面试顺序为 π的最佳申请者，则称 π 是 σ-可获胜的 。更准确地说，对于 $\sigma = [\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(k)],$，若 π以 σ 为前缀且 $\pi(k) = N$，则称 π是 σ-可获胜的。

定义 4. 排列 $\pi \in S_N$ 中的从左到右最大值是指这样一个位置：该位置的值大于其左侧所有值。例如，若 $\pi = [423516] \in S_6$，则第 1^{st}、4^{th} 和 6^{th} 个位置都是从左到右最大值，因为每个位置上的值都大于其左侧的所有值。

定义 5. 若排列 $\sigma \in \bigcup S_i$ 以一个从左到右最大值结尾，或其长度为$i=1$ N，则称其符合条件。例如，设 $N = 6$，$[1324]$ 和 $[165243]$ 都符合条件。

每种策略都可以表示为一组排列（长度可能各不相同）；这些排列会导致对最后一位观察到的申请者作出接受决定，这样的集合称为停止集合。更确切地说，选择过程如下：如果目前看到的前缀属于停止集合，那么我们就接受当前申请者并继续（前提是仍有名额）；如果不属于停止集合，则拒绝当前申请者并继续。例如，设 $N = 4$ 和 $s = 1$。那么，图 1 中方框里的排列集合 $A = \{[12], [213], [3124], [3214]\}$ 就是一个停止集合。相应的面试策略可以概括如下：如果截至目前面试过的申请者的相对顺序属于集合 A，就接受当前申请者；否则，就拒绝当前申请者。结果证明，这是一种最优策略，成功选出最佳申请者的概率为 $11/24$。显然，表示最优策略的停止集合只包含符合条件的排列，因为最优策略只会选拔从左到右最大值。我们还会用到下文定义的 s-停止集合。

定义 6。 如果不可能存在 $s+1$ 个元素α_1、α_2、.....、$\alpha_{s+1} \in X$，使得对于所有 $i \in \{1$、2、.....、$s\}$，α_{i+1} 是 α_i的前缀，则称集合 $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} S_j$ 为 s-最小集合。

定义 7。 如果排列集合 $A \subseteq \bigcup S_j$ 满足$j=1$，则称其为 s-停止集合。

(i) 它由符合条件的前缀组成。(ii) 集合 A 是 s-最小的。集合 A 可以包含元素 α_1、α_2、.....、α_s，使得对于所有 $i \in \{1$、2、.....、$s-1\}$，α_{i+1} 是α_i的前缀。换言之，基于一个 s-停止集合，最多可以进行 s 次选择。

(iii) S_N 中的每个排列都将 A 中的某个元素作为其前缀（即，给定一个 s-停止集合，总能根据其中的元素进行选择）。

注 8. 当只允许一次选择时，1-停止集合对应于 *Jones* 论文中定义的有效打击集 *[17]*。只要上下文能够明确 s总选择次数，我们就使用“停止集合”一词。

根据前述定义以及至多允许进行 s 次选择这一事实可知，我们的问题的任何最优策略都可以表示为一个 s-停止集合。引理 18 和定理 20 对这一论断进行了详细分析。例如，图 1 中的集合{
[1], [12], [213], [3124], [3214]} 是一个二次罢免集，它也表示在 $N = 4$ 且 $s = 2$的情况下的一种最优策略。另请参见例 28。此外，对于一个长度为 k 的排列 σ，其中 $1 \le k \le N$，且 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$，我们使用以下概率：

$Q_i(\sigma)$：采用接受第 k个位置的申请者、此后使用最佳策略的策略，在预先选定的面试顺序 π 以 σ为前缀，且面试到位置 k的申请者时仍有 i 次选择可用的条件下，识别出最佳申请者的概率**条件是**。

$Q_i^o(\sigma)$：在面试结束后立即仍有 i 次选择机会、且预先选定的面试顺序 π 为 σ前缀的条件下，在对第 k 个位置作出决定后，以最佳策略识别出最佳申请者的概率。

$\bar{Q}_i(\sigma)$: $Q_i(\sigma)$ = 最大$\{Q_i(\sigma), Q_i^o(\sigma)\}$。

直观地说，Q 表示接受当前申请者而获胜的概率，而 Q^o 表示基于面试过程中未来选择次数而获胜的概率。为了确保获胜概率最大，最优策略会在面试的每个阶段考察两种可选方案，即“接受当前申请者”或“拒绝当前申请者并在未来实施最佳策略”，并选择更有可能选出最佳申请者的方案。

定义9. 设 σ 是一个长度为 k的排列，其中 $1 \le k \le N$。 σ的标准分母记为 $SD(\sigma)$，定义为以 σ为前缀的排列 $\pi \in S_N$的数量。为简便起见，我们用 $Win(\sigma)$表示 σ可获胜的排列 $\pi \in S_N$ 的数量。

定义10. $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的 $\oplus$ 运算定义为 $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$。它用于计算两个互斥样本空间中的两个互斥事件之并集在一个新的样本空间（该空间等于这两个样本空间的并集）中的概率。

定义 11. 对于每个长度为 $\ell-1$ 的 σ，其中 $2 \le \ell \le N$，我们将 $\lambda_j(\sigma)$，$1 \le j \le \ell$ 定义为长度为 ℓ 的 σ 前缀排列，使得按照 σ 的前 $\ell-1$ 个位置重新标记后，其最后一个位置的值为 j。例如，对于 $\sigma = [123]$，一个长度为 3 的排列，我们有 $\lambda_1(\sigma) = [2341]$，$\lambda_2(\sigma) = [1342]$，$\lambda_3(\sigma) = [1243]$ 以及 $\lambda_4(\sigma) = [1234]$。

设 σ 是一个长度为 $1 \le k \le N$ 的排列，在处理 σ 前缀排列的第 k 个申请者之前，有 $1 \le i \le s$ 次可用选择次数； $Q_i(\sigma)$ $Q_i^o(\sigma)$ $\bar{Q}_i(\sigma)$ 的定义如上。对于每个 $1 \le i \le s$，如果选拔了 σ 的第 k 个位置，则可用选择次数减一；如果拒绝第 k 个申请者，则可用选择次数不变。当可用选择次数变为零或所有申请者都已检查完毕时，流程终止。

注12。 $i = 1$ 这种情况是 *Jones*定理 *[17]* 的一个推论。请注意，在解出问题之前，我们不会化简概率表达式中的分数 Q, Q^o, Q （例如，如果 $Q_1(\sigma) = \frac{\text{获胜}(\sigma)}{SD(\sigma)}$ 的分子和分母有公因数 d，我们不会约去 d）。对第 $|\sigma|$ 位申请者作出决定后，面试官会考察下一位申请者，同时已面试申请者的相对顺序变为 $\lambda_1(\sigma)\ldots,$ $\lambda_{k+1}(\sigma)$ 中的一种。最优策略是在遇到每个 $\lambda_1(\sigma)\ldots,\lambda_{k+1}(\sigma)$ 时，作出获胜概率最大的决定。因此，

$$Q_1^o(\sigma) = \bar{Q}_1(\lambda_1(\sigma)) \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_1(\lambda_{k+1}(\sigma)) \quad \text{and} \quad SD(\sigma) = \sum_{j=1}^{k+1} SD(\lambda_j(\sigma)). \tag{1}$$

对于每个 $i \in \{2, \ldots, s\}$，根据 Q_i, Q_i^o 和 $\bar{Q}_i$ 的定义，我们知道

$$\bar{Q}_i(\sigma) = \max\{Q_i(\sigma), Q_i^o(\sigma)\} \text{ and } Q_i(\sigma) = Q_1(\sigma) + Q_{i-1}^o(\sigma). \tag{2}$$

等式 (2) 的第二部分成立，是因为考察当前申请者后，有两个（互不相交的）事件可以确保获胜，即：(a) 当前申请者是最佳申请者；(b) 当前申请者不是最佳申请者，但拒绝当前申请者后，我们运用最优策略在之后某个时刻选出最佳申请者。第一种情况下，成功选出最佳申请者的概率为 $Q_1(\sigma)$；第二种情况下，可用选择次数减少一次，相应的概率为 $Q_{i-1}^o(\sigma)$。

命题 13。 设 σ 是一个长度为 k 且满足 $1 \le k \le N-1$ 的排列，并设 $2 \le i \le s$。 n

$$Q_i^o(\sigma) = \bar{Q}_i(\lambda_1(\sigma)) \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_i(\lambda_{k+1}(\sigma)). \tag{3}$$

证明。 $i = 1$ 的情形已由（1）涵盖。根据 Q_i^o 概率的定义，我们知道 $Q_i^o(\sigma)$可以表示为一个分数，其分母为 $SD(\sigma)$，分子则等于满足以下条件的 σ前缀排列的数量：在 π中的 $|\sigma|^{\text{th}}$ 申请者处作出决定后，若已知在为 π中的 $|\sigma|^{\text{th}}$ 申请者作出决定后还剩下 i 次可用选择，则可以使用最优策略选出最佳申请者。由于在 π 中的 k^{th} 申请者处作出决定后，我们将看到 $\lambda_1(\sigma)\ldots,\lambda_{k+1}(\sigma)$之一，而最优策略会在 $\lambda_1(\sigma)\ldots,\lambda_{k+1}(\sigma)$的每个位置都作出获胜概率最大的决定，因此所述等式（3）成立。□

遵循 Jones [17], 提出的方法，我们在证明中广泛使用前缀树，它能自然地体现排列前缀之间的包含关系。图 1 以 S_4 的情形为例，对这一概念作了直观说明。子树/子森林之间的对应关系对于引理 25 的证明至关重要。例如，令 F_1 为从由 [12] 及其子节点所诱导的树中删除顶点 [12] 后得到的子森林，令 F_2 为从由 [21] 及其子节点所诱导的树中删除顶点 [21] 后得到的子森林。那么， F_1与 F_2 之间存在一个双射，并且该双射保留了评估最优策略时用到的所有概率。

定义14。令 T 为由长度至多为 N 的排列前缀之间的包含关系构成的树。换言之，令 V 为所有长度至多为 N 的排列所组成的集合族，我们定义$T=(V,\ E)$，使得若 $\sigma,\ \tau\in V$，且 σ 是 τ 的前缀，其中 $|\sigma|=|\tau|-1$，则存在一条边 $\sigma\tau\in E$。

我们将 $T(\sigma)$ 定义为 T 中由 σ 及其子节点构成的子树，并令 $T^o(\sigma)=T(\sigma)-\sigma$ 表示从 $T(\sigma)$ 中删除 σ 后得到的森林。例如，在图 1 中，若 $\sigma=[12]$，则 $T(\sigma)$ 是由以下顶点诱导的子树

$$\{[12],[123],[132],[231],[1234],[1243],[1342],[2341],[1324],[1423],[1432],[2431],[2314],[2413],[3412],[3421]\}$$

且 $T^o(\sigma)$ 是由顶点诱导的森林

$$\{[123],[132],[231],[1234],[1243],[1342],[2341],[1324],[1423],[1432],[2431],[2314],[2413],[3412],[3421]\}。$$

定义15。 如果前缀 σ 是类型 i-正的，即 $Q_i(\sigma)\ \geq\ Q_i^o(\sigma)$，否则就是类型 i-负的，其中 $i\in\{1,\ldots,s\}$。

关于命题 16，我们证明概率 Q_i^o,Q_i,Q_i 对每个 $i\in\{1,\ldots,s\}$ 都可以通过顺序过程（逆向归纳）计算（预先计算）。这至关重要，并将用于证明最优策略是具有 s 阈值的位置策略。得知这一点后，我们将通过求解递推关系来求出第4节中的获胜概率。

命题 16。 设 τ为任意一个长度为 k的排列，其中 $1\leq k\leq N$。对于每个 $i\in\{1,\ldots,s\}$，概率 $Q_i^o(\tau)\ Q_i(\tau)$ $Q_i(\tau)$均可通过一个顺序过程计算。

证明。 为了计算每个 $i\in\{1,\ldots,s\}$对应的概率 $Q_i^o(\tau)\ Q_i(\tau)$，我们对下标 i 和前缀的长度使用双重归纳。

对 i进行外层归纳的基本情形： 我们首先证明对应于 $i=1$的基本情形。我们首先注意到，长度为 N 的前缀是 1-正型的，这构成了对前缀长度进行内层归纳的基本情形。更准确地说，对于一个长度为 N的排列 τ，若 $\tau(N)=N$，则 $Q_1(\tau)=Q_1(\tau)=1$且 $Q_1^o(\tau)=0$；若 $\tau(N)<N$，则 $Q_1(\tau)=Q_1^o(\tau)=Q_1(\tau)=0$。

假设长度大于 k 的排列 Q_1,Q_1^o,Q_1 的概率已知。我们证明可以计算 $Q_1^o(\tau)\ Q_1(\tau)$ 和 $Q_1(\tau)$，其中现在 τ 是长度为 k 的排列。我们知道，可以通过求一个分数得到 $Q_1(\tau)$ 的值：分母等于长度为 N 且以 τ 为前缀的排列数量，分子等于长度为 N 且可由 τ 获胜的排列数量。该数量可以通过以下方式计数得到：长度为 N 且以 τ 为前缀的排列，以及以 τ 为前缀、在 $|\tau|^{\text{th}}$ 位置上的值为 N 的排列。根据 (1)，概率 $Q_1^o(\tau)$ 可以由 $Q_1^o(\tau)\ =\oplus_{j=1}^{k+1}\bar{Q}_1(\lambda_j(\tau))$ 得到。由于每个 $\lambda_j(\tau)$ 的长度都大于 τ 的长度，因此根据归纳假设，每个 $Q_1(\lambda_j(\tau))$ 都已知。 $Q_1(\tau)$ 的概率可以由 $Q_1(\tau)\ =\max\{Q_1(\tau)\ Q_1^o(\tau)\}$ 确定，其中 $Q_1(\tau)$ 和 $Q_1^o(\tau)$ 已通过前面的论证求得。

基本情形之后的主要证明： 现在假设，对于每个 $1\leq q\leq i-1,\ i\in\{1,\ldots,s\}$，

我们已知 Q_q,Q_q^o,Q_q 中每种排列的概率。我们证明 i 的结果。长度为 N 的前缀的概率 Q_i,Q_i 取值为 1 或 0，具体取决于最后一个位置的值是否为N，而概率 Q_i^o 均为 0。这构成了关于前缀长度的内层归纳论证的基本情形。

¯设 τ 是一个长度为 k 的排列，其中 $1 \le k \le N-1$。给定长度大于 k 的前缀的概率 Q_i, Q_i^o, Q_i，长度为 k 的前缀 τ 的 $Q_i^o(\tau)$ 概率可通过$Q_i^o(\tau)$ 根据命题 13 得到 $=\oplus_{j=1}^{k+1}\bar{Q}_i(\lambda_j(\tau))$，其中概率 $\bar{Q}_i(\lambda_j(\tau))$ 可由归纳假设得知。此外，我们有 $Q_i(\tau) = Q_1(\tau) + Q_{i-1}^o(\tau)$，而所有这些概率都可由归纳假设和基本情形得知。此外，$Q_i(\tau) = \max\{Q_i(\tau)\ Q_i^o(\tau)\}$。□

回想一下，$Q_1(\sigma)$可以写成分母为 $SD(\sigma)$的分数，分子等于可 σ-获胜的排列 $\pi \in S_N$ 的数量。在下文的命题 17 和引理 18 中，我们将证明，概率 $Q_i(\sigma)$（其中 $2 \le i \le s$）以及$Q_i^o(\sigma)$（其中 $1 \le i \le s$）也可以表示为分母为标准分母 $SD(\sigma)$的分数（然后计算分子）。为此，注意对于长度至少为 $N-i$的排列 σ，若 $0 \le i \le s-1$，则 $Q_{i+1}(\sigma) = \ldots = Q_s(\sigma)$。此外，对于长度至少为 $N-i$的排列 σ，若 $1 \le i \le s-1$，则 $Q_i^o(\sigma) = Q_i^o(\sigma) = \ldots = Q_s^o(\sigma)$。

我们首先在命题 17 中证明，$Q_i^o(\sigma)$可以表示为一些较长排列的 Q_i 概率的特殊和（使用 $\oplus$ 记号）。我们使用引理 18 中的基本概率 Q_1 来表示它。

命题 17. 对于每个 $1 \le i \le s$ 以及长度为 ℓ 且满足 $\ell \le N-1-i$ 的排列 σ，存在一个由 σ-前缀排列构成的集合族 $\Gamma_{\sigma,\,i}$，使得每个 $\mu \in \Gamma_{\sigma,\,i}$ 的长度都大于 $|\sigma|$，且为类型 i-正的；集合 $\Gamma_{\sigma,\,i}$ 是 1-极小的，并且 $Q_i^o(\sigma) = \oplus_{\mu\in\Gamma_{\sigma,\,i}} Q_i(\mu)$，即

$$Q_i^o(\sigma)\cdot SD(\sigma) = \sum_{\mu\in\Gamma_{\sigma,i}} Q_i(\mu)\cdot SD(\mu) \quad and \quad SD(\sigma) = \sum_{\mu\in\Gamma_{\sigma,i}} SD(\mu). \tag{4}$$

由 (2)，我们知道

$$Q_i(\sigma)\cdot SD(\sigma) = Q_1(\sigma)\cdot SD(\sigma) + \sum_{\mu\in\Gamma_{\sigma,i-1}} Q_{i-1}(\mu)\cdot SD(\mu). \tag{5}$$

证明. 公式（4）的情形 $i=1$ 已在 Jones 的工作中得到处理 [17]（使用 $\oplus$ 记号描述）。由于 $Q_2(\sigma) = Q_1(\sigma) + Q_1^o(\sigma)$，存在一个集合 $\Gamma_{\sigma,\,1}$，使得

$$Q_2(\sigma)\cdot SD(\sigma) = Q_1(\sigma)\cdot SD(\sigma) + Q_1^o(\sigma)\cdot SD(\sigma) = Q_1(\sigma)\cdot SD(\sigma) + \sum_{\mu\in\Gamma_{\sigma,1}} Q_1(\mu)\cdot SD(\mu),$$

其中 $\Gamma_{\sigma,\,1}$ 是 1- 极小的，并且由长度大于 $|\sigma|$ 的类型 1-正排列组成。

在对第 $|\sigma|^{\text{th}}$ 位申请者作出决定后，最优策略将考察前缀树中 σ 的子节点，即 $\lambda_1(\sigma)\ldots,\lambda_{\ell+1}(\sigma)$，然后作出获胜概率最大的决定。我们描述以下算法来证明与 $Q_i^o(\sigma)$ 有关的命题。

初始化步骤：令 $\Gamma_i = \varnothing$ 和 $B = \{\lambda_1(\sigma)\ldots,\lambda_{\ell+1}(\sigma)\}$。

接下来，我们重复主要步骤，直到过程终止。

主要步骤：检查 $B = \varnothing$；若是，则停止并返回集合 Γ_i；若否，则执行以下操作：任意选取一个排列 $\phi \in B$，其长度为 q，且满足 $|\sigma| < q \le N$；检查 ϕ 是否同时符合条件且为类型i-正的（$Q_i(\phi) \ge Q_i^o(\phi)$）；若是，则设置 $\Gamma_i = \Gamma_i \cup \phi$ 和 $B = B - \phi$；若否，则不更新 Γ_i，并令$^{q+1}B = (B-\phi) \cup \bigcup_{j=1} \lambda_j(\phi)$。注意，根据命题 16，概率 $Q_i(\phi)$ 和 $Q_i^o(\phi)$ 已知。

由于长度为 N 的排列对于每个 $1 \le i \le s$都是类型 i-正的，因此该算法最终会终止。根据算法主要步骤中的判据，该算法将产生一个由类型 i-正的符合条件排列构成的集合 Γ_i，该集合是 1-极小的，且其中每个 $\gamma \in \Gamma_i$ 的长度都大于 $|\sigma|$。过程结束时，B 是一个空集。为说明这一点，我们提出以下两个观察。

观察（i）： 不存在一对元素 α、$\beta \in \Gamma_i$，使得 α 是 β 的前缀，即 Γ_i 含有 1-极小前缀；否则，子森林 $T^o(\alpha)$ 将不会被算法处理，因此不可能选择将 β 纳入 Γ_i。

观察（ii）： 由于我们只在排列为类型 i-正且符合条件时才选择它，因此 Γ_i 中的每个排列都是类型 i-正且符合条件的。

此外，根据算法的主要步骤和归纳假设，

$$Q_i^o(\sigma)\cdot SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i}Q_i(\gamma)\cdot SD(\gamma)\quad\text{ and }\quad SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i}SD(\gamma).$$

等价地，如果将两边除以 $SD(\sigma)$，则

$$Q_i^o(\sigma)=\oplus_{\gamma\in\Gamma_i}Q_i(\gamma). \tag{6}$$

要证明 $Q_{i+1}(\sigma)$ 的相应公式，注意到 $Q_{i+1}(\sigma)=Q_1(\sigma)+Q_i^o(\sigma)$，并对 $Q_i^o(\sigma)$ 应用（4）的结果。□

引理 18。 对于每个 $1\le i\le s$ 以及一个长度为 ℓ 且满足 $\ell\le N-1-i$ 的排列 σ，都存在一个由 σ-前缀排列组成的集合族 $G^{\sigma,\,i}$，该集合族可划分为 $\Gamma^{\sigma,\,i}_{\,1}$，$\ldots$，$\Gamma^{\sigma,\,i}_{\,i}$，使得每个 $\mu\in G^{\sigma,\,i}$ 的长度都大于 $|\sigma|$，集合 $G^{\sigma,\,i}$ 是 i-极小的，每个 $\gamma\in\Gamma^{\sigma,\,i}_{\,j}$ 都是类型 j-正的，其中 $1\le j\le i$，并且

$$Q_i(\sigma)\cdot SD(\sigma)=Q_1(\sigma)\cdot SD(\sigma)+\sum_{\mu\in G^{\sigma,i-1}}Q_1(\mu)\cdot SD(\mu),\quad and \tag{7}$$

$$Q_i^o(\sigma)\cdot SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i^{\sigma,i}}Q_i(\gamma)\cdot SD(\gamma)=\sum_{\mu\in G^{\sigma,i}}Q_1(\mu)\cdot SD(\mu)\quad and\quad SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i^{\sigma,i}}SD(\gamma). \tag{8}$$

注 *19*。概率 $Q_i^o(\sigma)$ 的 $G^{\sigma,i}$ 集合可视为一个停止集合，它代表这样一种最优策略：在我们对第 $|\sigma|$ 个申请者作出决定后，如何选拔最佳申请者，同时还剩下 i 次选择。每个 $\Gamma^{\sigma,}_{\,j}{}^{i}$ 都可视为 $G^{\sigma,i}$ 的偏序集结构中的第 j 层（该结构由排列之间的前缀关系构成）。注意，方程（7）表明，$Q_i(\sigma)$ 的分子，即 $Q_i(\sigma)\cdot SD(\sigma)$，可以解释为 S_N 中可获胜排列的数量与 S_N 中可获胜排列的数量之和，其中 $\mu\in G^{\sigma,i-1}$。方程（8）表明，$Q_i^o(\sigma)$ 的分子也可以用类似的方式解释。

证明。方程（8）的 $i=1$ 情形已在 Jones [17]（使用 $\oplus$ 记号描述）的工作中论述。方程（7）的 $i=2$ 情形已在命题 17 中证明。

接下来，我们假设该结论对 Q_i（σ）和 Q^o_{i-1}（σ）成立，其中 $2\le i\le s$，然后先证明 Q^o_i（σ）时的（8），再证明 Q_{i+1}（σ）时的（7）（当 $i=s$ 时除外，因为未定义 Q_{s+1}（σ））。

根据命题17，存在一个由长度大于 σ 的排列构成的集合族 Γ_i，并且满足 th at

$$Q_i^o(\sigma)\cdot SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i}Q_i(\gamma)\cdot SD(\gamma)\quad\text{ and }\quad SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i}SD(\gamma).$$

根据归纳假设，对于每个 $\gamma\in\Gamma_i$，都存在一个集合 $G^{\gamma,\,i-1}$，其中包含长度大于 $|\gamma|$ 的（$i-1$）-极小排列；该集合可划分为 $\Gamma^{\gamma,}_{\,1}{}^{i-1}\cup\ldots\cup\Gamma^{\gamma,\,i-1}_{\,i-1}$。在这种情况下，每个 $\gamma_j\in\Gamma^{\gamma,}_{\,j}{}^{i-1}$ 都是 j-正类型，其中 $1\le j\le i-1$，并且

$$Q_i(\gamma)\cdot SD(\gamma)=Q_1(\gamma)\cdot SD(\gamma)+\sum_{\mu\in G^{\gamma,i-1}}Q_1(\mu)\cdot SD(\mu).$$

令 $\Gamma^{\sigma,}_{,i}{}^{i}=\Gamma_i$ 和 $\Gamma^{\sigma,}_{\,j}{}^{i}=\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_i}\Gamma^{\gamma,}_{,j}{}^{i-1}$，，其中 $1\le j\le i-1$。集合 $G^{\sigma,i}:=\bigcup\limits_{j=1}^{i}\Gamma^{\sigma,}_{,j}{}^{i}$ 包含 i-极小排列，并且 $G^{\sigma,i}$ 可划分为 $\Gamma^{\sigma,}_{,1}{}^{i},\ldots,\Gamma^{\sigma,}_{,i}{}^{i}$，使得每个 $\gamma\in\Gamma^{\sigma,}_{,j}{}^{i}$ 都是类型 j-正的，其中 $1\le j\le i$，且方程（8）成立，即

$$Q_i^o(\sigma)\cdot SD(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_i^{\sigma,i}}Q_i(\gamma)\cdot SD(\gamma)=\sum_{\mu\in G^{\sigma,i}}Q_1(\mu)\cdot SD(\mu).$$

为证明 $Q_{i+1}(\sigma)$ 的相应公式，注意到 $Q_{i+1}(\sigma)=Q_1(\sigma)+Q_i^o(\sigma)$，并应用方程（7）的结果。

□

定理 20. 存在一个停止集合 A，它可以划分为 $A_s \cup \cdots \cup A_1$，其中每个 A_i 都是 $1 \le i \le s$ 的类型为 i 正的 1-极小排列集合，并且获胜的最大概率等于 $\oplus_{\sigma \in A_s} Q_s(\sigma)$。此外，获胜概率等于

$$\frac{\sum_{\sigma \in A} Q_1(\sigma) \cdot SD(\sigma)}{N!}.$$

证明。 最优获胜概率等于 $Q_s([1])$。引理 18 中关于 $\sigma = [1]$ 的证明即为定理的证明。若 $Q_s([1]) \ge Q_s^o([1])$，则停止集合 A 对应于引理 18 的方程（7）中的集合 $G^{[1],s-1} \cup \{[1]\}$；若 $Q_s([1]) < Q_s^o([1])$，则停止集合 A 对应于引理 18 的方程（8）中的集合 $G^{[1],s}$ 。□

定义21。 定义 g_τ 为对称群上的一个作用，它将前缀 $\sigma = [12\cdots k]$ 排列成同长度的另一个前缀 τ k。此作用可扩展到 $T(\sigma)$，记作 $g_\tau \cdot \pi$：它同样会排列 $\pi \in T(\sigma)$ 的前 k 个元素，并固定其余元素。容易看出， g_τ是从 $T(\sigma)$ 到 $T(\tau)$ 的一个双射。

例22. 设 $N = 6$、 $\tau = [132]$ 和 $\pi = [245361]$。显然， π 是 $[123]$-前缀。于是 $g_\tau \cdot \pi = [254361]$。

考虑任意排列 $\sigma \in S_N$，并令 $1 \le i \le s$. **情况 1:** σ 的最后一个位置是 N。在这种情况下，我们有 $Q_i(\sigma) = 1$、$Q_i^o(\sigma) = 0$，以及 $Q_i(\sigma) = 1$。**情况 2:** σ 的最后一个位置不是 N。在这种情况下，我们有 $Q_i(\sigma) = 0$、 $Q_i^o(\sigma) = 0$，以及 $Q_i(\sigma) = 0$。

为了继续分析，我们使用以下结果。

引理 23. 对于所有前缀 τ，每个 $i \in \{1, \ldots, s\}$ 对应的概率 Q_i 在限制双射 g_τ: $T^o(12\cdots k) \to T^o(\tau)$下保持不变，其中 $k \le N-1$ 是 τ的长度。如果 τ符合条件，则 $Q_i([12\cdots k]) = Q_i(\tau)$。因此，对于 $\sigma \in T^o(12\cdots k)$（并且，如果 τ符合条件，还对于 $\sigma = [12\cdots k]$），

(a) 概率 $Q_i^o(\sigma)$ 在 g_τ 下保持不变；*(b)* 概率 $Q_i(\sigma)$ 在 g_τ 下保持不变；*(c)* 若 σ 和 τ 符合条件，则 σ 是类型 i-正的，当且仅当 $g_\tau \cdot \sigma$ 是类型 i-正的。

证明。 $i = 1$ 的情形是 Jones 的定理 3.5 [17] 的一个推论。证明对概率 Q_i, Q_i^o, Q_i 的下标 i 进行归纳。假设结论对概率 Q_m, Q_m^o, Q_m（其中 $m \le i-1$）成立。我们证明所述结论对 Q_i, Q_i^o, Q_i 成立，其中 $2 \le i \le s$。令 $\sigma \in T^o(12\cdots k)$, 则有

$$Q_i(g_\tau \cdot \sigma) = Q_1(g_\tau \cdot \sigma) + Q_{i-1}^o(g_\tau \cdot \sigma) = Q_1(\sigma) + Q_{i-1}^o(\sigma) = Q_i(\sigma).$$

若 τ 符合条件，则我们 将论证应用于限制双射 $T^o([12\cdots(k-1)]) \to T^o(\tau|_{k-1})$。

断言 24. 对于长度为 ℓ 的 σ，其中 $k < \ell \le N$、 $Q_i^o(g_\tau \cdot \sigma) = Q_i^o(\sigma)$。

证明。 我们对 σ 的长度进行归纳。当 σ 的长度为 N 时，有 $Q_i^o(g_\tau \cdot \sigma) = Q_i^o(\sigma) = 0$。现在假设对于所有长度至少为 $\ell + 1$ 的排列，陈述 (a) 都成立。接下来，我们论证 σ 的长度为 ℓ 且 $k < \ell \le N-1$ 时的情形。

根据关于概率 Q_i 的已证陈述和归纳假设，排列 μ 的概率Q_i 和 Q_i^o 仅取决于其长度 μ 以及其最后一个位置 μ的值，其中长度大于 ℓ 。根据引理 18 的证明中所述算法的主要步骤，如果我们处理σ 并最终得到集合 $\Gamma_i = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$，那么处理 $g_\tau \cdot \sigma$ 后，我们最终会得到集合$\Gamma_i' = \{g_\tau \cdot \gamma_1, \ldots, g_\tau \cdot \gamma_r\}$。因此，根据引理 18,

$$Q_i^o(g_\tau \cdot \sigma) = Q_i(g_\tau \cdot \gamma_1) \oplus Q_i(g_\tau \cdot \gamma_2) \oplus \cdots \oplus Q_i(g_\tau \cdot \gamma_r)$$

$$= Q_i(\gamma_1) \oplus Q_i(\gamma_2) \oplus \cdots \oplus \cdot Q_i(\gamma_r) = Q_i^o(\sigma). \qquad \square$$

根据断言 24，陈述 (a) 成立。断言 (b) 和 (c) 可由先前结果以及事实 $Q_i(\sigma) = \max\{Q_i(\sigma), Q_i^o(\sigma)\}$ 得出。证明的主要部分至此完成。

对于 $\sigma = [12\cdots k]$ 以及一个符合条件且长度为 k 的排列 τ，陈述 (a)、(b) 和 (c) 均成立，因为我们可以将相应的论证应用于限制双射 $T^o([12\cdots(k-1)]) \to T^o(\tau|_{k-1})$。□

对于 $1 \le i \le s$，根据引理 23，我们知道概率 $Q_i(\sigma), Q_i^o(\sigma), \bar{Q}_i(\sigma)$ 仅取决于 σ 的长度和最后一个位置的值。此外，接下来我们将证明，$Q_i^o(\sigma)$ 仅取决于 σ 的长度，而不取决于 σ 的最后一个位置的值。

引理 25。对于所有 $1 \le i \le s$，概率 $Q_i^o(\sigma)$ 仅取决于 σ 的长度。

证明。我们知道，对于每个长度为 N 的 σ，都有 $Q_i^o(\sigma) = 0$。设 σ' 和 σ'' 是两个长度为 $k-1$ 的排列，其中 $2 \le k \le N$。对于每个长度为 $k-1$ 的排列 σ，回顾 $\lambda_j(\sigma)$ 的定义，$1 \le j \le k$，该定义见定义 11。令 $\phi = [12\cdots(k-1)]$。根据引理 23，并利用双射 $g_{\sigma'}: T^o(\phi) \to T^o(\sigma')$ 以及 $g_{\sigma''}: T^o(\phi) \to T^o(\sigma'')$，我们有

$$Q_i^o(\sigma') = \bar{Q}_i(\lambda_1(\sigma')) \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma')) = \bar{Q}_i(\lambda_1(\phi)) \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_i(\lambda_k(\phi))$$
$$= \bar{Q}_i(\lambda_1(\sigma'')) \oplus \cdots \oplus \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma'')) = Q_i^o(\sigma''). \qquad \square$$

为简化表述，以下我们更改记号，并令 $Q_i(\sigma)$、$Q_i^o(\sigma)$、$\bar{Q}_i(\sigma)$ 表示底层概率定义中的分子，每个分子均以标准分母 $SD(\sigma)$ 为基准。

接下来，令 $\sigma = [12\cdots(k-1)]$，回顾一下，$\lambda_j(\sigma) = [12\cdots(j-1)(j+1)kj]$，且 $\lambda_k(\sigma) = [12\cdots k]$，其中 $2 \le k \le N$。令 Q_0 对所有排列均定义为 0。我们有以下关系。

引理 26. 对于 $2 \le i \le s$，有

$$Q_i^o(\sigma) = (k-1)\cdot Q_i^o(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma)) \quad and \quad Q_i(\sigma) = (k-1)\cdot Q_i(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_{i-1}(\lambda_k(\sigma)).$$

证明。我们首先考虑 $Q_i^o(\sigma)$。我们知道，σ 在前缀树中有 k 个子节点，这些子节点为 $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_k(\sigma)$。排列 $\lambda_k(\sigma)$ 本身是一个符合条件的子节点，因此 $Q_i(\lambda_k(\sigma))$ 是以 $\lambda_k(\sigma)$ 为根的子树的最优概率。

因此，由于 $\lambda_1(\sigma)$.....，$\lambda_{k-1}(\sigma)$不符合条件，根据引理 25，

$$Q_i^o(\sigma) = \bar{Q}_i(\lambda_1(\sigma)) + \ldots + \bar{Q}_i(\lambda_{k-1}(\sigma)) + \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma))$$
$$= Q_i^o(\lambda_1(\sigma)) + \ldots + Q_i^o(\lambda_{k-1}(\sigma)) + \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma)) = (k-1)\cdot Q_i^o(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma)). \tag{9}$$

根据引理 26 和（9），

$$Q_i(\sigma) = Q_1(\sigma) + Q_{i-1}^o(\sigma) = (k-1)\cdot Q_1(\lambda_k(\sigma)) + (k-1)\cdot Q_{i-1}^o(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_{i-1}(\lambda_k(\sigma))$$
$$= (k-1)\cdot Q_i(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_{i-1}(\lambda_k(\sigma)). \qquad \square$$

根据引理 26，如果一个符合条件的排列是负的，那么所有长度更短的符合条件排列也都是负的。

推论27。对于递增前缀 $\sigma = [12\cdots(k-1)]$ 和 $\lambda_k(\sigma) = [12\cdots k]$，如果 $\lambda_k(\sigma)$ 是类型 i-负的，那么 σ 是类型 i-负的，其中 $1 \le i \le s$。

证明。假设 σ 是类型 i-负的，即 $Q_i^o(\lambda_k(\sigma)) > Q_i(\lambda_k(\sigma))$。根据引理 26 和 $Q_i(\lambda_k(\sigma)) \ge Q_{i-1}(\lambda_k(\sigma))$，

$$Q_i^o(\sigma) = (k-1)\cdot Q_i^o(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_i(\lambda_k(\sigma)) > (k-1)\cdot Q_i(\lambda_k(\sigma)) + \bar{Q}_{i-1}(\lambda_k(\sigma)) = Q_i(\sigma). \qquad \square$$

换言之，推论27断言，每个 $Q_i(k) - Q_i^o(k)$ 都是关于 k 的非递减函数。

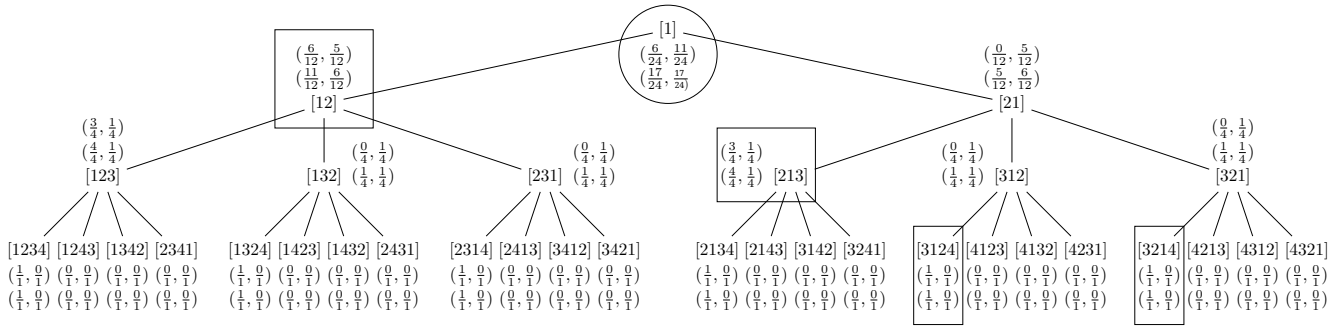


图 1：我们的 4 名申请者问题的前缀树、 Q_1， Q_1^o， Q_2， Q_2^o 概率，以及一个二次罢免集。

例 28. 为阐明上述观察和概念，我们针对 $s = 2$ 和$N = 4$ 的情形给出一个例子。最优策略是 (0,1) 策略：接受第一位申请者，询问精灵这位申请者是否是最优秀的，然后接受下一位从左到右最大值。最优获胜概率为 $17/24$；与只允许一次选拔时的最优获胜概率（等于 $11/24$）相比，提高了 $6/24$ （见图 1）。注意，对于每个排列 $\sigma \in S_4$，我们在图 1 所示的每个排列下方，第一行列出概率 Q_1, Q_1^o，第二行列出概率 Q_2, Q_2^o。

3 最优策略

具有 s 次选择次数的嫁妆模型和具有 $s-1$ 次查询的基于查询的模型，其获胜的最大概率相同，因为两个模型都有 s 次选择次数的预算，且目标都是选择最佳申请者。然而，期望停止时间却大不相同。在基于查询的模型下，从专家处获得肯定回答后，过程立即终止。另一方面，在嫁妆设定下，决策主体在作出一次选择后（如果还剩一次选择），会继续面试其余申请者，因为它并不知道当前申请者是否是最佳申请者。

为获得嫁妆模型的最优策略，我们注意到，对于每个 $\sigma \in \bigcup$和 $1 \le i \le s-1$， $Q_i^o(\sigma) \ge Q_{i-1}^o(\sigma)$、$Q_i(\sigma) \ge Q_{i-1}(\sigma)$、$_N$以及 $Q_i(\sigma) \ge Q_{i-1}^o(\sigma)$ 均成立。令 $Q_i(k)$ 表示长度为 k 的合格前缀的概率 $Q_{i k=1}^{-}$，其中 $1 \le i \le s$。概率 $Q_i^o(k)$ 和 $Q_i(k)$（其中 $1 \le i \le s$）也作类似定义。

定理29。 对于我们的 s 次选择问题，最优策略是一种位置型 s-阈值策略，即存在 s 个数 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_s \le N$，使得在考虑第 i^{th} 次选择时（其中$1 \le i \le s$），我们拒绝前 k_i 位申请者，等到第 $(i-1)^{th}$ 次选择，然后接受下一个从左到右最大值。

证明。 对于第 i 次选择（还剩 $j = s+1-i$ 次选择）， $1 \le i \le s$，根据引理 18 中描述的算法，我们检查 σ 是否符合条件且为 j-正（即，是否有 $Q_j(\sigma) \ge Q_j^o(\sigma)$）；如果是，我们就接受当前申请者并继续进行下一次选择（如果还有剩余）；如果不是，我们就拒绝当前申请者并继续搜索；如果没有剩余选择，则终止过程。根据推论 27，我们知道每个 $Q_j(k) - Q_j^o(k)$ 都是关于 k 的非递减函数，这使我们能够制定最优策略。

根据推论27，并且由于我们知道 $Q_j(N) \ge Q_j^o(N)$，因此存在某个 $0 \le k_i \le N$，使得对于 $k \ge k_i + 1$，$Q_j(k) \ge Q_j^o(k)$，而对于所有 $k \le k_i$， $Q_j(k) < Q_j^o(k)$，其中 $1 \le i \le s$。因此，最优策略是先拒绝前 k_i 位申请者，然后接受此后遇到的从左到右最大值。显然，任何最优策略都必须先进行到第（$i-1$）次选拔，之后才能考虑第 i^{th} 次选拔。因此，对于每个 $i \in \{2, \ldots, s\}$，都有 $k_{i-1} \le k_i$。□

$^{-}$根据 $Q_j(k)$ $Q_j^o(k)$ $Q_j(k)$ 概率的定义，我们知道它们只取决于 k, N 以及面试当前申请者之前剩余的选择次数，即下标 j。因此，对于两个

不同的模型，其选择次数分别为 s_1 和 s_2 （假设 $s_1 < s_2$），且 N的值相同，则选择次数为 s_1 的模型中的每个阈值k'_{s_1+1-j} 与选择次数为s_2 的模型中的每个阈值k''_{s_2+1-j} 相同，其中 $1 \le j \le s_1$。换言之，我们的最优策略是右端型；推论 30 成立。

推论 30. 设 N为一个固定的正整数。存在一个数列 $a_1, a_2, \ldots$，使得当选择次数 $s \ge 1$ 固定时，最优策略为$(a_s, a_{s-1}, \ldots, a_1)$-策略。换言之，$(s+1-i)^{th}$ 阈值（从右边数的 i^{th}）不依赖于允许的选择次数总数，即不依赖于 s的值，并且对于 $1 \le i \le s$，始终等于 a_i。

4 问题求解

根据前一　　节，我们知道最优策略是一种位置型 s-阈值策略。

定义 31. 设 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_s \le N$。$(k_1, k_2, \ldots, k_s)$-策略定义如下：在进行第 i^{th} 次选择时，其中 $1 \le i \le s$，我们（1）等待，直到完成第 $(i-1)^{\text{th}}$ 次选择（如果 $i = 1$，则无需等待）；（2）拒绝前 k_i 位申请者，然后接受下一个从左到右最大值。

定义 32。设 $0 \le r \le s$。如果在 π 上应用（k_1，k_2，……，k_s）策略时，我们至多可以进行 r 次选择，则称长度不超过 N 的排列 π 为（k_1，k_2，……，k_s）-r-可选择排列。如果上下文中固定使用（k_1，k_2，……，k_s）策略，则简称为 r-可选择排列。

定义 33。设 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_s \le N$。我们用 $T_r(N, k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s)$ 表示 S_N 中（k_1，k_2，……，k_s）-r-可选择排列的数量。此外，我们用 $W(N, k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s)$ 表示 S_N 中可以使用（k_1，k_2，……，k_s）策略选出值 N 的排列数量。

注意，使用（k_1，k_2、……、k_s）策略的获胜概率为 $W(N, k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s)/N!$。

4.1 递推关系

注意，如果 $s \ge r+1$，那么在计算导致选择次数至多为 $r-1$ 的排列数量时，k_r 是唯一需要考虑的阈值。因此，我们关注 $T_{r-1}(m, k_1、\ldots\ldots、k_r)$。

引理 34。固定 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_s \le N$。令 $1 \le r \le s$ 和 $m \ge k_r$。我们声称以下递推关系成立：

$$T_{r-1}(m, k_1, \ldots, k_r) = k_r \cdot (m-1)! + (m-1)! \cdot \sum_{i=k_r+1}^{m} \frac{T_{r-2}(i-1, k_1, \ldots, k_{r-1})}{(i-1)!}. \tag{10}$$

证明。有两种情况。

情况 1： 值 m 位于位置 $i \in [1, k_r]$，此时（1）在位置 $i+1$ 之前至多可以进行 $r-1$ 次选择，因为 k_r+1 是我们可以开始进行第 r^{th} 次选择的第一个位置；（2）在位置 i 之后不能再进行选择，因为在位置 i 看到最佳申请者（值 m）后，不再存在从左到右最大值。此情况贡献 $k_r \cdot (N-1)!$。

情况 2： </style}数值 位于位置 。那么，从位置 中最多只能进行 次选拔；否则，要么在位置 之前已经进行了 次选拔，要么我们会在位置 进行第 次选拔。对于数值 位于位置 的每种情况，我们首先从{$1, \ldots, m-1\}$ 中选出 $i-1$ 个数值，放置在前 $i-1$ 个位置；前 $i-1$ 个位置（按其相对顺序）构成一个使用 $(k_1, \ldots, k_r)$ 策略的、长度为 $i-1$ 的 $(r-2)$- 可选择排列，而最后 $m-i$ 个位置不受限制。因此，每个 $i \in [k_r+1, m]$ 贡献

$$\binom{m-1}{i-1} \cdot T_{r-2}(i-1, k_1, \ldots, k_r) \cdot (m-i)! \quad \text{i.e.} \quad \frac{(m-1)!}{(i-1)!} \cdot T_{r-2}(i-1, k_1, \ldots, k_{r-1}). \qquad \square$$

引理 35。 设 $0 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_s \le N$ 固定。设 $m \ge k_r + 1$ 和 $1 \le r \le s$。我们断言，以下递推关系成立：

$$W(m, k_1, \ldots, k_r) = T_{r-1}(m-1, k_1, \ldots, k_r) + (m-1) \cdot W(m-1, k_1, \ldots, k_r). \tag{11}$$

证明。 根据最后一个位置上的值，分为两种情况。

情况 1： 最后一个位置是 m。在这种情况下，从位置 1 到 $m-1$ 最多只能进行 $r-1$ 次选择，否则剩余的选择次数不足以在最后一个位置选择最佳申请者。此情况贡献为 $T_{r-1}(m-1,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$。

情况 2： 最后一个位置上的值来自 {1、2、.....、$m-1$}。然后，我们必须从位置 1 到 $m-1$ 选出最佳申请者（值为 m）。此情况贡献为 $(m-1) \cdot W(m-1,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$。□

4.2 求解递推关系

对于每个 $1 \le r \le s$，我们知道，对于每个 $m \le k_r$，$T_{r-1}(m,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r) = m!$ 因为根据 $(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$-策略的定义，我们最多可以进行 $r-1$ 次选择。此外，对于 $r=1$ 和 $m \ge k_1$，我们知道 $T_0(m,\ k_1) = k_1 \cdot (m-1)!$，因为这对应于最佳申请者位于 $[1, k_r]$ 上的情况。

引理 36。 设 $1 \le r \le s$ 和 $m \ge k_r + 1$。我们有

$$\frac{T_{r-1}(m, k_1, \ldots, k_r)}{m!} = \frac{1}{m} \cdot (k_r + k_{r-1} \cdot \sum_{i=k_r}^{m-1} \frac{1}{i} + k_{r-2} \cdot \sum_{i_1=k_r}^{m-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_{r-1}}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} + \ldots +$$

$$k_1 \cdot \sum_{i_1=k_r}^{m-1} \frac{1}{i_1} \cdot \sum_{i_2=k_{r-1}}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} \sum \cdots \sum_{i_{r-1}=k_2}^{i_{r-2}-1} \frac{1}{i_{r-1}}).$$

注 37。 按照我们的记号，如果求和中的上限小于下限，则该求和中不存在相应的项。例如，如果 $k_r = k_{r-1}$，那么 $k_r - 1 < k_{r-1}$，内层求和 $\sum_{i_2=k_{r-1}}^{i_1-1} \frac{1}{i_2}$ 将跳过 $i_1 = k_r$ 的情况，并从 $\sum_{i_1=k_r}^{m-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_{r-1}}^{i_1-1} \frac{1}{i_2}$ 中的 $i_1 = k_r + 1$ 开始。

证明。 证明通过归纳法进行。我们已经知道 $r=1$ 成立时的情形。假设对于所有选择次数小于 r 的情形，结论都成立，其中 $2 \le r \le s$。我们证明对于 r 该结论同样成立。根据引理 34，$T_{r-1}(m,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)$ 可以用 $T_{r-2}(i,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_{r-1})$ 表示，其中 $k_r \le i \le m-1$。因此，利用归纳假设所保证的 $T_{r-2}(i,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_{r-1})$ 的公式，我们得到 $\frac{T_{r-1}(m,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)}{m!}$ 的所述公式。冗长的计算从略。□

定理 38. 设 $s \ge 1$ 固定且 $N \ge k_s + 1$。那么

$$\frac{W(N, k_1, \ldots, k_s)}{N!} = \frac{1}{N} \cdot \Bigg(\Big(k_1 \cdot \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \frac{1}{i}\Big) + \Big(k_2 \cdot \sum_{i=k_2}^{k_3-1} \frac{1}{i} + k_1 \cdot \sum_{i_1=k_2+1}^{k_3-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_2}^{i_1-1} \frac{1}{i_2}\Big) +$$

$$\Big(k_3 \cdot \sum_{i=k_3}^{k_4-1} \frac{1}{i} + k_2 \cdot \sum_{i_1=k_3+1}^{k_4-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_3}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} + k_1 \cdot \sum_{i_1=k_3+1}^{k_4-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_3}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} \sum_{i_3=k_2}^{i_2-1} \frac{1}{i_3}\Big)$$

$$+ \ldots +$$

$$\Big(k_s \cdot \sum_{i=k_s}^{N-1} \frac{1}{i} + k_{s-1} \cdot \sum_{i_1=k_s+1}^{N-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_s}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} + \ldots + k_1 \cdot \sum_{i_1=k_s+1}^{N-1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=k_s}^{i_1-1} \frac{1}{i_2} \cdots \sum_{i_s=k_2}^{i_{s-1}-1} \frac{1}{i_s}\Big)\Bigg). \tag{12}$$

证明。我们用归纳法证明。当 $s = 1$ 成立时，结论成立，因为这是 Jones [17] 的一个结果的推论。假设该结论对 $W(N,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_r)/N!$，成立，其中 $r < s$。我们证明该结论对$r = s$也成立。

根据引理 35,

$$W(N,k_1,\ldots,k_s) = (N-1)\cdot W(N-1,k_1,\ldots,k_s) + T_{s-1}(N-1,k_1,\ldots,k_s)$$

$$= (N-1)\cdot((N-2)\cdot W(N-2,k_1,\ldots,k_s) + T_{s-1}(N-2,k_1,\ldots,k_s)) + T_{s-1}(N-1,k_1,\ldots,k_s) = \ldots =$$

$$\frac{(N-1)!}{(k_s-1)!}\cdot W(k_s,k_1,\ldots,k_{s-1},k_s) + \sum_{i=1}^{N-k_s}\frac{(N-1)!}{(N-i)!}\cdot T_{s-1}(N-i,k_1,\ldots,k_s) =$$

$$\frac{(N-1)!}{(k_s-1)!}\cdot W(k_s,k_1,\ldots,k_{s-1}) + \sum_{i=1}^{N-k_s}\frac{(N-1)!}{(N-i)!}\cdot T_{s-1}(N-i,k_1,\ldots,k_s).$$

根据归纳假设，我们可以使用引理 34 中 $W(k_s,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_{s-1})$ 和 $T_{s-1}(N-i,\ k_1,\ \ldots\ldots,\ k_s)$ 的公式来证明该结论。繁琐的计算过程从略。 □

根据推论 30，我们知道最优策略是基于右手侧的。令 $s \geq 1$ 固定。我们将重点讨论

$$\frac{W(N,a_s,a_{s-1},\ldots,a_1)}{N!}.$$

Let

$$H_1 = \frac{a_1}{N}\cdot\sum_{i=a_1}^{N-1}\frac{1}{i},\quad H_2 = \frac{a_2}{N}\cdot(\sum_{i=a_2}^{a_1-1}\frac{1}{i} + \sum_{i_1=a_1+1}^{N-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_1}^{i_1-1}\frac{1}{i_2}),$$

$$H_3 = \frac{a_3}{N}\cdot(\sum_{i=a_3}^{a_2-1}\frac{1}{i} + \sum_{i_1=a_2+1}^{a_1-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_2}^{i_1-1}\frac{1}{i_2} + \sum_{i_1=a_1+1}^{N-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_1}^{i_1-1}\frac{1}{i_2}\sum_{i_3=a_2}^{i_2-1}\frac{1}{i_3})$$

$$\cdots$$

$$H_s = \frac{a_s}{N}\cdot(\sum_{i=a_s}^{a_{s-1}-1}\frac{1}{i} + \sum_{i_1=a_{s-1}+1}^{a_{s-2}-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_{s-1}}^{i_1-1}\frac{1}{i_2} + \sum_{i_1=a_{s-2}+1}^{a_{s-3}-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_{s-2}}^{i_1-1}\frac{1}{i_2}\sum_{i_3=a_{s-1}}^{i_2-1}\frac{1}{i_3} + \ldots +$$

$$\sum_{i_1=a_1+1}^{N-1}\frac{1}{i_1}\sum_{i_2=a_1}^{i_1-1}\frac{1}{i_2}\sum_{i_3=a_2}^{i_2-1}\frac{1}{i_3}\cdots\sum_{i_s=a_{s-1}}^{i_{s-1}-1}\frac{1}{i_s})).$$

将方程（12）重新整理后，我们得到

$$\frac{W(N,a_s,\ldots,a_1)}{N!} = \sum_{i=1}^{s}H_i.$$

4.3 渐近情形（$N\to\infty$）

令 $N\to\infty$ 并定义 $x_i = \lim_{N\to\infty}\frac{a_i}{N}$ 对于 $0 \leq x_s \leq x_{s-1} \leq \ldots \leq x_1 \leq 1$，且 $1 \leq r \leq s$,

$$H_r \to x_r\cdot(\int_{x_r}^{x_{r-1}}\frac{1}{t}\,dt + \int_{x_{r-1}}^{x_{r-2}}\frac{1}{t_1}\int_{x_{r-1}}^{t_1}\frac{1}{t_2}\,dt_2\,dt_1 + \int_{x_{r-2}}^{x_{r-3}}\frac{1}{t_1}\int_{x_{r-2}}^{t_1}\frac{1}{t_2}\int_{x_{r-1}}^{t_2}\frac{1}{t_3}\,dt_3\,dt_2\,dt_1 + \ldots +$$

$$\int_{x_1}^{1}\frac{1}{t_1}\int_{x_1}^{t_1}\frac{1}{t_2}\int_{x_2}^{t_2}\cdots\int_{x_{r-1}}^{t_{r-1}}\frac{1}{t_r}\,dt_r\,dt_{r-1}\cdots dt_1) =: H_r'$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{W(N,a_s,\ldots,a_1)}{N!} = \sum_{r=1}^{s}H_r' =: P.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
阈值	0.3678794412	0.2231301601	0.1410933807	0.0910176906	0.0594292419	...
最优概率	0.3678794412	0.5910096013	0.7321029820	0.8231206726	0.8825499146	...

表1：最优阈值（阈值比）和成功概率。

根据此定义，对于 $1 \le i \le s$，最优概率是 $x_1, \ldots, x_s$ 的函数，且不依赖于 N。根据推论 30，我们求出 $s = 1$ 情况下的比值 x_1，再求出 $s = 2$ 情况下的 $x_2 \ldots$，最后求出允许进行 s 次选择时的 x_s。最优策略必须满足：若 (i)$a_i = o(N)$，则 $x_i = 0$；若 (ii) $N - a_i = o(N)$，则 $x_i = 1$；否则 (iii) $\lim_{N\to\infty} \frac{a_i}{N} = x_i \in (0, 1)$。接下来，我们证明只有 (iii) 才可能成立，即对于 $1 \le i \le s$，每个 $x_i \in (0,1)$。

Let

$$\mathcal{I}_{r-1} = \int_{x_{r-1}}^{x_{r-2}} \frac{1}{t_1} \int_{x_{r-1}}^{t_1} \frac{1}{t_2}\, dt_2\, dt_1 + \int_{x_{r-2}}^{x_{r-3}} \frac{1}{t_1} \int_{x_{r-2}}^{t_1} \frac{1}{t_2} \int_{x_{r-1}}^{t_2} \frac{1}{t_3}\, dt_3\, dt_2\, dt_1 + \ldots + \int_{x_1}^{1} \frac{1}{t_1} \int_{x_1}^{t_1} \frac{1}{t_2} \int_{x_2}^{t_2} \cdots \int_{x_{r-1}}^{t_{r-1}} \frac{1}{t_r}\, dt_r\, dt_{r-1} \cdots dt_1.$$

我们知道，当给定 $x_1, \ldots, x_{r-1}$ 时，$\mathcal{I}_{r-1}$ 是一个常数，而使 P 达到最大值的 x_r 的最优值等于 $x_{r-1} \cdot e^{\mathcal{I}_{r-1}-1}$。因此，我们可以依次计算 x_{r-1} 和 $\mathcal{I}_{r-1}$。

我们计算了最多进行五次选择时的最优阈值及其对应的成功概率。当 N 较大时，根据推论 30，进行 s 次选择时的最优策略是 $(x_s \cdot N, \ldots, x_1 \cdot N)$ 策略：我们拒绝前 $x_s \cdot N$ 位申请者，之后选拔第一个从左到右最大值申请者；第二次选择时，我们等到 $x_{s-1} \cdot N^{\text{th}}$ 个位置之后，再选拔第一次选择之后出现的从左到右最大值，...；第 s^{th} 次选择时，我们等到 $x_1 \cdot N^{\text{th}}$ 个位置之后，再选拔第 $(s-1)^{\text{th}}$ 次选择之后出现的从左到右最大值。$s \le 5$ 的结果见表1。

4.4 期望停止位置

对于嫁妆模型和我们的基于查询的模型，当 $s = 1$时，停止位置的期望值（简称 ESR）均为 $0.7357N$。然而，当 s 较大时，这两个模型的表现大不相同。在嫁妆模型中，随着 s 变大，ESR 趋近于 1。在基于查询的模型中，当$s \to \infty$时，ESR 趋近于 0.5。这是因为，当 s 足够大时，我们的成功概率接近 1；如果在 $s-1$ 次查询期间识别出值 N，我们就会在该位置停止（即使对于 $s = 6$，我们也有 > 0.9 的概率识别出最佳申请者）。因此，ESR $\to 0.5$, 也就是 N的期望位置。然而，在嫁妆模型中，随着 s 增大，在前 $s-1$ 次选择中成功识别最佳申请者的概率 $\to 1$。此外，由于我们无法得知选中的申请者是否为最佳申请者，我们会尽可能用完所有选择次数，因此在列表末尾停止的概率为 $\to 1$。因此，在嫁妆模型中，$ESR \to 1$ 随着 $N \to \infty$。

致谢。本 研究部分得到美国国家科学基金会 CCF 15-26875 和 CIF 1513373 项目资助 s.

参考文献

[1] H. Ashtiani, S. Kushagra, S. Ben-David, “使用同簇查询进行聚类”，神经信息处理系统进展 *(NIPS)*，第 3224–3232 页，2016年。[2] M. Babaioff, N. Immorlica, R. Kleinberg, “拟阵、秘书问题与在线机制” *ACM-SIAM* 离散算法研讨会 *(SODA)*，第 434–443 页，2007年。[3] L. Bay´on, P. Fortuny Ayuso, J. M. Grau, A.M. Oller-Marc´enand M.M.Ruiz, “最佳或最差问题与博士后问题”组合优化期刊，第 35 卷，第 703–723 页，2018年。[4] L. Bay´on, P. Fortuny Ayuso, J.M. Grau, A.M. Oller-Marc´enand M.M.Ruiz, “候选人数随机时的最佳或最差问题与博士后问题”组合优化期刊，第 38 卷，第 86–110 页，2019年。

[5] I. Chien, C. Pan, and O. Milenkovic, “查询式 k 均值聚类与双 Dixie 杯问题”，神经信息处理系统进展 (NeurIPS)，第 31 卷，第 6649-6658 页，2018年。[6] M. Crews, B. Jones, K. Myers, L. Taalman, M. Urbanski and B. Wilson, “最佳选择博弈中的机会成本”，《组合学电子期刊》，第 26 卷，第 1 期，#P1.45，2019年。[7] E.B. Dynkin, “马尔可夫过程停止时刻的最优选择”，苏联科学院学报，第 150 卷，第 238–240 页，1963年。[8] A. Fowlkes and B. Jones, 最佳选择博弈中的位置策略，Involve，第 12 卷，第 4 期，第 647–658 页，2019年。MR 3941603[9] P. R. Freeman, “秘书问题及其扩展——综述”，《国际统计评论》第 51 卷，第 189–206 页，1983年。[10] R. Freij, J. Wastlund, “偏序秘书问题”，《电子通讯概率》，第 15 卷，第 504–507 页，2010年。[11] M. Gardner, “数学游戏”，《科学美国人》，第 202 卷，第 2 期，第 152 页，1960a。[12] M. Gardner, “数学游戏”，《科学美国人》，第 202 卷，第 3 期，第 178–179 页，1960b。[13] B. Garrod and R. Morris, “未知偏序集上的秘书问题”，《随机结构与算法》，第 43 卷，第 429–451 页，2012年。[14] N. Georgiou, M. Kuchta, M. Morayne, J. Niemiec, “偏序集上的通用最佳选择算法”，《随机结构与算法》，第 32 卷，第 263–273 页，2008年。[15] J. Gilbert and F. Mosteller, “识别序列中的最大值”，《美国统计学会杂志》，第 61 卷，第 35–73 页，1966年。[16] B. Jones, “避免模式与做出最佳选择”，《离散数学》，第 342 卷，第 6 期，第 1529-1545 页，2019年。[17] B. Jones, “加权最佳选择博弈”，《工业与应用数学学会离散数学杂志》，第 34 卷，第 1 期，第 399–414 页，2020年。[18] U. Krengel and L. Sucheston, “关于半鞅、amart 和有限值过程”，《巴拿赫空间上的概率》，《概率及相关主题进展》，第 4 卷，第 197–266 页。Dekker，纽约，1978年。[19] D.V. Lindley, “动态规划与决策理论”，Appl. Statist.，第 10 卷，第 39–52 页，1961年。[20] X. Liu and O. Milenkovic, “Mallows 模型下的博士后问题”，2021 IEEE 国际信息论研讨会 (ISIT)，2021年，第 3214–3219 页。[21] X. Liu and O. Milenkovic, “Mallows 模型下寻找次优候选人”，《理论计算机科学》，第 929 卷，第 39-68 页，2022年。[22] A.Mazumdar and B. Saha, “带噪声查询的聚类”，神经信息处理系统进展 (NIPS)，第 5788-5799 页，2017年。[23] G. Moustakides, X. Liu, and O. Milenkovic, “随机查询秘书问题的最优停止方法”，https://arxiv.org/pdf/2107.07513.pdf。[24] J. S. Rose, “最优选择与指派问题”，《运筹学》，第 30 卷，第 172–181 页，1982年。[25] M. Sakaguchi, “嫁妆问题与 OLA 策略”，《统计应用研究报告》，Juse，第 25 卷，第 124–128 页，1978年。[26] J.A. Soto, “随机指派模型中的拟阵秘书问题”，ACM-SIAM 离散算法研讨会 (SODA)，第 1275–1284 页，2011年。