arXiv:2303.02362v1 [math.DG] 4 Mar 2023

伪黎曼空间形式中具有真平均曲率向量场的四维超曲面

Chao Yang[a]，Jiancheng Liu[a]，Li Du[b]

[a]西北师范大学数学与统计学院，中国兰州[b]重庆理工大学理学院，中国重庆

摘要

本文研究伪黎曼空间形式 $N_s^5(c)$ 中具有真平均曲率向量场（即 $\Delta\vec{H}$ 与 $\vec{H}$ 成比例）的四维超曲面 M_r^4，并证明其具有常平均曲率，同时给出了该常数的取值范围。作为应用，我们得到，在某些特定情形下，$N_s^5(c)$ 中的双调和超曲面是极小的，这部分证实了陈省身的猜想。

关键词：真平均曲率向量场，伪黎曼空间形式，四维超曲面，平均曲率

2000年数学主题分类：53C50

1. 引言

设 $N_s^{n+1}(c)$ 为指标为 $0 \leq s \leq n+1$、截面曲率为常数 c 的 $(n+1)$ 维伪黎曼空间形式。特别地，伪黎曼空间形式 $N_s^{n+1}(0)$ 与指标为 s 的 $(n+1)$ 维伪欧几里得空间 $\mathbb{E}_s^{n+1}$ 等距。设 $x\colon M_r^n \to N_s^{n+1}(c)$ 是伪黎曼超曲面 M_r^n 到 $N_s^{n+1}(c)$ 的等距浸入。记 M_r^n 的平均曲率向量场和拉普拉斯算子分别为 H 和 Δ。若超曲面 M_r^n 满足下列方程，则称其具有真平均曲率向量场：

$$\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H},$$

电子邮箱：yangch@nwnu.edu.com（Chao Yang）、liujc@nwnu.edu.cn（Jiancheng Liu）、duli820210@cqut.edu.cn（Li Du）

投稿至爱思唯尔的预印本 2023年3月7日

其中 λ 为某个实常数。特别地，当 $\lambda = nc$ 时，超曲面 M_r^n 是双调和的。

1988 年，B.-Y. Chen 开始研究在 [4], 中具有真平均曲率向量场的 $\mathbb{E}_s^{n+1}$ 中的超曲面 M_r^n，并证明当 $n = 2$、$s = 0$ 时，曲面 M^2 是极小曲面或圆柱面的一部分。随后，A. Ferr´andez 和 P. Lucus [10] 对 n =2、$s = 1$ 的这类非极小曲面进行了分类。对于 $n = 3$，目前尚未得到分类结果，但 F. Defever 在 [6] 、T. Hasanis 等人在 [18]、$s = 1$，以及 A. Arvanitoyeorgos 等人在 [1, 2, 3] 的研究证明，$\mathbb{E}_s^4(s = 0, 1, 2)$ 中的超曲面 M_r^3 具有常平均曲率（$s = 0$ ）。

自然地，[3] 中有一个猜想：在伪欧几里得空间 $\mathbb{E}_s^{n+1}$ 中，任何具有真平均曲率向量场的超曲面都具有常平均曲率。这与著名的 B.-Y. Chen 关于 [5] 中双调和超曲面的猜想密切相关：$\mathbb{E}_s^{n+1}$ 中的任何双调和超曲面都是极小的。在 [11], ，Y. Fu、M.-C. Hong 和 X. Zhan 通过与著名的伯恩斯坦问题类比，阐明了解决关于 $n = 4$ 的 Chen 猜想的重要性。与 Chen 猜想不同，我们认识到，有必要解决关于 $n = 4$ 中具有真平均曲率向量场的超曲面的猜想。

2021 年，Y. Fu 和 X. Zhan 对于 $n = 4$、$s = 0$ 中的 [12]，对这一猜想给出了肯定的回答。然而，当 $s > 0$ 时，相关研究难以开展，因为超曲面 M_r^4 的形算子不一定可对角化，且主曲率可能不全为实数。2022 年，在超曲面具有常数量曲率且形算子可对角化的假设下，L. Du 和 J. Ren 对于 $n = 4$、$s > 0$ 中的 [8] 得到了相同的结论。另有一些论文（[7, 9,14, 15, 16]）研究了关于 $n > 4$ 的猜想，但附加了一些较强的限制条件。

在本文中，我们克服了形算子不可对角化和虚主曲率所带来的困难，并在第 3 节证明了伪黎曼空间形式 N_s^5（c）中具有真平均曲率向量场的超曲面 M_r^4 具有常平均曲率（参见定理 3.1）。因此，上述关于具有真平均曲率向量场的超曲面的猜想对于 $n = 4$ 成立。

一旦我们知道超曲面 M_r^4 的平均曲率是一个常数，就在第4节中继续估计该常数。当 M_r^4 至多具有两个不同主曲率时，我们得到平均曲率H的值（参见定理 4.1、4.6 和 4.8），并发现该值取决于 εc、$\varepsilon\lambda$

以及主曲率的重数，其中 $\varepsilon = \langle\vec{\xi}$、$\vec{\xi}\rangle$、$\vec{\xi}$ 表示指向 M_r^4的单位法向量场。遗憾的是，当 M_r^4 的不同主曲率的数量大于 2 时，我们无法得到平均曲率的值。然而，当 M_r^4 的主曲率全为实数时，我们给出了 H 的取值范围（参见定理 4.12）。作为这些结果的一个应用，我们可以部分回答陈省身的猜想，详情如下:

- 具有两个不同虚主曲率的 M_r^4 $N_s^5(c)$中的双调和超曲面是极小的（参见推论 4.11）；
- 满足 $c\varepsilon \leq 0$ 且没有虚主曲率的M_r^4 $N_s^5(c)$中的双调和超曲面是极小的（参见推论4.13）。

2. 预备知识

2.1. $N_s^{n+1}(c)$中的超曲面的公式 M_r^n

设 $N_s^{n+1}(c)$是指标为 s 、截面曲率为常数 c的伪黎曼空间形式。根据 $\langle X, X\rangle$ 是负、正还是零， $N_s^{n+1}(c)$中的非零向量 X 称为类时、类空或类光向量。

设 $\vec{\xi}$ 表示与 M_r^n垂直的单位 $\tilde{}$ 非退化超曲面。 $\tilde{}$法向量场，$\vec{}$则 $\varepsilon = \langle\xi$, $\xi\rangle = \pm 1$。 ∇ 和 ∇ 分别表示 M_r^n和 $N_s^{n+1}(c)$ 上的 Levi-Civita 联络。对于任意与 M_r^n相切的向量场X, Y，高斯公式为

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\vec{\xi},$$

$\vec{}$其中 h 是取标量值的第二基本形式。记 A, H和$\vec{}H$ 分别为与 ξ对应的 M_r^n的形算子、平均曲率向量场和平均曲率，则 $\vec{H} = H\vec{\xi}$和$H = \frac{1}{n}\varepsilon\mathrm{tr}A$。

对于任意与 M_r^n相切的向量场 X, Y, Z，Codazzi 方程和高斯方程为

$$\langle(\nabla_X A)Y, Z\rangle = \langle(\nabla_Y A)X, Z\rangle, \tag{2.1}$$

and

$$R(X, Y)Z = c(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y) + \varepsilon\langle A(Y), Z\rangle A(X) - \varepsilon\langle A(X), Z\rangle A(Y),$$

其中 $R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$。

2.2. $\Delta H = \lambda H$的等价方程

方程 $\Delta H = \lambda H$ 可改写为

$$-\Delta\vec{H} - \operatorname{trace}\tilde{R}(\mathrm{d}x, \vec{H})\mathrm{d}x = (\lambda - nc)\vec{H},$$

这等价于

$$\tau_2(x) = (\lambda - nc)\tau(x),$$

其中， $\tau(x)$和 $\tau_2(x)$分别是 x的张力场和双张力场，而 $\tilde{R}$ 是 $N_s^{n+1}(c)$的曲率张量。

因此，根据 [7],，超曲面 M_r^n满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 当且仅当

$$A(\nabla H) = -\frac{n}{2}\varepsilon H(\nabla H), \tag{2.2}$$

and

$$\Delta H + \varepsilon H \mathrm{tr}A^2 = \lambda H, \tag{2.3}$$

其中，作用于标量值函数 f 的拉普拉斯算子 Δ 为

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (e_i e_i - \nabla_{e_i} e_i) f,$$

其中 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是局部标准正交标架，使得 $\langle e_i、\ e_i\rangle = \varepsilon_i = \pm 1$。

2.3. 超曲面 M_r^n 的形算子

切空间 $T_pM_r^n$在 $p \in M_r^n$处可表示为子空间 V_k、 $1 \le k \le m$的直和，这些子空间彼此正交，且在形算子 A作用下保持不变。根据 [17, 习题18，第260-261], 页，存在一个整数 t，满足 $0 \le t \le m$，使得 $A|_{V_i}$ （ A在V_i上的限制） $1 \le i \le t$具有如下形式

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda_i & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

相对于 V_i的一组基 $\mathfrak{B}_i=\{u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_{\alpha_i}}\}$， $A|_{V_j}$、 $t+1\le j\le m$具有如下形式

$$\overline{A}_j=\begin{pmatrix}
\gamma_j & \tau_j & & & & & & & \\
-\tau_j & \gamma_j & 0 & & & & & & \\
1 & 0 & \gamma_j & \tau_j & & & & & \\
 & 1 & -\tau_j & \gamma_j & 0 & & & & \\
 & & 1 & 0 & \gamma_j & \tau_j & & & \\
 & & & 1 & -\tau_j & \gamma_j & 0 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & 1 & 0 & \gamma_j & \tau_j \\
 & & & & & & 1 & -\tau_j & \gamma_j
\end{pmatrix},\tau_j\neq 0,$$

相对于 V_j 的一组基 $\overline{\mathfrak{B}}_j=\{u_{\bar{j}_1},u_{\tilde{j}_1},u_{\bar{j}_2},u_{\tilde{j}_2},\cdots,u_{\bar{j}_{\beta_j}},u_{\tilde{j}_{\beta_j}}\}$。 $\mathfrak{B}_i$、 $1\le i\le t$ 以及 $\mathfrak{B}_j$、 $t+1\le j\le n$ 中基向量之间的内积均为零，除非

$$\langle u_{i_a},u_{i_b}\rangle=\varepsilon_i=\pm 1,\quad a+b=\alpha_i+1,\quad 1\le i\le t,$$

and

$$\langle u_{\bar{j}_c},u_{\bar{j}_d}\rangle=1=-\langle u_{\tilde{j}_c},u_{\tilde{j}_d}\rangle,\quad c+d=\beta_j+1,\quad t+1\le j\le m.$$

C当然， V_k、 $1\le k\le m$ 的维数之和等于 n，即

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i+2\sum_{j=t+1}^{m}\beta_j=n.$$

依次收集 $\mathfrak{B}_1$、 $\cdots$、 $\mathfrak{B}_t$、$\overline{\mathfrak{B}}_{t+1}$、 $\cdots$、 $\overline{\mathfrak{B}}_m$ 中的所有向量，可得 $T_xM_r^n$ 的一组基 $\mathfrak{B}=\{u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_{\alpha_i}},u_{\bar{j}_1},u_{\tilde{j}_1},u_{\bar{j}_2},u_{\tilde{j}_2},\cdots,u_{\bar{j}_{\beta_j}},u_{\tilde{j}_{\beta_j}}|1\le i\le t,t+1\le j\le m\}$。

相对于这组基 $\mathfrak{B}$，超曲面 M_r^n 在 $N_s^{n+1}(c)$ 中的形算子 A 可表示为一个近对角矩阵

$$A=\mathrm{diag}\{A_1,\cdots,A_t,\overline{A}_{t+1},\cdots,\overline{A}_m\}.$$

观察 A_i 和 $\overline{A}_j$的形式，结合 $1\le i\le t$、 $t+1\le j\le m$，我们发现 A_i 只有一个单特征值 λ_i，而 $\overline{A}_j$ 的特征值为 $\gamma_j+\tau_j\sqrt{-1}$、$\gamma_j-\tau_j\sqrt{-1}$。因此，形算子 A 具有实特征值

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t,$$

和虚特征值

$$\gamma_{t+1}+\tau_{t+1}\sqrt{-1},\gamma_{t+1}-\tau_{t+1}\sqrt{-1},\cdots,\gamma_m+\tau_m\sqrt{-1},\gamma_m-\tau_m\sqrt{-1}.$$

根据上述对形算子形式的说明，我们得出，对于四维超曲面 M_r^4，如果存在实主曲率，那么形算子 A 及其对应的度量矩阵 G可能具有以下形式:

形式（I）	形式（II）	形式（III）
$t=m=4,$ $\alpha_i=1,i=1,4.$ $G=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&\varepsilon_3&0\\0&0&0&\varepsilon_4\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{2_1},u_{3_1},u_{4_1}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}$	$t=m=3,$ $\alpha_1=2,\alpha_2=\alpha_3=1.$ $G=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&\varepsilon_2&0\\0&0&0&\varepsilon_3\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{1_2},u_{2_1},u_{3_1}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\1&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$	$t=m=2,$ $\alpha_1=\alpha_2=2.$ $G=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{1_2},u_{2_1},u_{2_2}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\1&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&0\\0&0&1&\lambda_2\end{pmatrix}$
形式（IV）	形式（V）	形式（VI）
$t=m=2,$ $\alpha_1=3,\alpha_2=1.$ $G=\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon_1&0\\0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{1_2},u_{1_3},u_{2_1}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\1&\lambda_1&0&0\\0&1&\lambda_1&0\\0&0&0&\lambda_2\end{pmatrix}$	$m=3,t=2,$ $\alpha_1=\alpha_2=1,\beta_3=1.$ $G=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{2_1},u_{\tilde{3}_1},u_{\tilde{3}_1}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\gamma_3&\tau_3\\0&0&-\tau_3&\gamma_3\end{pmatrix}$	$m=2,t=1,$ $\alpha_1=2,\beta_2=1.$ $G=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{1_1},u_{1_2},u_{\tilde{2}_1},u_{\tilde{2}_1}\}$ $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\1&\lambda_1&0&0\\0&0&\gamma_2&\tau_2\\0&0&-\tau_2&\gamma_2\end{pmatrix}$

如果 M_r^4的主曲率全为虚数，那么 A 和 G 可能具有以下形式:

形式（VII）	形式（VIII）
$m=1,t=0,$ $\beta_1=2.$ $G=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{\tilde{1}_1},u_{\tilde{1}_1},u_{\tilde{1}_2},u_{\tilde{1}_2}\}$ $A=\begin{bmatrix}\gamma_1&\tau_1&0&0\\-\tau_1&\gamma_1&0&0\\1&0&\gamma_1&\tau_1\\0&1&-\tau_1&\gamma_1\end{bmatrix}$	$m=2,t=0$ $\beta_1=\beta_2=1.$ $G=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$ $\mathfrak{B}=\{u_{\tilde{1}},u_{\tilde{1}},u_{\tilde{2}},u_{\tilde{2}}\}$ $A=\begin{bmatrix}\gamma_1&\tau_1&0&0\\-\tau_1&\gamma_1&0&0\\0&0&\gamma_2&\tau_2\\0&0&-\tau_2&\gamma_2\end{bmatrix}$

由 A 的这些形式，我们可以计算 $\mathrm{tr}A$ 和 $\mathrm{tr}A^2$，结合 $\mathrm{tr}A=4\varepsilon H$，得到

$$\begin{cases}\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\lambda_i+2\sum_{j=t+1}^{m}\beta_j\gamma_j=4\varepsilon H,\\ \mathrm{tr}A^2=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\lambda_i^2+2\sum_{j=t+1}^{m}\beta_j(\gamma_j^2-\tau_j^2).\end{cases}\tag{2.4}$$

3. M_r^4 具有常平均曲率的结果

定理 3.1 设 $N_s^5(c)$ 是一个具有常截面曲率 c 的 5 维伪黎曼空间形式，且 M_r^4 是 $N_s^5(c)$ 中具有真平均曲率向量场的非退化超曲面，则 M_r^4具有常平均曲率。

为证明定理 3.1，我们采用反证法。假设 H不是常数，需要推出矛盾。当 M_r^4的主曲率全为虚数时，(2.2) 表明 $-2\varepsilon H$ （实数）是 A的一个特征值，这就产生了矛盾。当 M_r^4 具有实主曲率时， A 有六种可能的形式（见第 2 节）。 A 的这些不同形式会产生不同的联络系数表达式。要推出矛盾，我们需要用到这些表达式。因此，我们无法统一处理这六种形式。

3.1. 形算子具有形式（I）

命题 3.2 设 M_r^4是 N_s^5（c）中的一个具有真平均曲率向量场的非退化超曲面。若 M_r^4的形算子 A 具有形式（I），则 M_r^4 具有常平均曲率。

当 M_r^4 至多有三个不同主曲率时，L. Du 等人在 [7]中给出了证明。因此，我们假设 M_r^4的主曲率λ_1、 λ_2、 λ_3和 λ_4彼此不同。首先，在假设 M_r^n 的平均曲率H 不是常数，且 ∇H 沿 u_1方向的条件下，我们给出一些方程和引理。

3.1.1. 一些方程和引理

记$u_i = u_{i_1}$，其中 $1 \le i \le 4$。令 $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$、 i、 $j = 1$，2、3、4。由联络的相容性 ∇，我们得到

$$\Gamma_{ki}^j = -\varepsilon_i \varepsilon_j \Gamma_{kj}^i, \tag{3.1}$$

其中 i、 j、 $k = 1$，2、3、4。假设 H不是常数，且 ∇H沿 u_1方向，则由（2.2）可得 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$，并且我们有

$$u_1(H) \neq 0,\ u_2(H) = u_3(H) = u_4(H) = 0. \tag{3.2}$$

As 方程 (3.2)，由 $(\nabla_{u_i} u_j - \nabla_{u_j} u_i)(H) = [u_i, u_j](H)$ 可得

$$\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ji}^1, \quad i, j = 2, 3, 4. \tag{3.3}$$

结合方程 (3.1)、(3.2) 和 (3.3)，由 Codazzi方程可推得

$$\Gamma_{1i}^1 = 0, \quad \Gamma_{ij}^1 = 0, \text{ with } i \neq j, \ i, j = 2, 3, 4, \tag{3.4}$$

and

$$\begin{cases} u_i(\lambda_j) = (\lambda_i - \lambda_j)\Gamma_{ji}^j, \ i \neq j, \\ (\lambda_i - \lambda_j)\Gamma_{ki}^j = (\lambda_k - \lambda_j)\Gamma_{ik}^j, \ i, k \neq j. \end{cases} \tag{3.5}$$

利用 $\langle R(u_1, u_i)u_1, u_i\rangle, i = 2$ 的高斯方程，结合（3.1）和（3.4），可得 (3.3)

$$u_1(\Gamma_{i1}^i) = -(\Gamma_{i1}^i)^2 + (2H\lambda_i - c)\varepsilon_1, \ i = 2, 3, 4. \tag{3.6}$$

考虑表达式（3.1）和（3.2），方程（2.3）可写为

$$u_1u_1(H) + \sum_{i=2}^{4} \Gamma_{i1}^i u_1(H) - \varepsilon\varepsilon_1 H \mathrm{tr}A^2 + \varepsilon_1\lambda H = 0. \tag{3.7}$$

下面我们讨论 $f_k := \sum_{i=2}^4 (\Gamma_{i1}^i)^k$，其中 $k = 1, 2, \cdots, 5$，并得到以下引理 3.3 和引理 3.4。然后，应用这两个引理，我们证明 $u_i(\Gamma_{j1}^j) = u_i(\lambda_j) = 0$，其中 $i, j = 2, 3, 4$，即引理 3.5；该引理将在命题 3.2 的证明中发挥重要作用。

引理 3.3 我们有

$$\begin{aligned}
f_2 =& - u_1(f_1) + 12H^2\varepsilon\varepsilon_1 - 3c\varepsilon_1; \\
f_3 =& \frac{1}{2}u_1^{(2)}(f_1) - (4\varepsilon H^2 + c)\varepsilon_1 f_1 - 24\varepsilon\varepsilon_1 H u_1(H); \\
f_4 =& - \frac{1}{6}u_1^{(3)}(f_1) + \frac{4}{3}(4\varepsilon H^2 + c)\varepsilon_1 u_1(f_1) + \frac{20}{3}\varepsilon\varepsilon_1 H u_1(H) f_1 + 8\varepsilon\varepsilon_1 (u_1(H))^2 \\
& + 16\varepsilon\varepsilon_1 H u_1^{(2)}(H) - 32H^4 + 2\varepsilon H^2\lambda - 12\varepsilon H^2 c + 3c^2; \\
f_5 =& \frac{1}{24}u_1^{(4)}(f_1) - \frac{5}{6}(4\varepsilon H^2 + c)\varepsilon_1 u_1^{(2)}(f_1) - \frac{25}{3}\varepsilon\varepsilon_1 H u_1(H) u_1(f_1) - [16H^4 \\
& - \frac{13}{3}H u_1^{(2)}(H) - \frac{1}{3}\varepsilon\varepsilon_1 (u_1(H))^2 + 8\varepsilon H^2 c + c^2] f_1 - 8\varepsilon\varepsilon_1 H u_1^{(3)}(H) \\
& - \frac{20}{3}\varepsilon\varepsilon_1 u_1(H) u_1^{(2)}(H) + [16(8 + \frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon_1)H^3 + 38\varepsilon H c - \frac{5}{3}H\varepsilon\lambda] u_1(H),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中， $u_1^{(k)}(f_1)$ 和 $u_1^{(k)}(H)$ 在 $k=2,3,4$ 下分别表示沿着 u_1 对f_1 和 H 求得的 k 阶导数。

证明 由于 $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=\mathrm{tr}A=4\varepsilon H$ 和 $\lambda_1=-2\varepsilon H$，我们知道

$$\sum_{i=2}^{4}\lambda_i=6\varepsilon H.$$

在(3.5)的第一个方程中令 $i=1$，对 j 从2到4求和，得到

$$\sum_{i=2}^{4}\lambda_i\Gamma_{i1}^{i}=-2\varepsilon Hf_1-6\varepsilon u_1(H). \tag{3.9}$$

将(3.5)中的第一个方程两边乘以 λ_j，其中 $i=1$，于是得到

$$\sum_{i=2}^{4}\lambda_i^2\Gamma_{i1}^{i}=-2\varepsilon H\sum_{i=2}^{4}\lambda_i\Gamma_{i1}^{i}-\frac{1}{2}u_1(\mathrm{tr}A^2)+4Hu_1(H).$$

沿 u_1 对 $\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^k$ 求导，结合(3.5)和(3.6)，得到

$$\begin{aligned}(k+1)\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^{k+1}=&-u_1(\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^k)+2k\varepsilon_1H\sum_{i=2}^{4}\lambda_i^2(\Gamma_{i1}^{i})^{k-1}\\&-kc\varepsilon_1\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^{k-1}-2\varepsilon Hf_{k+1},\quad k=1,2,\end{aligned}$$

结合(3.9)和上面的方程，可得到 $\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^k$ 的表达式，其中 $k=2$，3. 在(3.6)中对 i 从2到4求和，可将 f_2 表示为

$$f_2=-u_1(f_1)+12H^2\varepsilon\varepsilon_1-3c\varepsilon_1.$$

将(3.6)两边乘以 $(\Gamma_{i1}^{i})^k$，然后对 i 求和，得到

$$f_{k+2}=-\frac{1}{k+1}u_1(f_{k+1})+2\varepsilon_1H\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^k-c\varepsilon_1f_k,\ k=1,2,3.$$

由于 $\sum_{i=2}^{4}\lambda_i(\Gamma_{i1}^{i})^k$ 的表达式，其中 $k=1$、2、3，我们由上述方程得出(3.8) 成立。□

引理 3.4 对于 $i=2$、3、4，我们有

$$u_i(f_1)=0.$$

证明：根据记号 f_k, $k=1,2,\cdots,5$，我们得到方程

$$\begin{cases} f_1^4-6f_1^2f_2+3f_2^2+8f_1f_3-6f_4=0, \\ f_1^5-5f_1^3f_2+5f_1^2f_3+5f_2f_3-6f_5=0 \end{cases} \tag{3.10}$$

（参见[11]）也成立。将引理 3.3 中 f_k, $k=1,2,\cdots,5$ 的表达式代入 (3.10), 得到

$$\begin{aligned} F_1 :=& u_1^{(3)}(f_1)+4f_1u_1^{(2)}(f_1)+3(u_1(f_1))^2+[6f_1^2-104\varepsilon\varepsilon_1H^2+10\varepsilon_1c]u_1(f_1) \\ &+f_1^4-104\varepsilon\varepsilon_1H^2f_1^2+10\varepsilon_1cf_1^2-232\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)f_1-48\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^2 \\ &-96\varepsilon\varepsilon_1Hu_1^{(2)}(H)+624H^4-144\varepsilon H^2c-12\varepsilon H^2\lambda+9c^2=0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F_2 :=& -u_1^{(4)}(f_1)+(-10u_1(f_1)+10f_1^2+200\varepsilon\varepsilon_1H^2-10c\varepsilon_1)u_1^{(2)}(f_1)+4f_1^5 \\ &+[20f_1^3+20(4\varepsilon H^2+c)\varepsilon_1f_1+680\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)]u_1(f_1)-320\varepsilon\varepsilon_1H^2f_1^3 \\ &+40\varepsilon_1f_1^3c-480\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)f_1^2+104Hu_1^{(2)}(H)f_1+192\varepsilon\varepsilon_1Hu_1^{(3)}(H) \\ &-192\varepsilon H^2cf_1-1344H^4f_1+8\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^2f_1+160\varepsilon\varepsilon_1u_1(H)u_1^{(2)}(H) \\ &+36c^2f_1-128(69+2\varepsilon\varepsilon_1)H^3u_1(H)+(528c+40\lambda)\varepsilon Hu_1(H)=0. \end{aligned}$$

随后，我们将从方程$F_1=0$和 $F_2=0$中消去 $u_1^{(k)}(f_1)$、 $k=1$、2、3、4。令 $F_3=\frac{1}{4}(u_1(F_1)+F_2)-f_1F_1$，则 $F_3=0$，即

$$\begin{aligned} &12\varepsilon\varepsilon_1H^2u_1^{(2)}(f_1)+[36\varepsilon\varepsilon_1H^2f_1+30\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)]u_1(f_1)+12\varepsilon\varepsilon_1H^2f_1^3 \\ &+30\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)f_1^2+(19\varepsilon\varepsilon_1+13)Hu_1^{(2)}(H)f_1-4\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^2f_1 \\ &+6(8c+\lambda)\varepsilon H^2f_1+12\varepsilon\varepsilon_1Hu_1^{(3)}(H)-4\varepsilon\varepsilon_1u_1(H)u_1^{(2)}(H) \\ &-480H^4f_1-(792+32\varepsilon\varepsilon_1)H^3u_1(H)+(30c+2\lambda)\varepsilon Hu_1(H)=0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

取 $F_4=2H(u_1(F_3)-12\varepsilon\varepsilon_1H^2F_1+f_1F_3)-9u_1(H)F_3$，则 $F_4=0$，即

$$a_1u_1(f_1)+a_1f_1^2+a_2f_1+a_3=0, \tag{3.12}$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_1 =&(294\varepsilon\varepsilon_1+78)Hu_1^{(2)}(H)-654\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^2+4608H^4+36(\lambda-12c)\varepsilon H^2,\\
a_2 =&(186\varepsilon\varepsilon_1+78)H^2u_1^{(3)}(H)-(471\varepsilon\varepsilon_1+273)Hu_1(H)u_1^{(2)}(H)\\
&+108\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^3+[(13392-192\varepsilon\varepsilon_1)H^2-6(90c+13\lambda)\varepsilon]H^2u_1(H),\\
a_3 =&72\varepsilon\varepsilon_1H^2u_1^{(4)}(H)-276\varepsilon\varepsilon_1Hu_1(H)u_1^{(3)}(H)+108\varepsilon\varepsilon_1(u_1(H))^2u_1^{(2)}(H)\\
&-24\varepsilon\varepsilon_1H(u_1^{(2)}(H))^2+[(2160-192\varepsilon\varepsilon_1)H^2+(180c+12\lambda)\varepsilon]H^2u_1^{(2)}(H)\\
&+[72(147+4\varepsilon\varepsilon_1)H^2-(630c+42\lambda)\varepsilon]H(u_1(H))^2-44928\varepsilon\varepsilon_1H^7\\
&+(10368c+864\lambda)\varepsilon_1H^5-648\varepsilon\varepsilon_1H^3c^2.
\end{aligned}
$$

用 u_1 作用于 (3.12)，再结合 (3.11)，可得

$$(b_1f_1+b_2)u_1(f_1)+b_1f_1^3+b_3f_1^2+b_4f_1+b_5=0,$$

其中

$b_1 =-768H^4\varepsilon\varepsilon_1+6(12c-6\lambda)H^2\varepsilon_1-(13\varepsilon\varepsilon_1+49)Hu_1^{(2)}(H)+109(u_1(H))^2,$
$b_2 =(8304\varepsilon\varepsilon_1-64)H^4u_1(H)+(52\varepsilon\varepsilon_1+160)u_1^{(3)}(H)H^2+363(u_1(H))^3-($
$104\varepsilon\varepsilon_1+642)Hu_1(H)u_1^{(2)}(H)-(252c+20\lambda)H^2u_1(H)\varepsilon_1,b_3 =3840H^4u_1(H)$
$\varepsilon\varepsilon_1+(26\varepsilon\varepsilon_1+98)u_1^{(3)}(H)H^2+6\varepsilon_1(\lambda-12c)H^2u_1(H)+327(u_1(H))^3-($
$13\varepsilon\varepsilon_1+485)Hu_1(H)u_1^{(2)}(H),b_4 =12(13\varepsilon\varepsilon_1+31)u_1^{(4)}(H)H^3-2(715\varepsilon\varepsilon_1+1021)$
$H^2(u_1^{(2)}(H))^2+368640H^8+96(372\varepsilon\varepsilon_1-43)H^5u_1^{(2)}(H)+(923\varepsilon\varepsilon_1+1973)H(u_1$
$(H))^2u_1^{(2)}(H)-18(13\varepsilon\varepsilon_1+11)u_1^{(3)}(H)H^2u_1(H)+6(464c+61\lambda)\varepsilon_1H^2(u_1(H))^2$
$+36(96c^2-\lambda^2+4c\lambda)H^4+96(603\varepsilon\varepsilon_1-16)H^4(u_1(H))^2-436(u_1(H))^4-576\varepsilon($
$124c+3\lambda)H^6+12(26c\varepsilon-172c\varepsilon_1-13\lambda\varepsilon-47\lambda\varepsilon_1)H^3u_1^{(2)}(H),b_5 =-12($
$144c^2+\lambda^2+3c\lambda)H^3u_1(H)-12(13\varepsilon\varepsilon_1+103)u_1^{(3)}(H)H^2u_1^{(2)}(H)+144u_1^{(5)}(H)$
$H^3-2(195c\varepsilon+13\lambda\varepsilon+1779c\varepsilon_1+97\lambda\varepsilon_1)H^2u_1^{(2)}(H)\varepsilon u_1(H)-8(2853\varepsilon\varepsilon_1+220)$
$H^3(u_1(H))^3+8(12739\varepsilon\varepsilon_1+1435)H^4u_1^{(2)}(H)u_1(H)-96(51\varepsilon\varepsilon_1+4)u_1^{(3)}(H)$
$H^5+972u_1^{(3)}(H)H(u_1(H))^2-436(u_1(H))^3u_1^{(2)}(H)+16($
$1476\varepsilon c-144c\varepsilon_1+741\varepsilon\lambda+12\lambda\varepsilon_1)H^5u_1(H)-264u_1^{(4)}(H)H^2u_1(H)+\varepsilon_1($
$2010c+134\lambda)H(u_1(H))^3+(24576\varepsilon\varepsilon_1-20736)H^7u_1(H)+(52\varepsilon\varepsilon_1+580)Hu_1(H)$
$(u_1^{(2)}(H))^2+24\varepsilon_1(51c-2\lambda)u_1^{(3)}(H)H^3.$

结合（3.12）可推出

$$c_1 f_1 + c_2 = 0,$$

其中 c_1 和 c_2 是关于 H 和 $u_1^{(k)}(H)$的多项式， $k = 1$、2、 $\cdots$、5。

由表达式 $[u_i, u_1] = \nabla_{u_i} u_1 - \nabla_{u_1} u_i$以及关系式 (3.2) 和 $\Gamma_{i1}^1 = \Gamma_{1i}^1 = 0$ （见方程 (3.1) 和 (3.4)），可得

$$u_i u_1^{(k)}(H) = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, 5. \tag{3.13}$$

沿 u_i对 $c_1 f_1 + c_2 = 0$ 求导，取 $i = 2$、3、4，并利用 (3.13)，可得

$$c_1 u_i(f_1) = 0.$$

假设 $u_i(f_1) \neq 0$，对某个 $i \in \{2, 3, 4\}$成立，则可得 $c_1 = c_2 =$0。接着，利用 $k = 1$、2、 $\cdots$、5 消去 $u_1^{(k)}(H)$，得到一个关于 H的多项式方程，这意味着 H 是一个常数，产生矛盾。因此， $u_i(f_1) = 0, i = 2$,3,4。□

引理 3.5 我们有 $u_i(\Gamma_{j1}^j) = u_i(\lambda_j) = 0$，其中 i、 $j = 2$、3、4。

证明 由于 $u_i(f_1) = 0$，其中 $i = 2$、3、4（见引理 3.4），可得

$$u_i u_1^{(k)}(f_1) = 0,\ i = 2, 3, 4,\ k = 0, 1, 2, 3. \tag{3.14}$$

对引理 3.3 中 f_k、 $k = 2$、3 的表达式求导，并结合 (3.13) 和 (3.14)，我们得到

$$u_i(f_k) = 0,\ i = 2, 3, 4,\ k = 1, 2, 3.$$

注意到 $f_k = \sum_{i=2}^4 (\Gamma_{i1}^i)^k$，上述方程告诉我们

$$\begin{cases} u_i(\Gamma_{21}^2) + u_i(\Gamma_{31}^3) + u_i(\Gamma_{41}^4) = 0, \\ \Gamma_{21}^2 u_i(\Gamma_{21}^2) + \Gamma_{31}^3 u_i(\Gamma_{31}^3) + \Gamma_{41}^4 u_i(\Gamma_{41}^4) = 0, \\ (\Gamma_{21}^2)^2 u_i(\Gamma_{21}^2) + (\Gamma_{31}^3)^2 u_i(\Gamma_{31}^3) + (\Gamma_{41}^4)^2 u_i(\Gamma_{41}^4) = 0, \end{cases}$$

其中 $i = 2$,3,4。由 (3.6) 可知， Γ_{21}^2、 Γ_{31}^3 和 Γ_{41}^4 互不相同。因此，上述系统的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{41}^4 \\ (\Gamma_{21}^2)^2 & (\Gamma_{31}^3)^2 & (\Gamma_{41}^4)^2 \end{vmatrix} = (\Gamma_{41}^4 - \Gamma_{31}^3)(\Gamma_{31}^3 - \Gamma_{21}^2)(\Gamma_{41}^4 - \Gamma_{21}^2) \neq 0.$$

因此，上述系统只有零解，即 $u_i(\Gamma^j_{j1}) = 0,\ i,j = 2,3,4$。于是，我们有

$$u_i u_1(\Gamma^j_{j1}) = 0,\ i,j = 2,3,4.$$

对（3.6）沿 u_j 求导，并结合 $u_j(\Gamma^i_{i1}) = 0$ 和 $u_j u_1(\Gamma^i_{i1}) = 0$，得到$u_j(\lambda_i) = 0, i, j = 2,3,4.\square$

3.1.2. 命题 3.2 的证明

假设 H 不是常数，则存在 p的一个邻域 U_p，使得 $H \neq 0$ 和 $\nabla H \neq 0$。方程（2.2）意味着 ∇H 是 A的一个特征向量，对应的特征值为 $-2\varepsilon H$。不失一般性，设 ∇H 的方向为 u_1 和 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$，则第3.1.1小节中的方程和引理 3.5 推导出矛盾。

（3.5）中的第二个方程给出

$$\begin{aligned}&\varepsilon_4(\lambda_2-\lambda_4)\Gamma^4_{32} = \varepsilon_4(\lambda_3-\lambda_4)\Gamma^4_{23} = \varepsilon_3(\lambda_4-\lambda_3)\Gamma^3_{24}\\ =&\varepsilon_3(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma^3_{42} = \varepsilon_2(\lambda_3-\lambda_2)\Gamma^2_{43} = \varepsilon_2(\lambda_4-\lambda_2)\Gamma^2_{34}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

结合方程 (3.1) 和 (3.15)，可得

$$(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_4-\lambda_2)(\Gamma^4_{23}\Gamma^4_{32} + \Gamma^3_{24}\Gamma^3_{42} + \Gamma^2_{34}\Gamma^2_{43}) = 0,$$

i.e.

$$\Gamma^4_{23}\Gamma^4_{32} + \Gamma^3_{24}\Gamma^3_{42} + \Gamma^2_{34}\Gamma^2_{43} = 0. \tag{3.16}$$

由方程 (3.5) 和引理 3.5 可知

$$\Gamma^i_{ij} = 0,\ i,j = 2,3,4. \tag{3.17}$$

对 $\langle R(u_i,u_j)u_k,u_1\rangle$ 和 $\langle R(u_i,u_j)u_i,u_j\rangle$应用高斯方程，其中 i,j,k互不相同，且 $i,j,k = 2,3,4$，结合 (3.1) 、 (3.4) 和 (3.17)，可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon_4(\Gamma^2_{21}-\Gamma^4_{41})\Gamma^4_{32} = \varepsilon_4(\Gamma^3_{31}-\Gamma^4_{41})\Gamma^4_{23} = \varepsilon_3(\Gamma^4_{41}-\Gamma^3_{31})\Gamma^3_{24}\\ =&\varepsilon_3(\Gamma^2_{21}-\Gamma^3_{31})\Gamma^3_{42} = \varepsilon_2(\Gamma^3_{31}-\Gamma^2_{21})\Gamma^2_{43} = \varepsilon_2(\Gamma^4_{41}-\Gamma^2_{21})\Gamma^2_{34},\end{aligned} \tag{3.18}$$

and

$$\begin{cases}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{31} - 2\varepsilon_4\Gamma^4_{23}\Gamma^4_{32} = -c\varepsilon_2\varepsilon_3 - \lambda_2\lambda_3\varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3,\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4\Gamma^2_{21}\Gamma^4_{41} - 2\varepsilon_3\Gamma^3_{24}\Gamma^3_{42} = -c\varepsilon_2\varepsilon_4 - \lambda_2\lambda_4\varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_4,\\ \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4\Gamma^3_{31}\Gamma^4_{41} - 2\varepsilon_2\Gamma^2_{34}\Gamma^2_{43} = -c\varepsilon_3\varepsilon_4 - \lambda_3\lambda_4\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4,\end{cases} \tag{3.19}$$

这与 (3.16) 一起意味着

$$\varepsilon_1(\Gamma_{21}^2\Gamma_{31}^3+\Gamma_{21}^2\Gamma_{41}^4+\Gamma_{31}^3\Gamma_{41}^4)+\varepsilon(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_4)+3c=0. \tag{3.20}$$

下面分别讨论在某点 $\Gamma_{23}^4\neq 0$ 以及在 U_p 中任意一点 $\Gamma_{23}^4=0$ 的情形。

情形 1：在 U_p 中某点 $\Gamma_{23}^4\neq 0$ 。

假设在 $q\in U_p$ 处 $\Gamma_{23}^4\neq 0$ ，则存在一个邻域 $U_q\subset U_p$，使得在 U_q 上 $\Gamma_{23}^4\neq 0$ 。在下面的讨论中，我们在 U_q 上进行。由方程 (3.15) 和 (3.18) 可得

$$\frac{\Gamma_{41}^4-\Gamma_{31}^3}{\lambda_4-\lambda_3}=\frac{\Gamma_{41}^4-\Gamma_{21}^2}{\lambda_4-\lambda_2}=\frac{\Gamma_{31}^3-\Gamma_{21}^2}{\lambda_3-\lambda_2}.$$

由于 $u_i(\Gamma_{j1}^j)=u_i(\lambda_j)=0, i,j=2,3,4$，由上面的方程可知，存在两个光滑函数 μ 和 ν，满足 $u_i(\mu)=u_i(\nu)=0,i=2,3,4$，使得

$$\Gamma_{i1}^i=\mu\lambda_i+\nu,\ i=2,3,4. \tag{3.21}$$

对 (3.21) 中的 i 求和，得

$$f_1=6\varepsilon H\mu+3\nu. \tag{3.22}$$

沿着 u_1 对 (3.21) 求导，利用 (3.5) 和 (3.6)，对于 $i=2,3,4$，有

$$(u_1(\mu)-2\varepsilon H\mu^2+\mu\nu-2H\varepsilon_1)\lambda_i+u_1(\nu)+\nu^2-2\varepsilon H\mu\nu+c\varepsilon_1=0,$$

由此得到

$$\begin{cases}u_1(\mu)=2\varepsilon H\mu^2-\mu\nu+2H\varepsilon_1,\\ u_1(\nu)=-\nu^2+2\varepsilon H\mu\nu-c\varepsilon_1.\end{cases} \tag{3.23}$$

将 (3.21) 代入 (3.20)，得到

$$(\varepsilon_1\mu^2+\varepsilon)(\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)+2\varepsilon_1\mu\nu(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+3\varepsilon_1\nu^2+3c=0,$$

可将其改写为

$$(\varepsilon_1\mu^2+\varepsilon)\mathrm{tr}A^2=(\varepsilon_1\mu^2+\varepsilon)40H^2+24\varepsilon\varepsilon_1H\mu\nu+6\varepsilon_1\nu^2+6c. \tag{3.24}$$

将 (3.21) 和 (3.22) 代入 (3.9)，结合 (3.24)，得到

$$u_1(H)=\frac{-26}{3}\varepsilon H^2\mu-\frac{4\varepsilon_1H\mu^2\nu+\varepsilon\varepsilon_1\mu\nu^2+c\varepsilon\mu}{\varepsilon_1\mu^2+\varepsilon}-2H\nu. \tag{3.25}$$

对 (3.25) 作用 u_1，应用 (3.23)，得到 $u_1u_1(H)$ 的表达式。然后，将 $u_1(H)$ 和 $u_1u_1(H)$ 的表达式代入 (3.7)，结合 (3.24)，得到

$$\begin{aligned}&(36\mu^3\varepsilon+18\mu\varepsilon_1)\nu^3+(300H\mu^4+156\mu^2H\varepsilon\varepsilon_1-72H)\nu^2+(816\mu^5H^2\varepsilon\\&+624\mu^3H^2\varepsilon_1+36\mu^3c\varepsilon\varepsilon_1-192\varepsilon H^2\mu+18c\mu)\nu+940\mu^4H^3\varepsilon\varepsilon_1\\&+728\mu^6H^3+174\mu^4Hc\varepsilon_1+9\mu^4H\lambda\varepsilon_1-304\mu^2H^3+120\mu^2Hc\varepsilon\\&+18\mu^2H\lambda\varepsilon-516H^3\varepsilon\varepsilon_1-54Hc\varepsilon_1+9\varepsilon_1\lambda H=0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

沿 u_1 对 (3.26) 求导，并利用 (3.23) 和 (3.25)，可得

$$d_1\nu^4+d_2\nu^3+d_3\nu^2+d_4\nu+d_5=0,\tag{3.27}$$

其中

$$\begin{aligned}d_1=&-516\mu^5\varepsilon\varepsilon_1-444\mu^3,\\d_2=&-4800\mu^6H\varepsilon_1-4416\mu^4H\varepsilon+420\mu^2H\varepsilon_1+324H\varepsilon,\\d_3=&-15872\mu^7H^2\varepsilon\varepsilon_1-17668\mu^5H^2-726\mu^5c\varepsilon-9\mu^5\lambda\varepsilon+1864\mu^3H^2\varepsilon\varepsilon_1\\&-618\mu^3c\varepsilon_1-18\mu^3\lambda\varepsilon_1+3660\mu H^2+36c\varepsilon\mu-9\mu\lambda\varepsilon,\\d_4=&-21824\mu^8H^3\varepsilon_1-31432\mu^6H^3\varepsilon-3684\mu^6Hc-90\mu^6H\lambda+5320\mu^4H^3\varepsilon_1\\&-3588\mu^4Hc\varepsilon\varepsilon_1-198\mu^4H\lambda\varepsilon\varepsilon_1+17640\mu^2H^3\varepsilon+384\mu^2Hc-126\mu^2H\lambda\\&+2712H^3\varepsilon_1+288Hc\varepsilon\varepsilon_1-18H\lambda\varepsilon\varepsilon_1,\\d_5=&6024\mu^5H^4\varepsilon\varepsilon_1-10192\mu^9H^4\varepsilon\varepsilon_1-18376\mu^7H^4-3116\mu^7H^2c\varepsilon-6\mu^7H^2\lambda\varepsilon\\&-3544\mu^5H^2c\varepsilon_1-18\mu^5H^2\lambda\varepsilon_1-210\mu^5c^2\varepsilon\varepsilon_1-9\mu^5c\lambda\varepsilon\varepsilon_1+26408\mu^3H^4\\&+2260\mu^3H^2c\varepsilon-18\mu^3H^2\lambda\varepsilon+12200\mu H^4\varepsilon\varepsilon_1-174\mu^3c^2-18\mu^3c\lambda\\&+2688\mu H^2c\varepsilon_1-6\mu H^2\lambda\varepsilon_1+36\mu c^2\varepsilon\varepsilon_1-9\mu c\lambda\varepsilon\varepsilon_1.\end{aligned}$$

消去 (3.26) 和 (3.27) 中的 ν，可得到一个关于 H 和 μ 的多项式方程

$$\sum_{k=29}^{33}\sum_{l=k-28}^{7}r_{k,l}H^{2l}\mu^{2k}+\sum_{k=4}^{28}\sum_{l=0}^{7}r_{k,l}H^{2l}\mu^{2k}+\sum_{k=0}^{3}\sum_{l=4-k}^{7}r_{k,l}H^{2l}\mu^{2k}=0,\tag{3.28}$$

其中 $r_{0,\,l}$、$r_{1,\,l}$、$\cdots$、$r_{33,\,l}$ 均为实常数。

对 (3.27) 两边应用 u_1，得到一个关于 H、μ 和 ν 的多项式方程。然后，从该方程和 (3.26) 中消去 ν，得到另一个关于 H 和 μ 的多项式方程

$$(\varepsilon\varepsilon_1+\mu^2)^{10}(\varepsilon\varepsilon_1+2\mu^2)^6(g_1(H,\mu))^2g_2(H,\mu)=0,$$

i.e.

$$(\varepsilon\varepsilon_1+\mu^2)(\varepsilon\varepsilon_1+2\mu^2)g_1(H,\mu)g_2(H,\mu)=0, \tag{3.29}$$

其中

$$\begin{aligned} g_1(H,\mu) =&6160\varepsilon_1 H^2\mu^{14}+16(17136c-62986\varepsilon H^2+1935\lambda)\mu^{12}+69984\varepsilon H^2\\ &+8\varepsilon_1(37935\varepsilon c-512645H^2+8424\varepsilon\lambda)\mu^{10}+48(987\lambda-28138\varepsilon H^2\\ &+1884c)\mu^8+\varepsilon_1(8334\varepsilon c+2136896H^2+10044\varepsilon\lambda)\mu^6+(6570c\\ &+312180\varepsilon H^2-1467\lambda)\mu^4+\varepsilon_1(2106\varepsilon c-14292H^2-567\varepsilon\lambda)\mu^2, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} g_2(H,\mu)=&\sum_{l=4}^{6}s_{17,l}H^{2l}\mu^{34}+\sum_{l=3}^{6}s_{16,l}H^{2l}\mu^{32}+\sum_{l=2}^{6}s_{15,l}H^{2l}\mu^{30}+\sum_{l=1}^{6}s_{14,l}H^{2l}\mu^{28}\\ &+\sum_{k=2}^{13}\sum_{l=0}^{6}s_{k,l}H^{2l}\mu^{2k}+\sum_{l=1}^{6}s_{1,l}H^{2l}\mu^2+\sum_{l=2}^{6}s_{0,l}H^{2l}, \end{aligned}$$

其中 $s_{0,l}$,$s_{1,l}$,$\cdots$,$s_{17,l}$ 均为实常数。我们可以从 (3.28) 和 (3.29) 中消去 μ，并得到关于 H 的一个 696 次多项式方程，这意味着 H 在 U_q 中为常数。因此， $\nabla H=0$ 在 q 处成立，矛盾。

情形 2： $\Gamma^4_{23}\equiv 0$ 在 U_p 上。

在这种情形下，(3.19) 可简化为

$$\begin{cases} \varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^3_{31}=-c-\varepsilon\lambda_2\lambda_3,\\ \varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^4_{41}=-c-\varepsilon\lambda_2\lambda_4,\\ \varepsilon_1\Gamma^3_{31}\Gamma^4_{41}=-c-\varepsilon\lambda_3\lambda_4. \end{cases} \tag{3.30}$$

由于 λ_2、 λ_3 和 λ_4 互不相同，我们有 $c+\varepsilon\lambda_2\lambda_3\neq 0$，或 $c+\varepsilon\lambda_2\lambda_4\neq 0$，或 $c+\varepsilon\lambda_3\lambda_4\neq 0$。因此，上述方程意味着 $\{\Gamma^2_{21},\Gamma^3_{31},\Gamma^4_{41}\}$ 中至少有两项非零。不失一般性，我们假设在 U_p 中任意一点处都有 Γ^2_{21}、 $\Gamma^3_{31}\neq 0$，并分别讨论子情形：$\Gamma^4_{41}\equiv 0$ 在 U_p 上，以及在某一点处 $\Gamma^4_{41}\neq 0$ 。

子情形（1）： $\Gamma^4_{41}\equiv 0$ 在 U_p上。

由 (3.30) 可得 $\lambda_4=0$。若 $c\neq 0$，则 $c+\lambda_2\lambda_4\neq 0$，这意味着 $\Gamma^4_{41}\neq 0$，矛盾。下文中，我们假设 $c=0$。对 $\lambda_2+\lambda_3=6\varepsilon H$ 两边作用 u_1，得到

$$6\varepsilon u_1(H)=(-2\varepsilon H-\lambda_2)\Gamma^2_{21}+(-2\varepsilon H-\lambda_3)\Gamma^3_{31}. \tag{3.31}$$

沿 u_1 对 (3.31) 求导，利用 (3.5) 和 (3.6)，得到 $u_1u_1(H)$ 的表达式，并将其代入 (3.7)，结合 (3.30) 和 (3.31)，可得

$$\begin{aligned}2(-2\varepsilon H-\lambda_2)(\Gamma_{21}^2)^2+2(-2\varepsilon H-\lambda_3)(\Gamma_{31}^3)^2-34\varepsilon_1 H\lambda_2\lambda_3\\+468\varepsilon_1 H^3-9\varepsilon\varepsilon_1\lambda H=0.\end{aligned}\tag{3.32}$$

应用（3.5）、（3.6）和（3.31），沿 u_1 对（3.32）求导，并结合（3.30）和（3.32），我们得到

$$K_1\Gamma_{21}^2+K_2\Gamma_{31}^3=0,\tag{3.33}$$

其中

$$\begin{aligned}K_1=&-680H\lambda_2\lambda_3\varepsilon\varepsilon_1+6552\varepsilon H^3-96H^2\lambda_2\varepsilon+264H\lambda_2\lambda_3\varepsilon\\&+40\lambda_2^2\lambda_3\varepsilon-1404H^2\lambda_2+408H^2\lambda_3-48H\lambda_2^2+80H\lambda_2\lambda_3\\&+34\lambda_3\lambda_2^2-4\lambda_2\lambda_3^2+9\lambda_2\lambda\varepsilon-162H\lambda;\\K_2=&-680H\lambda_2\lambda_3\varepsilon\varepsilon_1+6552\varepsilon H^3-96H^2\lambda_3\varepsilon+264H\lambda_2\lambda_3\varepsilon\\&+40\lambda_3^2\lambda_2\varepsilon-1404H^2\lambda_3+408H^2\lambda_2-48H\lambda_3^2+80H\lambda_2\lambda_3\\&+34\lambda_2\lambda_3^2-4\lambda_3\lambda_2^2+9\lambda_3\lambda\varepsilon-162H\lambda.\end{aligned}$$

由（3.30），我们可以从（3.32）和（3.33）中消去 Γ_{21}^2 和 Γ_{31}^3，并得到 e

$$\begin{aligned}&-32(\lambda_2^6\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^6)+c_1(\lambda_2^5\lambda_3^4+\lambda_2^4\lambda_3^5)+c_2(\lambda_2^5\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^5)+c_3\lambda_2^4\lambda_3^4\\&+c_4(\lambda_2^5\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^5)+c_5(\lambda_2^4\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^4)-9216\varepsilon H^3(\lambda_2^5\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^5)\\&+c_6(\lambda_2^4\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^4)+c_7\lambda_2^3\lambda_3^3+c_8(\lambda_2^4\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^4)+c_9(\lambda_2^3\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^3)\\&+c_{10}(\lambda_2^3\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^3)+c_{11}\lambda_2^2\lambda_3^2+c_{12}(\lambda_2^3+\lambda_3^3)+c_{13}(\lambda_2^2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^2)\\&+c_{14}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+c_{15}\lambda_2\lambda_3+c_{16}(\lambda_2+\lambda_3)+c_{17}=0,\end{aligned}\tag{3.34}$$

其中 c_i、$1\le i\le 17$ 是关于 H 的多项式。对（3.34）作用 u_1，我们得到

$$L_1\Gamma_{21}^2+L_2\Gamma_{31}^3=0,\tag{3.35}$$

其中 L_1 和 L_2 是关于 H、λ_2 和 λ_3 的多项式。由（3.33）和（3.35）可得

$$K_1L_2-K_2L_1=0.$$

考虑到 $\lambda_2+\lambda_3=6\varepsilon H$，我们可以从（3.34）和上述方程中消去 λ_2 和 λ_3，并导出关于H的78次多项式方程，这意味着 H 是一个常数，矛盾。

子情形（2）： U_p中的某点处 $\Gamma_{41}^4 \neq 0$ 。

假设 $\Gamma_{41}^4 \neq 0$ 在 $q \in U_p$，则存在一个邻域 $U_q \subset U_p$，使得 $\Gamma_{41}^4 \neq 0$ 在 U_q 上。对于这个子情形，我们在 U_q上进行讨论。令

$$\mu = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$$

and

$$\nu = \lambda_2\lambda_3\lambda_4.$$

利用 (3.5)，对 $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 6\varepsilon H$、 $\mu = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$ 和 $\nu = \lambda_2\lambda_3\lambda_4$ 两边沿 u_1 求导，然后将所得结果分别乘以 $(c + \varepsilon\lambda_3\lambda_4)\Gamma_{21}^2$，结合 (3.30)，得到

$$\begin{cases} 6\varepsilon u_1(H) = Q(-12\varepsilon Hc^2 - 10H\mu c + 3\varepsilon\nu c - 48H^2\nu + 2\mu\nu), \\ u_1(\mu) = Q[3\nu^2 - 2(12H^2 + \mu)c^2 - 2(\mu^2 + 6\varepsilon H^2\mu - 3H\nu)c - 10\varepsilon H\mu\nu], \\ u_1(\nu) = Q[(-2\varepsilon H\mu - 3\nu)c^2 + (-24\varepsilon H^2\nu - 2\varepsilon\mu\nu)c - 12\varepsilon H\nu^2], \end{cases} \tag{3.36}$$

其中 $Q = \frac{-\varepsilon_1}{(c+\varepsilon\lambda_3\lambda_4)\ \Gamma_{21}^2}$。由 (3.30) 和 (3.36)，(3.7) 可改写为

$$\begin{aligned} &(30\varepsilon Hc^2 - 44Hc^2 - 6\varepsilon\nu c - 2c\nu)\mu^2 + (504H^3c^2 - 36Hc^3\varepsilon \\ &- 9Hc^2\lambda\varepsilon - 12c\nu H^2 - 15\nu c^2\varepsilon - 78H\nu^2)\mu + 3024H^4\nu c \\ &+ 504H^3\varepsilon c^3 - 108H^2\nu\varepsilon c^2 - 54H^2\nu\lambda\varepsilon c + 1080H^3\nu^2 \\ &- 72H\nu^2\varepsilon c - 9H\nu^2\lambda\varepsilon - 18Hc^4 - 9H\lambda c^3 + 9\nu^3\varepsilon - 9\nu c^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

对 (3.37) 作用 u_1，并应用 (3.36)，得到

$$f_1\mu^3 + f_2\mu^2 + f_3\mu + f_4 = 0. \tag{3.38}$$

其中

$f_1 =$(828ε − 256)Hc^3 + (180ε + 80)νc^2;f_2 =4(522ε + 747)$H\nu^2c$ − 1728(
6ε + 5)H^3c^3 − 288(11ε − 46)$H^2\nu c^2$ − 156ν^3+ 4(531ε − 162)Hc^4 + 18(5ε + 6)
$H\lambda c^3$ + 6(10ε + 87)νc^3 − 18$\nu c^2\lambda\varepsilon$;$f_3$ = − 72576H^5c^3 − (22752ε + 8640)
H^3c^4 + 1296$H^3c^3\lambda\varepsilon$ − 283392$H^4\nu c^2$+ 2916$H^2\nu c^2\lambda\varepsilon$ − 3312$H^3\nu^2c$ + (
17928ε + 3888)$H^2\nu c^3$ + 90$H\nu^2c\lambda\varepsilon$+ (6552$\varepsilon$ + 648)
$H\nu^2c^2$ + 1152Hc^5 + 306$Hc^4\lambda$ + 26136$H^2\nu^3$
− 774$\nu^3c\varepsilon$ − 18$\nu^3\lambda\varepsilon$ + 414νc^4 − 45$\nu c^3\lambda$ − 216ν^3c;

$$
\begin{aligned}
f_4 =& 7776H^4\nu\lambda\varepsilon c^2 + 11664H^3\nu^2\lambda\varepsilon c - 311040H^4\nu^3 - 236736H^4\nu\varepsilon c^3 \\
&+ 17280H^3\nu^2\varepsilon c^2 + 108H\lambda\varepsilon c^5 + 16632H^2\nu^3\varepsilon c + 1728H^2\nu^3\lambda\varepsilon - 27\nu\lambda\varepsilon c^4 \\
&- 54H\nu^2\lambda c^2 + 2376H^2\nu\lambda c^3 - 1109376H^5\nu^2 c + 12096H^2\nu c^4 - 27\nu^3\lambda c \\
&- 435456H^6\nu c^2 + 1296H^3\lambda c^4 + 2268H\nu^2 c^3 - 72576H^5\varepsilon c^4 + 216H\varepsilon c^6 \\
&+ 108\nu\varepsilon c^5 - 3348H\nu^4\varepsilon - 12960H^3 c^5 - 972\nu^3 c^2.
\end{aligned}
$$

沿 u_1 对 (3.38) 求导，并利用 (3.36)，可得到一个关于 H、μ 和 ν 的另一个多项式方程，记为 $g(H,\mu,\nu) = 0$。从 (3.37)、(3.38) 和 $g(H,\mu,\nu) = 0$ 中消去 μ，得到

$$
(24336\varepsilon + 18928)\nu^{15} + \sum_{i=0}^{14} h_i\nu^i = 0, \tag{3.39}
$$

and

$$
32(32436060H^2\varepsilon + 50162468H^2 + 2184345c\varepsilon + 1894023c)\nu^{19} + \sum_{i=0}^{18} l_i\nu^i = 0, \tag{3.40}
$$

w这里，h_i、$0 \le i \le 14$ 和 l_j、$0 \le j \le 18$ 都是关于 H 的多项式。

当 $\varepsilon = 1$ 时，(3.39) 和 (3.40) 可改写为

$$
\begin{cases}
(2cH - \nu)(7cH + 4\nu)^2(c^3 - 6cH\nu - 2\nu^2)^3 h_1(H,\nu) = 0, \\
(2cH - \nu)(7cH + 4\nu)^3(c^3 - 6cH\nu - 2\nu^2)^3 h_2(H,\nu) = 0,
\end{cases}
$$

其中

$$
\begin{cases}
h_1(H,\nu) = 338\nu^6 + \sum_{i=0}^{5} t_i\nu^i, \\
h_2(H,\nu) = (254898c + 5162408H^2)\nu^9 + \sum_{i=0}^{8} s_i\nu^i.
\end{cases}
$$

这里，t_i 和 t_j 是关于 H 的多项式，其中 $0 \le i \le 5$ 和 $0 \le j \le 8$。若

$$
(2cH - \nu)(7cH + 4\nu)(c^3 - 6cH\nu - 2\nu^2) \neq 0
$$

在某点 o U_q，我们可以从 $h_1(H,\nu) = 0$ 和 $h_2(H,\nu) = 0$ 中消去 ν，得到一个关于 H 的 94 次多项式方程，这意味着 $\nabla H = 0$ 在o处成立，产生矛盾。

If

$$
(2cH - \nu)(7cH + 4\nu)(c^3 - 6cH\nu - 2\nu^2) \equiv 0
$$

在 U_q上，然后对其作用 u_1，利用（3.36），我们有

$$\begin{aligned}&54c^6H\nu-336c^7H^2+3048c^5H^3\nu+12096c^4H^5\nu+2316c^4H^2\nu^2\\&+147c^5\nu^2+27936c^3H^4\nu^2-1080c^3H\nu^3-1344c^2H^3\nu^3-510c^2\nu^4\\&-10416cH^2\nu^4-2304H\nu^5+(98c^4\nu^2-292c^6H^2+1008c^5H^4\\&+130c^5H\nu+4344c^4H^3\nu+200c^3H^2\nu^2-1532c^2H\nu^3-340c\nu^4)\mu=0.\end{aligned}\tag{3.41}$$

此外，我们断言，在 U_q上有 $7cH+4\nu\equiv 0$。因为若在 U_q中的某一点有 $7cH+4\nu\neq 0$（即 $(2cH-\nu)(c^3-6cH\nu-2\nu^2)=0$），则由(3.41)可得

$$(c+\lambda_2\lambda_3)(c+\lambda_2\lambda_4)(c+\lambda_3\lambda_4)=\nu^2+6cH\nu+c^2\mu+c^3=0,\tag{3.42}$$

这导致矛盾。由$7cH+4\nu=0$ 和(3.41)，我们容易导出一个关于 H 的多项式方程。于是， H 为常数，矛盾。

当 $\varepsilon=-1$时，(3.39)和(3.40)化为

$$\begin{cases}(37cH-2\nu)^2L_1(H,\nu)=0,\\(37cH-2\nu)^3L_2(H,\nu)=0,\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}L_1(H,\nu)=-1352\nu^{13}+\sum_{i=0}^{12}r_i\nu^i,\\L_2(H,\nu)=(254898c+5162408H^2)\nu^{16}+\sum_{i=0}^{15}w_i\nu^i.\end{cases}$$

这里， r_i 和 w_j 都是关于 H的多项式，且分别具有 $0\leq i\leq 12$ 和 $0\leq j\leq 8$。若在 U_q中的某一点 o有 $37cH-2\nu\neq 0$，则可从 $L_1(H,\nu)=0$和 $L_2(H,\nu)=0$中消去 ν，并得到一个关于 H的292次多项式方程，这意味着在 o处有 $\nabla H=0$，从而导致矛盾。若在 U_q中的任一点有 $37cH-2\nu=0$，则对其作用 u_1，并结合(3.36)，可得

$$-1488c\nu H^2-346H\mu c^2-444Hc^3+144H\nu^2+98\nu\mu c+147\nu c^2=0,$$

这与 $37cH-2\nu=0$ 和（3.37）一起意味着 H 是 U_q中的常数，矛盾。□

3.2. 形算子具有形式（II）

命题 3.6 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$中的一个具有真平均曲率向量场的非退化超曲面。假设 M_r^4的形算子 A 具有形式（II），则 M_r^4 具有常平均曲率。

证明 我们假设 λ_1、 λ_2 和 λ_3 彼此不同。当 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$中至多有两个不同的值时，我们省略证明，因为证明过程类似但容易得多。

记 $u_2 = u_{2_1}$和 $u_3 = u_{3_1}$。令 $\nabla_{u_B} u_C = \Gamma_{BC}^D u_D$、 B、 $C = 1_1$、1_2、2、3，则相容条件意味着

$$\Gamma_{D1_1}^{1_2} = \Gamma_{D1_2}^{1_1} = \Gamma_{D2}^2 = \Gamma_{D3}^3 = 0, \tag{3.43}$$

and

$$\Gamma_{D1_1}^{1_1} = -\Gamma_{D1_2}^{1_2}, \Gamma_{D2}^3 = -\varepsilon_2\varepsilon_3\Gamma_{D3}^2, \Gamma_{Di}^{1_1} = -\varepsilon_1\varepsilon_i\Gamma_{D1_2}^i, \Gamma_{Di}^{1_2} = -\varepsilon_1\varepsilon_i\Gamma_{D1_1}^i, \tag{3.44}$$

其中 $i = 2$、3 和 $D = 1_1$、1_2、2、3。将 ∇H 表示为

$$\nabla H = \varepsilon_1 u_{1_2}(H) u_{1_1} + \varepsilon_1 u_{1_1}(H) u_{1_2} + \varepsilon_2 u_2(H) u_2 + \varepsilon_3 u_3(H) u_3. \tag{3.45}$$

假设 H 不是常数，由 (2.2) 可知，无论 A的对应特征值 $-2\varepsilon H$是类光的还是非类光的， ∇H 都是 A的一个特征向量。

情形 1： ∇H 是类光的。

在这种情况下， ∇H 沿着 u_{1_2} 和 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$的方向。由 (3.45) 可知

$$u_{1_1}(H) \neq 0,\ u_{1_2}(H) = u_2(H) = u_3(H) = 0. \tag{3.46}$$

根据联络的对称性 ∇，我们有

$$\Gamma_{BC}^{1_1} = \Gamma_{CB}^{1_1}, \quad B, C = 1_2, 2, 3. \tag{3.47}$$

利用（3.46）和（3.47）研究方程（2.1），对于 $(X, Y, Z) = (u_{1_1}, u_i, u_{1_2})$、$(u_2, u_3, u_{1_2})$、$(u_{1_2}, u_i, u_i)$，其中 $i = 2, 3$，可得

$$\Gamma_{1_1 2}^{1_1} = \Gamma_{1_1 3}^{1_1} = \Gamma_{23}^{1_1} = 0, \tag{3.48}$$

and

$$u_{1_2}(\lambda_i) = (-2\varepsilon H - \lambda_i)\Gamma_{i1_2}^i,\ i = 2, 3. \tag{3.49}$$

由高斯方程计算 $\langle R(u_{1_2}, u_i)u_{1_2}, u_i\rangle$、 $i = 2$、3，结合 (3.43)、(3.44)、(3.47) 和 (3.48)，我们得到

$$u_{1_2}(\Gamma_{i1_2}^i) = \Gamma_{1_2 1_2}^{1_2}\Gamma_{i1_2}^i - (\Gamma_{i1_2}^i)^2,\ i = 2, 3. \tag{3.50}$$

由于 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$，方程 $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4\varepsilon H$ （参见方程 (2.4)）化简为 $\lambda_2 + \lambda_3 = 8\varepsilon H$. 沿 u_{1_2} 对该方程求导，并应用 (3.46) 和 (3.49)，我们得到

$$(-2\varepsilon H - \lambda_2)\Gamma^2_{21_2} + (-2\varepsilon H - \lambda_3)\Gamma^3_{31_2} = 0.$$

利用（3.46）、（3.49）和（3.50）作用于上述方程，得到

$$(-2\varepsilon H - \lambda_2)(\Gamma^2_{21_2})^2 + (-2\varepsilon H - \lambda_3)(\Gamma^3_{31_2})^2 = 0.$$

由 λ_2、$\lambda_3 \neq -2\varepsilon H$ 和 $\lambda_2 + \lambda_3 = 8\varepsilon H$，根据上述两个方程可得

$$\Gamma^2_{21_2} = \Gamma^3_{31_2} \tag{3.51}$$

and

$$-12\varepsilon H\Gamma^2_{21_2} = 0,$$

这结合 $H \neq 0$ 可推出 $\Gamma^2_{21_2} = 0$。结合（3.43）、（3.47）、（3.48）、(3.44), 和（3.51），利用高斯方程计算 $\langle R(u_{1_1}, u_i)u_{1_2}, u_i\rangle$，得到

$$2H\lambda_i = c,\ i = 2, 3,$$

这表明 $\lambda_2 = \lambda_3$，矛盾。

情形 2： ∇H 不是类光的。

注意到形式（II），可知在此情形下 ∇H 沿着 u_2 或 u_3 的方向。不失一般性，设 ∇H 沿着 u_2 的方向，则 $\lambda_2 = -2\varepsilon H$；结合 $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4\varepsilon H$ 可知 $\lambda_3 = 6\varepsilon H - 2\lambda_1$。方程（3.45）和联络的对称性 ∇ 给出

$$u_2(H) \neq 0,\ u_B(H) = 0,\ B = 1_1, 1_2, 3. \tag{3.52}$$

and

$$\Gamma^2_{BC} = \Gamma^2_{CB}, \quad B, C = 1_1, 1_2, 3. \tag{3.53}$$

利用 (3.43)、(3.44)、(3.52) 和 (3.53)，由 (2.1) 可推得

$$u_{1_2}(\lambda_1) = \Gamma^{1_1}_{1_23} = \Gamma^{1_1}_{1_23} = \Gamma^2_{31_1} = \Gamma^2_{31_2} = \Gamma^3_{31_2} = \Gamma^2_{2B} = 0, \tag{3.54}$$

$$u_{1_2}(\lambda_3) = (\lambda_1 - \lambda_3)\Gamma^3_{31_2},\ \ \Gamma^{1_1}_{1_13} = \Gamma^{1_2}_{1_23} = \frac{u_3(\lambda_1)}{\lambda_3 - \lambda_1}, \tag{3.55}$$

and

$$\Gamma_{1_12}^{1_1}=\Gamma_{1_22}^{1_2}=\frac{u_2(\lambda_1)}{-2\varepsilon H-\lambda_1},\quad \Gamma_{32}^{3}=\frac{u_2(\lambda_3)}{-2\varepsilon H-\lambda_3}. \tag{3.56}$$

设 $e_1=\frac{u_{1_1}-u_{1_2}}{\sqrt{2}}$和 $e_2=\frac{u_{1_1}+u_{1_2}}{\sqrt{2}}$，则 $\mathfrak{E}=\{e_1,e_2,u_2,u_3\}$ 是 $T_xM_r^4$ 的标准正交基。容易得到

$$\nabla_{e_2}e_2(H)-\nabla_{e_1}e_1(H)=\Gamma_{1_11_2}^2+\Gamma_{1_21_1}^2,$$

方程 (2.3) 可化简为

$$u_2u_2(H)+(2\Gamma_{1_12}^{1_1}+\Gamma_{32}^3)u_2(H)-\varepsilon\varepsilon_2H\mathrm{tr}A^2+\varepsilon_2\lambda H=0, \tag{3.57}$$

其中

$$\mathrm{tr}A^2=2\lambda_1^2+\lambda_3^2+4H^2.$$

利用 $\langle R(u_2,u_3)u_3,u_2\rangle$ 和 $\langle R(u_2,u_{1_1})u_{1_2},u_2\rangle$ 的高斯方程，结合 (3.43)、(3.44)、(3.53) 和 (3.54)，不难验证

$$\begin{cases}u_2(\Gamma_{32}^3)+(\Gamma_{32}^3)^2=2H\varepsilon_2\lambda_3-c\varepsilon_2,\\ u_2(\Gamma_{1_12}^{1_1})+(\Gamma_{1_12}^{1_1})^2=2H\varepsilon_2\lambda_1-c\varepsilon_2.\end{cases} \tag{3.58}$$

Let

$$f_k=(\Gamma_{1_12}^{1_1})^k+(\Gamma_{1_22}^{1_2})^k+(\Gamma_{32}^3)^k,\ k=1,2,\cdots,$$

于是 (3.10) 也成立。我们可以将 f_k, $k=2,3,4,5$ 写成关于 f_1, H 及其沿 u_2 的导数的表达式，与 (3.8) 类似，只需在 (3.8) 中用 u_2 替换 u_1。然后，按照引理 3.4 的证明过程，可得 $u_B(f_1)=0$，其中 $B=1_1,1_2,3$。此外，我们容易得到 $u_Bu_2^{(k)}(f_1)=u_Bu_2^{(k)}(H)=0$，其中 $B=1_1,1_2,3$ 以及 $k=1,2$。因此，我们推出

$$u_B(f_k)=0,\ B=1_1,1_2,3,\quad k=1,2,$$

从而得到

$$\begin{cases}2u_B(\Gamma_{1_12}^{1_1})+u_B(\Gamma_{32}^3)=0,\\ 2\Gamma_{1_12}^{1_1}u_B(\Gamma_{1_12}^{1_1})+\Gamma_{32}^3u_B(\Gamma_{32}^3)=0.\end{cases}$$

观察方程 (3.58)，我们知道 $\Gamma_{1_12}^{1_1}\neq\Gamma_{32}^3$。因此，上述方程给出

$$u_B(\Gamma_{1_12}^{1_1})=u_B(\Gamma_{32}^3)=0,\ B=1_1,1_2,3.$$

用 u_B、 $B = 1_1$、1_2、3 作用于方程 (3.58)，利用上述方程，我们得到

$$u_B(\lambda_1) = u_B(\lambda_3) = 0,\ B = 1_1, 1_2, 3,$$

这与 (3.55) 一起推出

$$\Gamma^{1_1}_{1_13} = \Gamma^{3}_{31_2} = 0. \tag{3.59}$$

对 $\langle R(u_3, u_{1_1})u_3, u_{1_2}\rangle$ 应用高斯方程，结合 (3.43)、(3.44)、(3.53)、(3.54) 和 (3.59)，可得

$$\Gamma^{3}_{32}\Gamma^{1_1}_{1_12} = 2\varepsilon\varepsilon_2\lambda_1^2 - 6\varepsilon_2 H\lambda_1 - c\varepsilon_2. \tag{3.60}$$

将 $\Gamma^3_{32} = {}^{u_2}\!/_{(3\varepsilon H-\lambda_1)\ -4\varepsilon H+\lambda_1}$ 和 $\Gamma^{1_1}_{1_12} = {}^{u_2}\!/_{(\lambda_1)\ \overline{-2\varepsilon H-\lambda_1}}$ 代入 (3.58)，再结合 (3.57) 和 (3.60) 消去 $u_2u_2(H)$ 和 $u_2u_2(\lambda_1)$，可得

$$\begin{aligned}\big(8\Gamma^{1_1}_{1_12} + 4\Gamma^{3}_{32}\big)u_2(H) =& -168\varepsilon\varepsilon_2 H^3 + 202\varepsilon_2 H^2\lambda_1 - 64\varepsilon\varepsilon_2 H\lambda_1^2 + 4\varepsilon_2\lambda_1^3 \\ &+ 26c\varepsilon_2 H - 2c\varepsilon\varepsilon_2\lambda_1 + 3\varepsilon_2\lambda H.\end{aligned} \tag{3.61}$$

对 (3.61) 关于 u_2 求导，应用 (3.57)、(3.58) 和 (3.60)，可得

$$f_1(H, \lambda_1)\Gamma^{1_1}_{1_12} + g_1(H, \lambda_1)\Gamma^{3}_{32} = h_1(H, \lambda_1)u_2(H), \tag{3.62}$$

其中

$$\begin{aligned}f_1(H, \lambda_1) &= 1228\varepsilon H^3 + 136\varepsilon H\lambda_1^2 - 852H^2\lambda_1 + 4c\varepsilon\lambda_1 - 82cH - 17\lambda H,\\ g_1(H, \lambda_1) &= 496\varepsilon H^3 + 152\varepsilon H\lambda_1^2 - 500H^2\lambda_1 - 8\lambda_1^3 + 4c\varepsilon\lambda_1 - 52cH - 10\lambda H,\\ h_1(H, \lambda_1) &= 600H^2\varepsilon + 88\varepsilon\lambda_1^2 - 500H\lambda_1 - 50c - 3\lambda.\end{aligned}$$

沿 u_2 对 $2\lambda_1 + \lambda_3 = 6\varepsilon H$ 求导，并利用 (3.56)，可知

$$3\varepsilon u_2(H) = -(2\varepsilon H + \lambda_1)\Gamma^{1_1}_{1_12} + (-4\varepsilon H + \lambda_1)\Gamma^{3}_{32}. \tag{3.63}$$

将 (3.63) 代入 (3.62)，则

$$f_2(H, \lambda_1)\Gamma^{1_1}_{1_12} + g_2(H, \lambda_1)\Gamma^{3}_{32} = 0, \tag{3.64}$$

其中

$$\begin{aligned}f_2(H, \lambda_1) =& 2484H^3 - 2156H^2\varepsilon\lambda_1 - 88\varepsilon\lambda_1^3 + 732H\lambda_1^2\\ &- (146c + 45\lambda)H\varepsilon + (62c + 3\lambda)\lambda_1,\\ g_2(H, \lambda_1) =& 16(93 - 450\varepsilon)H^3 - 300(5\varepsilon - 26)\lambda_1 H^2 + 12\lambda_1 c\\ &- 12(213\varepsilon - 38)H\lambda_1^2 - 6(26c\varepsilon + 5\varepsilon\lambda - 100c\\ &- 6\lambda)H - 24(\varepsilon - 11)\lambda_1^3 - 3(50c + 3\lambda)\lambda_1\varepsilon.\end{aligned}$$

将（3.63）两边乘以 $8\Gamma^{1_1}_{1_12}+4\Gamma^3_{32}$，并应用（3.60）和（3.61），得到

$$(16\varepsilon H+8\lambda_1)(\Gamma^{1_1}_{1_12})^2+(16\varepsilon H-4\lambda_1)(\Gamma^3_{32})^2=h_3(H,\lambda_1), \tag{3.65}$$

其中

$$\begin{aligned}h_3(H,\lambda_1)=&-366\varepsilon\varepsilon_2H^2\lambda_1-4\varepsilon\varepsilon_2\lambda_1^3+504\varepsilon_2H^3+88\varepsilon_2H\lambda_1^2\\&-38\varepsilon c\varepsilon_2H-9\varepsilon\varepsilon_2\lambda H+2c\varepsilon_2\lambda_1.\end{aligned}$$

利用 (3.60)、(3.64) 和 (3.65)，我们可以得到关于 H 和 λ_1 的多项式方程

$$(109824-1053952\varepsilon)\lambda_1^9+(21186688H-2300928H\varepsilon)\lambda_1^8+\sum_{i=0}^{7}r_i\lambda_1^i=0,$$

其中 r_i、$0\le i\le 7$ 是关于 H 的多项式。对上述方程连续两次施加 u_3，并利用 (3.58)、(3.60)、(3.63) 和 (3.64)，可得关于 H 和 λ_1 的另一个代数方程

$$\begin{aligned}(-13895028523008\varepsilon+110378156212224)\lambda_1^{17}-(&4577376380387328\varepsilon\\&-672576751853568)H\lambda_1^{16}+\sum_{j=0}^{15}s_j\lambda_1^j=0,\end{aligned}$$

其中 s_j、$0\le j\le 15$ 是关于 H 的多项式。消去上述两个方程中的 λ_1，可推出关于 H 的一个常系数代数方程。因此，H 必为常数，这就产生了矛盾。□

3.3. 形算子具有形式 (III)

命题 3.7 设 M_r^4 是 $N_s^5(c)$ 中的一个非退化超曲面，且具有真平均曲率向量场。假设 M_r^4 的形算子 A 具有形式 (III)，则 M_r^4 具有常平均曲率。

证明 假设 H 不是常数，则 ∇H 是 A的特征向量，其对应的特征值为 $-2\varepsilon H$。令 $\nabla_{u_B}u_C=\Gamma^D_{BC}u_D$, $B,C=1_1,1_2,2_1,2_2,$，则

$$\Gamma^{j_b}_{Di_a}=-\varepsilon_i\varepsilon_j\Gamma^{i_{3-a}}_{Dj_{3-b}},\ i,j,a,b=1,2,$$

其中 $D = 1_1$、1_2、2_1、2_2。观察 A的形式（III），我们知道特征向量 ∇H的方向为 u_{1_2} 或 u_{2_2}。不失一般性地，假设 ∇H 的方向为 u_{1_2}，则 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$ 和 $\lambda_2 = 4\varepsilon H$。

由此可得

$$u_{1_1}(H) \neq 0,\ u_{1_2}(H) = u_{2_1}(H) = u_{2_2}(H) = 0,$$

and

$$\Gamma^{1_1}_{BC} = \Gamma^{1_1}_{CB}, \quad B, C \neq 1_1.$$

由Codazzi方程可推得

$$\Gamma^{1_1}_{1_1 2_2} = \Gamma^{1_1}_{2_2 2_2} = \Gamma^{2_1}_{2_1 1_2} = 0.$$

利用 $\langle R(u_{1_1}, u_{2_1})u_{1_2}, u_{2_2}\rangle$的高斯方程，结合以上结果，得到

$$c - 8\varepsilon H^2 = 0,$$

这说明 H 是一个常数，产生矛盾。 □

3.4. 形算子具有形式（IV）

命题3.8 设 M^4_r是 $N^5_s(c)$中的一个非退化超曲面，且其具有真平均曲率向量场。假设 M^4_r的形算子 A 具有形式（IV），则 M^4_r 具有常平均曲率。

证明 记作 $u_2 = u_{2_1}$，并令 $\nabla_{u_B} u_C = \Gamma^D_{BC} u_D$、 B、 $C = 1_1$、1_2、1_3、2。容易得到

$$\Gamma^{1_3}_{D1_1} = \Gamma^{1_1}_{D1_3} = \Gamma^{1_2}_{D1_2} = \Gamma^2_{D2} = 0, \tag{3.66}$$

and

$$\Gamma^{1_b}_{D1_a} = -\Gamma^{1_{4-a}}_{D1_{4-b}},\ \Gamma^2_{D1_a} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\Gamma^{1_{4-a}}_{D2}, \tag{3.67}$$

其中 a、 $b = 1$、2、3。假设 H不是常数，则无论 ∇H是否为类光向量，它都是 A的特征向量。

情形 1： ∇H 是类光的。

在这种情况下， ∇H 沿着 u_{1_3} 和 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$的方向， $\lambda_2 = 10\varepsilon H$。由此可得

$$u_{1_1}(H) \neq 0,\ u_{1_2}(H) = u_{1_3}(H) = u_2(H) = 0.$$

and

$$\Gamma^{1_1}_{BC} = \Gamma^{1_1}_{CB}, \quad B, C \neq 1_1.$$

应用Codazzi方程，我们得出

$$\Gamma^{1_1}_{1_12} = \Gamma^{1_1}_{1_22} = \Gamma^{2}_{21_2} = \Gamma^{2}_{21_3} = 0.$$

根据高斯方程计算 $\langle R(u_{1_1}, u_2)u_{1_3},\ u_2\rangle$，结合上述方程，得到

$$c\varepsilon_1 - 20\varepsilon\varepsilon_1 H^2 = 0,$$

矛盾。

情形 2: ∇H 不是类光的。

我们知道 ∇H 沿着 u_2、$\lambda_2 = -2\varepsilon H$ 和 $\lambda_1 = 2\varepsilon H$的方向。因此，

$$u_2(H) \neq 0,\ u_B(H) = 0, B \neq 2. \tag{3.68}$$

and

$$\Gamma^{2}_{BC} = \Gamma^{2}_{CB}, \quad B, C \neq 2. \tag{3.69}$$

由Codazzi方程可得

$$\Gamma^{2}_{21_1} = \Gamma^{2}_{21_2} = \Gamma^{2}_{21_3} = \Gamma^{2}_{1_31_2} = \Gamma^{2}_{1_31_3} = \Gamma^{1_1}_{21_2} = \Gamma^{1_2}_{21_3} = 0,$$

$$W := \Gamma^{1_1}_{1_12} = \Gamma^{1_2}_{1_22} = \Gamma^{1_3}_{1_32},\ \ u_2(H) = -2HW,$$

利用高斯方程计算 $\langle R(u_2, u_{1_3})u_2,\ u_{1_1}\rangle$，结合上述方程，可得

$$u_2(W) + W^2 = 4\varepsilon_1 H^2 - c\varepsilon_1. \tag{3.70}$$

设 $e_1 = \frac{u_{1_1} - u_{1_3}}{\sqrt{2}}$、$e_2 = u_{1_2}$和 $e_3 = \frac{u_{1_1} + u_{1_3}}{\sqrt{2}}$，则 $\mathfrak{E} = \{e_1, e_2, e_3, u_2\}$ 是 $T_pM^4_r$ 的标准正交基，且 (2.3) 可改写为

$$2Wu_2(H) + u_2u_2(H) - 16\varepsilon_1\varepsilon H^3 + \lambda\varepsilon_1 H = 0.$$

将 $u_2(H) = -2HW$ 代入上面的方程，结合 (3.70)，得到

$$2HW^2 - 8(1 + 2\varepsilon)\varepsilon_1 H^3 + 2c\varepsilon_1 H + \lambda\varepsilon_1 H = 0. \tag{3.71}$$

沿 u_2 对 (3.71) 求导，利用 $u_2(H) = -2HW$ 和 (3.70)，得到

$$-2W[4HW^2 - 16(2 + 3\varepsilon)\varepsilon_1 H^3 + 4c\varepsilon_1 H + \lambda\varepsilon_1 H] = 0,$$

结合 (3.71)，可得

$$2W[16(1 + \varepsilon)\varepsilon_1 H^3 + \lambda\varepsilon_1 H] = 0.$$

由于 $u_2(H) \neq 0$，我们知道 $W \neq 0$。上述方程意味着 H 是常数，产生矛盾。□

3.5. 形算子具有形式（V）

命题 3.9 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$ 中具有真平均曲率向量场的非退化超曲面。假设 M_r^4的形算子 A 具有形式（V），则 M_r^4 具有常平均曲率。

对于形式（V），由Codazzi方程和高斯方程推导出的方程（3.74）和（3.75）非常复杂，相较于形式（I）、（II）、（III）和（IV）的方程更是如此。然而，通过创造性地构造项 b_k, c_k（见（3.76））， 并令 $f_k = (\Gamma_{21}^2)^k + 2b_k$，其中 $k = 1, \cdots, 5$，我们为仿照形式（I）完成证明提供了可能。

证明 记 $u_1 = u_{1_1}, u_2 = u_{2_1}, u_{\bar{3}} = u_{\bar{3}_1}$和$u_{\tilde{3}} = u_{\tilde{3}_1}$。令 $\nabla_{u_B} u_C = \Gamma_{BC}^D u_D$, $B, C = 1, 2, \bar{3}, \tilde{3}$，则有

$$\Gamma_{BD}^D = 0, \quad \Gamma_{B2}^1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2\Gamma_{B1}^2, \quad \Gamma_{Bi}^{\bar{3}} = -\varepsilon_i\Gamma_{B\bar{3}}^i, \quad \Gamma_{Bi}^{\tilde{3}} = \varepsilon_i\Gamma_{B\tilde{3}}^i, \quad \Gamma_{B\bar{3}}^{\bar{3}} = \Gamma_{B\tilde{3}}^{\bar{3}},$$

$\bar{}$ $\tilde{}$，其中 $B, D = 1, 2, 3, 3$以及 $i = 1, 2$。

假设 H 不是常数，则存在 p 的一个邻域 U_p，使得 $H \neq 0$ 且 $\nabla H \neq 0$。由 (2.2) 可知， ∇H 是 A的特征向量，其方向为 u_1 或 u_2。不失一般性，假设 ∇H 的方向为 u_1，则 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$,

$$u_1(H) \neq 0, \ u_2(H) = u_{\bar{3}}(H) = u_{\tilde{3}}(H) = 0.$$

and

$$\Gamma_{BD}^1 = \Gamma_{DB}^1.$$

方程 (2.3) 给出

$$u_1u_1(H) + (\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}} + \Gamma_{\tilde{3}1}^{\tilde{3}})u_1(H) - \varepsilon\varepsilon_1 H\mathrm{tr}A^2 + \varepsilon_1\lambda H = 0. \tag{3.72}$$

由（2.1）可得，当（X, Y, Z）=（u_1, u_B, u_1）、（u_B, u_1, u_B）、（u_B, u_D, u_1）、$\bar{}$ $\tilde{}$$B$、$D = 2$、3、3 时，有

$$\Gamma_{1B}^1 = \Gamma_{2\bar{3}}^1 = \Gamma_{2\tilde{3}}^1 = 0, \quad \Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}} = \Gamma_{\tilde{3}1}^{\tilde{3}}, \quad \text{with } B = 2, \bar{3}, \tilde{3}, \tag{3.73}$$

and

$$\begin{cases} u_1(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\Gamma_{21}^2, \\ u_1(\gamma_3) = (\lambda_1 - \gamma_3)\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}} + \tau_3\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}, \\ u_1(\tau_3) = (\lambda_1 - \gamma_3)\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}} - \tau_3\Gamma_{\tilde{3}1}^{\tilde{3}}. \end{cases} \tag{3.74}$$

若 $\lambda_2 = \lambda_1$，则上述方程意味着 $u_1(H) = 0$，这与 $u_1(H) \neq 0$ 相矛盾。因此，$\lambda_2 \neq \lambda_1$。对 $\langle R(u_1, u_B)u_B, u_1\rangle$ 和 $\langle R(u_1, u_{\bar{3}})u_{\tilde{3}}, u_1\rangle$ 使用高斯方程，并令 $B = 2, \bar{3}, \tilde{3}$，可得

$$\begin{cases} u_1(\Gamma_{21}^2) = -(\Gamma_{21}^2)^2 + (2H\lambda_2 - c)\varepsilon_1, \\ u_1(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}) = -(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2 + (\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}})^2 + (2H\gamma_3 - c)\varepsilon_1, \\ u_1(\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}) = -2\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}} + 2H\tau_3\varepsilon_1. \end{cases} \tag{3.75}$$

按如下方式构造项 b_k 和 c_k，其中 $k = 1、\cdots、5$

$$\begin{cases} b_1 = \Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}, \\ c_1 = \Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}, \\ b_l = b_1 b_{l-1} - c_1 c_{l-1}, \ l = 2, 3, 4, 5 \\ c_l = b_1 c_{l-1} + c_1 b_{l-1}, \ l = 2, 3, 4, 5. \end{cases} \tag{3.76}$$

设 $f_k = (\Gamma_{21}^2)^k + 2b_k$，其中 $k = 1、\cdots、5$，我们将得到 (3.8)，并且 $u_B(f_1) = 0$ 也成立，其中 $B = 2、\bar{3}、\tilde{3}$。随后，我们可以得出 $u_B(\lambda_2) = u_B(\gamma_3) = u_B(\tau_3) = 0$、$B = 2、\bar{3}、\tilde{3}$，这与引理 3.5 类似，并将在接下来的证明过程中发挥重要作用。

引理 3.10 (3.8)成立。

证明 由于 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$，方程 (2.4) 给出 $\lambda_2 + 2\gamma_3 = 6\varepsilon H$。沿 u_1 对 $f_k = (\Gamma_{21}^2)^k + 2b_k$ 求导，其中 $k = 1、2、3、4$，利用 (3.75)，可得

$$f_{k+1} = -\frac{1}{k}u_1(f_k) - c\varepsilon_1 f_{k-1} + 2\varepsilon_1 H Q_{k-1}, \tag{3.77}$$

其中 $f_0 = 1$ 和 $Q_{k-1} = \lambda_2(\Gamma_{21}^2)^{k-1} + 2\gamma_3 b_{k-1} - 2\tau_3 c_{k-1}$。此处，$b_0 = 1$ 和 $c_0 = 0$。

沿着 u_1 对 $\lambda_2 + 2\gamma_3 = 6\varepsilon H$ 求 k 阶导数，令 $k = 1, 2, 3$，结合 (3.74) 和 (3.75)，我们得到

$$Q_1 = -6\varepsilon u_1(H) - 2\varepsilon H f_1, \tag{3.78}$$

$Q_2 = 3\varepsilon u_1^{(2)}(H) + \varepsilon H u_1(f_1) + \varepsilon f_1 u_1(H) - \varepsilon H f_2 - 4\varepsilon_1 H^3 - 3\varepsilon\varepsilon_1 H c + \varepsilon_1 H \mathrm{tr} A^2$，并且

$$\begin{aligned} 3Q_3 =& \varepsilon H u_1(f_2) - 3\varepsilon u_1^{(3)}(H) + \varepsilon f_2 u_1(H) - 2\varepsilon u_1(H)u_1(f_1) \\ &+ 12\varepsilon_1 H^2 u_1(H) - \varepsilon_1 u_1(H)\mathrm{tr}A^2 - \varepsilon f_1 u_1^{(2)}(H) + 15\varepsilon\varepsilon_1 c u_1(H) \\ &- \varepsilon H u_1^{(2)}(f_1) + 4\varepsilon\varepsilon_1 c H f_1 - 2\varepsilon H f_3 - \varepsilon_1 H u_1(\mathrm{tr}A^2) \\ &+ 4\varepsilon_1 H(\lambda_2^2\Gamma_{21}^2 + 2(\gamma_3^2 - \tau_3^2)\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}} - 4\gamma_3\tau_3\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}). \end{aligned}$$

分别将 (3.74) 中的第一个、第二个和第三个方程乘以 λ_2、 γ_3 和 τ_3，然后由这些结果可得

$$\lambda_2^2\Gamma_{21}^2+2(\gamma_3^2-\tau_3^2)\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}-4\gamma_3\tau_3\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}=-2\varepsilon HQ_1-\frac{1}{2}u_1(\mathrm{tr}A^2)+4Hu_1(H).$$

应用 (3.72) 及上述方程，由 (3.77) 可推出该式成立。□ (3.8)

经过计算，我们很容易发现 (3.10) 也成立。接着，按照引理 3.4 的证明过程（将指标 $i\in\{2,3,4\}$ 替换为 $B\in\{2,\bar{3},\tilde{3}\}$），可得 $u_B(f_1)=0$，其中 $B=2,\bar{3},\tilde{3}$。

引理 3.11 我们有

$$u_B(\Gamma_{D1}^D)=u_B(\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}})=u_B(\lambda_2)=u_B(\gamma_3)=u_B(\tau_3)=0,$$

¯ ˜，其中 $B,D=2,\bar{3},\tilde{3}$。

证明 由于 $u_B(f_1)=u_B(H)=0$, $B=2,\bar{3},\tilde{3}$，可得

$$u_Bu_1^{(k)}(f_1)=u_Bu_1^{(k)}(H)=0,\ B=2,\bar{3},\tilde{3},\ k=1,2,3.$$

观察 (3.8) 中 f_k, $k=2,3$ 的表达式，并结合上述方程，可得

$$u_B(f_k)=0,\ B=2,\bar{3},\tilde{3},\ k=1,2,3,$$

由此可得

$$(\Gamma_{21}^2)^{k-1}u_B(\Gamma_{21}^2)+2b_{k-1}u_B(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})-2c_{k-1}u_B(\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}})=0,k=1,2,3.$$

这里， $b_0=1$ 和 $c_0=0$。该方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ \Gamma_{21}^2 & 2\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}} & -2\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}\\ (\Gamma_{21}^2)^2 & 2((\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2-(\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}})^2) & -4\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}\end{vmatrix}=-4\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}[(\Gamma_{21}^2-\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2+(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2].$$

由于 $\tau_3\neq0$，(3.75) 的第三个方程意味着 $\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}}\neq0$。因此，上述系数行列式不等于零，于是

$$u_B(\Gamma_{21}^2)=u_B(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})=u_B(\Gamma_{\tilde{3}1}^{\bar{3}})=0,\ B=2,\bar{3},\tilde{3}.$$

沿着 u_B、 $B=2$、$\bar{3}$、$\tilde{3}$ 对方程 (3.75) 求导，并结合上述方程，我们得到

$$u_B(\lambda_2)=u_B(\gamma_3)=u_B(\tau_3)=0,\ B=2,\bar{3},\tilde{3}.$$

□

现在，我们继续证明命题 3.9。

应用引理 3.11，由方程 (2.1) 可得，对于 (X,Y,Z) =(u_B,u_D,u_B), $(u_2,u_{\bar{3}},u_{\tilde{3}})$, $(u_2,u_{\tilde{3}},u_{\bar{3}})$，其中 $B,D=2,\bar{3},\tilde{3}$，有

$$\begin{cases}(\gamma_3-\lambda_2)\Gamma^2_{2\bar{3}}-\tau_3\Gamma^2_{2\tilde{3}}=0,\\(\gamma_3-\lambda_2)\Gamma^2_{2\tilde{3}}+\tau_3\Gamma^2_{2\bar{3}}=0,\\-2\tau_3\Gamma^{\bar{3}}_{2\tilde{3}}=(\lambda_2-\gamma_3)\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}2}-\tau_3\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2},\\2\tau_3\Gamma^{\bar{3}}_{2\tilde{3}}=(\lambda_2-\gamma_3)\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}2}+\tau_3\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}2},\\(\lambda_2-\gamma_3)\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}+\tau_3\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}=0,\\(\lambda_2-\gamma_3)\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}2}-\tau_3\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}=0,\\\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}\bar{3}}=\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}\tilde{3}}=0,\end{cases}\tag{3.79}$$

由此可得

$$\Gamma^2_{2\bar{3}}=\Gamma^2_{2\tilde{3}}=\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}\tilde{3}}=\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}\tilde{3}}=\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}2}+\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}2}=\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}2}-\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}=0,$$

and

$$(\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}2})^2+(\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}2})^2-2\Gamma^{\tilde{3}}_{\tilde{3}2}\Gamma^{\tilde{3}}_{2\bar{3}}=0.\tag{3.80}$$

利用高斯方程计算 $\langle R(u_2,u_B)u_2,u_B\rangle$, $\langle R(u_2,u_B)u_2,u_D\rangle$, $\langle R(u_B,u_D)u_B,u_D\rangle$ 和 $\langle R(u_2,u_B)u_D,u_1\rangle$，其中 $B,D=\bar{3},\tilde{3}$ 和 $B\neq D$，结合 (3.73) 及上述两个方程，可得

$$\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}(\Gamma^2_{21}-\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})+\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}2}\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1}=0,\tag{3.81}$$

and

$$\begin{cases}-\varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1}+2\varepsilon_2\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}2}\Gamma^{\tilde{3}}_{2\bar{3}}=\varepsilon\lambda_2\tau_3,\\\varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1}+2\varepsilon_2\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}\Gamma^{\tilde{3}}_{2\bar{3}}=-c-\varepsilon\lambda_2\gamma_3,\\\varepsilon_1[(\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})^2+(\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})^2]-4\varepsilon_2\Gamma^{\tilde{3}}_{\bar{3}2}\Gamma^{\tilde{3}}_{2\bar{3}}=-c-\varepsilon(\gamma_3^2+\tau_3^2).\end{cases}\tag{3.82}$$

(3.82) 的第二个和第三个方程意味着

$$\varepsilon_1[(\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})^2+(\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})^2+2\Gamma^2_{21}\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1}]=-3c-2\varepsilon\lambda_2\gamma_3-\varepsilon(\gamma_3^2+\tau_3^2).\tag{3.83}$$

˜情形 1：$\Gamma^3_{\bar{3}2}\neq 0$ 在 U_p 中的某一点。

˜我们假设 $\Gamma^3_{\bar{3}2} \neq 0$ 在一个邻域 $U_q \subset U_p$ 上成立，并在 U_q 上进行讨论。由 (3.79) 和 (3.81) 中的第五个方程可得

$$\frac{\Gamma^2_{21} - \Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1}}{\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1}} = \frac{\lambda_2 - \gamma_3}{\tau_3}.$$

根据引理 3.11，由上面的方程可知，存在两个光滑函数 μ 和 ν，满足 $u_B(\mu) = u_B(\nu) = 0$, $B = 2, \bar{3}, \tilde{3}$，使得

$$\Gamma^2_{21} = \mu\lambda_2 + \nu,\ \Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1} = \mu\gamma_3 + \nu,\ \Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1} = \mu\tau_3. \tag{3.84}$$

方程 (3.22) 也成立。利用 (3.74) 和 (3.75)，沿 u_1 对 (3.84) 中的方程求导，可得 (3.23)。将 (3.84) 代入 (3.83)，得到

$$(\varepsilon_1\mu^2 + \varepsilon)(\gamma_3^2 + 2\lambda_2\gamma_3 + \tau_3^2) + 2\varepsilon_1\mu\nu(\lambda_2 + 2\gamma_3) + 3\varepsilon_1\nu^2 + 3c = 0. \tag{3.85}$$

由于

$$\begin{aligned}\gamma_3^2 + 2\lambda_2\gamma_3 + \tau_3^2 &= \frac{1}{2}[(\lambda_2 + 2\gamma_3)^2 - (\lambda_2^2 + 2\gamma_3^2 - 2\tau_3^2)] \\ &= 20H^2 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2,\end{aligned}$$

方程 (3.85) 可改写为 (3.24)。将 (3.84) 代入 (3.78)，结合 (3.22) 和 (3.24)，可得 (3.25)。按照第3.1节中某点处情形的推导过程，仅将 (3.7) 改为 (3.72)，便可推出矛盾。

˜情形 2: $\Gamma^3_{\bar{3}2} \equiv 0$ 在 U_p上。

由（3.80）可得 $\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}2} = 0$。于是，（3.82）可简化为

$$\begin{cases}\varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1} = -\varepsilon\lambda_2\tau_3, \\ \varepsilon_1\Gamma^2_{21}\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1} = -c - \varepsilon\lambda_2\gamma_3, \\ \varepsilon_1[(\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1})^2 + (\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1})^2] = -c - \varepsilon(\gamma_3^2 + \tau_3^2).\end{cases} \tag{3.86}$$

子情形（1）： $\Gamma^2_{21} \equiv 0$ 在 U_p上。

(3.86) 的第一和第二个方程告诉我们 $\lambda_2 = 0$ 和 $c + \varepsilon\lambda_2\gamma_3 = 0$。若 $c \neq 0$，则 $c + \varepsilon\lambda_2\gamma_3 \neq 0$，这就产生了矛盾。下文中，我们假设 $c = 0$。沿着 u_1 对 $\gamma_3 = 3\varepsilon H$ 两边求导，并利用 (3.74)，得到

$$3\varepsilon u_1(H) = (-2\varepsilon H - \gamma_3)\Gamma^{\bar{3}}_{\tilde{3}1} + \tau_3\Gamma^{\bar{3}}_{\bar{3}1}. \tag{3.87}$$

应用 (3.86) 和 (3.87)，我们可以将 (3.72) 改写为

$$4[-5\varepsilon H((\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2-(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2)+2\tau_3\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}]-34\varepsilon_1 H\tau_3^2+162\varepsilon_1 H^3-9\varepsilon\varepsilon_1\lambda H=0. \tag{3.88}$$

沿 u_1 对 (3.88) 求导，利用 (3.74) 和 (3.75)，并结合 (3.86) 与 (3.88)，可得

$$K_1\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}+K_2\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}=0, \tag{3.89}$$

其中

$$\begin{cases}K_1=1710H^3-78H\tau_3^2-135\varepsilon\lambda H,\\ K_2=1494H^2\tau_3\varepsilon-78\tau_3^3\varepsilon-9\tau_3\lambda.\end{cases}$$

由 (3.86)，从 (3.89) 可得

$$\begin{cases}(K_1^2+K_2^2)\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}-\varepsilon\varepsilon_1(9H^2+\tau_3^2)K_1K_2=0,\\ K_1K_2[(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2-(\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}})^2]+(K_2^2-K_1^2)\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}=0.\end{cases}$$

从 (3.88) 及上述方程中消去 $\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}$ 和 $\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}$，可得

$$2741856\varepsilon\tau_3^{12}+c_1\tau_3^{10}+c_2\tau_3^8+c_3\tau_3^6+c_4\tau_3^4+c_5\tau_3^2+c_6=0, \tag{3.90}$$

其中 c_i、$1\le i\le 6$ 是关于 H 的多项式。对 (3.90) 作用 u_1，可得

$$L_1\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}+L_2\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}=0,$$

其中 L_1 和 L_2 是关于 H 和 τ_3 的多项式。由 (3.89) 和上述方程可得

$$K_1L_2-K_2L_1=0.$$

消去 (3.90) 和上式中的 τ_3，得到关于 H 的 92次多项式方程，这意味着 H 是常数，产生矛盾。

子情形（2）：在 U_p 的某点处，$\Gamma_{21}^2\neq 0$。

我们假设 $\Gamma_{21}^2\neq 0$at $q\in U_p$。若 $c+\varepsilon(\gamma_3^2+\tau_3^2)=0$，则 (3.86) 推出 $\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}=\Gamma_{\bar{3}1}^{\bar{3}}=0$and $\lambda_2=c=\gamma_3=\tau_3=0$，这就产生了矛盾。因此，$c+\varepsilon(\gamma_3^2+\tau_3^2)\neq 0$。由 (3.86) 中的方程可得

$$(\Gamma_{21}^2)^2=-\varepsilon_1\frac{\lambda_2^2(\gamma_3^2+\tau_3^2)+c^2+2c\varepsilon\lambda_2\gamma_3}{c+\varepsilon(\gamma_3^2+\tau_3^2)}. \tag{3.91}$$

Let

$$\mu = 2\lambda_2\gamma_3 + \gamma_3^2 + \tau_3^2, \quad \nu = \lambda_2(\gamma_3^2 + \tau_3^2),$$

然后沿 u_1 对 μ, ν and H 求导，利用 (3.74)、(3.86) 和 (3.91)，可得

$$\begin{cases} 6\varepsilon u_1(H) = K(12\varepsilon Hc^2 + 10H\mu c - 3\varepsilon\nu c + 48H^2\nu - 2\mu\nu), \\ u_1(\mu) = K[(24H^2 + 2\mu)c^2 + (2\mu^2 + 12\varepsilon H^2\mu - 6H\nu)c - 3\nu^2 + 10\varepsilon H\mu\nu], \\ u_1(\nu) = K[(2\varepsilon H\mu + 3\nu)c^2 + (24\varepsilon H^2\nu + 2\varepsilon\mu\nu)c + 12\varepsilon H\nu^2], \end{cases} \tag{3.92}$$

其中 $K = \frac{\varepsilon_1}{\Gamma_{21}^2[c+\varepsilon_1(\gamma_3^2+\tau_3^2)]}$。应用（3.86）、（3.91）和（3.92），我们可以将（3.72）改写为（3.37）。对第3.1节中˜情形的子情形 Γ_{21}^2、$\Gamma_{\tilde{3}1}^{\tilde{3}}$、$\Gamma_{\tilde{3}1}^{\tilde{3}} \neq 0$重复这一过程，并用（3.92）替换系统（3.36），用（3.42）替换

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1(c + (\gamma_3^2 + \tau_3^2))^2(\Gamma_{21}^2)^2 &= (c + (\gamma_3^2 + \tau_3^2))(c^2 + \lambda_2^2(\gamma_3^2 + \tau_3^2) + 2c\lambda_2\gamma_3) \\ &= \nu^2 + 6cH\nu + c^2\mu + c^3 = 0, \end{aligned}$$

我们可得矛盾。 □

注3.12 对于形算子的形式（V），通过构造项 b_k和 c_k、 $k = 1$、2、$\cdots$，我们发现存在许多与形式（I）的方程类似的方程，只需将形式（I）中的某些项替换为关于 b_k 和 c_k 的形式（V）中的项，如下所示。

形式（I）的项	形式（V）的项
$(\Gamma_{31}^3)^k + (\Gamma_{41}^4)^k$	$2b_k$
$\lambda_3(\Gamma_{31}^3)^k + \lambda_4(\Gamma_{41}^4)^k$	$2\gamma_3 b_k - 2\tau_3 c_k$
$\lambda_3^2(\Gamma_{31}^3)^k + \lambda_4^2(\Gamma_{41}^4)^k$	$2(\gamma_3^2 - \tau_3^2)b_k - 4\gamma_3\tau_3 c_{k-1}$

我们相信， b_k和 c_k、 $k = 1$、2、$\cdots$的构造，将为我们研究具有虚主曲率的超曲面提供新的见解。

3.6. 形算子具有形式（VI）

命题3.13 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$中的一个具有真平均曲率向量场的非退化超曲面。假设 M_r^4的形算子 A 具有形式（VI），则 M_r^4 具有常平均曲率。

证明 假设 H 不是常数，则A 的特征向量 ∇H 沿着方向 u_{1_2} 和 $\lambda_1 = -2\varepsilon H$。由于 $2\lambda_1 + 2\gamma_2 = 4\varepsilon$，我们知道

$\gamma_2 = 4\varepsilon H$。令$u_{\bar{2}} = u_{\bar{2}_1}$、 $u_{\tilde{2}} = u_{\tilde{2}_1}$和 $\nabla_{u_B} u_C = \Gamma_{BC}^D u_D$、 B、$C = 1_1$, 1_2、$\bar{2}$、$\tilde{2}$, 则

$$\Gamma_{D1_1}^{1_2} = \Gamma_{D\bar{2}}^{\bar{2}} = \Gamma_{D\tilde{2}}^{\tilde{2}} = 0,$$

and

$$\Gamma_{D1_1}^{1_1} = -\Gamma_{D1_2}^{1_2},\ \Gamma_{D\bar{2}}^{\tilde{2}} = \Gamma_{D\tilde{2}}^{\bar{2}},\ \Gamma_{D1_a}^{\bar{2}} = -\varepsilon_1 \Gamma_{D\tilde{2}}^{1_{3-a}},\ \Gamma_{D1_a}^{\tilde{2}} = \varepsilon_1 \Gamma_{D\tilde{2}}^{1_{3-a}},\quad a = 1, 2.$$

由此可得

$$u_{1_1}(H) \neq 0,\ u_{1_2}(H) = u_{\bar{2}}(H) = u_{\tilde{2}}(H) = 0.$$

and

$$\Gamma_{BC}^{1_1} = \Gamma_{CB}^{1_1},\quad B, C \neq 1_1.$$

由 Codazzi方程 (2.1), 取 $(X, Y, Z) = (u_{1_1}, u_B, u_{1_2}), (u_{\bar{2}}, u_{\tilde{2}}, u_{1_2}), (u_{1_2}, u_B, u_B), (u_{1_2}, u_{\bar{2}}, u_{\tilde{2}})$, $B = \bar{2}, \tilde{2}$, 可推得

$$\Gamma_{\tilde{2}\bar{2}}^{1_1} = -\Gamma_{\tilde{2}\bar{2}}^{1_1},\quad \Gamma_{1_1\bar{2}}^{1_1} = \Gamma_{1_1\tilde{2}}^{1_1} = \Gamma_{1_2\bar{2}}^{\tilde{2}} = \Gamma_{1_2\tilde{2}}^{\bar{2}} = 0,$$

and

$$\begin{cases} -6\varepsilon H \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} + \tau_2 \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} = 0, \\ u_{1_2}(\tau_1) = -6\varepsilon H \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} - \tau_2 \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}}. \end{cases} \tag{3.93}$$

利用 $\langle R(u_{1_2}, u_{\bar{2}})u_{\bar{2}}, u_{1_2}\rangle$ 和 $\langle R(u_{1_2}, u_{\bar{2}})u_{\tilde{2}}, u_{1_2}\rangle$ 的高斯方程, 并结合上述方程, 可得

$$\begin{cases} u_{1_2}(\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}}) = \Gamma_{1_2 1_2}^{1_2} \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} + (\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}})^2 - (\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}})^2, \\ u_{1_2}(\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}}) = \Gamma_{1_2 1_2}^{1_2} \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} - 2\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}}. \end{cases} \tag{3.94}$$

应用 (3.93) 和 (3.94), 沿 u_{1_2} 对 (3.93) 中的第一个方程求导, 得到

$$-6\varepsilon H (\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}})^2 - \tau_2 \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} \Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} = 0,$$

结合 (3.93) 中的第一个方程可知 $\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} = 0$ 和 $H\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} = 0$。由高斯方程计算 $\langle R(u_{1_1}, u_{\bar{2}})u_{1_2}, u_{\tilde{2}}\rangle$, 可得

$$\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} \Gamma_{1_1\bar{2}}^{\tilde{2}} = 2H\tau_2.$$

将上面的方程两边乘以 H, 结合 $H\Gamma_{\tilde{2}1_2}^{\bar{2}} = 0$, 我们得出 $H = 0$, 这就产生了矛盾。□

4. 常平均曲率的估计

本节将应用 M_r^4 具有常平均曲率这一结论，估计平均曲率 H的值。当 M_r^4 具有一个或两个不同主曲率时，我们将计算H的值。遗憾的是，当 M_r^4 具有三个或四个不同主曲率时，我们无法求出 H 的值。但对于主曲率均为实数的情形，我们给出了常平均曲率 H的取值范围。

4.1. 当 M_r^4 具有一个单主曲率时

定理 4.1 设 M_r^4 为 $N_s^5(c)$ 的一个具有 proper$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$平均曲率向量场的非退化超曲面，满足 $\Delta H = \lambda H$， ξ 为 M_r^4 的一个单位法向量场，且 $\varepsilon = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle = \pm 1$。假设 M_r^4 具有一个单主曲率，则

- 当 $\varepsilon\lambda \leq 0$ 时，有 $H = 0$;
- 当 $\varepsilon\lambda > 0$ 时，有 $H = 0$ 或 $H^2 = \frac{\varepsilon\lambda}{4}$。

证明 回顾第 2.3 小节， M_r^4 的虚主曲率成共轭对出现。因此，在假设 M_r^4 具有一个单主曲率 μ 的条件下， μ 必须为实数。于是，我们知道 $t = m$（符号 t、m 见第 2.3 小节）以及 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \mu$。因此，方程 (2.4) 可化简为 $\mathrm{tr}A^2 = 4\mu^2$ 和 $\mu = \varepsilon H$。根据定理 3.1， M_r^4 的平均曲率 H 为一个常数。利用这一结果以及 $\mathrm{tr}A^2 = 4\mu^2$，由 (2.3) 得 $H = 0$ 或 $4\mu^2 = \varepsilon\lambda$。

当 $\varepsilon\lambda \leq 0$ 时，我们假设 $H \neq 0$。于是 $4\mu^2 = \varepsilon\lambda \leq 0$，这就产生了矛盾。
当 $\varepsilon\lambda > 0$ 时，假设 $H \neq 0$，我们还得到 $4\mu^2 = \varepsilon\lambda$，结合 $\mu = \varepsilon H$ 可推出

$$H^2 = \frac{\varepsilon\lambda}{4}.$$

□

R注 4.2 定理 4.1 关于 $c = 0$ 的结果已在 [16]中得到。

4.2. 当 M_r^4 有两个不同主曲率时

引理 4.3 设 M_r^4 是 $N_s^5(c)$ 中具有真平均曲率向量场的非极小超曲面， $\vec{\xi}$ 是 M_r^4 的单位法向量场，且

$\varepsilon = \langle \vec{\xi},\ \vec{\xi} \rangle = \pm 1$。假设 M_r^4 有两个不同主曲率 μ 和 ν，则

$$c + \varepsilon\mu\nu = 0.$$

证明：由于虚主曲率的个数为偶数，这两个不同主曲率 μ 和 ν 要么都为实数，要么都为虚数。

情形 1： μ 和 ν 均为实数。

设 l 是 μ的倍数，则考虑到平均曲率 H 为常数且 $H \neq 0$，由 (2.3) 和 (2.4) 可得

$$\begin{cases} l\mu + (4-l)\nu = 4\varepsilon H, \\ l\mu^2 + (4-l)\nu^2 = \varepsilon\lambda, \end{cases} \tag{4.1}$$

这意味着 μ 和 ν 均为常数。下文利用主曲率均为常数这一事实，分别讨论此情形下 A 的可能形式（I）、（II）、（III）和（IV），并推出结果 $c + \varepsilon\mu\nu = 0$。

子情形（1）：形算子具有形式（I）。

不失一般性，设 $\lambda_1 = \mu$ 和 $\lambda_4 = \nu$。令 $u_i = u_{i_1}$和 $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k, i, j = 1$, 2, 3, 4，则回顾第 3.1 节可知，(3.1) 和 (3.5) 也成立。由于主曲率 λ_i 及 $i = 1$, 2,3,4 均为常数，方程 (3.1) 和 (3.5) 表明，若 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则 $\Gamma_{ij}^i = 0$；若，则 $\Gamma_{i4}^1 = \Gamma_{i1}^4 = \Gamma_{1i}^4 = 0$ $\lambda_i = \mu$ $\Gamma_{41}^i = \Gamma_{i1}^4 = 0$ $\lambda_i = \nu$ ，且若。对 $\langle R（u_1, u_4）\, u_1, u_4 \rangle$ 使用高斯方程，得到

$$c + \varepsilon\mu\nu = 0.$$

子情形（2）：形算子具有形式（II）。

我们可以假设 $\lambda_1 = \mu$ 和 $\lambda_3 = \nu$。记$u_2 = u_{2_1}$、 $u_3 = u_{3_1}$，并令 $\nabla_{u_B} u_C = \Gamma_{BC}^D u_D$、 B、$C = 1_1$，1_2、2、3，则(3.43)和(3.44)成立。若 $\lambda_2 = \nu$，考虑到 μ 和 ν 是常数，我们由Codazzi方程(2.1)得出

$$\Gamma_{1_1 3}^{1_1} = \Gamma_{31_2}^3 = \Gamma_{31_1}^3 = \Gamma_{1_2 3}^{1_1} = \Gamma_{1_1 2}^{1_1} = \Gamma_{21_2}^3 = \Gamma_{31_2}^2 = 0.$$

对 $\langle R(u_{1_1}, u_3)u_{1_2}, u_3 \rangle$ 应用高斯方程，并结合上述方程，我们得到 $c + \varepsilon\mu\nu = 0.$

若 $\lambda_2=\mu$，则由 Codazzi方程可推得

$$\Gamma^{1_1}_{1_13}=\Gamma^{1_2}_{1_23}=\Gamma^{1_1}_{1_23}=\Gamma^{3}_{31_2}=\Gamma^{3}_{31_1}=\Gamma^{3}_{32}=\Gamma^{2}_{23}=\Gamma^{1_1}_{23}=\Gamma^{2}_{1_23}=0,$$

and

$$\Gamma^{3}_{21_1}=\Gamma^{3}_{1_12}.$$

对 $\langle R(u_{1_1},u_3)u_{1_2},u_3\rangle$ 和 $\langle R(u_2,u_3)u_2,u_3\rangle$ 使用高斯方程，并结合上述两个方程，得到

$$\begin{cases}\Gamma^{2}_{31_2}\Gamma^{3}_{1_12}=-c\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1\mu\nu,\\ -2\Gamma^{2}_{31_2}\Gamma^{3}_{1_12}=-c\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1\mu\nu,\end{cases}$$

这意味着 $\Gamma^{2}_{31_2}\Gamma^{3}_{1_12}=0$，且 $c+\varepsilon\mu\nu=0.$

子情形（3）：形算子具有形式（III）。

假设 $\lambda_1=\mu$ 和 $\lambda_2=\nu$。令 $\nabla_{u_B}u_C=\Gamma^{D}_{BC}u_D$, $B,C=1_1,1_2,2_1,2_2$。由 Codazzi方程可得

$$\Gamma^{2_1}_{2_11_2}=\Gamma^{1_1}_{1_12_2}=\Gamma^{1_1}_{1_22_2}=0.$$

对 $\langle R(u_{1_1},u_{2_1})u_{1_2},u_{2_2}\rangle$ 使用高斯方程，并结合上述方程，得到 $c+\varepsilon\mu\nu=0.$

子情形（4）：形算子具有形式（IV）。

我们可以假设 $\lambda_1=\mu$和 $\lambda_2=\nu$。令 $u_2=u_{2_1}$和 $\nabla_{u_B}u_C=\Gamma^{D}_{BC}u_D$、$B$、$C=1_1$、$1_2$、$1_3$、$2$，则（3.66）和（3.67）成立，并且由 Codazzi方程 可得

$$\Gamma^{1_1}_{1_12}=\Gamma^{1_3}_{1_32},\quad \Gamma^{1_1}_{1_12}+\Gamma^{1_2}_{1_22}+\Gamma^{1_3}_{1_32}=0, \tag{4.2}$$

$$\Gamma^{2}_{21_1}=\Gamma^{2}_{21_2}=\Gamma^{2}_{21_3}=\Gamma^{1_1}_{1_22}=\Gamma^{1_1}_{1_32}=\Gamma^{1_2}_{1_32}=0, \tag{4.3}$$

$$(\nu-\mu)\Gamma^{1_3}_{1_32}=-\Gamma^{1_2}_{21_3}, \tag{4.4}$$

and

$$(\mu-\nu)\Gamma^{2}_{1_11_2}+\Gamma^{2}_{1_11_3}=(\mu-\nu)\Gamma^{2}_{1_21_1}+\Gamma^{2}_{1_21_2}. \tag{4.5}$$

由 $\langle R(u_{1_1},u_2)u_{1_3},u_2\rangle$ 和 $\langle R(u_{1_3},u_2)u_{1_1},u_2\rangle$ 的高斯方程，利用 (4.3)，可得

$$\begin{cases}-u_2(\Gamma^{2}_{1_13})+\Gamma^{1_2}_{21_3}\Gamma^{2}_{1_11_2}-\Gamma^{1_1}_{1_12}\Gamma^{2}_{1_11_3}=-c\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1\mu\nu,\\ -u_2(\Gamma^{2}_{1_31_1})+\Gamma^{1_2}_{21_3}\Gamma^{2}_{1_21_1}-\Gamma^{1_3}_{1_32}\Gamma^{2}_{1_31_1}=-c\varepsilon_1-\varepsilon\varepsilon_1\mu\nu,\end{cases} \tag{4.6}$$

结合 (4.2)，可推出

$$\Gamma^{1_2}_{21_3}=0 \ \text{ or } \ \Gamma^{2}_{1_11_2}=\Gamma^{2}_{1_21_1}.$$

若 $\Gamma^{1_2}_{21_3}=0$，则（4.4）告诉我们 $\Gamma^{1_3}_{1_32}=0$。若 $\Gamma^{2}_{1_11_2}=\Gamma^{2}_{1_21_1}$，则由（4.2）、（4.4）和（4.5），我们还可得

$$\Gamma^{1_3}_{1_32}=\Gamma^{1_2}_{21_3}=0.$$

因此，由（4.6）可推出 $c+\varepsilon\mu\nu=0.$

情形 2： μ 和 ν 均为虚数。

我们可以假设 $\mu=\gamma+\tau\sqrt{-1}$ 和 $\nu=\gamma-\tau\sqrt{-1}$。由于 H 是一个非零常数，方程（2.3）和（2.4）给出

$$\begin{cases}\gamma=\varepsilon H,\\ 4(\gamma^2-\tau^2)=\varepsilon\lambda.\end{cases}$$

因此， γ 和 τ 均为常数。下文将讨论 A的可能形式（VII）和（VIII），并推出结果 $c+\varepsilon\mu\nu=0$。

子情形（1）：形算子具有形式（VII）。

由此可得 $\nu_1=\nu$ 和 $\tau_1=\tau$。令

$$\nabla_{\bar{u}_{1_a}}\bar{u}_{1_b}=\Gamma^{\bar{1}_d}_{\bar{1}_a\bar{1}_b}\bar{u}_{1_d}+\Gamma^{\tilde{1}_d}_{\bar{1}_a\bar{1}_b}\bar{v}_{1_d},\ \nabla_{\bar{v}_{1_a}}\bar{v}_{1_b}=\Gamma^{\bar{1}_d}_{\tilde{1}_a\tilde{1}_b}\bar{u}_{1_d}+\Gamma^{\tilde{1}_d}_{\tilde{1}_a\tilde{1}_b}\bar{v}_{1_d},$$
$$\nabla_{\bar{u}_{1_a}}\bar{v}_{1_b}=\Gamma^{\bar{1}_d}_{\bar{1}_a\tilde{1}_b}\bar{u}_{1_d}+\Gamma^{\tilde{1}_d}_{\bar{1}_a\tilde{1}_b}\bar{v}_{1_d},\ \nabla_{\bar{v}_{1_a}}\bar{u}_{1_b}=\Gamma^{\bar{1}_d}_{\tilde{1}_a\bar{1}_b}\bar{u}_{1_d}+\Gamma^{\tilde{1}_d}_{\tilde{1}_a\bar{1}_b}\bar{v}_{1_d},$$

由相容条件可得，其中 a、$b=1$、2，

$$\Gamma^{\bar{1}_b}_{B\bar{1}_a}=-\Gamma^{\bar{1}_{3-a}}_{B\bar{1}_{3-b}},\ \Gamma^{\tilde{1}_b}_{B\tilde{1}_a}=-\Gamma^{\tilde{1}_{3-a}}_{B\tilde{1}_{3-b}},\ \Gamma^{\tilde{1}_b}_{B\bar{1}_a}=\Gamma^{\bar{1}_{3-a}}_{B\tilde{1}_{3-b}}.$$

由于 γ 和 τ 是常数，我们由Codazzi方程推得

$$\Gamma^{\bar{1}_1}_{\bar{1}_2\tilde{1}_2}=\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\bar{1}_2\tilde{1}_2}=\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_2}=\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_2}=0, \tag{4.7}$$

and

$$\begin{cases}-\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_1}+\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\bar{1}_1}=0,\\ \Gamma^{\tilde{1}_2}_{\bar{1}_2\bar{1}_2}+\Gamma^{\bar{1}_2}_{\bar{1}_2\tilde{1}_2}=-\Gamma^{\tilde{1}_2}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_2}+\Gamma^{\bar{1}_2}_{\tilde{1}_2\bar{1}_2},\\ \Gamma^{\tilde{1}_1}_{\bar{1}_1\tilde{1}_2}+\Gamma^{\bar{1}_1}_{\bar{1}_1\bar{1}_2}=\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_1}+\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\tilde{1}_2\bar{1}_1},\\ -\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_1}+\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\bar{1}_1}=0,\\ \Gamma^{\bar{1}_2}_{\bar{1}_2\bar{1}_2}-\Gamma^{\tilde{1}_2}_{\bar{1}_2\tilde{1}_2}=-\Gamma^{\bar{1}_2}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_2}-\Gamma^{\tilde{1}_2}_{\tilde{1}_2\bar{1}_2},\\ \Gamma^{\tilde{1}_1}_{\bar{1}_1\bar{1}_2}+\Gamma^{\bar{1}_1}_{\bar{1}_1\tilde{1}_2}=\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\bar{1}_1}+\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_2\tilde{1}_1},\end{cases}$$

这可简化为

$$\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\bar{1}_1\bar{1}_2}=\Gamma^{\bar{1}_1}_{\bar{1}_1\tilde{1}_2}=\Gamma^{\tilde{1}_1}_{\tilde{1}_1\bar{1}_2}=\Gamma^{\bar{1}_1}_{\tilde{1}_1\tilde{1}_2}=0. \tag{4.8}$$

利用 $\langle R(\bar{u}_{1_1},\bar{v}_{1_1})\bar{u}_{1_2},\bar{v}_{1_2}\rangle$ 的高斯方程，结合 (4.7) 和 (4.8)，可得

$$c+\varepsilon(\gamma^2+\tau^2)=0,$$

即 $c+\varepsilon\mu\nu=0$。

子情形（2）：形算子具有形式（VIII）。

在这种情况下，我们有 $\gamma_1=\gamma_2=\gamma,\tau_1=\tau_2=\tau$。记 $\bar{u}_1=\bar{u}_{1_1},\bar{u}_2=\bar{u}_{2_1}$ 和 $\bar{v}_1=\bar{v}_{1_1}$ 以及 $\bar{v}_2=\bar{v}_{2_1}$。令

$$\nabla_{\bar{u}_a}\bar{u}_b=\Gamma^{\bar{d}}_{\bar{a}\bar{b}}\bar{u}_d+\Gamma^{\tilde{d}}_{\bar{a}\bar{b}}\bar{v}_d,\ \nabla_{\bar{v}_a}\bar{v}_b=\Gamma^{\bar{d}}_{\tilde{a}\tilde{b}}\bar{u}_d+\Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\tilde{b}}\bar{v}_d,$$
$$\nabla_{\bar{u}_a}\bar{v}_b=\Gamma^{\bar{d}}_{\bar{a}\tilde{b}}\bar{u}_d+\Gamma^{\tilde{d}}_{\bar{a}\tilde{b}}\bar{v}_d,\ \nabla_{\bar{v}_a}\bar{u}_b=\Gamma^{\bar{d}}_{\tilde{a}\bar{b}}\bar{u}_d+\Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\bar{b}}\bar{v}_d,$$

取 $a,b=1,2$，由相容条件可得

$$\Gamma^{\bar{b}}_{B\bar{a}}=-\Gamma^{\bar{a}}_{B\bar{b}},\ \Gamma^{\tilde{b}}_{B\tilde{a}}=-\Gamma^{\tilde{a}}_{B\tilde{b}},\ \Gamma^{\tilde{b}}_{B\bar{a}}=\Gamma^{\bar{a}}_{B\tilde{b}},\quad a,b=1,2.$$

Codazzi方程给出

$$\Gamma^{\bar{1}}_{\bar{1}\bar{1}}=\Gamma^{\tilde{1}}_{\bar{1}\bar{1}}=\Gamma^{\tilde{1}}_{\bar{2}\bar{1}}=\Gamma^{\tilde{1}}_{\tilde{2}\bar{1}}=0,$$

and

$$\Gamma^{\bar{1}}_{\bar{1}\bar{2}}+\Gamma^{\tilde{1}}_{\bar{1}\bar{2}}=\Gamma^{\bar{1}}_{\bar{1}\bar{2}}-\Gamma^{\tilde{1}}_{\bar{1}\bar{2}}=\Gamma^{\bar{1}}_{\tilde{1}\bar{2}}+\Gamma^{\tilde{1}}_{\tilde{1}\bar{2}}=\Gamma^{\tilde{1}}_{\tilde{1}\bar{2}}-\Gamma^{\bar{1}}_{\tilde{1}\bar{2}}=0.$$

对 $\langle R(\bar{u}_1,\bar{v}_1)\bar{u}_1,\bar{v}_1\rangle$ 应用高斯方程，结合上述两个方程，我们得出 $c+\varepsilon(\gamma^2+\tau^2)=0$，即 $c+\varepsilon\mu\nu=0$。□

注4.4 引理 4.3 的结果 $c+\varepsilon\mu\nu=0$ 与 [14, 定理 2.9] 中关于 $N_s^{n+1}(c)(c=0,-1,1)$ 上具有两个不同主曲率 μ和 ν的等参超曲面 M_r^n 的 Cartan基本恒等式一致，并且 μ 或 ν 的代数重数与几何重数相同。

利用引理 4.3，我们可以根据主曲率为实数还是虚数，给出平均曲率 H 的值。下面的引理 4.5 将用于主曲率为实数的情况。

引理 4.5 设 c、λ、l、μ 和 ν 为实常数，且方程

$$\begin{cases}\mu\nu=-c\varepsilon,\\ l\mu^2+(4-l)\nu^2=\varepsilon\lambda\end{cases}$$

成立，其中 $\varepsilon = \pm 1$。则， $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon \geq 0$ 是使得 $\mu = \nu$成立的必要条件。

证明 若 $\mu = \nu$，则

$$-c\varepsilon = \mu^2 \geq 0,$$

and

$$\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon.$$

□

定理 4.6 设 M_r^4 是 $N_s^5(c)$ 中具有真$\vec{}$ $\vec{}$ $\vec{}$平均曲率向量场的非退化超曲面，满足 $\Delta H = \lambda H$， ξ 是 M_r^4 的单位法向量场，且 $\varepsilon = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle = \pm 1$。假设 M_r^4 有两个不同的实主曲率 μ 和 ν，并且 $l = 1$（2 或 3）是 μ 的倍数，则

- 当 $c = 0$ 时，我们有
  - *if* $\varepsilon\lambda \leq 0$, *then* $H = 0$;
  - *if* $\varepsilon\lambda > 0$, *then* $H = 0$, *or* $H^2 = \frac{l\varepsilon\lambda}{16}$, *or* $H^2 = \frac{(4-l)\varepsilon\lambda}{16}$;
- 当 $c \neq 0$ 时，我们有
  - *if* $\varepsilon\lambda < 2\sqrt{l(4-l)}|c|$, *then* $H = 0$;
  - *if* $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{l(4-l)}|c|$, *then* $H = 0$ *or*

$$H^2 = \frac{1}{16}[2\varepsilon\lambda \pm (l-2)\sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2} - 2l(4-l)c\varepsilon].$$

Specially, if $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$, *then* $H = 0$ *or* $H^2 = -\frac{3}{4}c\varepsilon$.

证明 (i) 当 $c = 0$ 时，设 $H \neq 0$，则 (4.1) 成立，且 $\varepsilon\lambda > 0$。由引理 4.3 可得 $\mu\nu = 0$，结合 (4.1) 中的第二个方程，得到

$$\mu = 0,\ \nu^2 = \frac{\varepsilon\lambda}{4-l},\ \text{ or } \mu^2 = \frac{\varepsilon\lambda}{l},\ \nu = 0.$$

由上述方程，根据（4.1）中的第一个方程可得

$$H^2 = \frac{l\varepsilon\lambda}{16},\ \text{ or } H^2 = \frac{(4-l)\varepsilon\lambda}{16}.$$

（ii）对于情形 $c \neq 0$，设 $H \neq 0$，则（4.1）成立，并且 $\mu\nu = -c\varepsilon$ 可由引理 4.3 得到。于是，我们有

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda = \sqrt{l}\mu^2 + \sqrt{4-l}\nu^2 > 0, \\ \varepsilon\lambda + 2\sqrt{l(4-l)}c\varepsilon = (\sqrt{l}\mu - \sqrt{4-l}\nu)^2 \geq 0, \\ \varepsilon\lambda - 2\sqrt{l(4-l)}c\varepsilon = (\sqrt{l}\mu + \sqrt{4-l}\nu)^2 \geq 0, \end{cases}$$

w这意味着 $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{l(4-l)|c|}$。因此，若 $\varepsilon\lambda < 2\sqrt{l(4-l)|c|}$，则 $H = 0$。

当 $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{l(4-l)|c|}$ 时，若 $H \neq 0$，则由 $\mu\nu = -4c\varepsilon$ 和 (4.1) 的第二个方程，我们计算得 μ^2 和 ν^2，即

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2}}{2l}, \quad \nu^2 = \frac{\varepsilon\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2}}{2(4-l)}.$$

结合 (4.1) 的第一个方程和上面的方程，可得

$$H^2 = \frac{2\varepsilon\lambda \pm (l-2)\sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2} - 2l(4-l)c\varepsilon}{16}.$$

然而，上述 μ^2、ν^2 和 H^2 的某些取值可能与条件 $\mu \neq \nu$ 矛盾。由引理 4.5，考虑到 $\varepsilon\lambda \neq 0$，我们知道 $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$ 是 $\mu = \nu$ 的必要条件（矛盾）。对于 $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$ 的情形，我们有必要讨论 μ^2、ν^2 和 H^2 的取值，其范围为 $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{l(4-l)|c|}$。经计算，当 $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$ 时，我们得到

(1) 当 $l = 2$ 时，$\mu^2 = \nu^2 = H^2 = -c\varepsilon$；(2) 当 $l = 1$ 时，$\mu^2 = -3c\varepsilon$、$\nu^2 = -\frac{c\varepsilon}{3}$、$H^2 = -\frac{3}{4}c\varepsilon$ 或 $\mu^2 = \nu^2 = H^2 = -c\varepsilon$；(3) 当 $l = 3$ 时，$\nu^2 = -3c\varepsilon$、$\mu^2 = -\frac{c\varepsilon}{3}$、$H^2 = -\frac{3}{4}c\varepsilon$ 或 $\mu^2 = \nu^2 = H^2 = -c\varepsilon$。由于 $\mu\nu > 0$，$\mu^2 = \nu^2$ 等价于 $\mu = \nu$（矛盾）。因此，我们得出结论：在情形 $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$ 下，$H^2 = -\frac{3}{4}c\varepsilon$。

总之，当 $c \neq 0$ 且 $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{l(4-l)|c|}$ 时，我们有 $H = 0$ 或

$$H^2 = \frac{2\varepsilon\lambda \pm (l-2)\sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2} - 2l(4-l)c\varepsilon}{16}. \tag{4.9}$$

特别地，如果 $\varepsilon\lambda = -4c\varepsilon > 0$，那么 $H = 0$ 或 $H^2 = -\frac{3}{4}c\varepsilon$。

顺便强调一下，(4.9) 右侧的值均大于或等于零。当 $l = 2$ 时，这显然成立。当 $l = 1,3$ 时，由于 $\varepsilon\lambda \geq 2\sqrt{3}|c|$，可得

$$\varepsilon\lambda - 3|c| \geq (2\sqrt{3} - 3)|c| \geq 0,$$

结合

$$\frac{(2\varepsilon\lambda-6c\varepsilon)^2}{\lambda^2-12c^2}=1+\frac{3(\lambda-4c)^2}{\lambda^2-12c^2}\geq 1$$

可得 $2\varepsilon\lambda-6c\varepsilon\geq\sqrt{\lambda^2-12c^2}$。因此，当 $l=1$ 时，3，右侧的值 s

$$\frac{2\varepsilon\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-12c^2}-6c\varepsilon}{16}\geq 0.$$

□

注 4.7 当 $c=0$ 且 μ 或 ν 的代数重数和几何重数相同时，我们在 [16] 中得到 H^2 的值，这与 $c=0$ 的定理 4.6 的结果一致。

定理 4.8 设 M_r^4 是 $N_s^5(c)$ 中的一个非退化超曲面，具有适当的 $\vec{\ }$ $\vec{\ }$ $\vec{\ }$平均曲率向量场，满足 $\Delta H=\lambda H$； ξ 是 M_r^4 的单位法向量场，满足 $\varepsilon=\langle\vec{\xi}、\vec{\xi}\rangle=\pm 1$。假设 M_r^4 具有两个虚主曲率，则有

- 若 $c\varepsilon\geq 0$，则 $H=0$;
- 若 $c\varepsilon<0$ 且 $|\varepsilon\lambda|\geq -4c\varepsilon$，则 $H=0$;
- 若 $c\varepsilon<0$ 且 $|\varepsilon\lambda|<-4c\varepsilon$，则 $H=0$ 或 $H^2=\frac{\varepsilon\lambda-4c\varepsilon}{8}$。

证明 设 M_r^4有两个虚主曲率 $\gamma+\tau i$和 $\gamma-\tau i$，由引理 4.3 及其证明可知，若 $H\neq 0$，则 $\gamma=\varepsilon H$且

$$\begin{cases}4(\gamma^2-\tau^2)=\varepsilon\lambda,\\ \gamma^2+\tau^2=-c\varepsilon.\end{cases}\tag{4.10}$$

当 $c\varepsilon\geq 0$时，我们假设 $H\neq 0$，则 $\gamma^2+\tau^2=-c\varepsilon\leq 0$，这就产生了矛盾。

当 $c\varepsilon<0$ 且 $|\varepsilon\lambda|\geq -4c\varepsilon$时，我们假设 $H\neq 0$，则方程 (4.10) 意味着

$$\begin{cases}-4c\varepsilon-\varepsilon\lambda=8\tau^2>0,\\ \varepsilon\lambda-4c\varepsilon=8\nu^2>0,\end{cases}$$

这与 $|\varepsilon\lambda|\geq -4c\varepsilon$ 矛盾。

对于 $c\varepsilon < 0$ 和 $|\varepsilon\lambda| < -4c\varepsilon$ 的情形，若 $H \neq 0$，我们同样有 $8\gamma^2 = \varepsilon\lambda - 4c\varepsilon$，结合 $\gamma = \varepsilon H$ 可知

$$H^2 = \frac{\varepsilon\lambda - 4c\varepsilon}{8}.$$

□

推论 4.9 设 M_r^4 是 $\mathbb{E}_s^5$ 中具有真平均曲率向量场的非退化超曲面。假设 M_r^4 有两个虚主曲率，则 M_r^4 是极小的。

注 4.10 在 [16], 中，我们还估计了满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 且具有两个互异虚主曲率的 $\mathbb{E}_s^5$ 中超曲面 M_r^4 的平均曲率 H，但仅给出了其取值范围，即 $H = 0$ 或 $H^2 > \frac{\varepsilon\lambda}{4}$。显然，推论 4.9 的结果 $H = 0$ 最大程度地改进了 [16] 中的结果。

在非平坦空间形式 $N_s^5(c)$ （$c \neq 0$）中，假设超曲面 M_r^4 有两个虚主曲率，由定理 4.8 可知，平均曲率 H 不一定为零。然而，若超曲面 M_r^4 是双调和的，即 $\lambda = 4c$，则定理 4.8 表明平均曲率为零，这为 Chen 猜想提供了部分肯定的回答。

推论 4.11 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$中的双调和超曲面。若 M_r^4有两个虚主曲率，则 M_r^4 是极小的。

4.3. 当 M_r^4 没有虚主曲率时

定理 4.12 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$中的非退化超曲面，满足$\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$（$\lambda$ 为常数），且 $\vec{\xi}$是 M_r^4的单位法向量场，其中$\varepsilon = \langle\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle = \pm 1$。若 M_r^4没有虚主曲率，则有

- 若 $\varepsilon\lambda \leq 0$，则 $H = 0$;
- 若 $\varepsilon\lambda > 0$，则 $H^2 \leq \frac{\varepsilon\lambda}{4}$；等号成立当且仅当所有主曲率均相等且非零。

证明 由于 M_r^4 没有虚主曲率，方程 (2.4) 化为

$$\mathrm{tr}A^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^2, \quad 4\varepsilon H = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i.$$

注意到 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 4$。因此，平均曲率 H 为常数，结合上述方程，由 (2.3) 可得 $H = 0$ 或$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^2 = \varepsilon\lambda$。

当 $\varepsilon\lambda \leq 0$ 时，假设 $H \neq 0$，则

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^2 = \varepsilon\lambda \leq 0,$$

这意味着 $\lambda_i = 0, i = 1, \cdots, m$。于是，$4\varepsilon H = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i = 0$，矛盾。

对于 $\varepsilon\lambda > 0$ 的情形，若 $H \neq 0$，利用柯西不等式，我们知道

$$(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i)^2 \leq 4 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i^2, \tag{4.11}$$

其中，等号成立当且仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m \neq 0$。方程 (4.11) 给出

$$0 < H^2 \leq \frac{\varepsilon\lambda}{4}.$$

上述方程中等号成立当且仅当主曲率全都相等且非零。□

推论4.13 设 M_r^4是 $N_s^5(c)$中的双调和超曲面，$\vec{\xi}$是 M_r^4的单位法向量场，且 $\varepsilon = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle = \pm 1$。若 $\varepsilon c \leq 0$和 M_r^4没有虚主曲率，则 M_r^4 是极小的。

注 4.14 我们指出，对于定理 4.6 中的情形,()以及，的值$\frac{1}{16}[2\varepsilon\lambda \pm (l-2)$ $\sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2 - 2l(4-l)c\varepsilon}]$ 属于范围 $H^2 < \frac{\varepsilon\lambda}{4}$。事实上，在这种情况下，我们可以很容易地验证 $\varepsilon\lambda + l(4-l)c\varepsilon \geq 0$，并且

$$(2\varepsilon\lambda + 2l(4-l)c\varepsilon)^2 - (l-2)^2(\lambda^2 - 4l(4-l)c^2) = l(4-l)(\lambda + 4c)^2 > 0.$$

因此可得

$$2\varepsilon\lambda + 2l(4-l)c\varepsilon > \pm(l-2)\sqrt{\lambda^2 - 4l(4-l)c^2},$$

从而得出我们的结论。

注记4.15 当 M_r^4 具有虚主曲率时，由(2.4)可得

$$\mathrm{tr}A^2 = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \lambda_i^2 + 2 \sum_{j=t+1}^{m} \beta_j (\nu_j^2 - \tau_j^2), \quad t < m.$$

由于上述方程右侧存在负项，当不同主曲率的数量大于2时，我们无法利用柯西不等式得到 H 的取值范围。

致谢 本工作得到国家自然科学基金（编号：12161078、11761061）、甘肃省杰出青年基金（编号：20JR5RA515）以及西北师范大学项目（编号：NWNU-LKQN2019-23）的资助。

参考文献

参考文献

[1] A. Arvanitoyeorgos、F. Defever、G. Kaimakamis，具有本征平均曲率向量的E_s^4 超曲面，J. Math. Soc. Japan 59:3 (2007), 797–809.[2] A. Arvanitoyeorgos、G. Kaimakamis、M. Magid，满足 $\Delta\vec{H} = \alpha\vec{H}$的 E_1^4中的洛伦兹超曲面，Illinois J. Math. 53:2 (2009), 581–590.[3] A. Arvanitoyeorgos、G. Kaimakamis，具有本征平均曲率向量的 E_2^4 中 M_2^3 型超曲面，J. Geom. Phys. 63 (2013), 99–106.[4] B.-Y. Chen， $\mathbb{E}^3$ 中的零二型曲面是圆柱面，Kodai Math. J. 11:2 (1988), 295–299.[5] B.-Y. Chen，关于有限型子流形的一些开放问题与猜想，Soochow J. Math. 17:2 (1991), 169–188.[6] F. Defever，满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$的 $\mathbb{E}^4$ 超曲面，Michigan Math. J. 44:2 (1997), 355–363.[7] L. Du、J. Zhang、X. Xie，在伪黎曼空间形式中满足 τ_2（ϕ） $= \eta\tau$（ϕ）的超曲面，Math. Phys. Anal. Geom. 20:2 (2017), 17.[8] L. Du、J. Ren，伪黎曼空间形式中的 η-双调和超曲面，Math. Slovaca, 72 (2022), 1259–1272.

[9] L. Du，伪黎曼空间形式中具有常数量曲率的高维 η-双调和超曲面，J. Math. Anal. Appl. 518 (2023), 122670.[10] A. Ferr´andez、P. Lucas，三维洛伦兹-闵可夫斯基空间中的曲面，Pacific J. Math. 152:1 (1992), 93–100.[11] Y. Fu、M. C. Hong、X. Zhan，关于 $\mathbb{R}^5$中超曲面的陈的双调和猜想，Adv. Math. 383 (2021), 107697.[12] Y. Fu、X. Zhan， $\mathbb{E}^5$中满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 的超曲面，J. Math. Anal. Appl. 503:2 (2021), 125337.[13] J.-I. Inoguchi，接触三维流形中的双极小子流形，Balkan J. Geom. Appl. 12:1 (2007), 56–67.[14] J.-C. Liu、C. Yang， $\mathbb{E}_s^{n+1}$中满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 且至多有三个不同主曲率的超曲面，J. Math. Anal. Appl. 419 (2014), 562–573.[15] J.-C. Liu、C. Yang， $\mathbb{E}_1^{n+1}$中满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 且至多有三个不同主曲率的洛伦兹超曲面，J. Math. Anal. Appl. 434 (2016), 222–240.[16] J.-C. Liu、C. Yang，$\mathbb{E}_s^{n+1}$中满足 $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$ 且至多有两个不同主曲率的超曲面，J. Math. Anal. Appl. 451 (2017), 14–33.[17] B. O' Neill，《半黎曼几何：及其在相对论中的应用》，Pure Appl. Math. 103, Academic Press，纽约，1983.[18] T. Hasanis、T. Vlachos，具有常数量曲率和常平均曲率的超曲面，Ann. Global Anal. Geom. 13:1 (1995), 69–77.