arXiv:2303.02365v1 [math.NA] 4 Mar 2023

Bakhvalov 型网格上非对称内罚Galerkin方法的超逼近分析*

马晓琪[a,1]，张进[a,*]

[a]*School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China*

摘要

本文首次研究了非对称内罚Galerkin（NIPG）方法在 Bakhvalov 型网格上的收敛性。为此，我们设计了一种新的复合插值，解决了 Bakhvalov 型网格分析中固有的困难。具体而言，在层外和层内分别采用高斯-拉道插值和高斯-洛巴托插值。在此基础上，通过为不同网格点选取特定的惩罚参数值，我们推导出$k+\frac{1}{2}$阶（$k \geq 1$）超逼近，并证明该方法在能量范数下具有最优阶收敛性。理论结论与数值结果一致。关键词：对流扩散，奇异摄动，NIPG方法，

Bakhvalov 型网格，超逼近

1. 引言

近年来，随着奇异摄动问题在实际生活中的广泛应用，相关数值方法吸引了越来越多研究者的关注，参见 [3, 7–12, 16, 18, 23] 及其参考文献。值得注意的是，这类问题的精确解通常会在局部发生剧烈变化，从而形成边界层或内层。为了更好地分辨这些层，研究者设计了一种简单有效的网格策略——层

*本研究得到国家自然科学基金委员会（11771257、11601251）和中国山东省自然科学基金（ZR2021MA004）的资助。

*通讯邮箱：jinzhangalex@sdnu.edu.cn[1]邮箱:
xiaoqiMa@hotmail.com

适应网格，其中最具代表性的是 Bakhvalov 型网格 [2]和 Shishkin 网格 [20]。在 [17], 的数值实验中，我们发现，即使在层适应网格上采用标准 Galerkin方法，仍会出现小幅振荡。因此，有必要考虑在层适应网格上使用稳定性更强的数值方法，例如连续内罚稳定化、流线扩散有限元方法、局部投影稳定化和不连续Galerkin方法，详情参见文献 [1, 6, 12, 14, 15,22] 。

自 20 世纪 70 年代以来，非对称内罚伽辽金（NIPG）方法逐渐成为一种广受欢迎的稳定化技术。该方法通过引入内罚项来抑制单元边界处的不连续性，因此具备传统有限元方法所不具备的灵活性和优势。此外，与不完全内罚Galerkin方法和对称内罚Galerkin方法相比，NIPG方法的一个显著优势是稳定性强，且对惩罚参数的取值没有严格限制。随着学者们持续开展研究，关于 NIPG 方法的收敛性分析已屡见不鲜。例如，Roos 和 Zarin 在 [19] 中分析了采用双线性单元的 NIPG 方法在 Shishkin 网格上求解二维对流扩散问题时的收敛性。随后，Zarin 在 Shishkin型网格上采用 NIPG 方法，并推导出几乎达到 k 阶的收敛率 [21]。在 [24], 中，Zhu等人将 NIPG 方法应用于 Shishkin型网格，并证明该方法在能量范数下具有一致收敛性。由此可见，上述研究仅关注 Shishkin 网格，尚未建立 NIPG 方法在 Bakhvalov 型网格上的收敛性分析。这是因为在靠近层的转折点附近，无法分析单元上对流项的收敛性。为克服这一困难，我们提出了一种新的插值方法，为二维情形下 NIPG 方法的分析奠定了基础。

本文首次针对一维奇异摄动问题，在 Bakhvalov 型网格上对非对称内罚伽辽金方法进行超逼近分析，

为获得所需结果，我们在层外采用高斯-拉道插值，在层内采用高斯-洛巴托插值。需要注意的是，层内与层外的划分应基于网格和分析的特性。随后，我们推导出不同单元边界处的惩罚参数以及 $k+\frac{1}{2}$ 阶超逼近结果。

本文其余部分安排如下。首先，我们在第 2 节描述连续问题并给出一些基本假设。此外，还将介绍 Bakhvalov 型网格上的 NIPG方法。然后，在第 3 节定义一种新的插值，并进一步得到相应的插值误差估计。第 4 节给出与扰动参数相关的均匀超逼近。最后，我们提供一些数值结果来验证主要结论。

全文中，设 C 为一个一般的正常数，与扰动参数 ε 和网格参数 N 无关。此外，假设 k 是满足条件 $k \geq 1$ 的固定整数。

2. 连续问题

我们考虑以下奇异摄动问题：

$$\begin{aligned} &Lu := -\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad x \in \Omega := (0,1), \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$，且 $b(x)$ 是满足 $b(x) \geq \alpha > 0$ 的对流系数，在 Ω 上成立。此外，对于某个固定常数 γ，假设

$$c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq \gamma > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \tag{2}$$

这里， b、 c 和 f 足够光滑。由于 ε 可以任意小，方程（1）的精确解 u 通常会在 $x = 1$附近出现边界层，其宽度为 $\mathcal{O}(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$。

下面，我们介绍解的先验信息，这是我们进行分析的基础。

定理 1. 设 q 为正整数。假设 (2) 成立，且 b、c、f 足够光滑。则 (1) 的解 u 可分解为 $u = S + E$，其中光滑分量 S 和边界层分量 E 分别满足 $LS = f$ 和 $LE = 0$。那么对于 $0 \le l \le q$

$$|S^{(l)}(x)| \le C, \qquad |E^{(l)}(x)| \le C\varepsilon^{-l}e^{-\alpha(1-x)/\varepsilon}. \tag{3}$$

特别地，当 b、c、$f \in C^{\infty}(\Omega)$ 时，对于任意 $q \in \mathbb{N}$，(3) 成立。

证明。由 [12], 可直接得到这一结论。 □

2.1. Bakhvalov 型网格

首先，设网格点 $\Omega_N = \{x_j \in \Omega\colon\ j = 0、1、2、\cdots、N\}$，且 Ω 的一个划分为

$$\mathcal{T}_N = \{I_j = [x_{j-1}, x_j] : j = 1, 2, \cdots, N\}.$$

然后设 $h_j = x_j - x_{j-1}$ 表示 I_j 的长度，而 I 表示一般区间。

为了更好地刻画区域 Ω 中解的变化，我们采用 Bakhvalov 型网格，具体描述如下：区域 $\bar{\Omega}$ 被划分为 $\Omega = [0, \tau] \cup [\tau, 1]$，其中转折点 $\tau = 1 + \frac{\sigma\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon$ 满足 $\tau \ge 1/2$ 和 $\sigma \ge k+1$。设 $N \in \mathbb{N}$ 为可被 2 整除的整数，且 $N \ge 4$。每个子区域包含 $N/2$ 个网格点。因此，网格生成函数定义为

$$x = \psi(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{\sigma\varepsilon}{\alpha}\ln[1 + 2(1-\varepsilon)(t-1)], & t \in [\dfrac{1}{2}, 1] \\ 2\tau t, \quad t \in [0, \dfrac{1}{2}). \end{cases} \tag{4}$$

显然，可以得到 $x_{N/2} = \tau$。

假设 1. 本文将作出如下假设：

$$\varepsilon \le CN^{-1},$$

在实践中，这并不是限制。

当 $\varepsilon \geq CN^{-1}$ 时，方程 (1) 精确解中的层较弱，均匀网格能够对其进行良好分辨。相关的理论分析也可由常规间断有限元理论 [5] 涵盖。

2.2. NIPG方法

下面介绍一些基本概念。设 m 为非负整数，对于 $I \in \mathcal{T}_N$， m 阶空间记为

$$H^m(\Omega, \mathcal{T}_N) = \{\omega \in L^2(\Omega) : \omega|_I \in H^m(I), \text{for all } I \in \mathcal{T}_N\}.$$

相应的范数和半范数定义为

$$\|w\|^2_{m,\mathcal{T}_N} = \sum_{j=1}^{N} \|w\|^2_{m,I_j}, \quad |w|^2_{m,\mathcal{T}_N} = \sum_{j=1}^{N} |w|^2_{m,I_j},$$

其中 $\|\cdot\|_{m,\ I_j}$ 是通常的 Sobolev 范数，$|\cdot|_{m,\ I_j}$ 是$H^m(I_j)$上的通常半范数。特别地， $\|\cdot\|_I$ 和 $(\cdot,\cdot)_I$ 通常分别表示 $L^2(I)$范数和 $L^2(I)$内积。接下来，在 Bakhvalov 型网格上定义有限元空间为

$$V_N^k = \{v \in L^2(\Omega) : v|_I \in \mathbb{P}_k(I), \quad \forall I \in \mathcal{T}_N\}.$$

这里， $\mathbb{P}_k(I)$是 I上次数至多为 k 的多项式空间。值得注意的是， V_N^k 中的函数在两个相邻单元的边界处不连续，因此在每个节点 $\{x_j\}, j = 0, 1, \cdots, N$处可能是多值的。对于函数 $u \in H^1(\Omega\ \mathcal{T}_N)$，我们定义内部节点处的跳跃和平均值为

$$[u(x_j)] = u(x_j^-) - u(x_j^+), \quad \{u(x_j)\} = \frac{1}{2}\left(u(x_j^+) + u(x_j^-)\right),$$

其中，对于所有 $j = 1$、$\cdots$、$N-1$， $u(x_j^+) = \lim_{x \to x_j^+} u(x)$，且 $u(x_j^-) = \lim_{x \to x_j^-} u(x)$。一般而言，跳跃和平均值的定义可以扩展到边界节点 x_0 和 x_N，即

$$[u(x_0)] = -u(x_0^+) \quad \{u(x_0)\} = u(x_0^+) \quad [u(x_N)] = u(x_N^-) \quad \{u(x_N)\} = u(x_N^-).$$

现在给出问题 (1) 的弱形式：求 $u_N \in V_N^k$，使得

$$B(u_N, v_N) = L(v_N) \quad \text{for all } v_N \in V_N^k, \tag{5}$$

其中

$$B(u,v) = B_1(u,v) + B_2(u,v) + B_3(u,v),$$

$$B_1(u,v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} \varepsilon u'v' \mathrm{d}x - \varepsilon \sum_{j=0}^{N} \{u'(x_j)\}[v(x_j)] + \varepsilon \sum_{j=0}^{N} [u(x_j)]\{v'(x_j)\} + \sum_{j=0}^{N} \mu(x_j)[u(x_j)][v(x_j)],$$

$$B_2(u,v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} b(x)u'v \mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{N-1} b(x_j)[u(x_j)]v(x_j^+),$$

$$B_3(u,v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} c(x)uv \mathrm{d}x,$$

$$L(v) = \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} fv \mathrm{d}x.$$

注意，与 x_j 相关的惩罚参数 $\mu(x_j)(j = 0, 1, \cdots, N)$ 是一些非负常数。本文中，我们取 $\mu(x_j)$ 为

$$\mu(x_j) = \begin{cases} 1, & 0 \le j \le N/2, \\ N^2, & N/2 + 1 \le j \le N. \end{cases} \tag{6}$$

引理 1. 设 u 为（1）的精确解，则对所有 $v \in V_N^k$，有以下 Galerkin正交性

$$B(u - u_N, v) = 0,$$

其中 $B(\cdot, \cdot)$ 定义如（5）所示。

证明. 使用 [24], 中的类似论证，可直接得出此结论。 □

对于所有 $v \in V_N^k$，与 $B(\cdot, \cdot)$ 相关联的自然范数定义为

$$\|v\|_{NIPG} := \left(\varepsilon \sum_{j=1}^{N} \|v'\|_{I_j}^2 + \sum_{j=1}^{N} \gamma \|v\|_{I_j}^2 + \sum_{j=0}^{N} \left(\mu(x_j) + \frac{1}{2} b(x_j) \right) [v(x_j)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

根据 [24], 中的类似论证，容易看出具有强制性

$$B(v_N, v_N) \geq \|v_N\|^2_{NIPG} \quad \forall v_N \in V_N^k. \tag{8}$$

由 Lax–Milgram 引理 [13, 定理 1.1.3] 和 (8) 可知， u_N 是 (5) 的唯一解。

2.3. 一些预备结论

引理 2. 假设假设 1 成立，则在 Bakhvalov 型网格 (4) 上，有

$$h_{N/2+2} \geq \cdots \geq h_N, \tag{9}$$

$$\frac{\sigma\varepsilon}{4\alpha} \leq h_{N/2+2} \leq \frac{\sigma\varepsilon}{\alpha}, \tag{10}$$

$$\frac{\sigma\varepsilon}{2\alpha} \leq h_{N/2+1} \leq \frac{2\sigma}{\alpha} N^{-1}, \tag{11}$$

$$N^{-1} \leq h_j \leq 2N^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N/2. \tag{12}$$

此外，我们给出若干特殊点处的估计，

$$x_{N/2+1} \leq 1 - C\frac{\sigma\varepsilon}{\alpha} \ln N, \quad x_{N/2} \leq 1 + C\frac{\sigma\varepsilon}{\alpha} |\ln \varepsilon|. \tag{13}$$

特别地，对于 $N/2+2 \leq j \leq N$ 和 $0 \leq \lambda \leq \sigma$,

$$h_j^\lambda \max_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} e^{-\alpha(1-x)/\varepsilon} \leq h_j^\lambda e^{-\alpha(1-x_j)/\varepsilon} \leq C\varepsilon^\lambda N^{-\lambda}. \tag{14}$$

证明。采用 [23, 引理 3], 中的类似方法，可以毫无困难地证明此引理。

□

引理 3. 假设假设 1 成立，则在 Bakhvalov 型网格 (4) 上,

$$|E(x_{N/2+1})| \leq CN^{-\sigma}, \quad |E(x_{N/2})| \leq C\varepsilon^\sigma.$$

证明。由（4）和（13）可得本引理的结论。 □

3. 插值与插值误差

3.1. 插值

下面我们引入一个新的插值算子 Π，即

$$(\Pi u)|_I = \begin{cases} (L_k u)|_I, & \text{if } I \subset [x_{N/2+1}, 1], \\ (P_h u)|_I, & \text{if } I \subset [0, x_{N/2+1}], \end{cases} \tag{15}$$

其中，$L_k u$ 是 k次高斯-洛巴托插值，$P_h u$ 是 u的高斯-拉道插值。接下来，我们将给出这两种插值的定义。

首先，假设 $x_{j-1} = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = x_j$是高斯-洛巴托点，其中 s_1、s_2、$\cdots$、s_{k-1}是区间 I_j上 k次勒让德多项式导数的零点。对于 $\varphi \in C(\Omega)$，令 $(L_k\varphi)|_{I_j}$（$j = 1, \ldots, N$）为在高斯-洛巴托点 $\{t_m\}_{m=0}^k$处的 k 次拉格朗日插值。于是，对于 $\varphi(x) \in H^{k+2}(I_j)$，有

$$|(\varphi' - (L_k\varphi)', v')_{I_j}| \le C h_j^{k+1} |\varphi|_{k+2,I_j} |v|_{1,I_j} \quad \text{for all } v \in \mathbb{P}_k. \tag{16}$$

此外，若 $k \ge 1$，我们定义高斯-拉道插值 $P_h u \in V_h^k$ 如下：对于 $j = 1, 2, \cdots, N$，

$$\int_{I_j} (P_h u) v_h \mathrm{d}x = \int_{I_j} u v_h \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in \mathbb{P}_{k-1}, \tag{17}$$

$$(P_h u)(x_j^-) = u(x_j^-), \tag{18}$$

更多详情请参见 [4]。

注1。现在我们给出$x_{N/2+1}$处的情形。一方面，根据高斯-拉道插值（18）的定义，有

$$(u - P_h u)(x_{N/2+1}^-) = 0. \tag{19}$$

另一方面，根据高斯-洛巴托插值，

$$(u - L_k u)(x_{N/2+1}^+) = 0. \tag{20}$$

因此，由 (15)、(19) 和 (20) 可得

$$[(u - \Pi u)(x_{N/2+1})] = 0.$$

3.2. 插值误差

回顾一下， L_k 是以高斯-洛巴托点为插值节点的拉格朗日插值算子。根据索伯列夫空间中的插值理论， [13, 定理 3.1。4], 对所有 $v \in W^{k+1,\ m}(I_j)$,

$$\|v - L_k v\|_{W^{l,n}(I_j)} \leq C h_j^{k+1-l+1/n-1/m} |v|_{W^{k+1,m}(I_j)}, \tag{21}$$

其中 $l = 0$、1 和 $1 \leq m$、$n \leq \infty$。然后回忆一下， $P_h v$ 是 v的高斯-拉道插值。根据 [13], 中的论证，对于所有 $v \in H^{k+1}$（I_j），我们有

$$\|v - P_h v\|_{I_j} + h_j^{\frac{1}{2}} \|v - P_h v\|_{L^\infty(I_j)} \leq C h_j^{k+1} |v|_{k+1,I_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{22}$$

据此，我们很容易推导出如下误差。

引理 4. 假设假设 1 成立，且 μ（x_j）由式（6）给出。那么在满足 $\sigma \geq k+1$的 Bakhvalov 型网格（4）上，有

$$\|S - P_h S\|_{[0,x_{N/2+1}]} + \|u - \Pi u\|_{[0,1]} \leq C N^{-(k+1)}, \tag{23}$$

$$\|(S - \Pi S)'\|_{[0,1]} \leq C N^{-k}, \tag{24}$$

$$\|(E - P_h E)'\|_{[0,x_{N/2+1}]} \leq C\varepsilon^{\sigma} N + C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} N^{-\sigma}, \tag{25}$$

$$\|u - \Pi u\|_{L^\infty(I_j)} \leq C N^{-(k+1)}, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{26}$$

$$\|L_k u - u\|_{NIPG,[x_{N/2+2},1]} \leq C N^{-k}, \tag{27}$$

$$\|u - P_h u\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]} \leq C N^{-(k+\frac{1}{2})}. \tag{28}$$

证明. 首先，由（21）和（22）可直接得到（23–26），因此我们只需估计（27）和（28）。

根据非对称内罚伽辽金范数（7）以及高斯-洛巴托插值的定义 -

插值可得 $[(L_k u - u)(x_j)] = 0, j = N/2+2, \cdots, N$。此外,

$$\|L_k u - u\|^2_{NIPG,[x_{N/2+2},1]} = \varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k u - u)'\|^2_{I_j} + \sum_{j=N/2+2}^{N} \gamma \|L_k u - u\|^2_{I_j}.$$

接下来，根据定理 1，我们将第一项单独进行分析，即,

$$|\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k u - u)'\|^2_{I_j}| \leq C\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k S - S)'\|^2_{I_j} + C\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k E - E)'\|^2_{I_j}.$$

实际上，由式 (3) 和 (21) 可得

$$\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k S - S)'\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{2k} \|S^{(k+1)}\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon^{2k+2} N,$$

其中还用到了 (9) 和 (10)。注意，由 (3)、(14) 和 (21) 可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} \|(L_k E - E)'\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{2k} \|E^{(k+1)}\|_{I_j}^2 \\
&\le C\varepsilon \sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{2k+1} e^{-2\alpha(1-x_j)/\varepsilon} \varepsilon^{-2(k+1)} \\
&\le C \sum_{j=N/2+2}^{N} N^{-(2k+1)} \le C N^{-2k}.
\end{aligned}$$

此外，采用类似的方法可得

$$|\sum_{j=N/2+2}^{N} \gamma \|L_k u - u\|_{I_j}^2| \le C \sum_{j=N/2+2}^{N} \|L_k S - S\|_{I_j}^2 + C \sum_{j=N/2+2}^{N} \|L_k E - E\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon N^{-(2k+1)}.$$

至此，(27) 的推导已完成。

现在来分析 (28) 的估计。由 (7) 和注1,

$$\begin{aligned}
\|u - P_h u\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}^2 &= \varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} \|(u - P_h u)'\|_{I_j}^2 + \sum_{j=1}^{N/2+1} \gamma \|u - P_h u\|_{I_j}^2 \\
&\quad + \sum_{j=0}^{N/2} \mu(x_j)[(u - P_h u)(x_j)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N/2} b(x_j)[(u - P_h u)(x_j)]^2 \\
&= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4.
\end{aligned}$$

接下来，我们依次估计 Λ_1、Λ_2、Λ_3 和 Λ_4。

对于 Λ_1，我们先将其分解为以下形式,

$$\Lambda_1 \le \varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} \|(S - P_h S)'\|_{I_j}^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} \|(E - P_h E)'\|_{I_j}^2.$$

一方面，通过式 (22) 和 (3),

$$|\varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} \|(S - P_h S)'\|_{I_j}^2| \le C\varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} h_j^{2k} \|S^{(k+1)}\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon N^{-2k}.$$

另一方面，利用三角不等式和逆不等式 [13,定理 3.2。6],我们有

$$|\varepsilon \sum_{j=1}^{N/2+1} \|(E-P_hE)'\|_{I_j}^2| \le C\varepsilon^{2\sigma+1}N^2 + CN^{-2\sigma},$$

其中用到了式 (11) 和 (12)。

对于 Λ_2，由三角不等式和式 (22) 可得

$$|\sum_{j=1}^{N/2+1} \gamma\|u-P_hu\|_{I_j}^2| \le C\sum_{j=1}^{N/2+1} \|S-P_hS\|_{I_j}^2 + C\sum_{j=1}^{N/2+1} \|E-P_hE\|_{I_j}^2 \le CN^{-2(k+1)}.$$

回顾一下， $\mu(x_j)$ 定义如式 (6)，于是有

$$|\sum_{j=1}^{N/2} \mu(x_j)[(S-P_hS)(x_j)]^2| \le C\sum_{j=1}^{N/2} \mu(x_j)\|S-P_hS\|_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})}^2 \le CN^{-(2k+1)},$$
$$|\sum_{j=1}^{N/2} \mu(x_j)[(E-P_hE)(x_j)]^2| \le C\sum_{j=1}^{N/2} \mu(x_j)\|E-P_hE\|_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})}^2 \le C\varepsilon^{2\sigma}N.$$

类似地，容易得到

$$\Lambda_4 \le CN^{-(2k+1)}.$$

这里， $b(x)$ 是定义在 $[0,1]$, 上的光滑函数，因此有界。最后，经过一些简单计算，可得式 (28)。 □

定理 2. 假设假设 1 成立，且 $\mu(x_i)$ 定义如式 (6)。在满足 $\sigma \ge k+1$ 的 Bakhvalov 型网格 (4) 上，

$$\|u-\Pi u\|_{NIPG} \le CN^{-k},$$

其中， u 是方程 (1) 的解， Πu 是式 (15) 中定义的插值。

证明。由 (27) 和 (28) 可轻易推出该定理。 □

引理 5. 假设 $z \in H^1(I_j) \quad j=1,2,\cdots,N$，则

$$|z(x_s)|^2 \le 2\left(h_j^{-1}\|z\|_{I_j}^2 + \|z\|_{I_j}\|z'\|_{I_j}\right), \quad s \in \{j-1, j\}.$$

证明。相关论证可见于 [24]。 □

具体而言，以下将 $(\Pi u - u)(x)$ 简化为 $\eta(x)$。

引理 6. 假设 $\varepsilon \le CN^{-1}$，且在满足 $\sigma \ge k+1$ 的网格 (4) 上，有

$$\{\eta'(x_j)\}^2 \le \begin{cases} CN^{-2k} + C\varepsilon^{2\sigma-2} + C\varepsilon^{\sigma-\frac{3}{2}}N^{-(k+\frac{1}{2})}, & 0 \le j \le N/2-1, \\ C\varepsilon^{-1}N^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{-2}N^{-2\sigma} + C\varepsilon^{-\frac{3}{2}}N^{-(\sigma+k+\frac{1}{2})}, & j = N/2, \\ C\varepsilon^{-2}N^{-2k}, & N/2+1 \le j \le N. \end{cases} \tag{29}$$

证明. 通过 [24], ，我们可以得出这个结论。根据平均值的定义和引理 5,

$$\begin{aligned} \{\eta'(x_j)\}^2 &= \frac{1}{4}\left(\eta'(x_j^-) + \eta'(x_j^+)\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(\eta'(x_j^-)^2 + \eta'(x_j^+)^2\right) \\ &\le h_j^{-1}\|\eta'\|_{I_j}^2 + \|\eta'\|_{I_j}\|\eta''\|_{I_j} + h_{j+1}^{-1}\|\eta'\|_{I_{j+1}}^2 + \|\eta'\|_{I_{j+1}}\|\eta''\|_{I_{j+1}}. \end{aligned}$$

下面我们将分别估计 $\|\eta'\|_{I_j}$ 和 $\|\eta''\|_{I_j}$。

对于 $1 \le j \le N/2$，有如下估计,

$$\begin{aligned} \|\eta'\|_{I_j}^2 &\le \|(S-P_hS)'\|_{I_j}^2 + \|(E-P_hE)'\|_{I_j}^2 \\ &\le Ch_j^{2k}\|S^{(k+1)}\|_{I_j}^2 + \|E'\|_{I_j}^2 + \|(P_hE)'\|_{I_j}^2 \\ &\le Ch_j^{2k+1}\|S^{(k+1)}\|_{L^\infty(I_j)}^2 + C\varepsilon^{-2}\int_{I_j} e^{-2\alpha(1-x)/\varepsilon}\mathrm{d}x + Ch_j^{-2}\|P_hE\|_{I_j}^2 \\ &\le CN^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{-1}\varepsilon^{2\sigma} + Ch_j^{-1}\|E\|_{L^\infty(I_j)}^2 \\ &\le CN^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{-1}\varepsilon^{2\sigma} + CN\varepsilon^{2\sigma} \\ &\le CN^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{2\sigma-1}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中用到了 (12)、(22) 和逆不等式。类似地，我们可以得到

$$\|\eta''\|_{I_j}^2 \le \|(S-P_hS)''\|_{I_j}^2 + \|(E-P_hE)''\|_{I_j}^2 \le CN^{-(2k-1)} + C\varepsilon^{2\sigma-3}. \tag{31}$$

综上，对于 $j = 1$、$\cdots$、$N/2-1$，有

$$\begin{aligned} \{\eta'(x_j)\}^2 &\le h_j^{-1}\|\eta'\|_{I_j}^2 + \|\eta'\|_{I_j}\|\eta''\|_{I_j} + h_{j+1}^{-1}\|\eta'\|_{I_{j+1}}^2 + \|\eta'\|_{I_{j+1}}\|\eta''\|_{I_{j+1}} \\ &\le CN^{-2k} + C\varepsilon^{2(\sigma-1)} + C\varepsilon^{\sigma-\frac{3}{2}}N^{-(k+\frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

其中注意到 $\varepsilon \le CN^{-1}$ 和 $\sigma \ge k+1$。

此外，当 $j = N/2+2, \cdots, N$ 时，首先，由 (3)、(9)、(10) 和 (21)，

$$\|\eta'\|_{I_j}^2 \le \|(S - L_k S)'\|_{I_j}^2 + \|(E - L_k E)'\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon^{-1} N^{-(2k+1)}.$$

其次，由 (3) 和 (21)，可得

$$\|\eta''\|_{I_j}^2 \le \|(S - L_k S)''\|_{I_j}^2 + \|(E - L_k E)''\|_{I_j}^2 \le C\varepsilon^{-3} N^{-(2k-1)}.$$

于是，当 $j = N/2+2, \cdots, N$ 时，我们推得

$$\{\eta'(x_j)\}^2 \le C\varepsilon^{-2} N^{-2k}. \tag{32}$$

最后，我们分别分析 $j = N/2$ 和 $j = N/2+1$ 的情形：一方面，当 $j = N/2$ 时，

$$\begin{aligned}\{\eta'(x_{N/2})\}^2 \le{}& h_{N/2}^{-1}\|\eta'\|_{I_{N/2}}^2 + \|\eta'\|_{I_{N/2}}\|\eta''\|_{I_{N/2}} \\ &+ h_{N/2+1}^{-1}\|\eta'\|_{I_{N/2+1}}^2 + \|\eta'\|_{I_{N/2+1}}\|\eta''\|_{I_{N/2+1}}.\end{aligned}$$

(3)、(11)、(22) 以及逆不等式 [13, 定理 3.2.6]给出

$$\begin{aligned}\|\eta'\|_{I_{N/2+1}}^2 &\le \|(S - P_h S)'\|_{I_{N/2+1}}^2 + \|(E - P_h E)'\|_{I_{N/2+1}}^2 \\ &\le Ch_{N/2+1}^{2k}\|S^{(k+1)}\|_{I_{N/2+1}}^2 + \|E'\|_{I_{N/2+1}}^2 + \|(P_h E)'\|_{I_{N/2+1}}^2 \\ &\le Ch_{N/2+1}^{2k+1}\|S^{(k+1)}\|_{L^\infty(I_{N/2+1})}^2 + C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma} + Ch_{N/2+1}^{-1}\|E\|_{L^\infty(I_{N/2+1})}^2 \\ &\le CN^{-2(k+\frac{1}{2})} + C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma} + C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma} \\ &\le CN^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma}.\end{aligned} \tag{33}$$

同理，可得

$$\|\eta''\|_{I_{N/2+1}}^2 \le CN^{-(2k-1)} + C\varepsilon^{-3}N^{-2\sigma}. \tag{34}$$

然后利用（30）、（31）、（33）和（34），即可直接推得

$$\{\eta(x_{N/2})\}^2 \le C\varepsilon^{-1}N^{-(2k+1)} + C\varepsilon^{-2}N^{-2\sigma} + C\varepsilon^{-\frac{3}{2}}N^{-(\sigma+k+\frac{1}{2})}.$$

另一方面，当 $j = N/2+1$ 时，由（32）、（33）和（34）可得

$$\{\eta'(x_{N/2+1})\}^2 \le C\varepsilon^{-2}N^{-2k}.$$

到目前为止，我们已经证明了这一结论。 □

4. 超逼近

现在引入 $\xi := \Pi u - u_N$，并回顾 $\eta := \Pi u - u_\circ$ 根据 (8) 和 Galerkin正交性,

$$
\begin{aligned}
&\|\xi\|_{NIPG}^2 \le B(\xi,\xi) = B(\Pi u - u + u - u_N, \xi) = B(\eta,\xi)\\
&= \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} \varepsilon\eta'\xi'\mathrm{d}x + \varepsilon\sum_{j=0}^{N}[\eta(x_j)]\{\xi'(x_j)\} - \varepsilon\sum_{j=0}^{N}\{\eta'(x_j)\}[\xi(x_j)]\\
&+ \sum_{j=0}^{N}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)] + \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} b(x)\eta'\xi\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{N-1} b(x_j)[\eta(x_j)]\xi(x_j^+)\\
&+ \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} c(x)\eta\xi\mathrm{d}x\\
&= \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} \varepsilon\eta'\xi'\mathrm{d}x + \varepsilon\sum_{j=0}^{N}[\eta(x_j)]\{\xi'(x_j)\} - \varepsilon\sum_{j=0}^{N}\{\eta'(x_j)\}[\xi(x_j)]\\
&+ \sum_{j=0}^{N}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)] - \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} b(x)\eta\xi'\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{N} b(x_j)[\xi(x_j)]\eta(x_j^-)\\
&+ \sum_{j=1}^{N}\int_{I_j} \left(c(x) - b'(x)\right)\eta\xi\mathrm{d}x\\
&=: \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

接下来，对（35）右侧的各项进行估计。首先，为便于分析，将 Γ_1 分解为

$$
\Gamma_1 = \sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j} \varepsilon\eta'\xi'\mathrm{d}x + \sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} \varepsilon\eta'\xi'\mathrm{d}x.
$$

对于 $1 \le j \le N/2+1$，根据（24）、H¨older 不等式和（25），可得

$$
\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j} \varepsilon\eta'\xi'\mathrm{d}x| &\le C\left(\sum_{j=1}^{N/2+1}\varepsilon\|\eta'\|_{I_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N/2+1}\varepsilon\|\xi'\|_{I_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-k} + N^{-\sigma}\right)\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

此外，对于 $j = N/2+2$、$\cdots$、N，由 H¨older 不等式和（24）可得,

$$
|\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} \varepsilon(S - L_k S)'\xi'\mathrm{d}x| \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-k}\|\xi\|_{NIPG}. \tag{37}
$$

通过（9）、（10）、（14）、（16）以及注记 $\sigma \geq k+1$, 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j}\varepsilon(E-L_kE)'\xi'\mathrm{d}x| \\
&\leq C\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon h_j^{k+1}\|E^{(k+2)}\|_{I_j}\|\xi'\|_{I_j} \\
&\leq C\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon h_j h_j^{2(k+1)}\|E^{(k+2)}\|^2_{L^\infty(I_j)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon\|\xi'\|^2_{I_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon h_j h_j^{2(k+1)}e^{-2\alpha(1-x_j)/\varepsilon}\varepsilon^{-2(k+2)}\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG} \\
&\leq \left(C\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon^{-1}h_j N^{-2(k+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG} \\
&\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

由 (36)、(37)、(38)、 $\varepsilon \leq CN^{-1}$ 和 $\sigma \geq k+1$, 可得以下估计,

$$
\Gamma_1 \leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG}. \tag{39}
$$

对于 Γ_2, 利用 (29) 以及 $\mu(x_j)$ 的定义，可得

$$
\begin{aligned}
|\Gamma_2| &= |\varepsilon\sum_{j=0}^{N}\{\eta'(x_j)\}[\xi(x_j)]| \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{N}\frac{\varepsilon^2}{\mu(x_j)}\{\eta'(x_j)\}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{N}\mu(x_j)[\xi(x_j)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{N/2-1}\frac{\varepsilon^2}{\mu(x_j)}\{\eta'(x_j)\}^2+\frac{\varepsilon^2}{\mu(x_{N/2})}\{\eta'(x_{N/2})\}^2+\sum_{i=N/2+1}^{N}\frac{\varepsilon^2}{\mu(x_j)}\{\eta'(x_j)\}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG} \\
&\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

现在我们将 Γ_3 分解为两部分，即

$$
\Gamma_3 = -\varepsilon\sum_{j=0}^{N/2}\{\xi'(x_j)\}[\eta(x_j)] - \varepsilon\sum_{j=N/2+1}^{N}\{\xi'(x_j)\}[\eta(x_j)].
$$

根据式 (15)、高斯-洛巴托插值的定义以及注1，我们只需估计 $-\varepsilon\sum_{j=0}^{N/2}\{\xi'(x_j)\}[\eta(x_j)]$。由逆不等式和式 (26),

$$\begin{aligned}|-\varepsilon\sum_{j=0}^{N/2}\{\xi'(x_j)\}[\eta(x_j)]| &\le |\varepsilon\{\xi'(x_0)\}[\eta(x_0)]| + |\varepsilon\sum_{j=1}^{N/2}\{\xi'(x_j)\}[\eta(x_j)]| \\ &\le \left(C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-k} + CN^{-(k+1)}\right)\|\xi\|_{NIPG},\end{aligned} \tag{41}$$

其中以下估计成立。更具体地说,

$$\begin{aligned}&|\varepsilon\sum_{j=1}^{N/2}[\eta(x_j)]\{\xi'(x_j)\}| \\ &\le |\varepsilon\sum_{j=1}^{N/2-1}[\eta(x_j)]\{\xi'(x_j)\}| + |\varepsilon[\eta(x_{N/2})]\{\xi'(x_{N/2})\}| \\ &\le C\varepsilon\sum_{j=1}^{N/2-1}\|\eta\|_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})}\|\xi'\|_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})} + C\varepsilon\|\eta\|_{L^\infty(I_{N/2}\cup I_{N/2+1})}\|\xi'\|_{L^\infty(I_{N/2}\cup I_{N/2+1})} \\ &\le C\varepsilon\|\eta\|_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})}N^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{N/2-1}\|\xi'\|_{I_j\cup I_{j+1}} + C\varepsilon\|\eta\|_{L^\infty(I_{N/2}\cup I_{N/2+1})}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_{N/2}\cup I_{N/2+1}} \\ &\le C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-k} + N^{-(k+1)}\right)\|\xi\|_{NIPG},\end{aligned}$$

其中用到了式 (11) 和式 (12)。

然后，将 Γ_4 分成以下两部分:

$$\sum_{j=0}^{N}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)] = \sum_{j=0}^{N/2}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)] + \sum_{j=N/2+1}^{N}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)].$$

根据式（15）和注1，有 $[\eta(x_j)]=0$、$j=N/2+1$、$\cdots$。也就是说,

我们只需分析第一项。由式（26）可得,

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=0}^{N/2}\mu(x_j)[\eta(x_j)][\xi(x_j)]| \\
&\le \left(\sum_{j=0}^{N/2}\mu(x_j)[\eta(x_j)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{N/2}\mu(x_j)[\xi(x_j)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\mu(x_0)\|\eta\|^2_{L^\infty(I_1)}+\sum_{j=1}^{N/2}\mu(x_j)\|\eta\|^2_{L^\infty(I_j\cup I_{j+1})}\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG} \\
&\le C\left(N^{-2(k+1)}+N^{-(2k+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG} \\
&\le CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

现在我们分析 Γ_5 和 Γ_6，它们也分为两部分 $1\le j\le N/2+1$ 和 $N/2+2\le j\le N$。对于 $1\le j\le N/2+1$，由注1、(17)、(18)，并假设 $b(x_{j-\frac{1}{2}})$是 $b(x)$在区间 I_j的中点 $x_{j-\frac{1}{2}}$处的值，则

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j}b(x)\eta\xi'\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{N/2+1}b(x_j)[\xi(x_j)]\eta(x_j^-) \\
&=-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j}\left(b(x)-b(x_{j-\frac{1}{2}})\right)\eta\xi'\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j}b(x_{j-\frac{1}{2}})\eta\xi'\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{N/2+1}b(x_j)\eta(x_j^-)[\xi(x_j)] \\
&=-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j}\left(b(x)-b(x_{j-\frac{1}{2}})\right)\eta\xi'\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

根据中值定理，$x_{j-\frac{1}{2}}$ 和 x 之间存在 ξ，使得

$$
b(x)-b(x_{j-\frac{1}{2}})=b'(\xi)(x-x_{j-\frac{1}{2}}).
$$

注意，本文中 $b(x)$ 是一个光滑函数。由逆不等式,

（26）式和柯西-施瓦茨不等式可得

$$
\begin{aligned}
&|-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j}\left(b(x)-b(x_{j-\frac{1}{2}})\right)\eta\xi'\mathrm{d}x| = |-\sum_{j=1}^{N/2+1}\int_{I_j} b'(\xi)(x-x_{j-\frac{1}{2}})\eta\xi'\mathrm{d}x| \\
&\le C\sum_{j=1}^{N/2+1} h_j\|\eta\|_{L^\infty(I_j)}\|\xi'\|_{L^1(I_j)} \le C\sum_{j=1}^{N/2+1} h_j\|\eta\|_{L^\infty(I_j)}h_j^{-\frac{1}{2}}\|\xi\|_{I_j} \\
&\le C\sum_{j=1}^{N/2+1} N^{-\frac{1}{2}}\|\eta\|_{L^\infty(I_j)}\|\xi\|_{I_j} \\
&\le CN^{-(k+\frac{3}{2})}\left(\sum_{j=1}^{N/2+1}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{N/2+1}\|\xi\|_{I_j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le CN^{-(k+1)}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
$$

对于 $N/2+2\le j\le N$，我们需要考虑以下公式,

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} b(x)\eta\xi'\mathrm{d}x - \sum_{j=N/2+2}^{N} b(x_j)\eta(x_j^-)[\xi(x_j)] \\
&= -\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} b(x)(S-L_kS)\xi'\mathrm{d}x - \sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} b(x)(E-L_kE)\xi'\mathrm{d}x \\
&-\sum_{j=N/2+2}^{N} b(x_j)\eta(x_j^-)[\xi(x_j)].
\end{aligned}
$$

由H¨older不等式和逆不等式可得,

$$
\begin{aligned}
&|-\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} b(x)(S-L_kS)\xi'\mathrm{d}x| \le C\sum_{j=N/2+2}^{N}\|S-L_kS\|_{L^\infty(I_j)}\|\xi'\|_{L^1(I_j)} \\
&\le C\|S-L_kS\|_{L^\infty(I_j)}\sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_j} \\
&\le C\varepsilon^{k+1}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon\|\xi'\|_{I_j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\varepsilon^{k+1}N^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
$$

回顾 $\sigma \geq k+1$，则由逆不等式、(14)和(21)可得

$$
\begin{aligned}
&|-\sum_{j=N/2+2}^{N}\int_{I_j} b(x)(E-L_kE)\xi'\mathrm{d}x| \leq C\sum_{j=N/2+2}^{N}\|E-L_kE\|_{L^\infty(I_j)}\|\xi'\|_{L^1(I_j)}\\
&\leq C\sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{k+1}\|E^{(k+1)}\|_{L^\infty(I_j)}h_j^{\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_j}\\
&\leq C\sum_{j=N/2+2}^{N} h_j^{k+1}e^{-\alpha(1-x_j)/\varepsilon}\varepsilon^{-(k+1)}h_j^{\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_j}\\
&\leq C\sum_{j=N/2+2}^{N} N^{-(k+1)}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_j}\\
&\leq CN^{-(k+1)}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\varepsilon\|\xi'\|_{I_j}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
$$

此外，利用（26）式，并回顾 $\mu(x_j)$（6）中的取值，

$$
\begin{aligned}
&|-\sum_{j=N/2+2}^{N} b(x_j)[\xi(x_j)]\eta(x_j^-)|\\
&\leq C\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\mu^{-1}(x_j)\eta(x_j^-)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\mu(x_j)[\xi(x_j)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left(\sum_{j=N/2+2}^{N}\mu^{-1}(x_j)\|\eta\|_{L^\infty(I_j)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_{NIPG}\\
&\leq CN^{-(k+\frac{3}{2})}\|\xi\|_{NIPG}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$\Gamma_5+\Gamma_6 \leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG} \tag{43}$$

不会遇到任何困难。

对于 Γ_7，根据 H¨lder 不等式和式（23），可得

$$\Gamma_7 \leq C\|\eta\|_{[0,1]}\|\xi\|_{NIPG} \leq CN^{-(k+1)}\|\xi\|_{NIPG}. \tag{44}$$

最后，根据式（39）、（40）、（41）、（42）、（43）和（44），可得

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{NIPG}^2 &\leq \Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6+\Gamma_7\\ &\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG},\end{aligned}$$

这意味着以下估计成立，即

$$\|\Pi u-u_N\|_{NIPG}\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}. \tag{45}$$

现在我们给出本文的主要结论。

定理 3. 假设假设 1 成立，且 $\mu(x_j)$ 定义如式 (6)。那么，在具有 $\sigma\geq k+1$ 的 Bakhvalov 型网格 (4) 上，有

$$\|L_ku-u_N\|_{NIPG}+\|\Pi u-u_N\|_{NIPG}\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})},$$

其中， Πu 是定义如式 (15) 的插值， u_N 是方程 (5) 的解。

证明. 由三角不等式可得

$$\|L_ku-u_N\|_{NIPG}\leq\|L_ku-\Pi u\|_{NIPG}+\|\Pi u-u_N\|_{NIPG}.$$

根据式 (45)，我们只需估计 $\|L_ku-\Pi u\|_{NIPG}$ 的界。

根据 Πu (15)的定义和三角不等式，

$$\begin{aligned}\|L_ku-\Pi u\|_{NIPG}&=\|L_ku-L_ku\|_{NIPG,[x_{N/2+1},1]}+\|L_ku-P_hu\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}\\ &=\|L_ku-P_hu\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}\\ &\leq\|L_ku-u\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}+\|u-P_hu\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}.\end{aligned}$$

因此，由(28)和一些直接计算可得

$$\|L_ku-P_hu\|_{NIPG,[0,x_{N/2+1}]}\leq CN^{-(k+\frac{1}{2})}.$$

注意到 $\mu(x_j)=1, j=0,1,\cdots,N/2+1$。至此，我们完成了证明。

□

注 2。我们选择在$[0,x_{N/2+1}]$ 中使用高斯-拉道插值，是因为 $I_{N/2+1}$ 中对流项的收敛性分析无法

通过使用标准拉格朗日插值来分析过去。简而言之，在 $[x_{N/2}, x_{N/2+1}]$上，我们无法得到$\varepsilon^{\frac{1}{2}}$，从而使 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\xi'\|_{I_{N/2+1}} \leq \|\xi\|_{NIPG}$。更具体地说，

$$\int_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} b\ (x)\ \ (E-E_I)\ \xi' \mathrm{d}x \leq C\|E-E_I\|_{I_{N/2+1}}\|\xi'\|_{I_{N/2+1}} \leq CN^{-(\sigma+\frac{1}{2})}\|\xi'\|_{I_{N/2+1}}$$

$$\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}N^{-(\sigma+\frac{1}{2})}\|\xi\|_{NIPG},$$

其中， E_I 表示 E的标准拉格朗日插值。这一困难可以通过高斯-拉道插值轻松解决。

定理4. 设式 (6) 中定义的 $\mu(x_j)$和假设 1成立。则在满足 $\sigma \geq k+1$的 Bakhvalov 型网格 (4) 上，有

$$\|u-u_N\|_{NIPG} \leq CN^{-k},$$

其中， u 是式 (1) 的精确解， u_N 是式 (5) 的解。

证明. 结合定理2和式 (45)，可直接得出这一结论。 □

5. 数值实验

为了验证关于超逼近的理论结论，我们考虑以下测试问题，

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) + (3-x)u'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \Omega := (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

这里， $f(x)$ 的选取满足

$$u(x) = x - x \cdot e^{-2(1-x)/\varepsilon}$$

是.....的精确解。

在我们的数值实验中，首先考虑 $\varepsilon = 10^{-5}, \cdots, 10^{-9}, k = 1, 2$ 和 $N = 8, \cdots, 1024$。并且在 Bakhvalov 型网格 (4) 上，我们设定 $\sigma = k+1, \alpha = 2$和

$$\mu(x_j) = \begin{cases} 1, & j = 0, 1, 2, \cdots, N/2, \\ N^2, & j = N/2+1, \cdots, N. \end{cases}$$

现在，相应的收敛率定义为

$$r_N = \frac{\ln e_N - \ln e_{2N}}{\ln 2},$$

其中，对于特定的 ε， $e_N = \|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 是与网格参数 N 相关的计算误差。下面给出以下表格，这些表格表明定理 3 是正确的。

表格 1： $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 在 Bakhvalov 型网格上用于 $k = 1$

	ε									
N	10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.695E-1	1.96	0.702E-1	1.96	0.706E-1	1.96	0.710E-1	1.96	0.723E-1	1.96
16	0.179E-1	1.98	0.180E-1	1.98	0.181E-1	1.98	0.182E-1	1.98	0.183E-1	1.98
32	0.453E-2	1.99	0.457E-2	1.99	0.460E-2	1.99	0.463E-2	1.99	0.464E-2	1.99
64	0.114E-2	2.00	0.115E-2	2.00	0.116E-2	2.00	0.117E-2	1.99	0.117E-2	1.99
128	0.285E-3	2.00	0.288E-3	2.00	0.291E-3	2.00	0.292E-3	2.00	0.294E-3	2.00
256	0.711E-4	2.01	0.721E-4	2.00	0.727E-4	2.00	0.732E-4	2.00	0.735E-4	2.00
512	0.177E-4	2.01	0.180E-4	2.00	0.182E-4	2.00	0.183E-4	2.00	0.184E-4	2.00
1024	0.441E-5	–	0.448E-5	–	0.453E-5	–	0.457E-5	–	0.459E-5	–

表2： $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 对于 Bakhvalov 型网格上的 $k = 2$

	ε									
N	10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.213E-1	2.71	0.216E-1	2.71	0.218E-1	2.72	0.220E-1	2.72	0.221E-1	2.72
16	0.326E-2	2.67	0.329E-2	2.67	0.332E-2	2.68	0.334E-2	2.68	0.335E-2	2.68
32	0.512E-3	2.62	0.516E-3	2.62	0.519E-3	2.62	0.521E-3	2.62	0.523E-3	2.63
64	0.836E-4	2.57	0.840E-4	2.57	0.843E-4	2.58	0.846E-4	2.58	0.847E-4	2.53
128	0.141E-4	2.54	0.141E-4	2.54	0.141E-4	2.54	0.142E-4	2.48	0.147E-4	1.01
256	0.242E-5	2.52	0.242E-5	2.52	0.242E-5	2.47	0.253E-5	0.74	0.730E-5	-0.98
512	0.420E-6	2.51	0.421E-6	2.43	0.438E-6	0.63	0.152E-5	-0.81	0.144E-4	-0.91
1024	0.737E-7	–	0.781E-7	–	0.283E-6	–	0.266E-5	–	0.271E-4	–

表格 3: $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 在 Bakhvalov 型网格上的 $k = 3$

	ε									
N	10^{-5}		10^{-6}		10^{-7}		10^{-8}		10^{-9}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.370E-2	3.96	0.382E-2	3.96	0.391E-2	3.96	0.397E-2	3.96	0.402E-2	3.96
16	0.237E-3	3.97	0.246E-3	3.97	0.252E-3	3.96	0.256E-3	3.96	0.259E-3	3.98
32	0.152E-4	3.98	0.157E-4	3.97	0.161E-4	3.97	0.164E-4	3.89	0.164E-4	2.09
64	0.963E-6	3.98	0.100E-5	3.98	0.103E-5	3.23	0.113E-5	0.68	0.386E-5	-0.68
128	0.609E-7	3.90	0.637E-7	1.92	0.109E-6	-0.54	0.701E-6	-1.12	0.617E-5	-1.20
256	0.409E-8	0.32	0.169E-7	-0.88	0.159E-6	-0.99	0.152E-5	-0.83	0.141E-4	-0.93
512	0.328E-8	-1.13	0.310E-7	-1.00	0.316E-6	-0.94	0.271E-5	-1.13	0.270E-4	-1.25
1024	0.717E-8	–	0.619E-7	–	0.609E-6	–	0.594E-5	–	0.642E-4	–

此外，我们给出 $\varepsilon \geq CN^{-1}$ 时的一些数值结果。为此，我们取 $\varepsilon = 10^{-1}$、$\cdots$、10^{-4}、$k = 1$、2、3 和 $N = 8$、$\cdots$、1024。在 Bakhvalov 型网格 (4) 上，令 $\sigma = k+1$、$\alpha = 2$，即可得到以下表格。

表 4: $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 对于 $k = 1$

	ε							
N	10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}		10^{-4}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.632E-1	1.91	0.653E-1	1.95	0.672E-1	1.96	0.686E-1	1.96
16	0.168E-1	1.93	0.169E-1	1.97	0.173E-1	1.98	0.176E-1	1.98
32	0.439E-2	1.94	0.431E-2	1.97	0.437E-2	1.99	0.446E-2	1.99
64	0.115E-2	1.93	0.110E-2	1.96	0.110E-2	2.00	0.112E-2	2.00
128	0.300E-3	1.91	0.282E-3	1.95	0.275E-3	2.00	0.280E-3	2.00
256	0.800E-4	1.84	0.730E-4	1.95	0.690E-4	1.99	0.698E-4	2.01
512	0.223E-4	1.74	0.189E-4	1.96	0.174E-4	1.97	0.174E-4	2.01
1024	0.668E-5	–	0.488E-5	–	0.442E-5	–	0.433E-5	–

表格 5： $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ 对于 $k = 2$

	ε							
N	10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}		10^{-4}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.159E-1	2.61	0.188E-1	2.67	0.201E-1	2.69	0.209E-1	2.70
16	0.261E-2	2.57	0.296E-2	2.63	0.311E-2	2.65	0.320E-2	2.66
32	0.441E-3	2.53	0.479E-3	2.58	0.496E-3	2.60	0.506E-3	2.61
64	0.763E-4	2.50	0.800E-4	2.55	0.818E-4	2.56	0.829E-4	2.57
128	0.135E-4	2.48	0.137E-4	2.52	0.139E-4	2.53	0.140E-4	2.54
256	0.242E-5	2.45	0.239E-5	2.51	0.240E-5	2.52	0.241E-5	2.52
512	0.443E-6	2.40	0.420E-6	2.50	0.418E-6	2.51	0.420E-6	2.51
1024	0.837E-7	–	0.744E-7	–	0.735E-7	–	0.736E-7	–

表6： $\|L_k u - u_N\|_{NIPG}$ for $k = 3$

	ε							
N	10^{-1}		10^{-2}		10^{-3}		10^{-4}	
	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N	e_N	r_N
8	0.193E-2	3.92	0.275E-2	3.96	0.322E-2	3.97	0.352E-2	3.97
16	0.128E-3	3.93	0.176E-3	3.96	0.205E-3	3.98	0.225E-3	3.85
32	0.839E-5	3.92	0.113E-4	3.97	0.130E-4	3.99	0.156E-4	4.11
64	0.553E-6	3.89	0.721E-6	3.97	0.818E-6	3.99	0.904E-6	3.99
128	0.372E-7	3.84	0.462E-7	3.95	0.515E-7	3.99	0.568E-7	3.99
256	0.260E-8	3.17	0.298E-8	2.40	0.324E-8	3.00	0.357E-8	2.60
512	0.289E-9	-2.99	0.564E-9	-2.88	0.405E-9	-2.48	0.589E-9	-2.18
1024	0.229E-8	–	0.415E-8	–	0.225E-8	–	0.266E-8	–

从表格（1–6）中可以看出，随着 k 和网格参数N 的增大，或扰动参数 ε 的减小，数值结果可能会变得不稳定。这是因为上述条件的变化可能会增大线性系统的条件数，从而增加求解线性系统的难度。因此，为了应用高阶数值方法，应开发一种新的迭代求解器来求解这些病态线性系统。

参考文献

[1] S. Adjerid 和 A. Klauser。《瞬态对流-扩散问题中间断有限元解的超收敛》。J. Sci. Comput.，22/23：5–24，2005。

[2] N. S. Bakhvalov. 带边界层的边值问题求解方法的优化. 苏联计算数学与数理物理, 9(4):139–166, 1969.[3] L. Govindarao 和 J. Mohapatra. 求解涉及奇异摄动的混合抛物-椭圆问题的一种数值格式. Int. J. Comput. Math., 99(10):2069–2090, 2022年.

[4] Y. Cheng 和 C. Shu. 不连续Galerkin有限元解的超收敛与时间演化. J. Comput. Phys., 227(22):9612–9627, 2008年.

[5] D. Di Pietro 和 A. Ern. 间断伽辽金方法的数学方面, Math ´ematiques & Applications (柏林) 第69卷 /Mathemat- ics & Applications/. 施普林格, 海德堡, 2012.

[6] M. Stynes 和 D. Stynes。《对流扩散问题》，Graduate Studies in Mathematics 第 196 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；大西洋数学科学研究协会（AARMS），新斯科舍省哈利法克斯，2018 年。

[7] J. Mohapatra 和 S. Natesan. 基于缺陷校正技术、适用于具有层行为的奇异摄动时滞微分方程的参数鲁棒数值方法。Int. J. Comput. Methods, 7(4):573–594, 2010年。[8] J. Mohapatra 和 N. R. Reddy. 用于奇异摄动两点边值问题的指数拟合有限差分格式。Int. J. Appl. Comput. Math., 1(2):267–278, 2015。

[9] J. Zhang 和 Y. Lv. 针对具有两个参数的奇异摄动对流扩散问题，在 Bakhvalov 型网格上采用的高阶有限元方法。应用数学与计算, 397:论文编号 125953, 10, 2021年。[10]J. Zhang 和 Y. Lv. 在 Bakhvalov 型网格上，针对具有两个参数的奇异摄动问题的有限元方法的超逼近。应用数值数学, 171:329–352, 2022年。[11] S. R. Sahu 和 J. Mohapatra. 涉及两个小参数的奇异摄动时滞微分方程的参数一致数值方法。Int. J. Appl. Comput. Math., 5(5):论文编号 129, 19, 2019年。[12]P. A. Farrell, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, E. O' Riordan 和 G. I. Shishkin. 边界层稳健计算技术，第 16 卷，应用数学（博卡拉顿）。Chapman & Hall/CRC, 博卡拉顿，FL, 2000年。[13] P. G. Ciarlet. 椭圆问题有限元方法。工业与应用数学学会, 2002年。[14] H.-G. Roos, M. Stynes 和 L. Tobiska. 奇异摄动微分方程的稳健数值方法，第 24 卷，施普林格计算数学丛书。施普林格出版社，柏林，第二版，2008年。[15] P. Houston, C. Schwab 和 E. S¨uli. 用于对流扩散反应问题的不连续 hp-有限元方法。SIAM 数值分析杂志, 39(6):2133–2163, 2002年。[16] Mohan K. Kadalbajoo 和 Vikas Gupta. 求解奇异摄动问题的数值方法简要综述。应用数学与计算, 217(8):3641–3716, 2010年。[17] T. Linß 和 M. Stynes. 线性对流扩散问题在 Shishkin 网格上的数值方法。计算方法与应用力学和工程, 190(28):3527–3542, 2001年。

[18] N. Madden 和 M. Stynes. 一种用于耦合的两个奇异摄动线性反应扩散问题系统的均匀收敛数值方法. IMA 数值分析杂志, 23(4):627–644, 2003.[19] H.-G. Roos 和 H. Zarin. 用于奇异摄动问题的间断 Galerkin 有限元方法. 35:246–267, 2003.[20] G. I. Shishkin. 奇异摄动椭圆型和抛物型方程的网格逼近. 第二篇博士论文，Keldysh 研究所，莫斯科，1990. 俄语. 第 19 节.[21] H. Zarin. 关于用于奇异摄动时滞微分方程的间断 Galerkin 有限元方法. 应用数学快报, 38:27–32, 2014.[22] J. Zhang 和 X. Liu. 具有指数边界层问题在 Shishkin 三角网格上的流线扩散有限元法的超逼近. 计算数学进展, 43(4):759–775, 2017.[23] J. Zhang 和 X. Liu. Bakhvalov 型网格上有限元方法的最优阶一致收敛性. J. Sci. Comput., 85(1):论文编号 2，14 页, 2020.[24] P. Zhu、Y. Yang 和 Y. Yin. 一维奇异摄动对流扩散型问题的高阶一致收敛非对称内罚 Galerkin 方法. 应用数学建模, 39(22):6806–6816, 2015.