斜向辐照和前向各向异性散射下趋光性藻类悬浮液中的生物对流

Sandeep Kumar[1, a)] 和 Preeti Sharma[1]数学系，PDPM印度信息技术设计与制造学院，贾巴尔普尔 482005，印度

arXiv:2303.02371v1 [math.DS] 4 Mar 2023

本研究分析了表现出各向异性散射的趋光性藻类悬浮液中的生物对流。悬浮液的顶层受到倾斜准直辐照。研究期间，底部边界被视为刚性边界，而顶部边界被视为无应力边界。为求解特征值问题，采用了四阶Newton-Raphson-Kantorovich有限差分法。利用中性曲线对基本态进行了线性分析。结果表明，对于特定参数，随着入射角的变化，最不稳定模态会从过稳定态转变为静止态，或反之。随着入射角增大，最大基本浓度的位置向悬浮液顶部移动。在大多数情况下，入射角增加会使系统变得更加不稳定。

a)电子邮箱：sandeepkumar1.00123@gmail.com

I. 引言

生物对流是游动微生物悬浮液中自发形成图案的过程。[1]“生物对流”一词由 Platt 2 创造，而 Wa-ger[3] 则通过其开创性研究为该领域奠定了基础。微生物的密度仅略高于其游动所在水体的密度；因此，它们倾向于向与水流相反的方向游动，而水流方向是向上的。此外，每当微生物停止游动时，图案也会随之消失。另一方面，也有一些图案形成并不需要个体向上游动，也不需要其密度更大。[1] 所形成图案的类型取决于多种因素，例如悬浮液的厚度、微生物的数量以及它们能够移动的程度。研究表明，包括裸藻、衣藻、团藻和杜氏藻在内的某些鞭毛绿藻物种，在水中漂浮时可能形成图案。[3–6] 趋性是微生物对刺激所产生反应的统称。这些反应包括沿某一特定方向的平均游动，并且是对刺激的响应。趋性的种类很多，其中较为知名的包括趋重性、趋陀螺性、趋光性和趋化性。此外，还有许多其他类型的趋性。微生物对重力的响应称为趋重性。趋化性是一种响应化学梯度而产生的游动行为，而趋陀螺性则是通过平衡由重力和剪切产生的扭矩而形成的。远离（朝向）光源所指方向的运动，分别表现为负趋光性（正趋光性）。本文仅讨论趋光性。研究表明，生物对流形成图案的间距和大小可能受到各种照明的强度及其强度大小的影响。[3,5] 生物对流图案的形状、大小和尺度也会根据环境中的光照量而发生变化。[7]生物对流图案发生变化主要有两个原因：首先，当总强度 $\mathscr{G}$ 低于（或高于）临界总强度 $\mathscr{G}_c$时，微生物会向光源游动（或远离光源）。微生物会吸收并散射光，这是第二个原因。[8]

本研究将采用 Ghorai 和 Panda[9] 提出的趋光性模型。纳维–斯托克斯方程、用于描述斜向辐照传播的辐射传输方程，以及

细胞守恒方程均用于模拟不可压缩流体。用于照射藻类溶液的光源与他们的设想有显著差异。由于太阳光会以各种偏离法线的角度照射表面，本研究假设辐照以准直光束沿斜向入射。因此，辐射场可能会改变整个藻类悬浮液中的光强分布，进而通过趋光性调节光合作用。由于许多运动性藻类必须通过光合作用自行制造食物，它们表现出很强的趋光性。鉴于光合游动对许多运动性藻类十分重要，在真实可信的趋光性模型中考虑前向散射的影响也很重要。[10] 有限深度、从上方受光照射的悬浮液，其基本稳态是由扩散、吸收和散射引起的趋光性达到平衡的状态。这会形成一个由高密度微生物组成的水平亚层。亚层下方的区域重力不稳定，而上方的区域重力稳定。临界总强度 $\mathscr{G}_c$ 会影响亚层的位置。如果整个悬浮液中每个位置的总强度 $\mathscr{G}$ 都低于（或高于）临界总强度 $\mathscr{G}_c$，亚层就位于悬浮液的顶部（或底部）。如果临界总强度 $\mathscr{G}_c$ 与悬浮液 $\mathscr{G}$ 内部的总强度相同，亚层也会位于顶部和底部边界之间。因此，如果某一流体层变得不稳定，其流动就会通过穿透对流进入稳定层。[11]

Vincent 和 Hill[12] 最初提出了趋光性生物对流的概念。作者研究了一个模型，其中非散射吸收性悬浮液受到垂直准直辐照。该趋光性与遮蔽模型用于分析一种悬浮液的线性稳定性：其中的趋光性微生物均匀地接受来自上方的辐照，并在一种密度略低于藻类自身密度的流体中游动。此后，Ghorai 和 Hill[13] 建立了一个新的二维趋光性模型，并分析了其线性稳定性。研究采用守恒有限差分方法对该模型的控制方程进行数值求解。这些模型均忽略了散射的影响。Ghorai、Panda 和 Hill[14] 建立的趋光性生物对流模型纳入了各向同性散射的影响。在特定参数取值下的平衡状态中，由于散射作用，微生物聚集在不同深度的两个水平层内。Kumar[15] 扩展了 Ghorai、Panda 和 Hill[14] 的研究，并证明刚性上表面条件下的系统比无应力上表面条件下更稳定。Ghorai 和 Panda[9] 研究了前向各向异性散射对趋光性生物对流悬浮液的影响。作者详细计算研究了其线性稳定性，重点关注前向散射的影响。

作者对线性稳定性进行了详细的计算研究，特别关注前向散射的影响。Panda 等人[16] 阐明了漫射和准直辐照对散射悬浮液的影响。Panda 17 对趋光性辐照的生物对流模型进行了模拟，研究了漫射和准直辐照作用于各向异性前向散射悬浮液的情形。根据作者的研究结果，单峰态的基态浓度分布会转变为双峰态，反之亦然。Panda、Sharma 和 Kumar[18] 最近研究了斜向照明下非散射悬浮液中的趋光性生物对流模型。对于特定参数以及入射角的变化，作者观察到最不稳定模态会在稳定和过稳定状态之间转变，反之亦然。最近，Kumar[19]研究了斜向辐照对各向同性散射悬浮液的影响。入射角的变化表明，在基态浓度分布中，较低和较高散射反照率下呈现两种不同的形态。然而，迄今尚无研究探讨趋光性生物对流的初始阶段，也未考虑斜向平行辐照对具有前向各向异性散射特性的藻类悬浮液的影响。因此，本研究旨在确定斜向平行辐照对前向各向异性散射生物对流的影响。

II. 数学表述

考虑悬浮在深度为 H 的一层趋光性微生物的运动。假设 $x_3 = 0$ 处的下边界为刚性边界，而 $x_3 = H$ 处的上边界为无应力边界。令 $I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})$ 表示位置 $\boldsymbol{x}$ 沿单位方向 $\boldsymbol{r} = \cos\alpha\boldsymbol{k} + \sin\alpha(\cos\zeta\boldsymbol{i} + \sin\zeta\boldsymbol{j})$ 的辐射强度，其中 $\boldsymbol{x}$ 是相对于直角笛卡尔坐标轴 $Ox_1x_2x_3$, 测量的坐标，且 x_3轴指向上方（见图 1）。此外，α和 ζ 分别表示方向 $\boldsymbol{r}$的极角和方位角。趋光性悬浮液的水平顶层受到来自光源的斜向平行辐照，光源具有均匀强度 I^0, ，并忽略漫射辐照的影响。我们可以应用斯涅尔折射定律计算折射角 α_0 ，该定律表示为 $(\sin\alpha_i = N_0 \sin\alpha_0)$。在此表达式中，$\alpha_i$表示入射角，$N_0 = 1.333$表示水的折射率。与其他生物对流模型类似，我们考虑细胞的连续分布，而非离散细胞群体。[1] 藻类溶液被稀释到细胞体积分数降低至可忽略程度，

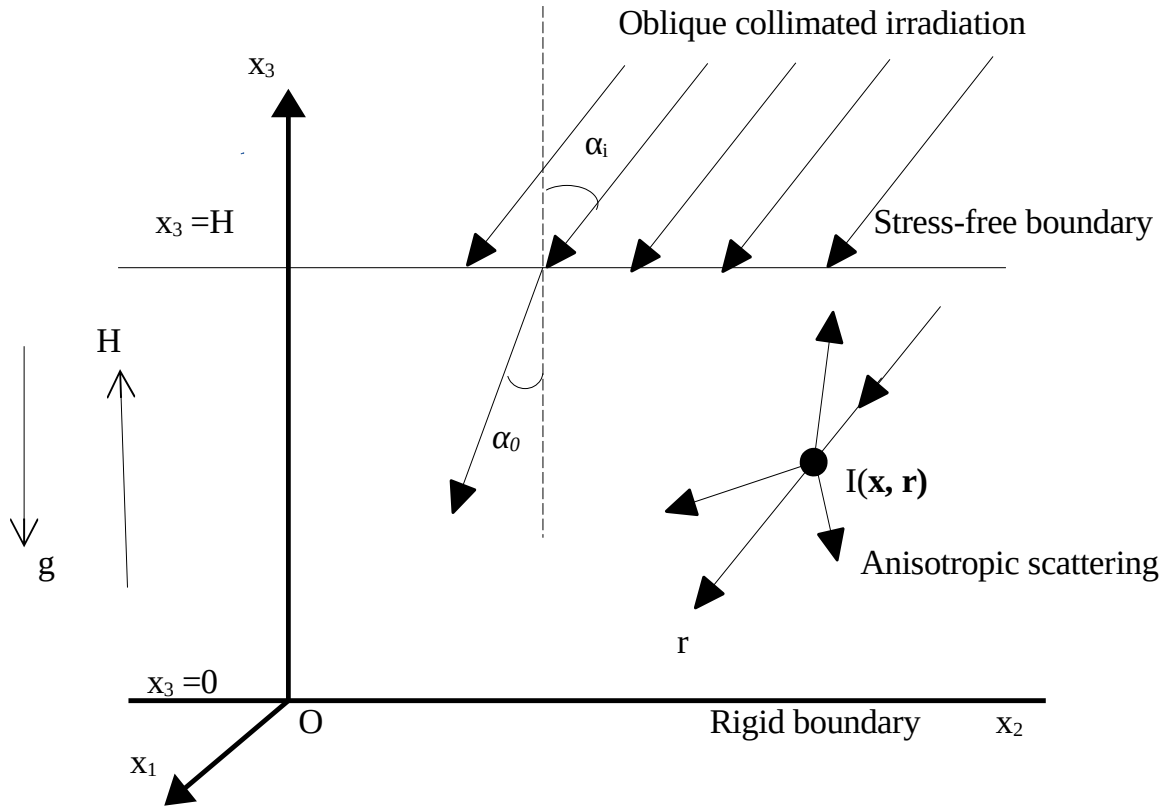


图1. 问题的几何构型。

从而忽略细胞-细胞相互作用。细胞浓度记为 n， $\boldsymbol{v}$ 表示包含在小体积 δV 内的所有物质的平均速度。不可压缩流体的连续性方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{1}$$

由于负浮力细胞对悬浮液的影响并不成比例，我们假设体应力主要由斯托克斯偶极子构成，并且可以安全地忽略细胞产生的所有其他贡献。因此，如果忽略作用于流体的所有力，仅保留细胞的负浮力（其单位体积表示为 nϑΔρg），其中 g 为重力加速度，则根据 Boussinesq 近似，动量方程

如下：[20]

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v}=\mu\nabla^2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\nabla}\mathscr{P}-n\vartheta\Delta\rho\, g\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

其中，t 表示时间，ρ 表示流体密度，每个藻细胞的密度为 $\rho+\Delta\rho$ ($\Delta\rho \ll \rho$)，体积为 ϑ；$\mathscr{P}$ 表示相对于静水压的超额压力，μ表示悬浮液的动力黏度，$\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\frac{D}{Dt}$ 表示物质时间导数，$\boldsymbol{k}$ 表示 x_3 方向上的单位向量。

细胞守恒方程表示为[1,12]

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{3}$$

细胞通量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{U}_c+n\boldsymbol{v}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{\nabla}n. \tag{4}$$

细胞的平均游动 $\boldsymbol{U}_c$ 产生了方程 (4) 右端的第一项。第二项反映细胞随主体流体流动而产生的通量，第三项则代表细胞运动中的随机成分。扩散率张量 $\boldsymbol{D}$被设为各向同性且为常数，因此 $\boldsymbol{D}$ =DI。其中，D 和 I 分别为扩散系数和单位张量。我们假设各个藻细胞均为相同的球体，其重心和浮心位于空间中的同一点，并且具有趋光性。在计算所提出模型的细胞通量向量时，采用了两个主要假设。首先，由于藻细胞仅具有趋光性，因此忽略流动剪切所产生的黏性力矩的影响；该力矩可能会对平均游动方向的水平分量产生作用。其次，为简化分析，将本应是光照强度函数的扩散张量视为常数各向同性张量，而不是根据游动速度自相关函数推导得出。因此，在研究更全面、更复杂的模型之前，可以假定该模型在有限情形下成立，以理解趋光性导致的生物对流的复杂性。基于这些假设，我们可以从趋光性生物对流的控制方程中省去福克–普朗克方程。

对于吸收和散射介质，辐射传输方程（下文简称 RTE）定义为[21,22]

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})+(\kappa+\sigma)I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})=\frac{\sigma}{4\pi}\int_0^{4\pi}I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})d\Omega', \tag{5}$$

其中， κ、 σ和 Ω′ 分别为吸收系数、散射系数和立体角。从方向 $\boldsymbol{r}'$ 到方向 $\boldsymbol{r}$ 的散射由概率密度函数 $\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$表示，称为散射相函数。为方便起见，我们假设 $\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$呈线性各向异性且具有方位对称性：[22]

$$\Psi(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) = 1 + A\cos\alpha\cos\alpha'. \tag{6}$$

单位向量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别由相对于 x_3轴的极角 α和 α′ 描述。线性各向异性散射系数记为 $A \in [-1,1]$。当 $A > 0$ 时，散射发生在前向；当 $A < 0$时，散射发生在后向。$A = 0$时则表示各向同性散射。在位置 $\boldsymbol{x}_b = (x_1, x_2, H)$处，从上边界面发出的辐射强度为：

$$I(\boldsymbol{x}_b,\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^0) = I^0\delta(\cos\alpha-\cos\alpha_0)\delta(\zeta-\zeta_0). \tag{7}$$

在此方程中，I^0表示入射平行辐射， $\boldsymbol{r}^0 = \cos\alpha_0\boldsymbol{k} + \sin\alpha_0(\cos\zeta_0\boldsymbol{i} + \sin\zeta_0\boldsymbol{j})$表示入射方向，而 ζ 表示该方向的方位角。沿 $x_1, x_2,$ 和 x_3 轴的单位向量分别用符号 $\boldsymbol{i}$、 $\boldsymbol{j}$和 $\boldsymbol{k}$表示。狄拉克δ函数 δ满足[22]

$$\int_0^{4\pi} f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^0)d\Omega = f(\boldsymbol{r}^0) = f(\eta_3^0,\zeta_0), \quad \eta_3^0 = \cos\alpha_0.$$

浓度 n 与吸收系数和散射系数呈线性关系，因此$\kappa = \varpi n$ 和 $\sigma = \varsigma n$。关于散射反照率 $\omega = \sigma/(\kappa+\sigma) \in [0,1]$，线性各向异性散射藻类悬浮液中的辐射传输方程因此变为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) + \beta I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \frac{\omega\beta}{4\pi}\int_0^{4\pi} I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}')(1+A\cos\alpha\cos\alpha')d\Omega', \tag{8}$$

其中 $\beta = (\varpi+\varsigma)n$ 为消光系数。点 $\boldsymbol{x}$ 处的总强度 $\mathscr{G}(\boldsymbol{x})$ 和辐射热通量$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$由[22]给出

$$\mathscr{G}(\boldsymbol{x}) = \int_0^{4\pi} I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})d\Omega, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \int_0^{4\pi} I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}d\Omega. \tag{10}$$

令 $\boldsymbol{P}$为游动方向的单位向量， $<\boldsymbol{P}>$ 为一个微元体积内所有细胞的游动方向的系综平均。许多微生物的游动速度

与光、位置、时间和方向无关。[23] 假设所有细胞都以相同的速度在流体中运动。U_c 表示系综游泳速度。因此，平均游动速度为

$$\boldsymbol{U}_c = U_c < \boldsymbol{P} > . \tag{11}$$

平均游动方向 $< \boldsymbol{P} >$ 表示为

$$< \boldsymbol{P} >= -T(\mathscr{G})\frac{\boldsymbol{q}}{\iota + |\boldsymbol{q}|}, \tag{12}$$

其中，$\iota \geq 0$ 为常数。在本研究中始终考虑准直辐照的情况下，介质中的光强分布并不均匀，因此可采用 $\iota = 0$。因此，在本研究中，我们考虑 $\iota = 0$。负号表示微生物接收到的光来自辐射热通量的相反方向。趋光性函数 T（$\mathscr{G}$）定义为

$$T(\mathscr{G}) = \begin{cases} < 0 \ \text{ if } \mathscr{G}_c < \mathscr{G}; \\ \geq 0 \ \text{ if } \mathscr{G}_c \geq \mathscr{G}. \end{cases} \tag{13}$$

假设下边界为刚性边界，而上边界为无应力边界。边界条件为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = 0, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = H. \tag{15}$$

沿竖直方向传播且垂直于 x_3-轴的辐射入射到上边界。假设上下边界均为非反射边界，因此有

$$I(x_1, x_2, H, \alpha, \zeta) = I^0 \delta(\cos\alpha - \cos\alpha_0)\delta(\zeta - \zeta_0), \quad \pi/2 \leq \alpha \leq \pi. \tag{16}$$

$$I(x_1, x_2, 0, \alpha, \zeta) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \tag{17}$$

所有长度、细胞浓度、时间、流体速度和压力分别以 H、 $\bar{n}$、H^2/D、D/H、 $\mu D/H^2$ 为尺度进行缩放，从而得到无量纲生物对流控制方程组。

将无量纲变量代入控制方程后

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{S_c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v} = \nabla^2 \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}\mathscr{P} - R_a n \boldsymbol{k}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (n U_s \boldsymbol{P} + n\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla} n). \tag{20}$$

其中，$\mathrm{S}_c = \nu_D$ 为施密特数，$\mathrm{U}_s = U^c H\ D$ 为无量纲游动速度，$\mathrm{R}_a = \bar{m}\vartheta\Delta\rho g H\mu^{3}{}_D$ 为瑞利数，$\nu = \mu/\rho$ 为运动黏度。

刚性表面的无量纲边界条件为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{k} = (nU_s\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}n)\cdot\boldsymbol{k} = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = 0, \tag{21}$$

而对于无应力表面

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}) = (nU_s\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\nabla}n)\cdot\boldsymbol{k} = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = 1. \tag{22}$$

无量纲辐射传输方程为

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) + \tau_h nI(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \frac{\omega\tau_h n}{4\pi}\int_0^{4\pi} I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}')(1 + A\cos\alpha\cos\alpha')d\Omega', \tag{23}$$

其中，$\tau_h = (\varpi + \varsigma)\ \bar{}\mathrm{nH}$ 为悬浮液的光学厚度。用单位向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦（η_1，$\eta_2\eta_3$）表示时，无量纲辐射传输方程可写为

$$\eta_1\frac{\partial I}{\partial x_1} + \eta_2\frac{\partial I}{\partial x_2} + \eta_3\frac{\partial I}{\partial x_3} + \tau_h nI(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \frac{\omega\tau_h n}{4\pi}\int_0^{4\pi} I(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}')(1 + A\cos\alpha\cos\alpha')d\Omega'. \tag{24}$$

对于相应的无量纲形式，符号 $\mathscr{G}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 保持不变。$\mathrm{T}(\mathscr{G})$ 的确切函数形式取决于微生物的种类。[12] 例如，下面给出了一个典型趋光性函数的示例，其数学形式定义为：

$$\begin{aligned} T(\mathscr{G}) &= 0.8\sin(1.5\pi\varphi(\mathscr{G})) - 0.1\sin(0.5\pi\varphi(\mathscr{G})), \\ \varphi(\mathscr{G}) &= 0.4\mathscr{G}\exp(\Upsilon(2.5 - \mathscr{G})). \end{aligned} \tag{25}$$

参数 $\mathrm{er}\ \Upsilon$ 与临界总强度值的确定有关 .

在无量纲表示中，顶部和底部强度变为

$$I(x_1, x_2, 1, \alpha, \zeta) = I^0\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^0), \quad \pi/2 \le \alpha \le \pi, \tag{26}$$

$$I(x_1, x_2, 0, \alpha, \zeta) = 0, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2. \tag{27}$$

III. 基本态解

方程（19）–（20）和（24）结合边界条件，具有静态平衡解，其中包括：$\boldsymbol{v} = 0$、$\mathrm{n} = \mathrm{n}_b(\mathrm{x}_3)$ 和 $\mathrm{I}(\mathrm{x3}, \alpha)$。

稳态下的总强度和辐射热通量为

$$\mathscr{G}_b(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b(x_3,\alpha)d\Omega, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{q}_b(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b(x_3,\alpha)\boldsymbol{r}d\Omega. \tag{29}$$

由于 $\mathrm{I}_b(\mathrm{x3},\alpha)$ 与 ζ 无关， $\boldsymbol{q}_b$ 的 x_1 和 x_2 分量为零。因此， $\boldsymbol{q}_b = \mathrm{q}_b\boldsymbol{k}$， 其中 $\mathrm{q}_b = |\boldsymbol{q}_b|$。
稳态下的辐射传输方程变为

$$\frac{\partial I_b}{\partial x_3} + \frac{\tau_h n_b I_b}{\eta_3} = \frac{\omega\tau_h n_b}{4\pi\eta_3}(\mathscr{G}_b(x_3) - Aq_b\eta_3). \tag{30}$$

我们将稳态辐射强度分解为准直分量 I_b^c 和漫射部分 I_b^d，即 $\mathrm{I}_b = \mathrm{I}_b^c + \mathrm{I}_b^d$。准直分量 I_b^c 满足

$$\frac{dI_b^c}{dx_3} + \frac{\tau_h n_b I_b^c}{\eta_3} = 0, \tag{31}$$

边界条件为

$$I_b^c(x_3,\alpha) = I^0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^0), \quad \text{at}, \quad z = 1. \tag{32}$$

求解方程 (31) 和 (32)，得到

$$I_b^c = I^0\exp\left(-\int_1^{x_3}\frac{\tau_h n_b(x_3')}{\eta_3}dx_3'\right)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^0). \tag{33}$$

现在，漫射分量 I_b^d 满足

$$\frac{dI_b^d}{dx_3} + \frac{\tau_h n_b I_b^d}{\eta_3} = \frac{\omega\tau_h n_b}{4\pi\eta_3}(\mathscr{G}_b(x_3) - Aq_b\eta_3), \tag{34}$$

边界条件为

$$I_b^d(1,\alpha) = 0, \quad \pi/2 \le \alpha \le \pi, \tag{35}$$

$$I_b^d(0,\alpha) = 0, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2. \tag{36}$$

我们定义一个新变量 $\tau = \int_{x_3}^1 \tau_h \mathrm{n}_b(\mathrm{x}_3')\mathrm{dx}_3'$。现在，总强度 $\mathscr{G}_b$ 和辐射热通量 $\boldsymbol{q}_b$ 仅为 τ 的函数。用变量 τ 表示，关于出射（$0 < \alpha < \pi/2$）辐射强度 $\mathrm{I}_b^{d+}(\tau,\eta_3)$ 的方程（34）可写为

$$\eta_3\frac{dI_b^{d+}}{d\tau} - I_b^{d+}(\tau,\eta_3) = -\frac{\omega}{4\pi}(\mathscr{G}_b(\tau) - Aq_b(\tau)\eta_3), \quad 0 < \eta_3 < 1, \tag{37}$$

带边界条件

$$I_b^{d+}(\tau_h,\eta_3) = 0, \quad 0 < \eta_3 < 1. \tag{38}$$

求解方程（37）—（38）后，

$$I_b^{d+}(\tau,\eta_3) = -\frac{\omega}{4\pi\eta_3}\int_{\tau_h}^{\tau}(\mathscr{G}_b(\tau') - Aq_b(\tau')\eta_3)\exp\left(\frac{\tau-\tau'}{\eta_3}\right)d\tau', \quad 0<\eta_3<1. \tag{39}$$

Si类似地，入射（$\pi/2<\alpha<\pi$）辐射强度 $I_b^{d-}(\tau,\eta_3)$ 可写为 s

$$I_b^{d-}(\tau,\eta_3) = -\frac{\omega}{4\pi\eta_3}\int_{0}^{\tau}(\mathscr{G}_b(\tau') - Aq_b(\tau')\eta_3)\exp\left(\frac{\tau-\tau'}{\eta_3}\right)d\tau', \quad -1<\eta_3<0. \tag{40}$$

基本总强度和辐射热通量可写为

$$\mathscr{G}_b = \mathscr{G}_b^c + \mathscr{G}_b^d, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{q}_b = \boldsymbol{q}_b^c + \boldsymbol{q}_b^d, \tag{42}$$

其中

$$\mathscr{G}_b^c(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b^c(x_3,\alpha)d\Omega = I^0\exp\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} n_b(x_3')dx_3'\right),$$

$$\mathscr{G}_b^d(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b^d(x_3,\alpha)d\Omega,$$

$$\boldsymbol{q}_b^c(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b^c(x_3,\alpha)\boldsymbol{r}d\Omega = -I^0\cos\alpha_0\exp\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} n_b(x_3')dx_3'\right)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{q}_b^d(x_3) = \int_0^{4\pi} I_b^d(x_3,\alpha)\boldsymbol{r}d\Omega.$$

将式（39）和（40）代入式（41）和（42），可得两个耦合的第二类弗雷德霍姆积分方程[22,24]:

$$\mathscr{G}_b(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\cos\alpha_0}} + \frac{\omega}{2}\int_0^{\tau_h}(\mathscr{G}_b(\tau')E1(|\tau-\tau'|) + sgn(\tau-\tau')Aq_b(\tau')E2(|\tau-\tau'|)d\tau', \tag{43}$$

$$q_b(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\cos\alpha_0}} + \frac{\omega}{2}\int_0^{\tau_h}(Aq_b(\tau')E3(|\tau-\tau'|) + sgn(\tau-\tau')\mathscr{G}_b(\tau')E2(|\tau-\tau'|)d\tau'. \tag{44}$$

在此语境中，“sgn”表示符号函数，而 $E1(x_1)$、$E2(x_2)$ 和 $E3(x_3)$ 分别为一阶、二阶和三阶指数积分函数。[21] 式（43）和（44）可采用一种称为奇异性消除法的技术求解。[25] 需要注意的是，对于各向同性散射，这两个方程彼此解耦。[19]

基本态中的平均游动方向变为

$$< \boldsymbol{P}_b >= -T_b\frac{\boldsymbol{q}_b}{|\boldsymbol{q}_b|} = T_b\boldsymbol{k},$$

其中

$$T_b = T(\mathscr{G}_b).$$

稳态单元守恒方程写为

$$\frac{dn_b}{dx_3} - U_s T_b n_b = 0, \tag{45}$$

并由单元守恒关系补充

$$\int_0^1 n_b(x_3)dx_3 = 1. \tag{46}$$

由方程 (28)-(31) 构成的边值问题采用射击法进行数值求解。

IV. 线性与正规模态分析

在基本态上施加一个小扰动 $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$，以考察线性不稳定性。$\boldsymbol{v}=\mathbf{0}+\varepsilon\boldsymbol{v}^*(x_1,x_2,x_3,t)+O(\varepsilon^2)$, $n=n_b(x_3)+\varepsilon n^*(x_1,x_2,x_3,t)+O(\varepsilon^2)$, $\mathscr{P}=\mathscr{P}_b+\varepsilon\mathscr{P}^*+O(\varepsilon^2)$, $<\boldsymbol{P}>=<\boldsymbol{P}_b>+\varepsilon<\boldsymbol{P}^*>+O(\varepsilon^2)$, $\mathscr{G}=\mathscr{G}_b+\varepsilon\mathscr{G}^*+O(\varepsilon^2)$, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_b+\boldsymbol{q}^*+O(\varepsilon^2)$, $I=(I_b^c+I_b^d)+\varepsilon(I^{*c}+I^{*d})+O(\varepsilon^2)$，其中 $\boldsymbol{v}^*=(u^*,v^*,w^*)$。因此，线性化控制方程写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^*=0 \tag{47}$$

$$\frac{1}{S_c}\frac{\partial\boldsymbol{v}^*}{\partial t}=\nabla^2\boldsymbol{v}^*-\boldsymbol{\nabla}\mathscr{P}^*-n^*R_a\boldsymbol{k}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}+\frac{dn_b}{dx_3}w^*=\nabla^2 n^*-U_s\boldsymbol{\nabla}\cdot(n^*<\boldsymbol{P}_b>+n_b<\boldsymbol{P}^*>). \tag{49}$$

总强度 $\mathscr{G}$和辐射热通量 $\boldsymbol{q}$可写为 $\mathscr{G}=\mathscr{G}_b+\varepsilon\mathscr{G}^*+O(\varepsilon^2)=(\mathscr{G}_{cb}+\mathscr{G}_{db})+\varepsilon(\mathscr{G}^*_c+\mathscr{G}^*_d)+O(\varepsilon^2)$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_b+\varepsilon\boldsymbol{q}^*+O(\varepsilon^2)=(\boldsymbol{q}_b^c+\boldsymbol{q}_b^d)+\varepsilon(\boldsymbol{q}^{*c}+\boldsymbol{q}^{*d})+O(\varepsilon^2)$。因此，稳态准直总强度受到扰动，表现为

$$\mathscr{G}_b^c+\varepsilon\mathscr{G}^{*c}+O(\varepsilon^2)=I^0\exp\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3}(n_b(x_3')+\varepsilon n^*+O(\varepsilon^2)dx_3'\right),$$

关于收集 $O(\varepsilon)$ 项

$$\mathscr{G}^{*c}=I^0\exp\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3}n_b(x_3')dx_3'\right)\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3}n^*dx_3'\right). \tag{50}$$

类似地,

$$\mathscr{G}^{*d} = \int_0^{4\pi} I^{*d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})d\Omega, \tag{51}$$

$$\boldsymbol{q}^{*c} = -I^0 \cos\alpha_0 \exp\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} n_b(x_3')dx_3'\right)\left(\frac{\tau_h}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} n^* dx_3'\right)\boldsymbol{k}, \tag{52}$$

$$\boldsymbol{q}^{*d} = \int_0^{4\pi} I^{*d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}d\Omega. \tag{53}$$

平均游动取向写为

$$<\boldsymbol{P}>=<\boldsymbol{P}_b>+\varepsilon<\boldsymbol{P}^*>+O(\varepsilon^2) = T(\mathscr{G}_b+\varepsilon\mathscr{G}^*+O(\varepsilon^2))\frac{\boldsymbol{q}_b+\boldsymbol{q}^*+O(\varepsilon^2)}{|\boldsymbol{q}_b+\boldsymbol{q}^*+O(\varepsilon^2)|}. \tag{54}$$

收集 O(ε) 项后

$$<\boldsymbol{P}^*>=\mathscr{G}^*\frac{\partial T_b}{\partial\mathscr{G}}\boldsymbol{k}-T_b\frac{\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{H}}^*}{q_b}, \tag{55}$$

其中， $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{H}}^*$ 是扰动强度通量 $\boldsymbol{q}^*$的水平分量。将式 (55) 代入式 (49) 并化简，得到

$$\frac{\partial n^*}{\partial t}+\frac{dn_b}{dx_3}w^* = \nabla^2 n^* - U_s\frac{\partial}{\partial x_3}\left(T_b n^* + n_b\frac{dT_b}{d\mathscr{G}}\mathscr{G}^*\right)+U_s n_b\frac{T_b}{q_b}\left(\frac{\partial q_1^*}{\partial x_1}+\frac{\partial q_2^*}{\partial x_2}\right). \tag{56}$$

将式 (48) 两次取旋度并取 x_3 分量，可消去 $\mathscr{P}^*$ 和 $\boldsymbol{v}$的水平分量。因此，方程 (47)、(48) 和 (56) 可简化为关于 w^* 和 n^*的两个方程。随后可将这些量分解为正规模态，使得

$$w^* = \hat{w}(x_3)\exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)],$$

$$n^* = \hat{n}(x_3)\exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)],$$

这里，a_1 和 a_2 分别是 x_1 和 x_2 方向上的波数，而合成波数 $\mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{a}_1^2+\mathrm{a}_2^2}$ 是一个水平波数。增长率用 $\mathrm{Re}(\gamma)$ 表示。根据式 (24)，扰动扩散辐射强度 I^{*d} 满足

$$\eta_1\frac{\partial I^{*d}}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial I^{*d}}{\partial x_2}+\eta_3\frac{\partial I^{*d}}{\partial x_3}+\tau_h n_b I^{*d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \frac{\omega\tau_h}{4\pi}(n_b\mathscr{G}^*+\mathscr{G}_b n^*+A\eta_3(n_b\boldsymbol{q}^*\cdot\boldsymbol{k}-q_b n^*))-\tau_h I_b n^*, \tag{57}$$

带边界条件

$$I^{*d}(x_1,x_2,1,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = 0, \quad \pi/2\le\alpha\le\pi, \quad 0\le\zeta\le 2\pi, \tag{58}$$

$$I^{*d}(x_1,x_2,0,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = 0, \quad 0\le\alpha\le\pi/2, \quad 0\le\zeta\le 2\pi. \tag{59}$$

在正规模态下，I^{*d} 可以写成

$$I^{*d} = \psi^d(x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)],$$

由方程（50）和（51）可得

$$\mathscr{G}^{*c} = G^c(x_3) \exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)], \tag{60}$$

$$\mathscr{G}^{*d} = G^d(x_3) \exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)], \tag{61}$$

其中

$$G^c(x_3) = I^0 \exp\left(\frac{\kappa}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} n_b(x_3')dx_3'\right)\left(\frac{\kappa}{\cos\alpha_0}\int_1^{x_3} \hat{n}dx_3'\right), \tag{62}$$

$$G^d(x_3) = \int_0^{4\pi} \psi^{*d}(x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)d\Omega. \tag{63}$$

类似地,

$$(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = (\hat{q}_1(x_3), \hat{q}_2(x_3), \hat{q}_3(x_3)) \exp[\gamma t + i(a_1 x + a_2 y)],$$

其中

$$\hat{q}_1(x_3) = \int_0^{4\pi} \psi^{*d}(x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\eta_1 d\Omega,$$
$$\hat{q}_2(x_3) = \int_0^{4\pi} \psi^{*d}(x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\eta_2 d\Omega,$$
$$\hat{q}_3(x_3) = \int_0^{4\pi} \psi^{*d}(x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\eta_3 d\Omega.$$

现在，方程（57）结合边界条件（58）—（59）可写为

$$\frac{\partial \psi^d}{\partial x_3} + \frac{i(a_1\eta_1 + a_2\eta_2) + \tau_h n_b}{\eta_3}\psi^d = \frac{\omega\tau_h}{4\pi\eta_3}(n_b G + \mathscr{G}_b\hat{n} + A\eta_3(n_b\hat{q}_3 - q_b\hat{n})) - \frac{\tau_h}{\eta_3}I_b^d\hat{n}, \tag{64}$$

边界条件

$$\psi^d(1, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0, \quad \pi/2 \le \alpha \le \pi, \quad 0 \le \zeta \le 2\pi, \tag{65}$$

$$\psi^d(0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2, \quad 0 \le \zeta \le 2\pi. \tag{66}$$

正规模态下的控制方程变为

$$\gamma S_c^{-1}\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - a^2\right)\hat{w}(x_3) - \left(\frac{d^2}{dx_3^2} - a^2\right)^2 \hat{w}(x_3) = a^2 R_a \hat{n}(x_3), \tag{67}$$

$$\left(\gamma + a^2 - \frac{d^2}{dx_3^2}\right)\hat{n} + U_s \frac{d}{dx_3}\left(T_b\hat{n} + n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G\right) - i\frac{U_s n_b T_b}{q_b}(a_1\hat{q}_1 + a_2\hat{q}_2) = -\frac{dn_b}{dx_3}\hat{w}, \tag{68}$$

正规模态下的边界条件

$$\hat{w} = \frac{d\hat{w}}{dx_3} = \frac{d\hat{n}}{dx_3} - U_s T_b \hat{n} - U_s n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G = 0, \quad x_3 = 0, \tag{69}$$

$$\hat{w} = \frac{d^2\hat{w}}{dx_3^2} = \frac{d\hat{n}}{dx_3} - U_s T_b \hat{n} - U_s n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G = 0, \quad x_3 = 1. \tag{70}$$

定义一个新变量

$$N(x_3) = \int_1^{x_3} \hat{n} d\bar{x}_3, \tag{71}$$

使方程组变为

$$\frac{d^4\hat{w}}{dx_3} - (2a^2 + \gamma S_c^{-1})\frac{d^2\hat{w}}{dx_3^2} + a^2(a^2 + \gamma S_c^{-1})\hat{w} = -a^2 R_a \frac{dN}{dx_3}, \tag{72}$$

$$U_s \frac{d}{dx_3}\left(n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G^d\right) - i\frac{U_s n_b T_b}{q_b}(a_1\hat{q}_1 + a_2\hat{q}_2) + \frac{\tau_h}{\cos\alpha_0} U_s \frac{d}{dx_3}\left(n_b \mathscr{G}_b^c \frac{dT_b}{d\mathscr{G}}\right) N +$$
$$\left(\gamma + a^2 + \frac{2\tau_h}{\cos\alpha_0} U_s n_b \mathscr{G}_b^c \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} + U_s \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} \frac{d\mathscr{G}_b^d}{dx_3}\right)\frac{dN}{dx_3} + U_s T_b \frac{d^2N}{dx_3^2} - \frac{d^3N}{dx_3^3} = -\frac{dn_b}{dx_3}\hat{w}. \tag{73}$$

此外，边界条件变为

$$\hat{w} = \frac{d\hat{w}}{dx_3} = -U_s T_b \frac{dN}{dx_3} - U_s n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G + \frac{d^2N}{dx_3^2} = 0, \tag{74}$$

$$\hat{w} = \frac{d^2\hat{w}}{dx_3^2} = -U_s T_b \frac{dN}{dx_3} - U_s n_b \frac{dT_b}{d\mathscr{G}} G + \frac{d^2N}{dx_3^2} = 0, \tag{75}$$

and

$$N(x_3) = 0 \quad \text{at} \quad x_3 = 1. \tag{76}$$

V. 数值解

常微分方程组 (72)-(76) 是七阶方程，具有七个边界条件。为求解七阶常微分方程，我们采用基于 Newton-Raphson-Kantorovich 迭代的方法。[26] 我们通过绘制 (a,R$_a$) 平面上的中性曲线，研究基本态的线性稳定性。此外，我们还对数值方法进行了测试

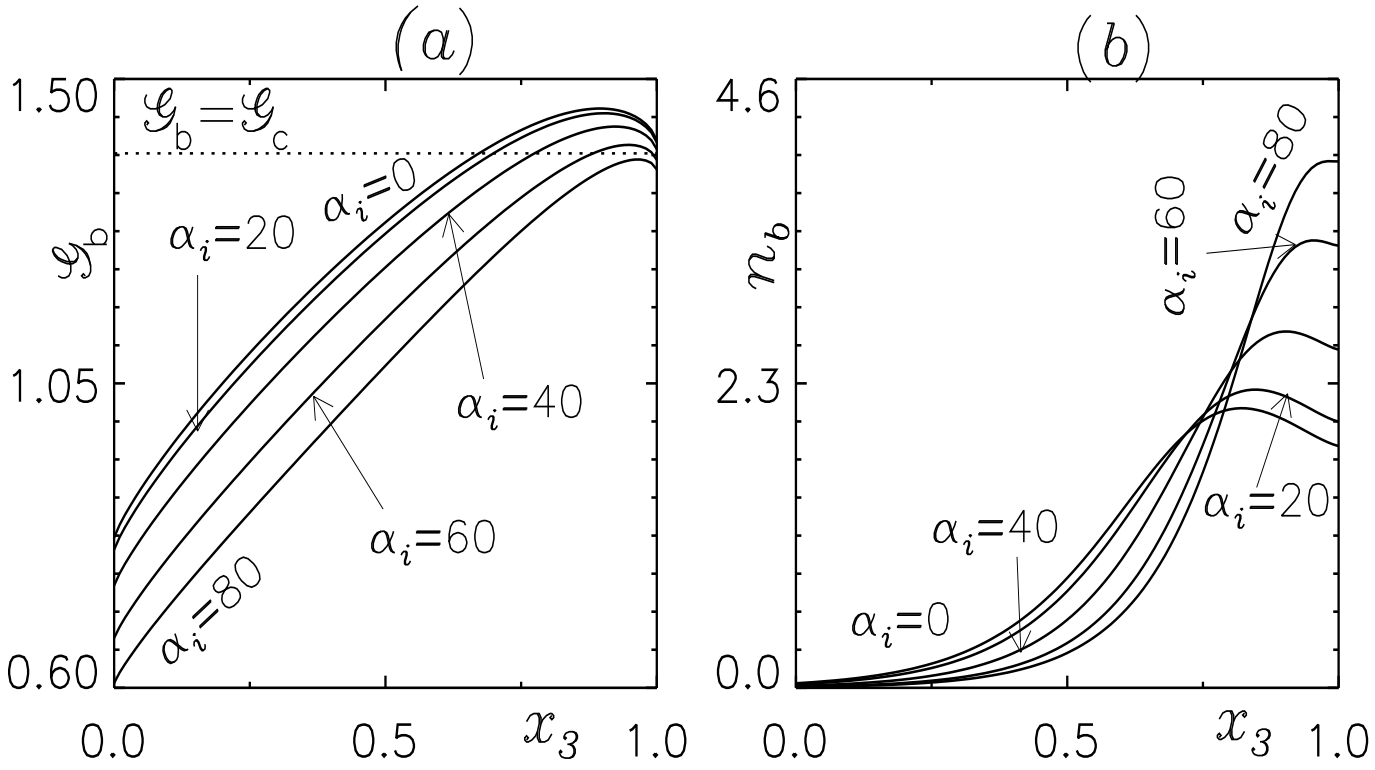


图 2. (a) 总强度 $\mathscr{G}_b$ 的变化；(b) $U_s = 10$, $\tau_h = 0.8$, $\omega = 0.8$, $\mathscr{G}_c = 1.39$, $A = 0.2$ 对应的基本浓度分布。

采用多种不同的网格尺寸和特征进行测试。结果表明，对于至少包含 51 个网格点的网格，使用该方法在多个网格上求得的相同参数对应的解，至少在五位有效数字上始终一致，而且解独立于时间和网格。增长率实部 Re(γ) 为零的点构成中性曲线。若中性曲线上增长率虚部 Im(γ) 不为零，则可能存在过稳定解或振荡解。另一方面，若此曲线上增长率虚部 Im(γ) 为零，则基本态的扰动是定常的，稳定性交换原理成立。[20] 时间依赖项 $\exp(\gamma t) = \exp[(\mathrm{Re}(\gamma) + i\mathrm{Im}(\gamma))t]$同时体现了增长率 Re(γ) 和假设的频率为 Im(s)/2π 的振荡。对于稳定分层，所有波矢的增长率 Re(γ) 均为负。在略高于对流起始点的一小段波数范围内，Re(γ) 会变为正值。对于给定的其他参数范围，中性曲线 $R_a^n(a)(n = 1, 2, 3, ...)$ 有无限多个分支，每个分支都代表线性稳定性问题的一个唯一解。其中 R_a 取最小值 R_a^c 的分支最值得关注

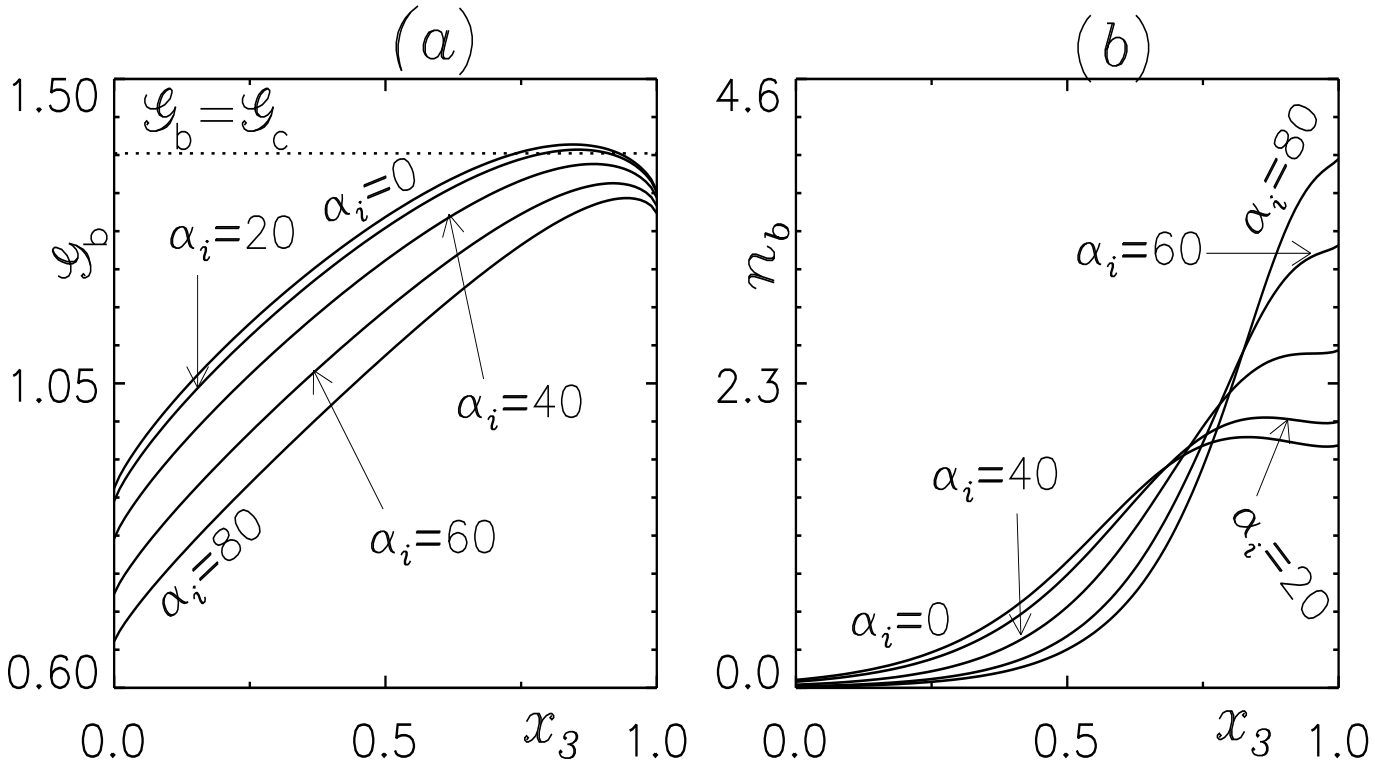


图 3. (a) 总强度 $\mathscr{G}_b$ 的变化；(b) $U_s = 10$, $\tau_h = 0.8$, $\omega = 0.8$, $\mathscr{G}_c = 1.39$, $A = 0.78$ 时对应的基本浓度分布。

可能解分支。研究表明，(a^c, R_a^c) 这一对代表最不稳定解。根据这一信息，可以利用公式 $\lambda^c = 2\pi/a^c$ 计算初始扰动的波长。生物对流解由单个对流胞组成，这些对流胞沿悬浮液的长度方向层层堆叠。若一个解包含 n 个垂直堆叠的对流胞，则称其为 n 模态。最不稳定解恰好是模态 1，通常可以在中性曲线的 $R^1(a)$ 分支上找到。在许多不同情形下都是如此。

我们假设研究对象是一种与衣藻类似的趋光性微生物，以确定本研究所需的参数。为使模型更合理，并与其他关于趋光性生物对流的研究相似，我们采用了参考文献 Ghorai 和 Panda 9、Vincent 和 Hill 12、Panda 17、Panda、Sharma 和 Kumar[18] 中的相同参数值（见表 I）。此处所需的辐射参数按 Ghorai 和 Panda [9]中的相同方法计算。因此，对于深度为 0.5 cm 的悬浮液，光学厚度范围为 0.25 至 1。对于深度为 0.5 cm 的悬浮液，$U_s = 10$ 为相应的无量纲游泳速度；而对于

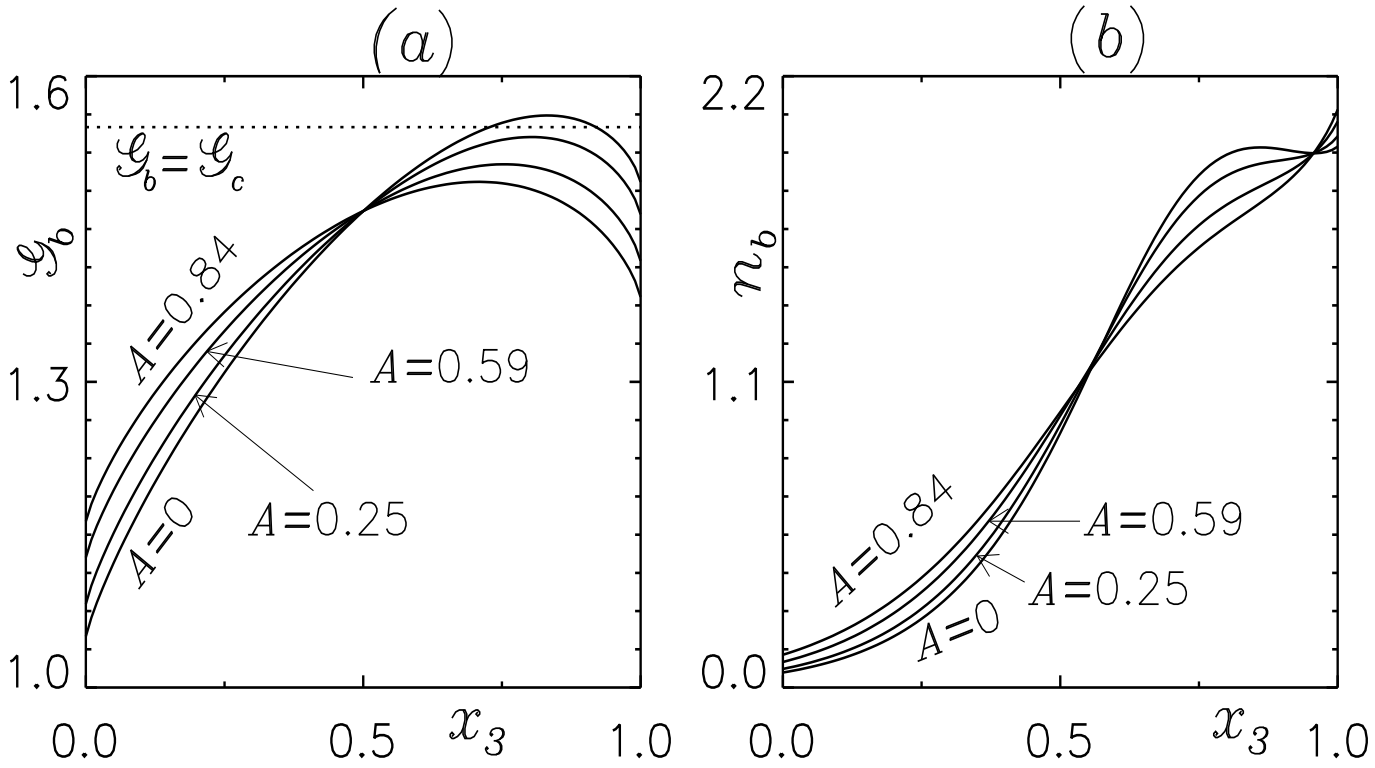


图 4. (a) 总强度 $\mathscr{G}_b$的变化；(b) $U_s = 10$, $\tau_h = 0.5$, $\mathscr{G}_c = 1.55$, $\omega = 1.0$, $\alpha_i = 10$ 对应的基本浓度分布。

深度为 1.0 cm 的悬浮液，$U_s = 20$ 为相应的无量纲游泳速度（见表 I）。入射角的范围与 Panda 、 Sharma 和 Kumar [18], Ku- mar [19] 中给出的 $0° \leq \alpha_0 \leq 80°$ 相同。为便于将我们的模型与其他合理的趋光性生物对流表述进行比较，参数 $S_c = 20$ 和 $I^0 = 1.0$ 在整个过程中保持不变。

趋性函数计算 $\Upsilon = 0.4$的临界总强度 $\mathscr{G}_c = 1.39$ 。图 (2) 展示了斜向辐照对 $U_s = 10$, $\tau_h = 0.8$, $\omega = 0.8$, $\mathscr{G}_b = 1.39$, $A = 0.2$ 的总强度及相应基本浓度的影响。对于 $\alpha_i = 0$，临界总强度的位置约为 $x_3 = 0.67$，藻类细胞聚集在 $x_3 = 0.81$ 附近。位于 $\mathscr{G}_c$ 位置上方的细胞具有负趋光响应，而位于 $\mathscr{G}_c$ 位置下方的细胞具有正趋光响应。由于在较大的入射角下自遮蔽占主导，微生物在恒定的内部悬浮液深度处获得的强度较低。因此，随着 α_i 增大至 80，最大基本浓度的位置向区域顶部移动。图 (3) 展示了斜向辐照对 $U_s = 10$, $\tau_h = 0.8$, $\omega = 0.8$, 的总强度及相应基本浓度的影响

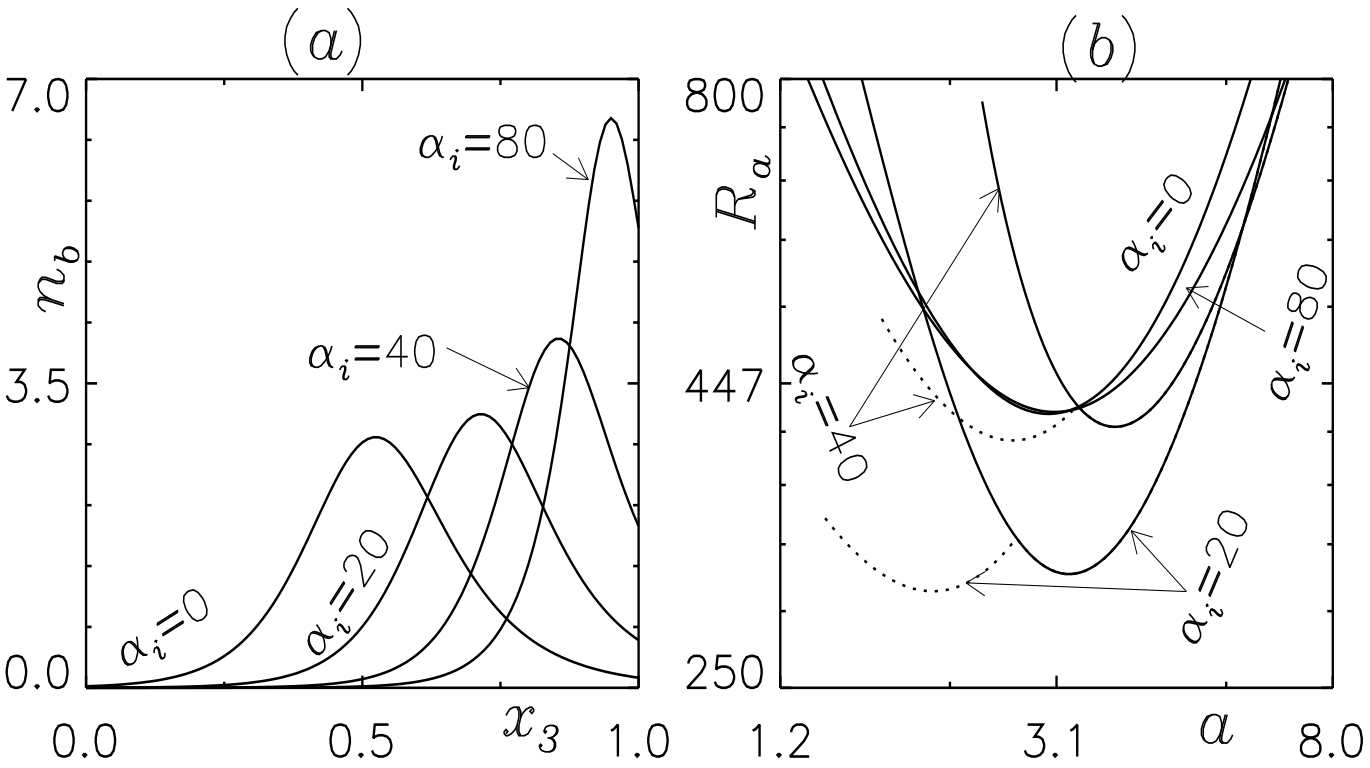


图 5。（a）斜向辐照对基本浓度的影响，以及（b）对应的 $U_s = 20$, $\tau_h = 1.0$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\omega = 0.605$、$A = 0.38$ 的中性曲线。在图（b）中，实线表示定常分支，点线表示振荡分支。

表 I。衣藻趋光性微生物悬浮液的典型参数。[12,13,18]

标度化平均游动速度 $U_s = 20$H	
运动黏度	$\nu = 10^{-2}$厘米^2/秒
施密特数	$S_c = 20$
平均浓度	$\bar{n} = 10^6 \mathrm{cm}^{-3}$
平均细胞游动速度	$U_c = 10^{-2}$cm/s
细胞体积	$\vartheta = 5 \times 10^{-10}\mathrm{cm}^3$
细胞扩散系数	$D = 5 \times 10^{-4}$厘米^2/秒
细胞密度比	$\Delta\rho/\rho = 5 \times 10^{-2}$
细胞半径	$a = 10^{-3}$cm

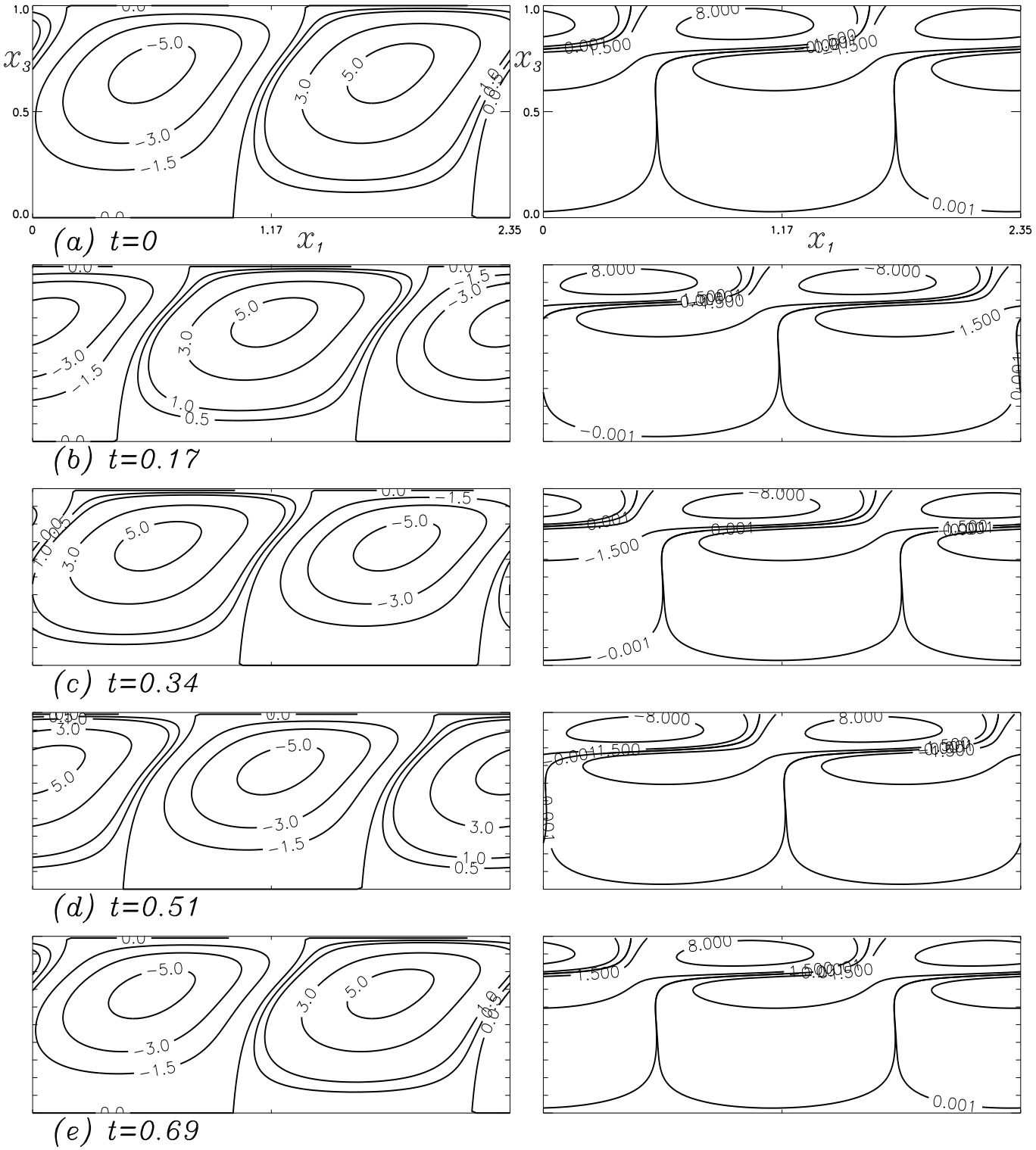


图 6. 当 $U_s = 20$, $\tau_h = 1.0$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\omega = 0.605$, $\alpha_i = 40$、$A = 0.38$、$R_a^c = 401.01$、$a^c = 2.67$、$Im(\gamma) = 9.08$ 时，扰动速度 w^* 和细胞浓度 n^* 在一个振荡周期内产生的流动模式：(a) 时间 $t = 0$，(b) $t = 0.17$，(c) $t = 0.34$，(d) $t = 0.51$，(e) $t = 0.69$。

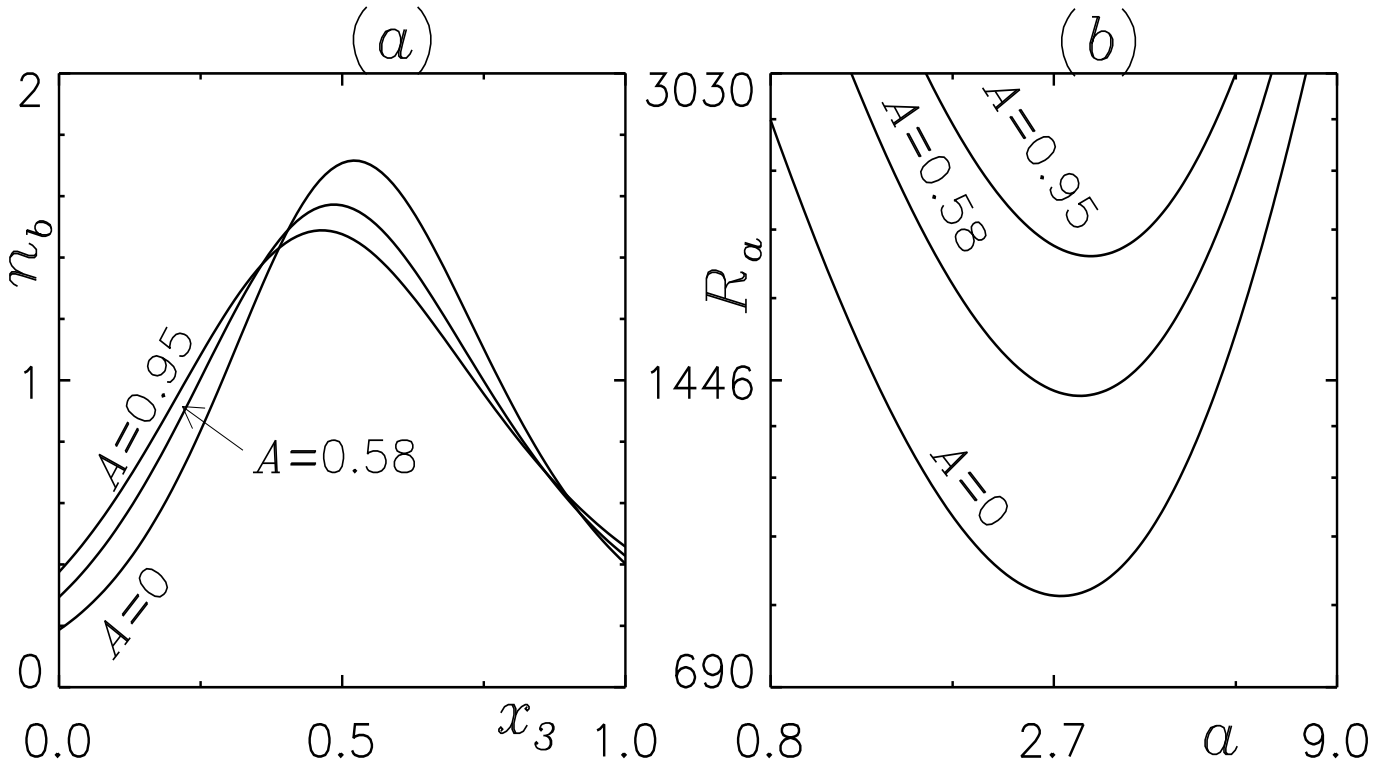


图 7. (a) 前向各向异性散射系数对基本浓度的影响；(b) $U_s = 16$, $\tau_h = 0.5$, $\omega = 0.475$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\alpha_i = 0$ 对应的中性曲线。

$\mathscr{G}_c = 1.39$，$A = 0.78$。对于 $\alpha_i = 0, \mathscr{G}_c$，在均匀悬浮液中两个不同深度处可能会出现这种情况：$x_3 = 0.73$ 和 $x_3 = 0.92$。因此，位于 $x_3 = 0.92$ 之上和 $x_3 = 0.73$ 之下的细胞被认为具有正趋光性，而中间的细胞则被认为具有负趋光性。悬浮液中发生的散射导致细胞在两个不同位置积聚。因此，细胞积聚在 $x_3 = 0.82$ 附近以及悬浮液顶部。随着入射角增大，整个区域内的总强度降至临界强度以下。这使整个悬浮液呈现正趋光性，细胞也聚集到单一位置。因此，最大基本浓度的位置收缩为一个点，并移至悬浮液顶部。

图（4）展示了均匀悬浮液深度范围内总强度、$\mathscr{G}_b$和基本态浓度的变化，其中 $U_s = 10$, $\tau_h = 0.5$, $\mathscr{G}_c = 1.55$, $\omega = 1.0$, $\alpha_i = 10$。在这种情况下，随着 A 增大，悬浮液上半部的 $\mathscr{G}_b$ 会降低，而下半部则呈现相反趋势。这是因为较大的 A 会使更多能量通过前向散射散射到前向方向。此外

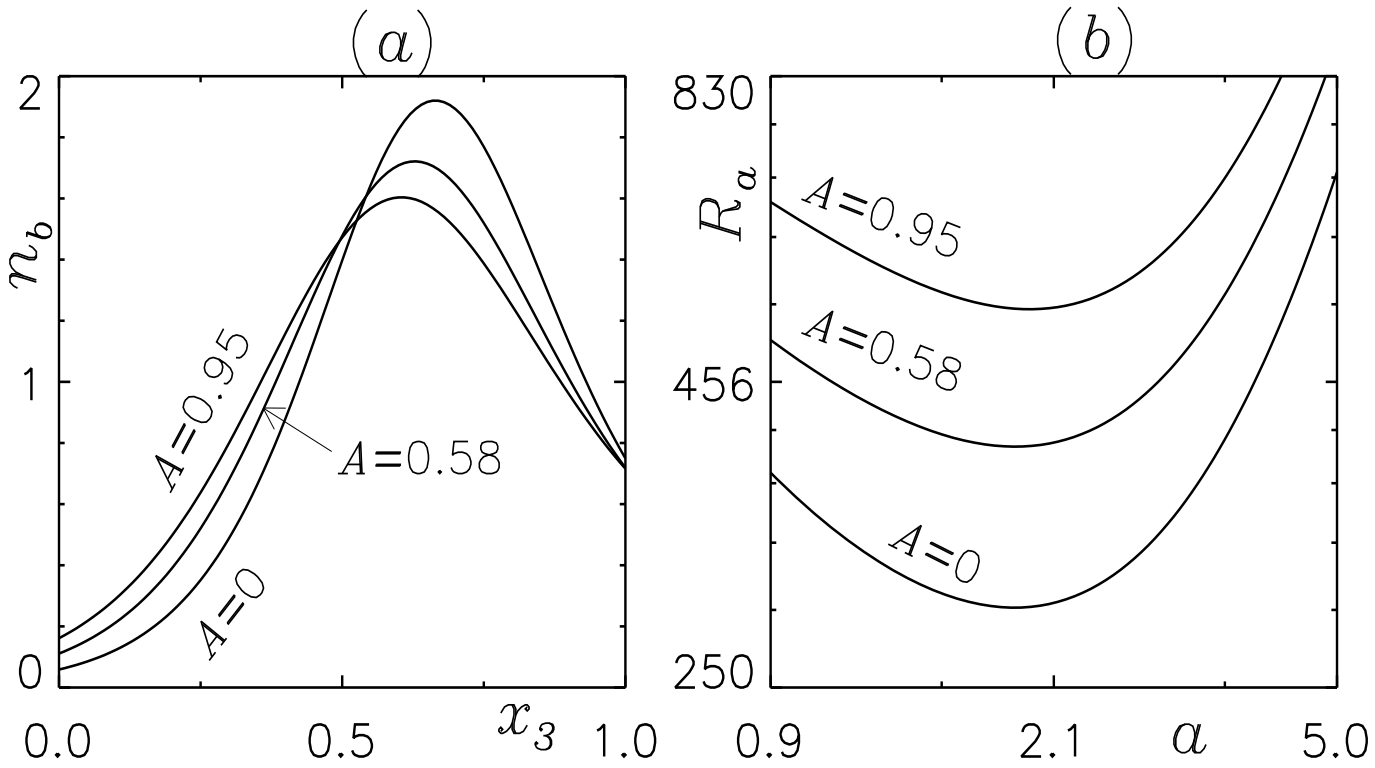


图8. (a) 前向各向异性散射系数对基本浓度的影响；(b) 对应的 $U_s = 16$, $\tau_h = 0.5$, $\omega = 0.475$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\alpha_i = 30$ 中性曲线。

此外，悬浮液中的 $\mathscr{G}_b$ 变化并非单调。因此，悬浮液内部可能在两个不同位置出现临界总强度。对于 $\alpha_i = 0$，均匀悬浮液中可能在两个不同深度出现 $\mathscr{G}_c$： $x_3 = 0.72$ 和 $x_3 = 0.9$。因此，细胞会聚集在 $x_3 = 0.85$ 附近以及悬浮液顶部。随着各向异性散射系数 A 增大，临界强度会移至单一位置，细胞也只表现出正趋光性（见图 4(b)）。

图5展示了当入射角分别变化为 $\alpha_i = 0$、20、40、60和80时的基态浓度分布及相关中性曲线，同时保持其他控制参数$U_s = 20$、 $\tau_h = 1.0$、 $\mathscr{G}_c = 1.0$、 $\omega = 0.605$、$A = 0.38$不变。若$\alpha_i = 0$，基态物质的最高浓度出现在区域中部。由于最不稳定解位于相应中性曲线的稳定分支上，因此当 $\alpha_i = 0$时，初始状态中的扰动是稳定的。若将 α提高至20，由于最不稳定模态持续位于中性曲线的振荡分支上，生物对流解将呈现过稳定性。当 $\alpha_i = 40$ 时的模式行为与 $\alpha_i = 20$时的情况相似。此外，在此情况下，一个

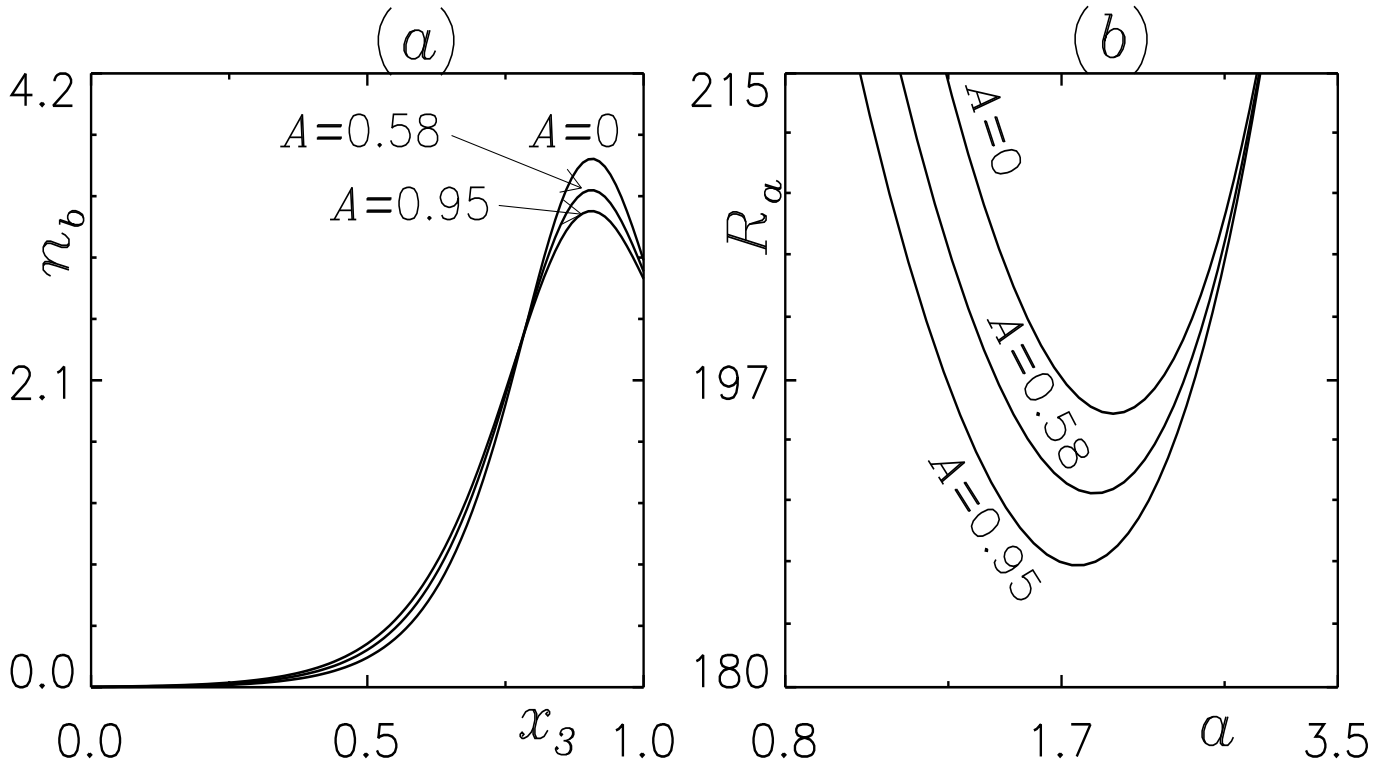


图 9. (a) 前向各向异性散射系数对基本浓度的影响；(b) 对应于 $U_s = 16$, $\tau_h = 0.5$, $\omega = 0.475$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\alpha_i = 80$ 的中性曲线。

单一振荡分支在约$a = 3.34$处从中性曲线相应的定常分支分岔出来；然而，该振荡分支仍保留最不稳定的生物对流解（见图5(b)）。因此，在$a^c = 2.67$和$R_a^c = 401.01$时会发生过稳定性。此时确定$\gamma = 0 \pm 9.08i$为一对复共轭特征值。这里观察到的变化称为Hopf分岔。可以证明，与这对复共轭特征值相对应的生物对流流动模式彼此为镜像。振荡周期为 $2\pi/\mathrm{Im}(\gamma) = 0.69$ 个单位。在远短于预测过稳定性周期的时间尺度上，生物对流流体运动会转变为完全非线性状态。因此，可利用扰动特征模态w^*和n^*观察一个振荡周期内的对流细胞和流动模式（见图6）。这表明，一个行波解正朝图的左侧方向传播。

对于固定参数 $U_s = 16$, $\tau_h = 0.5$, $\omega = 0.475$, $\mathscr{G}_c = 1.0$，图7–9展示了各向异性散射系数 A 对不同入射角下基本浓度和中性曲线的影响。当 $A = 0$ 时，$\alpha_i =$的基本态最大浓度

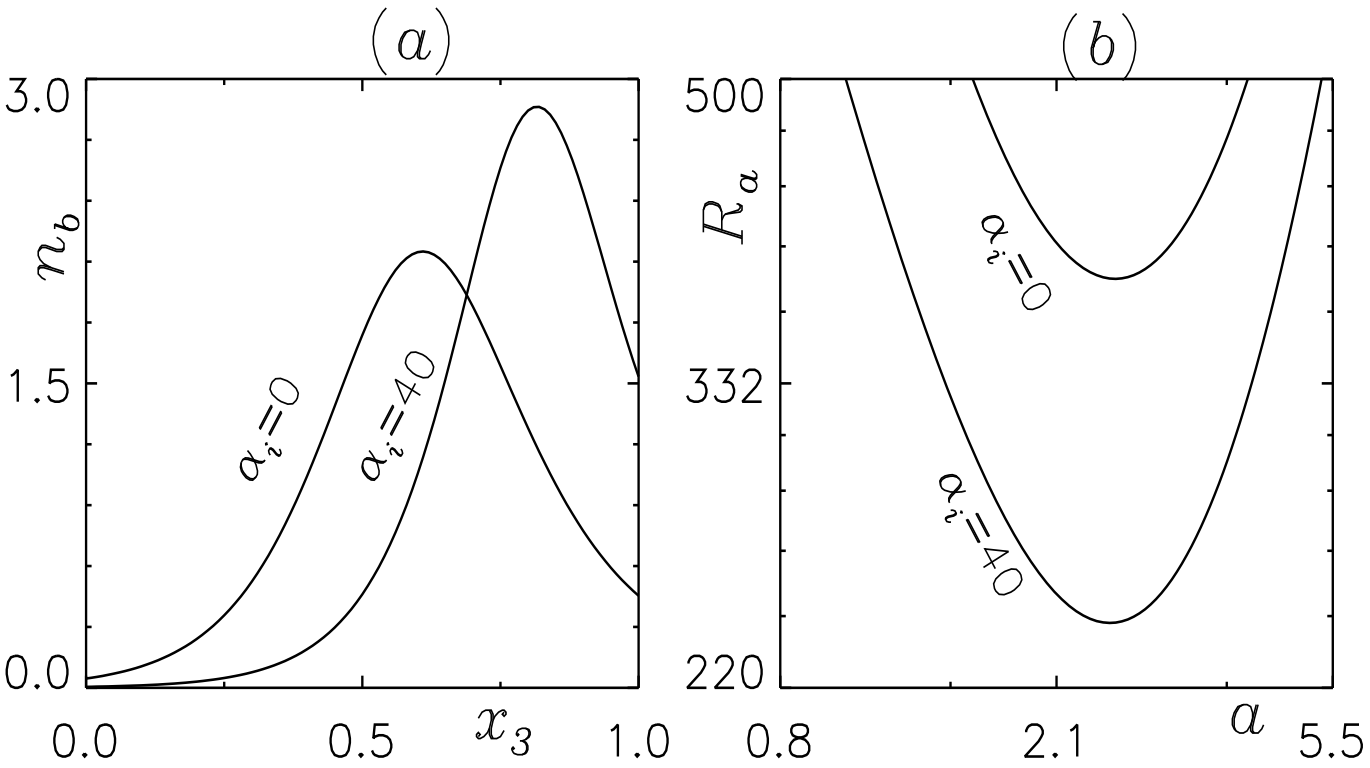


图10. (a) 临界总强度对基本浓度的影响，以及 (b) 对应的中性曲线，其中 $U_s = 13, \tau_h = 1.0,$ $\omega = 0.59$，$A = 0.2, \mathscr{G}_c = 1.0$。

0 位于区域的中间高度（见图7）。当 A 分别增至 0.58 和 0.95 时，基本浓度最大值的位置逐渐远离悬浮液顶部，上部稳定层的厚度也随之持续增加。因此，浮力的影响单调增强，而浮力有抑制对流流体运动的趋势；相应地，临界波数和临界瑞利数也随之增大。图8展示了 $\alpha_i = 30$的基本浓度及相应的中性曲线。当 $A = 0$ 时，基本态最大浓度的位置出现在 $x_3 = 0.66$。此时，随着各向异性散射系数 A 增大，最大基本浓度降低，其位置向悬浮液底部移动。因此，临界波数和临界瑞利数增大。对于所有 A 值，α_i =30 时基本态的最大浓度明显高于 $\alpha_i = 0$ 的情况，且上部稳定层的厚度也较小。因此，与 $\alpha_i = 0$ 相比，$\alpha_i = 30$ 的临界瑞利数和临界波数均减小，且这一结论适用于所有 A 值。图9展示了 $\alpha_i = 80$的基本浓度及相应的中性曲线。此时，最大基本浓度降低

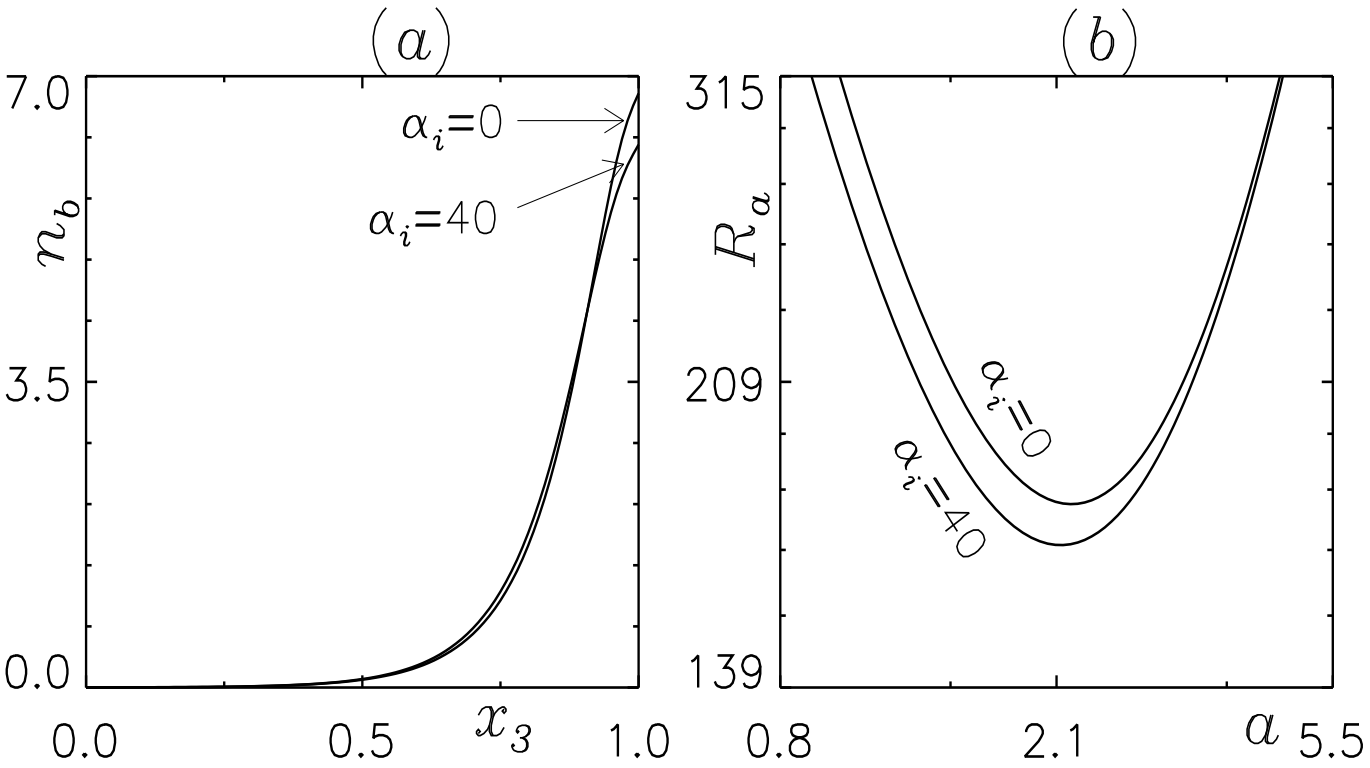


图11。（a）临界总强度对基本浓度的影响，以及（b）$U_s = 13$, $\tau_h = 1.0$, $\omega = 0.59$、$A = 0.2$, $\mathscr{G}_c = 1.39$对应的中性曲线。

随着各向异性散射系数 A 增大。当 A 从较高值逐渐减小时，上部稳定区域的浓度梯度变得更陡。因此，当 A 从 0 增至 0.95 时，临界瑞利数会降低。图 10–11 展示了在不同临界总强度 $\mathscr{G}_c$ 下，入射角α_i对基本浓度和中性曲线的影响，其中参数固定为 $U_s = 13$, $\tau_h = 1.0$, $\omega = 0.59$, $A = 0.2$。图 10 展示了 $\mathscr{G}_c = 1.0$时的基本浓度及其对应的中性曲线。在这种情况下，当 $\alpha = 0$时，最大基本浓度出现在 $x_3 = 0.6$ 附近。随着 α_i 增至 40，最大基本浓度升高，其位置向悬浮液顶部移动。因此，当α_i 从 0 增至 40 时，临界瑞利数会降低。图 11 展示了 $\mathscr{G}_c = 1.39$时的基本浓度及其对应的中性曲线。对于所有 α_i 值，$\mathscr{G}_c = 1.39$ 处基本态的最大浓度都明显高于 $\mathscr{G}_c = 1.0$ 的情况，下部不稳定层的厚度也更大。因此，临界总强度较高时，临界瑞利数和波数均降低，系统变得更加不稳定。

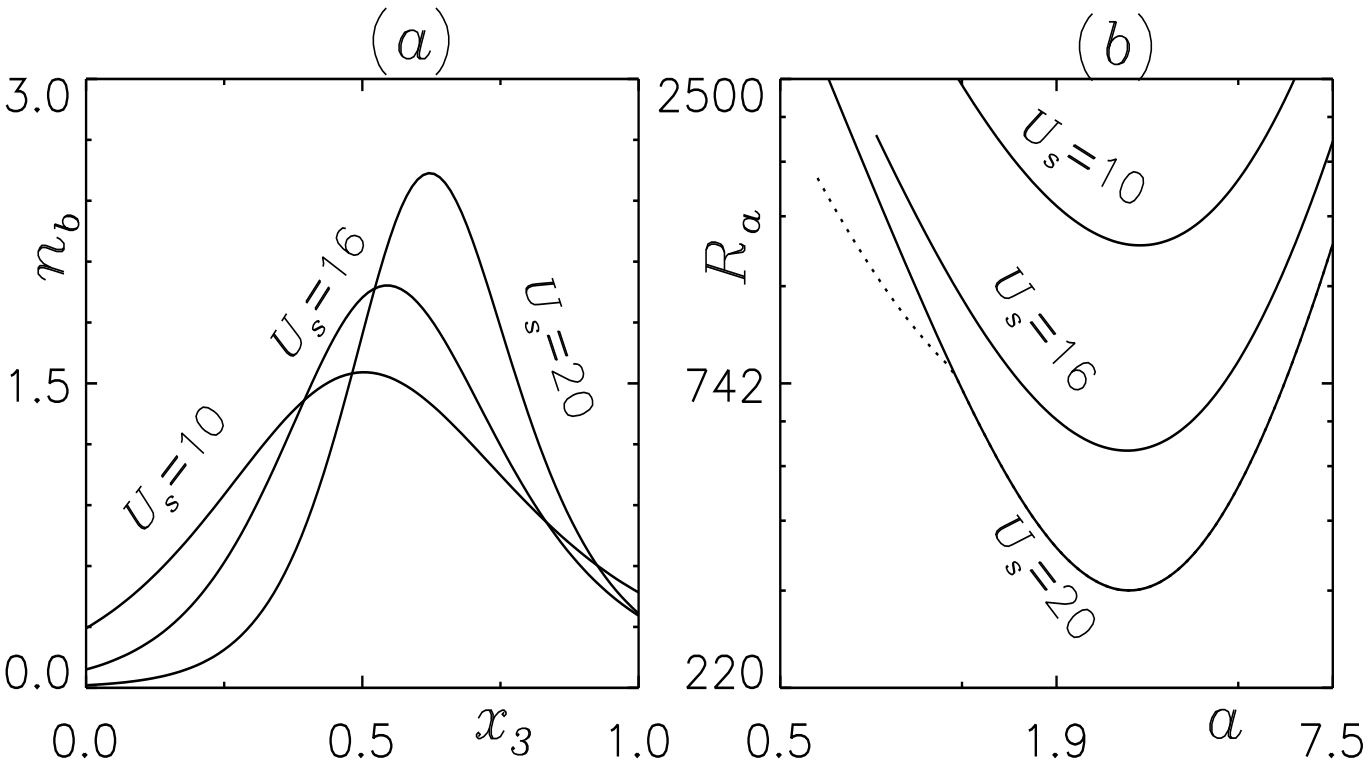


图12。（a）细胞游动速度对基本浓度的影响；（b）对应的中性曲线，其中 $\tau_h = 0.79$, $\omega = 0.55$, $A = 0.38$, $\alpha_i = 0$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\alpha_i = 0$。

图 12–13 展示了细胞游动速度 U_s 对基本浓度及不同入射角下中性曲线的影响。图 12 展示了参数固定为 $\tau_h = 0.79$, $\omega = 0.55$, $A = 0.38$, $\alpha_i = 0$,$\mathscr{G}_c = 1.0$时的基本态浓度和中性曲线。当 $U_s = 10$时，最高基本浓度出现在悬浮液中部附近。随着细胞游动速度 U_s 增至 16、20，最大基本浓度升高，其位置向悬浮液顶部移动。当 U_s 分别取 10、16 和 20 时，上部稳定层的宽度单调减小。因此，细胞游动速度较高时，临界波数和临界瑞利数均降低。当 $U_s = 10$ 和 $U_s = 16$时，最不稳定解位于定常分支上。当 $U_s = 20$时，一条振荡分支在波数 $a = 1.18$处从定常分支分岔而出。然而，最不稳定解仍位于定常分支上。对于 $\alpha_i = 45$, 基本态浓度及中性曲线如图 13 所示。其中，对于 $U_s = 10$、16 和 20，最高基本浓度的位置分别为 $x_3 = 0.75$、$x_3 = 0.83$和 $x_3 = 0.87$。基本稳态下陡峭的浓度分布意味着更高的浓度梯度，这有助于生物对流。但

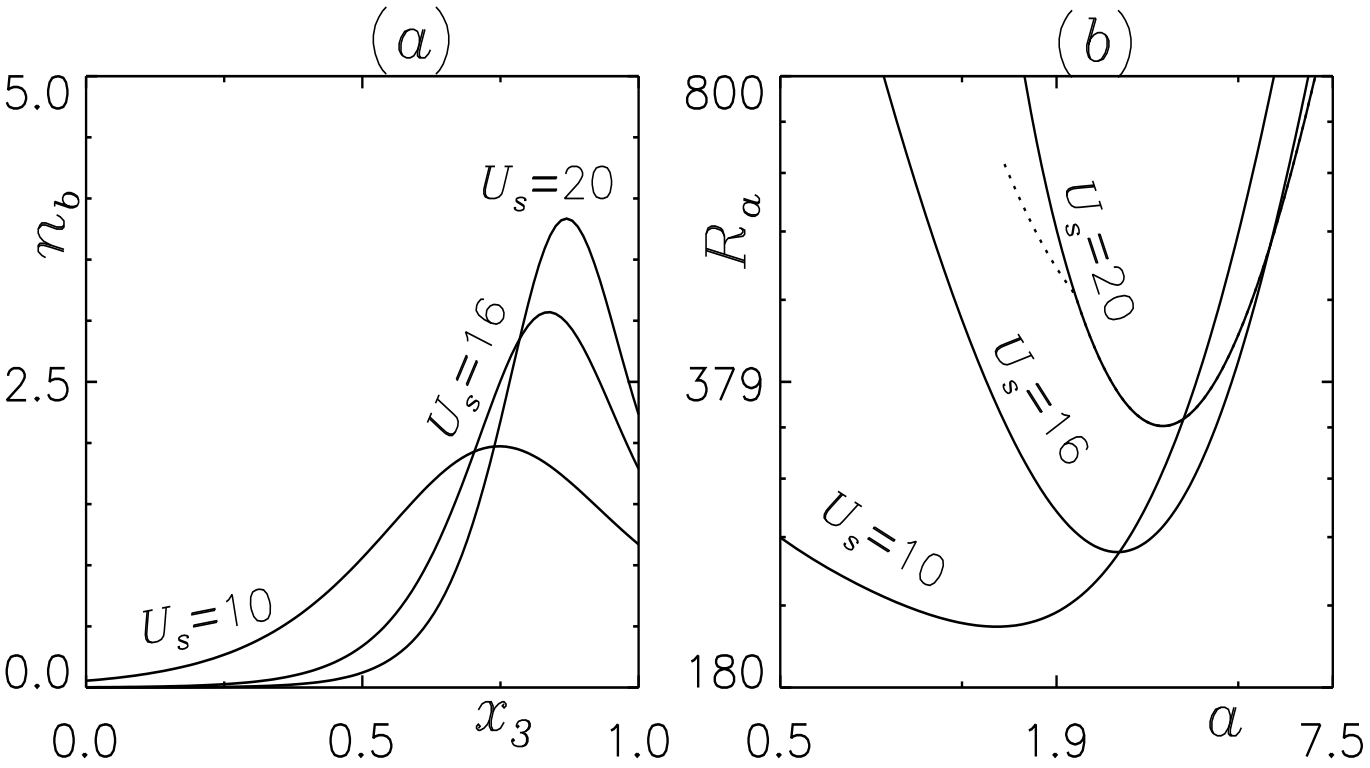


图13. (a) 细胞游动速度对基本浓度的影响；(b) 对应的中性曲线，$\tau_h = 0.79$, $\omega = 0.55$, $A = 0.38$, $\alpha_i = 0$, $\mathscr{G}_c = 1.0$, $\alpha_i = 45$。

游动速度较高时，正趋光性会对驻留在生物对流羽流中的细胞产生更大的阻力。因此，后一种效应会压过较高的梯度，使游动速度越高，临界瑞利数也越高。

VI. 结论

本研究探讨了斜向平行辐照对具有前向各向异性散射的趋光性生物对流悬浮液的影响。我们将悬浮液底层设为刚性边界，顶层设为无应力边界。该模型用于研究悬浮液的线性稳定性。研究发现，随着入射角增大，斜程长度增加，基本态中的自遮蔽效应随之增强。因此，在内部深度不变时，入射角的变化会使藻类细胞接收到的光强较低。由此，入射角增大时，最大基本浓度的位置会向悬浮液顶部移动，最大基本浓度也相应升高。当向前散射

系数 A 较大时，悬浮液上部区域的总强度会降低；而下部区域则恰好相反。这是因为较大的前向散射系数 A 会使前向散射将更多能量散射到前向。因此，在均匀悬浮液顶部区域中，临界总强度的位置在前向散射系数 A 较大时，会高于或等于 A 较小时的位置。在悬浮液下部，情况则相反。此外，随着 A 增大，总强度在整个悬浮液中的变化趋于平缓。临界瑞利数受多种因素影响，包括上部稳定层的厚度、基本态的最大浓度，以及上部稳定层中的浓度梯度等。趋光性既可能促进悬浮液中的对流，也可能抑制对流。此外，次层下方的重力不稳定区域会促进对流，而其上方的区域则会抑制对流。因此，稳定过程与不稳定过程之间的竞争会产生振荡解。[11] 当临界总强度较高时，最大基本浓度位于悬浮液顶部。此时，临界状态为定常状态；入射角越大，临界瑞利数越低。随着临界总强度降低，最大基本浓度的位置会从悬浮液顶部移开。因此，与临界总强度较高的情形相比，临界瑞利数和波数均增大，系统也变得更加稳定。细胞游动速度会影响悬浮液；游动速度较快时，可能出现振荡解或过稳定解。在所提出的趋光性模型中，应将理论预测与对趋光性藻类溶液中生物对流的定量实验结果进行比较。遗憾的是，目前尚无此类统计数据。这是因为有必要找到一种主要具有趋光性的微生物，而自然环境中的大多数藻类物种也具有趋重性或趋陀螺性。[8] 还需要进一步实验，以测定光学厚度、趋光性函数和扩散系数，从而深入了解这些引人入胜的现象。

七、致谢

本研究得到大学拨款委员会资助，资助编号为191620003662，地址为新德里（印度）。

参考文献

[1]T. J. Pedley 和 J. O. Kessler，“游动微生物悬浮液中的流体动力学现象”，《流体力学年度评论》24，313–358（1992）。[2]J. R. Platt，“自由游动生物培养物中的‘生物对流图案’”，《科学》133，1766–1767（1961）。[3]H. W. T. Wager，“论重力对绿眼虫（Euglena viridis，Ehrb.）及其他微生物运动和聚集的影响”，《伦敦皇家学会哲学汇刊B辑》201，333–390（1911）。[4]W. Nultsch 和 E. Hoff，“眼虫图案形成的研究”，《原生生物学档案》115，336–352（1993）。[5]J. O. Kessler，“游动微生物的协同与聚集现象”，《当代物理学》26，147–166（1985b）。[6]K. Brinkmann，“培养物中由相界面诱导的一维和二维晶体图案：敏捷多形虫”，《植物生理学杂志》59，364–376（1968）。[7]C. R. Williams 和 M. A. Bees，“三种趋性的故事：光趋旋转趋重性生物对流”，《实验生物学杂志》214，2398–2408（2011）。[8]D. P. Häder，“绿色鞭毛虫绿眼虫中的偏振趋性、趋重性和垂直趋光性”，《微生物学档案》147，179–183（1987）。[9]S. Ghorai 和 M. K. Panda，“趋光性藻类各向异性散射悬浮液中的生物对流”，《欧洲力学杂志B辑：流体》41，81–93（2013）。[10]S. M. Gittleson 和 T. L. Jahn，“敏捷多形虫的图案游动”，《美国博物学家》102，413–425（1968）。[11]B. Straughan，《穿透对流的数学方面》（朗文科学出版社，纽约，1993）。[12]R. V. Vincent 和 N. A. Hill，“趋光性藻类悬浮液中的生物对流”，《流体力学杂志》327，343–371（1996）。[13]S. Ghorai 和 N. A. Hill，“穿透性趋光生物对流”，《Physics of Fluids》17，074101（2005）。[14]S. Ghorai、M. K. Panda 和 N. A. Hill，“各向同性散射趋光性藻类悬浮液中的生物对流”，《Physics of Fluids》22，071901（2010）。[15]S. Kumar，“趋光性生物对流初始阶段刚性上表面下的各向同性散射”，《Physics of Fluids》35，024106（2023）。

[16]M. K. Panda、R. Singh、A. C. Mishra 和 S. K. Mohanty，“漫射和准直入射辐射对趋光性生物对流的影响”，《Physics of Fluids》28，124104（2016）。[17]M. K. Panda，“各向异性散射对漫射和准直辐照下趋光性生物对流起始的影响”，《Physics of Fluids》32，091903（2020）。[18]M. K. Panda、P. Sharma 和 S. Kumar，“斜向辐照对趋光性生物对流起始的影响”，《Physics of Fluids》34，024108（2022）。[19]S. Kumar，“斜向辐照下趋光性各向同性散射生物对流”，《Physics of Fluids》34，114125（2022）。[20]S. Chandrasekhar，《流体动力学与流体磁动力学稳定性》（牛津大学出版社，1961）。[21]S. Chandrasekhar，《辐射传输》（Dover，纽约，1960）。[22]M. F. Modest，《辐射换热》（学术出版社，纽约，2003），第2版。[23]N. Hill 和 D.-P. Häder，“游动微生物运动轨迹的有偏随机游走模型”，《理论生物学杂志》186，503–526（1997）。[24]D. Sarma、S. C. Mishra 和 P. Mahanta，“利用离散传递法分析参与性介质中的准直辐射”，《定量光谱学与辐射传输杂志》96，123–135（2005）。[25]W. Ames 和 C. Brezinski，“Fortran数值配方（科学计算的艺术）：WH Press、SA Teukolsky、WT Vetterling 和 BP Flannery 著，剑桥大学出版社，剑桥，1992。963页，49.95美元，ISBN 0-521-43064-X。”（1993）。[26]J. R. Cash 和 D. R. Moore，“两点边值问题数值解的一种高阶方法”，BIT 20，44（1980）。