arXiv:2303.02380v1 [math.PR] 4 Mar 2023

非碰撞 q-可交换随机游走的渐近性

Leonid Petrov、Mikhail Tikhonov

摘要

我们研究一类非碰撞 q-可交换随机游走过程，其在 $\mathbb{Z}$ 上迈出的步子为 0（“直行”）和 -1 （“向下”）。如果对相邻步子（向下、直行）$\to$（直行、向下）进行一次初等对换后，轨迹的概率乘以参数 $q \in$ （0、1），则称单个随机游走为 q-可交换。我们的 m非碰撞 q-可交换随机游走系统，是通过对相互独立的 q-可交换随机游走应用 Doob 的 h变换得到的，其中使用了某个非负特征函数 h，其特征值小于 1。该 m 游走系统在 0 处存在吸收壁时演化。

我们证明，从任意初始构型出发的非碰撞 q-可交换随机游走轨迹构成一个行列式点过程，并将其核表示为双重轮廓积分形式。该核是从 q-分布的锯齿多边形随机菱形铺砌的相关核取极限得到的。

当 $m \to \infty$, $q = e^{-\gamma/m}$ 且 $\gamma > 0$ 固定时取极限，并对初始数据进行适当缩放，我们得到非碰撞随机游走的极限形状，同时证明其局部统计由不完全贝塔核描述。后者是二维离散正弦核的一种特殊的平移不变遍历扩张。

1 引言

本文的主要研究对象是二维格 $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 上的一族随机点构型 Υ_m，它们属于两大类：非碰撞随机游走和q-分布的随机菱形铺砌。

在 上的非碰撞随机游走 $\mathbb{Z}$ 是一个固定数量 的粒子所构成的马尔可夫链 m，这些粒子彼此独立地进行简单随机游走。它们通过永不碰撞这一条件相互作用，这等价于库仑排斥。该模型可追溯至 Karlin–McGregor [KM59], ，详见 K¨onig–O’Connell–Roch [KOR02]，其中有详细阐述。非碰撞随机游走是著名的 $\beta = 2$ Dyson 布朗运动[Dys62] 的一种离散化，该布朗运动描述高斯酉系综的特征值。近年来，Huang β 研究了其他随机矩阵特征值对应的非碰撞随机游走 [Hua21]，Gorin–Huang [GH22]也对此进行了研究。

我们从简单随机游走的 q-变形入手，即 q-可交换游走，由 Gnedin–Olshanski [GO09] 引入。在对游走的增量进行一次初等换位后，轨迹的概率会乘以 q 或 q^{-1} （取决于增量的顺序），其中 $q \in (0,1)$ 是一个参数。当 $q = 1$时，这一性质便退化为通常的可交换性。我们证明，独立的 q-可交换随机游走永不相撞的条件，可由针对一个显式非负特征函数的 Doob h-变换实现

其特征值为 $q^{\binom{m}{2}}$。从这一角度看，我们的过程 Υ_m 是 q-非碰撞简单随机游走经典模型的一种变形（此外，在 $q \to 1$ 极限下，它会退化为这一经典模型）。需要注意的是，所有此前研究过的非碰撞随机游走（包括 Borodin–Gorin 的模型 [BG13]，其中 q 参与粒子速度 $1, q^{-2}, \dots$，因而起着不同的作用）都满足通常的、未经变形的可交换性。

我们的 q依赖过程 Υ_m 属于一类更广泛的、带有 Macdonald 参数（q, t）的马尔可夫链。Petrov 最近定义了这类马尔可夫链 [Pet22]。这类马尔可夫链的渐近性应可通过 Gorin–Huang 的方法加以研究 [GH22]，但本文仅讨论 $t = q$ 情形（对应于随机矩阵中的 $\beta = 2$），这使得我们能够证明局部体相普适性。

还需指出，在连续时间和连续空间中，带有面积惩罚的不相交布朗运动及其标度极限——Dyson–Ferrari–Spohn 扩散——曾由 Caputo–Ioffe–Wachtel [CIW19], 和 Ferrari–Shlosman [FS23], 研究过，相关研究涉及二维和三维空间中伊辛模型的界面。

现在我们转向随机菱形铺砌，并简要概述相关模型及典型的渐近结果。随机菱形铺砌（等价地，六边形网格上的随机二聚体覆盖／完美匹配）是一种研究充分的二维统计力学模型，其相关函数可表示为 Kasteleyn 矩阵的逆的行列式；这一点最早由 Kasteleyn [Kas67]和 Temperley–Fisher [TF61]证明。另可参阅 Kenyon [Ken09]和 Gorin [Gor21]的讲义。随机铺砌有若干类渐近结果，本文将讨论 极限形状 以及 体相 (晶格) 普适性。要得到后者，需显式求出 Kasteleyn 矩阵的逆（其形式很大程度上取决于边界条件），或对该逆矩阵进行有效的渐近控制。

极限形状（大数定律）现象指出，随机铺砌的归一化高度函数趋于一个非随机的极限高度函数。后者具有变分描述（Cohn–Kenyon–Propp [CKP01] 和 Kenyon–Okounkov [KO07]）。在许多问题中，尤其是 Petrov [Pet14] 所研究的所谓锯齿多边形上的均匀随机菱形铺砌问题（见图1），变分问题可以通过关于极限高度函数梯度的代数方程求解。

在极限高度函数非平坦的邻域内，随机铺砌的局部（体相）关联应由整个平面铺砌上的遍历平移不变吉布斯测度描述。对于给定的梯度，后者是唯一的，其关联由不完全贝塔核（离散正弦核的推广）描述；参见 Sheffield[She05], Kenyon–Okounkov–Sheffield [KOS06]。Aggarwal [Agg19], 证明了均匀随机铺砌的这种普适体相行为具有完全一般性，此前关于六边形（Baik–Kriecherbauer–McLaughlin–Miller [BKMM07], Gorin [Gor08]）、锯齿多边形（Petrov [Pet14]）以及对应于非碰撞伯努利简单随机游走的菱形铺砌模型（Gorin–Petrov [GP19]）的研究则更早。高度函数非平坦区域的分界曲线称为冻结边界。对于多边形上的均匀随机铺砌，这条曲线是代数曲线。

均匀随机菱形铺砌的一种 $\mathfrak{q}$ 形变，是通过赋予与 $\mathfrak{q}^{\text{volume}}$ 成正比的概率权重得到的，其中体积是根据高度函数测量的。当 $\mathfrak{q} \in \in (0, 1)$ 时，若配分函数可求和，这便允许我们考虑无限区域上的铺砌（有时也称为平面分拆）。（我们使用不同的字体来区分 $\mathfrak{q}$ 与

q 可交换参数）。Cerf–Kenyon [CK01] 研究了 $\mathfrak{q}$ 加权平面分拆，并证明了极限形状结果。Okounkov–Reshetikhin [OR03] 求得了局部相关性的渐近性 $\mathfrak{q} \nearrow 1$，并引入不完全贝塔核来描述这些相关性。在后续工作中 [OR07], 他们研究了可能带有后墙的随机斜平面分拆。根据后墙转折次数的不同，冻结边界可能形成若干条延伸至无穷远处的渐近线，图示见 [OR07，图 2, 15, 16] 。

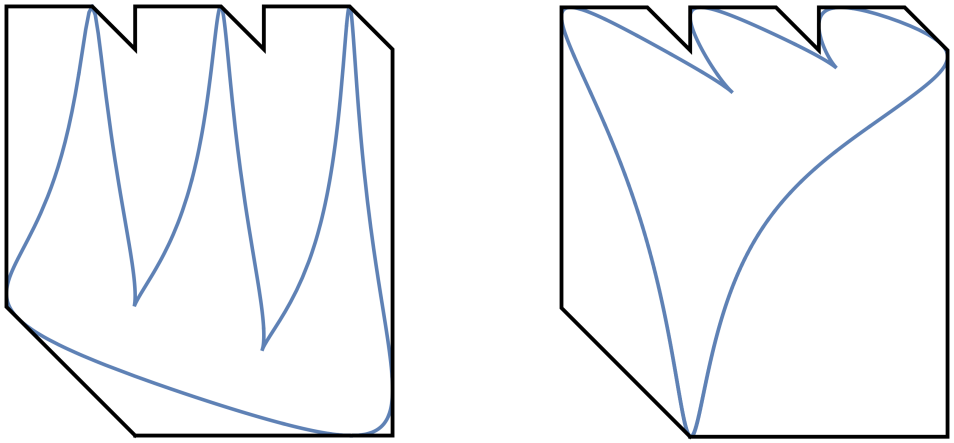


图 1：一个锯齿多边形及其冻结边界，适用于 $\mathfrak{q}$-加权菱形铺砌，其中 $\mathfrak{q} = e^{-\gamma/N} \to 1$，其中 $N \to +\infty$ 是多边形的线性尺寸。这里 $\gamma > 0$ 在左侧， $\gamma < 0$在右侧。这些冻结边界由 Di Francesco–Guitter [DFG19] 得到。

对于 $\mathfrak{q}$-加权的有界锯齿多边形随机铺砌，Di Francesco–Guitter [DFG19] 使用切线法计算了冻结边界。Gorin–Huang [GH22]最近在一个更一般的系综中得到了冻结边界，该系综带有 Borodin–Gorin–Rains $\mathfrak{q}$（κ, [）权重，由 Borodin–Gorin–Rains [BGR10]引入。随着带有多个缺陷的锯齿多边形的一条边趋于无穷远处， [DFG19]的边界在极限下转变为 [OR07]的边界。随后，邻接这条边的“云状”部分退化为多条渐近线。

对于锯齿多边形， $\mathfrak{q}$加权菱形铺砌的体相普适性 $\mathfrak{q} \to 1$ 仍是一个悬而未决的问题，除了由 Borodin–Gorin–Rains 解决的六边形情形 [BGR10]之外。这一点尽管 Petrov K_{loz} 给出了相关核的显式双重轮廓积分表达式（它与 Kasteleyn 矩阵的逆密切相关） [Pet14] ，我们将在下文的（4.2）中回顾该表达式。原因在于，积分中的 $\mathfrak{q}$-超几何函数 K_{loz} 阻碍了对其进行直接的渐近分析。

众所周知，与 $\mathfrak{q}$有关的核 K_{loz} （及其后续渐近分析）在若干情况下会简化。首先，令 $\mathfrak{q} = 1$，即可得到均匀随机铺砌的核，并由此获得了许多渐近结果；参见 Petrov [Pet14], [Pet15], Toninelli–Laslier [LT15], Gorin– Petrov [GP19], Aggarwal [Agg19]。在另一种情形下，固定 $\mathfrak{q} < 1$ ，并如图 1 左图所示，将多次转折的多边形上边界推至无穷远处，可以证明图像底部区域的 $\mathfrak{q}$ 加权随机铺砌收敛到带有后墙的随机平面分拆；这类分拆由 Okounkov–Reshetikhin [OR07] 研究过。此外，在这个极限下，相关核 K_{loz} 化为较简单的核 [OR07, (25)] ， 该核最初是

通过 Schur 过程的技术得到的。后一个核适合用标准的最速下降法进行渐近分析；该方法尤其导出了具有若干条渐近线的冻结边界（在图1中已可见）以及体相普适性。

我们的模型 Υ_m 关于非碰撞 q-可交换随机游走，展示了一个复杂核 K_{loz} 得以简化的新情形。具体而言，如果不再取 $\mathfrak{q}<1$，而保留 $\mathfrak{q}>1$，并如图 底部所示，将多边形的底边界向下推至无穷远处1（右图），那么在多边形的上边界附近，我们得到收敛到非碰撞 q-可交换随机游走的极限，且$q=\mathfrak{q}^{-1}$。由此得到的相关核 K_{walks} 具有显式的双重轮廓积分形式，适用于非碰撞随机游走的任意初始条件。借助该核，我们得到当游走数 m 趋于无穷且 $q=e^{-\gamma/m}\to 1$时的极限形状与体相普适性结果。非碰撞随机游走的冻结边界（例子见图 3）可能形成多个“云转角”，并且始终恰有一条渐近线（图1右图中已可见其初现）。

我们得出结论：随机菱形铺砌系综的极限形状结果可以通过多种方法获得，但体相普适性则需要了解或精确控制 Kasteleyn 矩阵的逆（或与之密切相关的相关核）。 q^{volume} 锯齿多边形上的随机菱形铺砌系综，就是一个仍无法实现这种控制的模型实例。本文探讨了这种菱形铺砌模型的一种新退化情形，它适用于渐近分析，同时也可很好地解释为具有任意初始条件的非碰撞q-可交换随机游走。

大纲

在引言中，我们概述了模型 Υ_m 属于非碰撞随机游走和随机菱形铺砌这两类模型的原因。下文第2节将详细介绍我们的模型和结果。特别是，我们证明该过程 Υ_m 与一组相互独立的 q-可交换随机游走在以永不碰撞为条件时的系统相一致。行列式核的证明和渐近结果见第3至5节。

致谢

LP 感谢 Zhongyang Li 最初与其讨论这个问题。本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1664617 和 DMS-2153869；此外还获得了西蒙斯数学家合作资助，项目编号为 709055。本文部分研究工作是在第一作者参加“随机矩阵理论与相互作用粒子系统中的普适性与可积性”项目期间完成的。该项目由数学科学研究所在加利福尼亚州伯克利举办，时间为2021年秋季学期；相关工作得到美国国家科学基金会项目 DMS-1928930 的资助。

2 模型与主要结果

本节将讨论我们的非相交 q-可交换随机游走模型，并阐述关于其行列式结构和渐近行为的主要结果。

2.1 q可交换随机游走

考虑一个离散时间简单随机游走 $\{y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上行走，每一步根据对一枚给定（可能有偏）的硬币进行独立抛掷，取步长 0（“直行”）或 -1 （“向下”）。[1] 众所周知，该随机游走的步序列是可交换，也就是说，

$$\text{Prob}\,(y(t+1)-y(t)=\epsilon_1, y(t+2)-y(t+1)=\epsilon_2,\ldots,y(t+k)-y(t+k-1)=\epsilon \tag{2.1}$$

对于任意 $t\geq 0$ 和 $k\geq 1$，该式在 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k\in\{0,-1\}$ 上具有对称性。

Gnedin–Olshanski [GO09] 考虑了可交换性概念关于参数 $q\in(0,1)$ 的 q-变形。对于 随机游走 $\{y(t)\}_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$，式（2.1）在 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k$ 上不再具有对称性。相反，在初等换位下，我们有如下 q-对称性 $\epsilon_i\leftrightarrow\epsilon_{i+1}$:

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\,(\ldots,y(t+i)-y(t+i-1)=\epsilon_i, y(t+i+1)-y(t+i)=\epsilon_{i+1},\ldots)\\ &\qquad=q^{\epsilon_i-\epsilon_{i+1}}\,\text{Prob}\,(\ldots,y(t+i)-y(t+i-1)=\epsilon_{i+1}, y(t+i+1)-y(t+i)=\epsilon_i,\ldots)\,.\end{aligned}$$

换言之，在相邻步（向下，直行）$\to$（直行，向下）互换时，轨迹的概率乘以 q。

注 2.1。 按照惯例，在本文的所有精确计算中，参数 q 均为 0 和 1 之间的固定数。对于不相撞 q-可交换随机游走的渐近分析，我们令 $q\nearrow 1$。这些渐近结果在第 2.6 节中表述，并在第 5节中证明。

关于 q-可交换随机游走的概率分布（概率律）构成一个凸单纯形。也就是说，概率分布的凸组合（混合）仍保持 q-可交换性。根据 q-版的德菲内蒂定理（证明见 [GO09], 极端 q-可交换随机游走（即此单纯形的极点）由 $\Delta:=\{0,1,2,\ldots\}\cup\{\infty\}$参数化。具体而言，对于任意 q-可交换随机游走 $y(t)$，存在一个定义在 μ 上的概率测度 Δ，使得 $y(t$的概率分布是借助 μ将极端分布混合而成的。

我们的第一个观察是，所有由 $\Delta_{\text{fin}}:=\{0,1,2,\ldots\}\subset\Delta$ 中的点参数化的极端 q-可交换随机游走，都是同一个空间非齐次随机游走，其初始构型各不相同，并且在 0 处有一面吸收壁。

定义 2.2 （ $\mathbb{Z}_{\geq 0}$中的 q-可交换随机游走）。 令 Υ_1 为以下一步马尔可夫转移概率，其中 x, $y\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\Upsilon_1(x,y):=\begin{cases}q^x, & y=x;\\ 1-q^x, & y=x-1;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

命题 2.3. 1. 从任意 $x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 出发，具有转移概率Υ_1 的随机游走是 q-可交换的。

[1]在一维整数格 $\mathbb{Z}$上向下移动的随机游走很方便。

2. 由一点 $x \in \Delta_{\mathrm{fin}}$ 参数化的任意极端 q-可交换随机游走，都可以认定为从 x出发的随机游走 Υ_1 。

证明。对于第一部分，我们有

$$\Upsilon_1(x,x)\Upsilon_1(x,x-1) = q^x(1-q^x) = q\cdot\Upsilon_1(x,x-1)\Upsilon_1(x-1,x-1),$$

这立即推出了 q-可交换性。第二部分通过将我们的随机游走与 [GO09中的命题4所描述的随机游走进行比较即可得出。1]。 □

注 2.4。在标度极限下，当 $q = e^{-\varepsilon} \to 1$ 和 $x = \lfloor \varepsilon^{-1}\log(1/p)\rfloor + \tilde{x}$ 时，其中 $p \in (0,\ 1)$ 且 $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$， q-可交换随机游走在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上转化为通常的 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游走。后者对应于独立掷硬币，正面朝上的概率为 p。

2.2 不相交简单随机游走

本文的核心研究对象是一种多个 q-可交换随机游走永不相撞的模型。这里我们先讨论 $\mathbb{Z}$上的不相交简单随机游走这一著名模型。根据注2.4，这一著名模型可视为我们所研究的不相交 $q \to 1$-可交换随机游走模型的极限。我们将在下文第2.3 节详细定义后者。

在 $\mathbb{Z}$ 上不相交简单随机游走模型可追溯至 Karlin–McGregor [KM59]。在 $\mathbb{R}$ 上的不相交布朗运动模型，就是著名的高斯酉系综的 Dyson 布朗运动 [Dys62]。K¨onig–O'Connell–Roch [KOR02]系统地研究了非碰撞随机游走，并将其与行列式点过程（尤其是正交多项式系综）联系起来。

一个由 m 个相互独立的离散时间简单随机游走组成的模型，其单步马尔可夫转移概率为 $\mathbb{Z}$ （以概率 -1 和 p 分别采取步长 0 和 $1-p$），在以永不发生碰撞为条件后，具有 Doob h-变换的形式 [Doo84, 2.VI.13]

$$\Upsilon_m^{(q=1)}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{h_m^{(q=1)}(\vec{y})}{h_m^{(q=1)}(\vec{x})} \underbrace{\prod_{i=1}^{m}\left(p\,\mathbf{1}_{y_i=x_i} + (1-p)\,\mathbf{1}_{y_i=x_i-1}\right)}_{\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}^{(q=1)}(\vec{x},\vec{y})}, \tag{2.2}$$

其中 $\vec{x} = (x_1 > \ldots > x_m)$、 $\vec{y} = (y_1 > \ldots > y_m)$、 $x_i,\ y_i \in \mathbb{Z}$。这里

$$h_m^{(q=1)}(\vec{x}) := \prod_{1\leq i<j\leq m}(x_i - x_j) \tag{2.3}$$

是 Vandermonde行列式，而 i 在（2.2）中的乘积，就是一组 m 相互独立的简单随机游走的一步马尔可夫转移概率，我们将其记为$\Upsilon_m^{(q=1)}{}_{,\ \mathrm{ind}}$。（2.2）中以及全文中， $\mathbf{1}_A$ 表示事件或条件 A的示性函数。

事实上，（2.2）定义了一个由 m 个粒子组成的随机游走，这一点并不显然。关键性质在于，右侧对所有 $\vec{y}$求和后等于 1。等价地， $h_m^{(q=1)}(\vec{x})$ 是以下 m 个相互独立的简单随机游走所对应的非负调和函数：

$$\sum_{\vec{y}} h_m^{(q=1)}(\vec{y})\,\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}^{(q=1)}(\vec{x},\vec{y}) = h_m^{(q=1)}(\vec{x}). \tag{2.4}$$

2.3 非碰撞 q-可交换随机游走

下面介绍我们的主要模型 Υ_m，它是第 q-变形的经典模型，即第2.2节中的无碰撞简单随机游走模型。对于 $m=1$，模型 Υ_1 是第 q节中介绍的2.1 -可交换随机游走。

用 $\mathbb{W}_m$ 表示 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 中 m 个粒子的构型空间：

$$\mathbb{W}_m := \{\vec{x} = (x_1 > x_2 > \ldots > x_m \geq 0)\} \subset \mathbb{Z}^m_{\geq 0}, \tag{2.5}$$

并令 $|\vec{x}| := x_1 + \ldots + x_m$。

定义 2.5。 考虑定义在 $\mathbb{W}_m$ 上的马尔可夫链 Υ_m，其单步转移概率如下，其中 $\vec{x}$，$\vec{y} \in \mathbb{W}_m$：

$$\Upsilon_m(\vec{x},\vec{y}) = q^{-\binom{m}{2}+(m-1)(|\vec{x}|-|\vec{y}|)} \prod_{1\leq i<j\leq m} \frac{q^{y_j}-q^{y_i}}{q^{x_j}-q^{x_i}} \underbrace{\prod_{i=1}^{m} \left(q^{x_i}\mathbf{1}_{y_i=x_i} + (1-q^{x_i})\mathbf{1}_{y_i=x_i-1}\right)}_{\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}(\vec{x},\vec{y})}. \tag{2.6}$$

图 2左图展示了过程 Υ_m（其中 $m=4$）从 $\vec{x} = (7, 6, 3, 1)$ 出发的轨迹。随着时间趋于无穷，动力学过程 Υ_m 到达其唯一的吸收态 $\delta_m := (m-1, m-2, \ldots, 1, 0) \in \mathbb{W}_m$。我们将马尔可夫过程 Υ_m 称为 非碰撞q-可交换随机游走。

过程 Υ_m 由 Petrov 近期提出 [Pet22]。它是 $t=q$ Macdonald 非碰撞随机游走的一个特例，而本文的主要目标是对 $t=q$ 情形进行详细的渐近研究。结果表明，$t=q$ 过程是行列式型的，并具有显式的双重围道积分核。一般（q，t）Macdonald 情形的渐近分析应采用不同的非行列式方法（可能基于 [GH22]），但这一问题不在本文的研究范围之内。

根据 [Pet22] 的结果可知，对于任意 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$，量 $\Upsilon_m(\vec{x},\vec{y})$ 均非负，且在所有 $\vec{y} \in \mathbb{W}_m$ 上求和为 1。等价地，以下是 Vandermonde 行列式的 q-变形

$$h_m(\vec{x}) := q^{-(m-1)|\vec{x}|} \prod_{1\leq i<j\leq m} (q^{x_j}-q^{x_i}) \tag{2.7}$$

是 $\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}$ 上非负的特征函数，其中包含 m 个相互独立 q可交换随机游走：

$$\sum_{\vec{y}\in\mathbb{W}^m} h_m(\vec{y})\,\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}(\vec{x},\vec{y}) = q^{\binom{m}{2}} h_m(\vec{x}). \tag{2.8}$$

这一性质类似于（2.4），但请注意，此处函数 h_m 并非特征值为 1 的调和函数，其特征值实际上等于 $q^{\binom{m}{2}}$。

由（2.6）–（2.8）可知，动力学 Υ_m 的转移概率具有 Doob$h$-变换的形式。此外，与第2.2节中的简单随机游走情形类似，过程 Υ_m 可以通过对相互独立的 q-可交换游走 $\Upsilon_{m,\ \mathrm{ind}}$ 施加永不相撞的条件得到。为了表述这一结果（下文的命题 2.6），我们需要引入一些记号。

记 $\Upsilon_1^{(T)}$ 单个 q-可交换随机游走经过 T 步的转移概率。假设 $T \geq x-y$:[2]，即可轻易计算出该概率

$$\Upsilon_1^{(T)}(x,y) = \mathbf{1}_{0\leq y\leq x}(1-q^x)(1-q^{x-1})\dots(1-q^{y+1})q^{y(T-x+y)}\frac{(q;q)_T}{(q;q)_{x-y}(q;q)_{T-x+y}}. \tag{2.9}$$

实际上，$(1-q^x)(1-q^{x-1})\dots(1-q^{y+1})q^{y(T-x+y)}$ 表示该游走先一路向下到达 x，然后停留在 y 的概率，而 q 项式系数 $\frac{(q;q)_T}{(q;q)_{x-y}(q;q)_{T-x+y}}$ 则来自 q-可交换性。

由 [KM59], 可知，一个由 m 个相互独立的 q-可交换随机游走构成的系统，在这 T 步内粒子不发生碰撞这一事件的条件下，其经过 T 步的转移概率等于 $\det[\Upsilon_1^{(T)}(x_i,y_j)]_{i,j=1}^m$，其中 $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbb{W}_m$。因此，$\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}$ 从 $\vec{x}$ 到 $\vec{y}$ 的一步转移概率，在截至时间 T 均未发生碰撞且最终在 δ_m 被吸收的条件下，具有如下形式

$$\frac{\det[\Upsilon_1^{(T-1)}(y_i,m-j)]_{i,j=1}^m}{\det[\Upsilon_1^{(T)}(x_i,m-j)]_{i,j=1}^m}\Upsilon_{m,\mathrm{ind}}(\vec{x},\vec{y})\mathbf{1}_{y_i-x_i\in\{0,-1\}\text{ for all }i}.$$

命题 2.6。对于任意 $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbb{W}_m$，有

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{\det[\Upsilon_1^{(T-1)}(y_i,m-j)]_{i,j=1}^m}{\det[\Upsilon_1^{(T)}(x_i,m-j)]_{i,j=1}^m} = q^{-\binom{m}{2}+(m-1)(|\vec{x}|-|\vec{y}|)}\prod_{1\leq i<j\leq m}\frac{q^{y_j}-q^{y_i}}{q^{x_j}-q^{x_i}}. \tag{2.10}$$

证明。利用（2.9），分别从右端（2.10）的分子和分母中提取出 $q^{\sum_{j=1}^m(m-j)(T-1+m-j)}$ 以及 $q^{\sum_{j=1}^m(m-j)(T+m-j)}$，得到左端的因子 $q^{-\binom{m}{2}}$。此后，由于所得矩阵保持非退化，我们可以令每个行列式的矩阵元中的 $T\to\infty$ 趋于极限。因此，只需计算一个这样的行列式，其中 $T=\infty$；例如（将指标 j 替换为 $m+1-j$后）：

$$\det\Big[\mathbf{1}_{0\leq j-1\leq x_i}\frac{(1-q^{x_i})(1-q^{x_i-1})\dots(1-q^j)q^{-x_i(j-1)}}{(q;q)_{x_i-j+1}}\Big]_{i,j=1}^m = \det\Big[\frac{q^{-x_i(j-1)}(q^{x_i-j+2};q)_{j-1}}{(q;q)_{j-1}}\Big]_{i,j=1}^m. \tag{2.11}$$

这里我们将乘积改写成了便于处理的形式，并注意到，右端中的 q-Pochhammer $(q^{x_i-m+j+1};q)_{j-1}$ 会自动确保示性函数 $\mathbf{1}_{0\leq j-1\leq x_i}$。

我们看到，右侧（2.11）行列式中的每个 $(i,\ j)$ 项都是关于 q^{-x_i} 的次数为 $j-1$ 的多项式。因此，整个行列式与 Vandermonde行列式 $\prod_{1\leq i<j\leq m}(q^{x_j}-q^{x_i})$ 成正比。容易看出，该 Vandermonde行列式的系数等于 $(-1)^{m(m-1)/2}q^{-(m-1)|\vec{x}|}(q;q)_1(q;q)_2\dots(q;q)_{m-1}$，从而证明完毕。 □

[2]本文及下文均采用 q-Pochhammer 符号表示法

$$(a;q)_k := (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{k-1}),\quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

并且 $(z;\ q)_\infty := \prod_{i=0}^\infty(1-zq^i)$ 是一个收敛无穷乘积，因为 $q\in(0,\ 1)$。式 (2.9) 中的最后一个比值是q-二项式系数，因为 $\binom{n}{k}_q = \frac{(q;\ q)_n}{(q;\ q)_k(q;\ q)_{n-k}}$。

命题 2.6中的极限关系完成了这一类比：众所周知的定义在 $\mathbb{Z}$ 上的不相交简单随机游走模型（以及 Dyson 布朗运动）与我们的不相交q-可交换随机游走 Υ_m。在这两种情形中，转移概率的 h-变换结构都源于这样的条件化：相互独立的随机游走永不相撞。

2.4 吉布斯诠释： q-加权菱形铺砌

该 m粒子过程 Υ_m 满足一种 q可交换性，其形式与第2.1节讨论的单个随机游走的情形相同。具体而言，这是在 [Pet22]中观察到的游走的吉布斯性质。

固定 m 以及过程 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$ 的初始条件 Υ_m。对 Υ_m的轨迹作适当的仿射变换后，可以将其与宽度为 x_1+1的竖直条带的菱形铺砌一一对应，见图2右图。竖直条带的底边界由$\vec{x}$ 以下述方式编码。将 $\vec{x}$ 视为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$中的粒子构型，每个粒子 x_i 对应边界上一段斜率为 $(-1/\sqrt{3})$ 的直线段，而 $\vec{x}$ 中的每个空位对应于从条带中切去一个小三角形。由于游走最终在 Υ_m 处 δ_m被吸收，菱形铺砌在顶部远处呈“冻结”状态，左侧有 x_1+1-m 块一种类型的菱形，随后是 m 块另一种类型的菱形。因此，与 Υ_m 的轨迹相对应的每种菱形铺砌都只包含有限多个水平菱形。

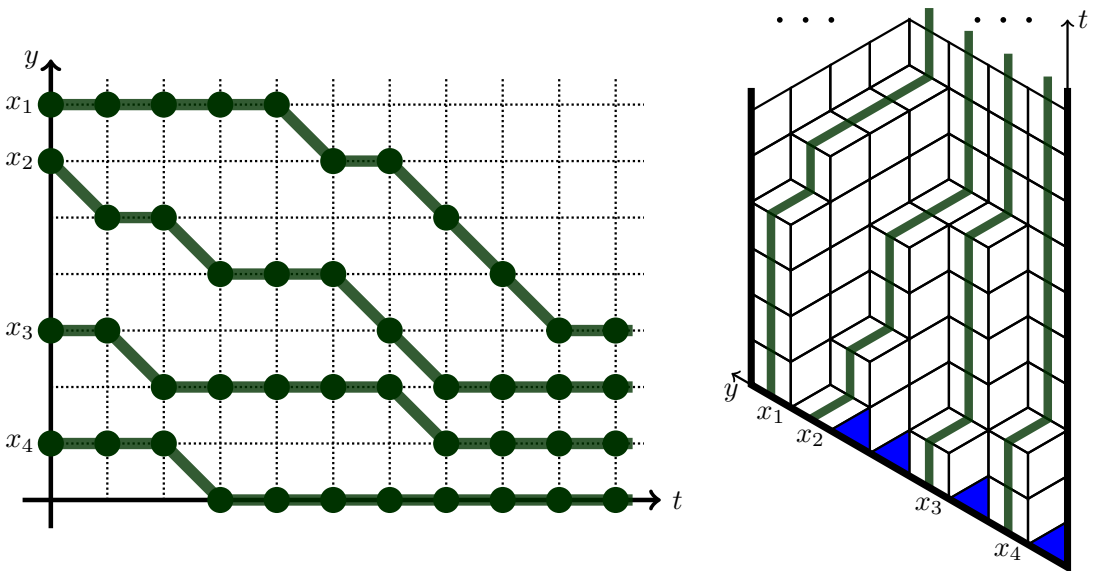


图 2：左：从 $\vec{x}=(7,\ 6、\ 3、\ 1)$ 出发的无碰撞 q-可交换随机游走Υ_m（其中 $m=4$）的轨迹示意图。右：通过仿射变换，将该轨迹双射地解释为条带的菱形铺砌。

与 Υ_m 对应的阶梯曲面上的菱形铺砌，其在三维空间中的解释是：该曲面下方的立体由 $1\times 1\times 1$ 个盒子组成。根据这种解释， Υ_m 的每条轨迹在对应阶梯曲面下方都有一个确定的体积。换言之，给定铺砌的体积，就是从最小构型得到该铺砌所需添加的盒子数。例如，图2右侧所示铺砌的体积等于 34。

下一个结论由 [Pet22中的命题 10]得出。

命题 2.7。 固定 m 和 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$。马尔可夫过程 Υ_m (2.6) 从 $\vec{x}$ 出发的轨迹的概率分布，与图 2 右侧所示条带上的随机菱形铺砌的分布相同（取决于 $\vec{x}$），其中铺砌的概率权重与 q^{volume} 成正比。

注 2.8。 另一种 q-依赖的非碰撞随机游走模型由 [BG13] 提出并研究。在该模型中，参数 q 会进入粒子速度 1，q^{-1}，q^{-2}，……，但整体动力学满足通常的、未经变形的可交换性。事实上，[BG13]中的单粒子动力学是简单随机游走（具有泊松、伯努利或几何跳跃），而我们的单粒子动力学是 q-可交换随机游走。

我们将命题 q^{volume} 中所述铺砌上的加权概率测度记为 2.7，记作 $\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}$。 的配分函数（即概率归一化常数）具有显式形式：

命题 2.9。 对图 q^{volume} 中所示条带的所有菱形铺砌（右图，由 2 确定）求和 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$，所得结果为

$$Z[\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}] = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{(q;q)_{x_i}} \prod_{1 \le i < j \le m} (1 - q^{x_i - x_j}). \tag{2.12}$$

特别注意，令 $q = 0$，便得到 $Z[\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}] = 1$，正如所应如此。

命题 2.9 的证明。 根据命题 2.7，只需验证 $1/Z[\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}]$ 是从 $x_1 - m + 1$ 出发、经过 $\vec{x}$ 步到达吸收态 δ_m 的最快路径转移概率。这一结论可通过将单步转移概率（2.6）相乘，并观察到 q-Vandermonde行列式因子相互抵消（来自初始条件的第一个因子除外） $\vec{x}$而得出。随后可直接验证 $1/Z[\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}]$ 的表达式。 □

2.5 行列式核

固定 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ 以及一个初始构型 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$，对于不相撞的 q-可交换随机游走 Υ_m (定义 2.5)。将该过程的轨迹 $\vec{y}(t)$视为随机点构型 Υ_m ($\{y_j(t)\colon t \ \ j = 1, \dots, m,\, t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\} \subset \mathbb{Z}^2_{\ge 0}$。 下一个命题是我们的第一个主要结果。

定理 2.10。 如此定义的随机点构型在 $\mathbb{Z}^2_{\ge 0}$ 中构成一个行列式点过程，也就是说，对于任意 $\ell \ge 1$ 以及任意一组两两不同的点 $(u_i, t_i) \in \mathbb{Z}^2_{\ge 0}$，我们有

$$\begin{aligned} &\text{概率（随机构型 } \{y_j(t)\colon 1 \le j \le m,\, t \ge 0\} \text{ 包含所有 } (u_i, t_i),\ i = 1, \dots, \ell) \\ &\qquad = \text{行列式}\big[K_{\text{walks}}(u_i, t_i; u_j, t_j)\big]_{i,j=1}^{\ell}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中，相关核 K_{walks} 具有如下双重轮廓积分形式：

$$K_{\text{walks}}(y_1,t_1;y_2,t_2) := \mathbf{1}_{t_1=t_2}\mathbf{1}_{y_1=y_2} - \mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{y_2+t_2>y_1+t_1}\frac{q^{(t_1-t_2)(y_1+t_1)}(q^{y_1-y_2+t_1-t_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}$$
$$-\frac{q^{-t_1-y_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint dz\,dw\,\frac{z^{-t_2}w^{t_1}}{w-z}\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-y_1-t_1};q)_{t_1+1}}\frac{(zq^{1-y_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{(w^{-1};q)_\infty}{(z^{-1};q)_\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w}. \tag{2.14}$$

这里，$y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$，$t_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$t_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$，$w$ 轮廓是围绕0的任意小圆，而 z 轮廓绕过 $q^{y_2+t_2}$，$q^{y_2+t_2+1}, q^{y_2+t_2+2}$，.. ., 0和 w 轮廓，并且不包围被积函数的其他z 极点。

我们将在下文第4 节证明定理2.10 ，此前（在第3节）我们将过程 Υ_m 非碰撞 q-可交换随机游走与一种 q加权的锯齿多边形菱形铺砌分布联系起来。后者的行列式核已由 [Pet14]给出。

2.6 渐近结果

回顾行列式核的定义。随着游走数和时间趋于无穷，我们的非碰撞q-可交换随机游走的体相中应当出现该核：

定义 2.11。令 $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$、虚部 $\omega \geq 0$ 为一个称为复斜率的参数。不完全贝塔核定义为

$$\mathsf{B}_\omega(\Delta t,\Delta p) := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\overline{\omega}}^{\omega}(1-u)^{\Delta t}u^{-\Delta p-1}du, \qquad \Delta t,\Delta p\in\mathbb{Z}, \tag{2.15}$$

其中，从 ω 到 ω 的积分弧在 $\Delta t \geq 0$ 时穿过 (0，1)，在 $\Delta t < 0$时穿过 $(-\infty, 0)$。

核（2.15）由 [OR03] 引入，用以描述整个平面的某类 q-分布随机菱形铺砌的局部渐近（这等价于随机平面分拆）。此外，不完全贝塔核是有界形状的均匀随机菱形铺砌的通用体相标度极限 [Agg19]。根据 [She05], [KOS06], ，对于每个复斜率 ω，整个平面的菱形铺砌上都存在唯一的遍历平移不变吉布斯测度，其行列式相关核为B_ω。

现在来描述随机游走的渐近区域。令 $m \to +\infty$，并设$q = e^{-\gamma/m}$ 对固定的 $\gamma > 0$。将随机游走中的时间和空间变量（如图 2左图所示）按 m成比例缩放：$t = \lfloor \tau m \rfloor$，$y = \lfloor \rho m \rfloor$，其中 τ、$\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$为固定值。令初始条件 $\vec{x} \in \mathbb{W}_m$ 构成固定数量 $L \geq 1$ 的密集簇：

$$x_i = i + \lfloor mC_k \rfloor \quad \text{for } ma_k \leq i < ma_{k+1}, \tag{2.16}$$

其中 $i = 1$、.....、m、$k = 1$、.....、L，以及 $0 < C_1 < C_2 < \ldots < C_L$和 $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{L+1} = 1$是簇的固定参数。更多详情请参见第 5.1节开头。

在（τ，ρ）平面中，设 $\partial\mathcal{D}$ 为在指数坐标（$e^{\gamma\tau}$，$e^{\gamma\rho}$）下具有如下有理参数化的曲线：

$$e^{\gamma\tau(w)} = \frac{(wF(w))' - e^{-\gamma}}{wF'(w) - F(w) + e^{\gamma}F^2(w)}, \qquad e^{\gamma\rho(w)} = \frac{e^{\gamma}F'(w)}{e^{\gamma}(wF(w))' - 1}, \qquad w \in \mathbb{R},$$

其中

$$F(w) := \frac{w}{w-1}\prod_{i=1}^{L}\frac{we^{\gamma(a_i+C_i)}-1}{we^{\gamma(a_{i+1}+C_i)}-1}.$$

这条曲线围成一个记作 $\mathcal{D}$ 的区域，使得 $\mathcal{D}\cap([0,\tau]\times\mathbb{R}_{\geq 0})$ 对任意 $\tau>0$ 都有界。我们称 $\partial\mathcal{D}$ 为冻结边界曲线，并称 $\mathcal{D}$ 为液态区域。示例见图3 。

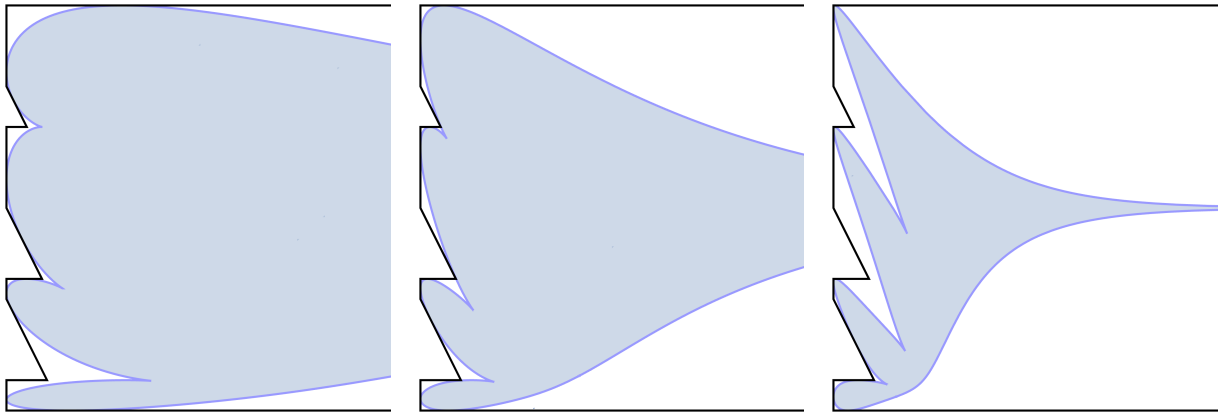


图 3：(τ ρ $\gamma =$ 1/3 1 3, $\vec{a} = 0\ 0.1\ 0.2\ 0.6\ 1$ $\vec{C} = 0.05\ 0.45\ 0.8\ 1$,) 平面中液态区域和冻结边界的示例，其中 ,、以及采用相同的初始条件 (,,,,)、(,,,)。边界多边形区域表示游走轨迹可能所在的位置，其中竖直的直线段是初始时密集堆积的粒子簇 $\vec{x}$。在液态区域之外，要么没有游走，要么游走密集排列，并沿水平方向或对角线方向确定性地直线移动。

对于任意 $(\tau,\rho)\in\mathcal{D}$，令 $\omega=\omega(\tau,\rho)$ 为代数方程的唯一根 n

$$\omega F\left(e^{-\gamma\rho}\frac{1-\omega}{1-e^{\gamma\tau}\omega}\right)=e^{-\gamma(\tau+1)}$$

位于复上半平面内。该方程复根的存在性和唯一性（等价于 (5.9)）可由第 5.2 节及变量代换 (5.19) 得出。以上符号均已定义，现在可以陈述本文的主要渐近结果：

定理 2.12。 对于任意 $(\tau,\rho)\in\mathcal{D}$，在上述极限区域内，有

$$\lim_{m\to+\infty}(-1)^{\Delta t}e^{\gamma(\tau+\rho)\Delta t}K_{\text{walks}}(\lfloor\rho m\rfloor+\Delta p,\lfloor\tau m\rfloor+\Delta t;\lfloor\rho m\rfloor,\lfloor\tau m\rfloor)=\mathbf{1}_{\Delta t=\Delta p=0}-\mathsf{B}_{\omega}(\Delta t,\Delta p)$$

对于任意固定的 $\Delta t,\Delta p\in\mathbb{Z}$。

我们对定理2.12作两点说明。首先，位于$-1)^{\Delta t}e^{\gamma(\tau+\rho)\Delta t}$ 前面的因子K_{walks} 是相关核的所谓“规范变换”，它不会改变（2.13）中的行列式，因而保持行列式点过程不变。因此，定理2.12表明，随机游走的点过程在局部收敛（在晶格层面上，即在全局位置（τ,ρ）的邻域内）到由整个平面上具有的唯一遍历平移不变吉布斯测度所产生的点过程的补集

参数 ω。根据 Kerov 补全原理（例如参见[BOO00，附录 A。3]），之所以出现补集，是因为我们的相关核是 $\mathbf{1}-\mathsf{B}_\omega$，其中$\mathbf{1}$ 是恒等算子。

其次，我们讨论密集簇假设（2.16）。一方面，它限制了初始条件的一般性。另一方面，它为全局冻结边界带来了优雅的公式，并简化了分析中的技术部分。定理 2.12 的体相极限渐近结果对于一般初始数据也应当成立 $\vec{x}$，这需要对我们的核进行更精细的最速下降分析，类似于 [GP19]中对具有一般初始数据的 $q=1$ 非碰撞随机游走所做的分析。这里不再展开这一分析。另请参见 [DM15],[DM20]，其中给出了具有更一般边界条件的均匀随机菱形铺砌的极限形状和涨落结果。

最后，我们对非碰撞 q-可交换随机游走的最终吸收时间提出一个猜想：

注 2.13（Υ_m的吸收时间的渐近性）。注意，液态区域是无界的。更准确地说，冻结边界有一条渐近线，当 $\tau\to+\infty$时趋近于 $\rho=1$。这意味着，马尔可夫链 Υ_m 的吸收时间，即随机时间

$$t_{\mathrm{abs}}(m):=\min\left\{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\colon y_1(t)=m-1\right\},$$

增长速度快于 m。基于 Mutafchiev 的结果 [Mut06] 关于无约束随机平面分拆的研究，我们猜想 $t_{\mathrm{abs}}(m)\sim m\log m$ 当 $m\to+\infty$时。

可以采用生成函数系数法，正如 [Mut06] (基于 Hayman 可容许函数 [Hay56])那样，得到更精确的渐近行为。确实，这是因为我们由 Υ_m 得到的平面分拆系综具有显式的配分函数（命题 2.9）。

3 从菱形铺砌到非碰撞的 q-可交换游走

这里我们回顾 [Pet22] 中的结果，该结果说明非碰撞的 q-可交换随机游走 Υ_m 如何作为 q-分布随机菱形铺砌的极限出现。

3.1 q-分布的锯齿多边形菱形铺砌

令 $\mathbb{GT}_N$ 为所有长度为 N的分拆组成的集合，即由非负整数构成的 N-元组$\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\lambda_N\geq 0)$。记作 $|\lambda|=\lambda_1+\ldots+\lambda_N$。若 $\mu\in\mathbb{GT}_{N-1}$与$\lambda\in\mathbb{GT}_N$交错，记为 $\mu\prec\lambda$，当且仅当 $\lambda_1\geq\mu_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_{N-1}\geq\mu_{N-1}\geq\lambda_N$。对于一个序列

$$\Lambda=(\varnothing\prec\Lambda^{(1)}\prec\Lambda^{(2)}\prec\cdots\prec\Lambda^{(N-1)}\prec\Lambda^{(N)}),\qquad \Lambda^{(j)}\in\mathbb{GT}_j, \tag{3.1}$$

将其体积定义为

$$\mathrm{volume}(\Lambda)=\sum_{m=1}^{N-1}|\Lambda^{(m)}|.$$

固定 $\lambda\in\mathbb{GT}_N$，并考虑序列上的概率测度（3.1），其顶行固定为$\Lambda^{(N)}=\lambda$，且概率权重与 $q^{-\mathrm{volume}(\Lambda)}$ 成正比。将该概率测度记为

$\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}$。我们可以将 $\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}$ 的配分函数表示如下（有关更多细节，参见 [Pet14，第 3] 节）：

$$Z[\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}] = \sum_{\Lambda\colon\, \Lambda^{(N)}=\lambda} q^{-\mathrm{volume}(\Lambda)} = s_\lambda(q^{1-N}, q^{2-N}, \dots, q^{-1}, 1), \tag{3.2}$$

其中 s_λ 是施尔对称多项式 $s_\lambda(z_1, \dots, z_N)$ =行列式$[z_i^{\lambda_j+N-j}]_{i,\ j=1}^N \prod_{1\le i<j\le N}(z_i - z_j)^{-1}$。（3.2）右侧也可以化简为乘积形式：

$$Z[\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}] = q^{|\lambda|(1-N)} \prod_{1\le i<j\le N} \frac{q^{\lambda_i - i} - q^{\lambda_j - j}}{q^{-i} - q^{-j}}.$$

概率测度 $\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}$ 可以双射地解释为一种分布，对应于深度为 N 且上边界由 λ确定的锯齿多边形上的菱形铺砌。定义

$$p_i^n = \Lambda_i^{(n)} - i, \qquad 1 \le i \le n \le N. \tag{3.3}$$

在 $\mathfrak{T}_N^{(\lambda)}$ 下，量 p_i^n 构成一个满足交错约束的随机整数数组 $\mathfrak{P} = \{p_i^n\}_{1\le i\le n\le N}$：

$$p_{i+1}^n < p_i^{n-1} \le p_i^n$$

（对所有 i 和 n 满足这些不等式可以写出的情形）。将每个 p_i^n 视为一块竖直菱形砖块中心的坐标后，我们可以用另外两种菱形以唯一的方式完成铺砌。由此得到锯齿多边形的相应铺砌，如图 4所示。

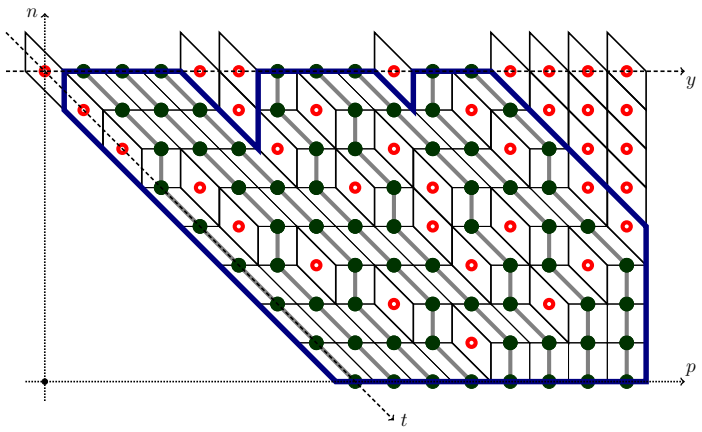


图 4：一个高度为 $N = 8$ 、顶行为$\lambda =$（16，16，16，16，14，11，11，8）的锯齿多边形菱形铺砌示例。粒子数组 $\mathfrak{P} = \{p_i^n\}$ 由放置在竖直菱形砖块中心的红色圆点组成，其坐标相对于（p，n）坐标系（带点线坐标轴）给出。

注 3.1。请注意，在锯齿多边形的菱形铺砌上，权重与 $q^{-\text{volume}}$ 成正比的测度 $\mathcal{T}_N^{(\lambda)}$ 不同于上文第 2.4 节所述的测度 $\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}$。特别是，在 $\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}$下的铺砌位于无限区域中，其权重与$q^{+\text{volume}}$成正比。下一节 3.2 将说明测度 $\mathcal{T}_N^{(\lambda)}$ （即 $N \to +\infty$ ）以及对 λ 的特殊选择如何导出 $\mathcal{M}_m^{(\vec{x})}$。

3.2 向随机游走的极限过渡

现在让我们将概率测度 $\mathcal{T}_N^{(\lambda)}$ 与定义 q-可交换随机游走Υ_m 联系起来，该随机游走不相交，见定义 2.5。注意，对于 $\lambda \in \mathbb{GT}_N$，有：

$$\mathcal{T}_N^{(\lambda)}\big(\Lambda^{(N-1)} = \mu\big) = \frac{q^{-|\mu|}\, Z[\mathcal{T}_{N-1}^{(\mu)}]}{Z[\mathcal{T}_N^{(\lambda)}]} = q^{(N-1)(|\lambda|-|\mu|)} \frac{s_\mu(1, q, \dots, q^{N-2})}{s_\lambda(1, q, \dots, q^{N-2}, q^{N-1})}.$$

事实上，第一个等式由 $q^{-\text{volume}}$ 概率权重得出，第二个等式则由（3.2）以及舒尔多项式的齐次性得出。

固定 $m \geq 1$ 和 $\vec{x}$，$\vec{y} \in \mathbb{W}_m$。令 $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ 和 $\mu \in \mathbb{GT}_{N-1}$ 依赖于 $\vec{x}$，$\vec{y}$，具体如下（下文均假设 N 足够大）：

$$\begin{aligned} \{\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_N - N\} &= \{0, 1, 2, \dots, N + m - 1\} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}, \\ \{\mu_1 - 1, \mu_2 - 2, \dots, \mu_{N-1} - (N-1)\} &= \{1, 2, \dots, N + m - 1\} \setminus \{y_1 + 1, \dots, y_m + 1\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这样的 λ 和 μ选择意味着我们从菱形铺砌转为避开某类菱形的不相交路径，见图4。此外，我们选择边界条件，使路径数量 m 在 N 增大时保持不变。

以下结果是 [Pet22第 3] 节中 $t = q$的一个特例：

命题 3.2. 采用上述记号，对于固定的 m 和 $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{W}_m$，有

$$\lim_{N \to +\infty} \mathcal{T}_N^{(\lambda)}\big(\Lambda^{(N-1)} = \mu\big) = \Upsilon_m(\vec{x}, \vec{y}),$$

其中 Υ_m 由 (2.6)给出。

命题 3.2 指出，图 4中不相交路径的极限分布与非相撞 q-可交换随机游走的轨迹分布Υ_m相同。图 4中，非相撞路径位于坐标系 (y, t)（带虚线坐标轴）中，并在 Υ_m 点 $y = t = 0$的任意有限邻域内收敛。在下文第 4 节中，我们利用这一极限关系写出随机游走 Υ_m的相关核。

4 核中的极限过渡

4.1 锯齿多边形的 q-分布菱形铺砌的相关核

我们先回顾 [Pet14] 关于测度 $\mathcal{T}_N^{(\lambda)}$ 在第 λ 3.1 节中所述的、顶行为 的锯齿多边形上菱形铺砌的相关核定理 4.1。根据

的结果 [Ken97]（另见 [Bor11，第 7]节 $\ell \geq 1$ 以及任意一组两两不同的（p_1、n_1）……，（p_ℓ、n_ℓ）$\in \mathbb{Z}^2$，该测度是一个行列式点过程，即我们有

$$\text{概率（随机数组 } \mathfrak{P} \text{ 包含所有 } (p_1,n_1)\dots,(p_\ell,n_\ell)) = \det\left[K_{\text{loz}}(p_i,n_i;p_j,n_j)\right]_{i,j=1}^{\ell}. \tag{4.1}$$

核 K_{loz} 在 [Pet14，定理 41] 中计算得出，并由以下双重围道积分公式给出：

$$\begin{aligned} K_{\text{loz}}(p_1,n_1;p_2,n_2) &= -\mathbf{1}_{n_2<n_1}\mathbf{1}_{p_2\leq p_1} q^{n_2(p_1-p_2)}\frac{(q^{p_1-p_2+1};q)_{n_1-n_2-1}}{(q;q)_{n_1-n_2-1}} \\ &+ \frac{(q^{N-1};q^{-1})_{N-n_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint \frac{dz\,dw}{w}\frac{q^{n_2(p_1-p_2)}z^{n_2}}{w-z} \\ &\times {}_2\phi_1(q^{-1},q^{n_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1})\frac{(zq^{1-p_2+p_1};q)_{N-n_2-1}}{(q;q)_{N-n_2-1}}\prod_{r=1}^{N}\frac{w-q^{\lambda_r-r-p_1}}{z-q^{\lambda_r-r-p_1}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里的点 (p_1,n_1)、$(p_2,n_2)\in\mathbb{Z}^2$ 满足 $1\leq n_1\leq N$，$1\leq n_2\leq N-1$。z和 w 积分路径均为逆时针方向且互不相交。z 轮廓线环绕$q^{p_2-p_1},q^{p_2-p_1+1},\dots,q^{\lambda_1-1-p_1}$，但不环绕 $q^{p_2-p_1-1}$，$q^{p_2-p_1-2},\dots$。w轮廓线足够大，环绕 0 和 z 轮廓线。最后，(4.2) 中的 ${}_2\phi_1$ 是如下给出的（在此情形下为终止的）Gauss$q$-超几何函数

$${}_2\phi_1(q^{-1},q^{n_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}) = \sum_{j=0}^{n_1-1}\frac{(q^{-1};q^{-1})_j(q^{n_1-1};q^{-1})_j}{(q^{N-1};q^{-1})_j}\frac{w^{-j}}{(q^{-1};q^{-1})_j}. \tag{4.3}$$

在本节余下部分中，我们考虑 $N\to+\infty$ 核的极限 K_{loz}，即导向非碰撞 q-可交换随机游走的情形（如第3.2节所述），并证明定理2.10。

4.2 重写核

固定 $t_1\geq 0$，$t_2>0$，并令 $n_1=N-t_1$，$n_2=N-t_2$（在本节余下部分中，我们假设 N 足够大）。在（4.2）中作如下积分变量代换：$\tilde{z}=zq^{p_1}$，$\tilde{w}=wq^{p_1}$，然后再改回 z，w。于是有

$$\begin{aligned} q^{N(p_2-p_1)}K_{\text{loz}}(p_1,N-t_1;p_2,N-t_2) &= -\mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2\leq p_1}q^{(-t_2)(p_1-p_2)}\frac{(q^{p_1-p_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}} \\ &+ \frac{(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint\frac{dz\,dw}{w}\frac{q^{(-t_2)(p_1-p_2)}z^{N-t_2}q^{-p_1(N-t_2)}}{w-z} \\ &\times {}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}q^{p_1})\frac{(zq^{1-p_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\prod_{r=1}^{N}\frac{w-q^{\lambda_r-r}}{z-q^{\lambda_r-r}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

z轮廓仅包围 q^{p_2}，q^{p_2+1}，q^{p_2+2}，……，不包围被积函数的其他 z极点；而 w 轮廓环绕 0 和 z 轮廓。

因子 $q^{N(p_2-p_1)}$ 是相关核的所谓“规范变换”，它不会改变（4.1）中的行列式，因而保持行列式点过程不变。一般而言，

所谓规范变换，是指将核 $K(p_1,\ t_1;\ p_2,\ t_2)$ 替换为 $f_{(p_1,\ t_1)}f_{(p_2,\ t_2)}K(p_1,\ t_1;\ p_2,\ t_2)$，其中 f处处不为零。

接下来，我们利用如下事实：顶行 λ 依赖于 N，如（3.4）所示。这里 $\vec{x}\in\mathbb{W}_m$是非碰撞 q-可交换随机游走的固定初始构型 Υ_m。关系式（3.4）使我们能够将（4.4）中的被积函数里关于 r 的最后一个乘积表示为 x_j的形式。经过必要的化简，我们得到

$$\begin{aligned}q^{N(p_2-p_1)}K_{\mathrm{loz}}(p_1,N-t_1;p_2,N-t_2)&=-\mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2\le p_1}q^{(-t_2)(p_1-p_2)}\frac{(q^{p_1-p_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}\\&+\frac{(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint\frac{dz\,dw}{w}\frac{z^{-t_2}q^{p_2t_2}}{w-z}q^{-Np_1}w^N{}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}q^{p_1})\\&\times\frac{(zq^{1-p_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\prod_{j=0}^{N+m-1}\frac{1-q^j/w}{1-q^j/z}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

（4.5）中的积分路径与（4.4）中的相同。

4.3 交换积分路径

现在，我们将 w 轮廓移到 z 轮廓内部（见（4.5））。积分值保持不变，但我们需要加上围绕原点的 w 轮廓线上的留数 $\mathrm{Res}_{z=w}$ 的相反数的围道积分。该留数等于

$$\begin{aligned}-\mathrm{Res}_{z=w}=&\frac{(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}}{2\pi\mathbf{i}}\frac{1}{w}w^{-t_2}q^{p_2t_2}\\&\times q^{-Np_1}w^N{}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}q^{p_1})\frac{(wq^{1-p_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

引理 4.1。 在 w 上对 (4.6) 沿原点附近一条小轮廓线积分，结果等于

$$\mathbf{1}_{t_2>t_1}q^{(-t_2)(p_1-p_2)}\frac{(q^{p_1-p_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}.$$

证明。 注意，${}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};\ q^{N-1}\mid q^{-1};\ w^{-1}q^{p_1})$ 以及 $(wq^{1-p_2};\ q)_{t_2-1}$ 都是关于 w的 Laurent 多项式。因此，沿原点附近一条小轮廓线对（4.6）积分，实际上就是取出由 $1/w$给出的系数。

根据 q--二项式定理，我们可以写成

$$\begin{aligned}(wq^{1-p_2};q)_{t_2-1}&=(w^{-1}q^{p_2-t_2+1};q)_{t_2-1}(-wq^{1-p_2})^{t_2-1}q^{\binom{t_2-1}{2}}\\&=(-wq^{1-p_2})^{t_2-1}q^{\binom{t_2-1}{2}}\sum_{j=0}^{t_2-1}(-1)^jq^{(p_2-t_2+1)j}q^{\binom{j}{2}}\frac{(q;q)_{t_2-1}}{(q;q)_j(q;q)_{t_2-1-j}}w^{-j}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

利用公式（4.3），对于 ${}_2\phi_1$ 和（4.7），这两个 Laurent 多项式的乘积具有如下形式

$$\sum_{j=0}^{N-t_1-1}q^{p_1j}\frac{(q^{N-t_1-1};q^{-1})_j}{(q^{N-1};q^{-1})_j}w^{-j}\times\sum_{j=0}^{t_2-1}(-1)^jq^{(p_2-t_2+1)j}q^{\binom{j}{2}}\frac{(q;q)_{t_2-1}}{(q;q)_j(q;q)_{t_2-1-j}}w^{-j}=\sum_{j=0}^{N+t_2-t_1-2}\mathsf{d}_jw^{-j}.$$

摘自前言　　在（4.6）中，我们看到需要计算以下和 d_{N-1} 其形式为

$$\mathsf{d}_{N-1}=\sum_{m=0}^{N-1}q^{p_1(N-1-m)}q^{\binom{m}{2}}(-1)^m q^{(p_2-t_2+1)m}\frac{(q^{N-t_1-1};q^{-1})_{N-1-m}}{(q^{N-1};q^{-1})_{N-1-m}}\frac{(q;q)_{t_2-1}}{(q;q)_m(q;q)_{t_2-1-m}}.$$

注意到求和中的第 m 项在 $m>t_2$ 或 $m<t_1$ 时为零，因此求和范围为 $\mathbf{1}_{t_2>t_1}\sum_{m=t_1}^{t_2-1}$。重新排列各项并重新标记 $k=m-t_1$ 后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{d}_{N-1}=\mathbf{1}_{t_2>t_1}(-1)^{t_1}\frac{(q^{t_2-t_1},q)_{t_1}}{(q^{N-t_1},q)_{t_1}}q^{p_1(N-1-t_1)+\binom{t_1}{2}+(p_2-t_2+1)t_1}\\ \times\sum_{k=0}^{t_2-t_1-1}q^{(t_1-p_1+p_2-t_2+1)k}q^{\binom{k}{2}}(-1)^k\frac{(q;q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_k(q;q)_{t_2-t_1-1-k}}.\end{aligned}$$

应用 q 项式定理，我们可以将此和化简为:

$$\mathsf{d}_{N-1}=\mathbf{1}_{t_2>t_1}(-1)^{t_1}\frac{(q^{t_2-t_1};q)_{t_1}}{(q^{N-t_1},q)_{t_1}}q^{p_1(N-1-t_1)+\binom{t}{2}+(p_2-t_2+1)t_1}(q^{t_1-p_1+p_2-t_2+1};q)_{t_2-t_1-1}.$$

综合上述计算中的所有因子，证明即告完成。 □

根据引理4.1，核可写成

$$\begin{aligned}q^{N(p_2-p_1)}K_{\mathrm{loz}}(p_1,N-t_1;p_2,N-t_2)=\mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2>p_1}q^{(-t_2)(p_1-p_2)}\frac{(q^{p_1-p_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}\\ +\frac{(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint\frac{dz\,dw}{w}\frac{z^{-t_2}q^{p_2t_2}}{w-z}q^{-Np_1}w^N{}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}q^{p_1})\\ \times\frac{(zq^{1-p_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\prod_{j=0}^{N+m-1}\frac{1-q^j/w}{1-q^j/z}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

（4.8）中的积分路径发生了变化，即 w 轮廓是围绕 0 的任意小圆，而 z 轮廓围绕 q^{p_2}、q^{p_2+1}、q^{p_2+2}，.....、0、 w 轮廓，并且不 encircles 其他 z 被积函数的极点。在（4.8）中，第一项是引理4.1 中的留数与前一个表达式（4.5）中的第一项的组合。

4.4 q-超几何函数的极限

交换 z 和 w 轮廓线后， $|w|$ 可以任意缩小。这使得我们能够在 N 的（4.8）中，被积函数包含 q-超几何函数的部分取 ${}_2\phi_1$极限（注意，这本质上是被积函数中对 N 的唯一依赖）。记

$$Q_N(w):=(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}q^{-Np_1}w^N{}_2\phi_1(q^{-1},q^{N-t_1-1};q^{N-1}\mid q^{-1};w^{-1}q^{p_1}).$$

Then

$$\begin{aligned}Q_N(w)&=(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}q^{-Np_1}w^N\sum_{j=0}^{N-t_1-1}\frac{(q^{N-t_1-1};q^{-1})_j}{(q^{N-1};q^{-1})_j}w^{-j}q^{jp_1}\\ &=(q^{N-1};q^{-1})_{t_1}\sum_{k=0}^{N-t_1-1}\frac{(q^{N-t_1-1};q^{-1})_{N-t_1-1-k}}{(q^{N-1};q^{-1})_{N-t_1-1-k}}(w/q^{p_1})^{t_1+1+k},\end{aligned}$$

其中我们使用了（4.3），并在最后一行将求和指标反转为 $k = N - t_1 - 1 - j$。我们有

$$\lim_{N\to+\infty}(q^{N-1};q^{-1})_{t_1} = 1.$$

接下来，在求和中的每个第 k 项中，我们有（固定 k）：

$$\begin{aligned}&\frac{(q^{N-t_1-1};q^{-1})_{N-t_1-1-k}}{(q^{N-1};q^{-1})_{N-t_1-1-k}}(w/q^{p_1})^{t_1+1+k}\\&\quad=(w/q^{p_1})^{t_1+1+k}\prod_{i=0}^{N-t_1-k-2}\frac{1-q^{k+i+1}}{1-q^{t_1+k+i+1}}\to(w/q^{p_1})^{t_1+1+k}\prod_{i=0}^{t_1-1}(1-q^{k+i+1}),\qquad N\to+\infty,\end{aligned}$$

并且由于 $|w|$ 很小，收敛关于 k 和 w 一致。因此，我们有 e

$$\lim_{N\to+\infty}Q_N(w)=\sum_{k=0}^{\infty}(w/q^{p_1})^{t_1+1+k}(q^{k+1};q)_{t_1},\tag{4.9}$$

当 $|w|$ 很小时，关于 w 一致。

引理 4.2。右侧的和 (4.9) 等于

$$(w/q^{p_1})^{t_1+1}\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-p_1};q)_{t_1+1}}.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(wq^{-p_1})^{t_1+1+k}(q^{k+1},q)_{t_1}&=(wq^{-p_1})^{t_1+1}(q;q)_{t_1}\sum_{k=0}^{\infty}(wq^{-p_1})^{k}\frac{(q,q)_{k+t_1}}{(q;q)_k(q;q)_{t_1}}\\&=(wq^{-p_1})^{t_1+1}\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-p_1};q)_{t_1+1}},\end{aligned}$$

这里用到了 q 二项式定理，并且该级数收敛，因为 $|w|$ 很小。 □

结合核的公式（4.8） K_{loz} 以及本节4.4的结果，我们得到 $N\to+\infty$ 核的极限 K_{loz}。记作

$$\begin{aligned}K^{\lim}_{\mathrm{loz}}(p_1,t_1;p_2,t_2):=\mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2>p_1}&\frac{q^{-t_2(p_1-p_2)}(q^{p_1-p_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}+\frac{q^{p_2t_2-p_1t_1-p_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint dz\,dw\,\frac{z^{-t_2}w^{t_1}}{w-z}\\&\times\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-p_1};q)_{t_1+1}}\frac{(zq^{1-p_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{(w^{-1};q)_\infty}{(z^{-1};q)_\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w},\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中，w 轮廓是以 0 为中心的任意小圆，而 z 轮廓环绕q^{p_2}，q^{p_2+1}，q^{p_2+2}，.....、0 和 w 轮廓，并且不包围被积函数的其他 z 极点。

下一个命题可直接由前面的计算得出。

命题 4.3。对于任意固定的 $t_1\ge 0$, $t_2>0$, $p_1,p_2\in\mathbb{Z}$，我们有

$$\lim_{N\to+\infty}q^{N(p_2-p_1)}K_{\mathrm{loz}}(p_1,N-t_1;p_2,N-t_2)=K^{\lim}_{\mathrm{loz}}(p_1,t_1;p_2,t_2).$$

4.5 粒子-空穴对合与时间平移

现在我们可以从命题的极限过渡中推导出定理2.10 4.3。定义

$$K_{\text{walks}}(y_1,t_1;y_2,t_2) := \mathbf{1}_{t_1=t_2}\mathbf{1}_{y_1=y_2} - q^{t_1(t_1+y_1)-t_2(t_2+y_2)}K^{\lim}_{\text{loz}}(y_1+t_1,t_1;y_2+t_2,t_2). \tag{4.11}$$

注意，为了从 K_{walks} 得到 $K^{\lim}_{\text{loz}}$（见（4.11）），我们进行了两次变换：

• 首先，由非碰撞随机游走定义的点过程（由图4中的实心点构成）是由粒子 p_i^n定义的过程的补集。因此，根据 Kerov 补集原理（例如参见 [BOO00，附录 A。3]），游走的核等于单位核减去菱形的核。

• 其次，将变量 $p_i = y_i + t_i$、 $i = 1$、2 平移，对应于从坐标系（p、 n）（其中 $n = N - t$）变换到坐标系（y、 t），见图 4。

最后， $K^{\lim}_{\text{loz}}$ 在（4.11）中的前置因子只是一个规范变换，不会改变行列式点过程。很容易验证，所得的核 K_{walks} （4.11）与（2.14）相同。至此，定理 2.10的证明完成。

5 渐近分析

在本节中，我们对过程 K_{walks} (2.14) 的相关核 Υ_m 在 $q \to 1$, $m \to \infty$的情形下进行体区渐近分析，其中初始构型 $\vec{x}$ 由有限个密集簇构成。出于技术上的便利，我们作出后一假设；例如，参见 Duse–Metcalfe [DM15], [DM20]，其中关于具有更一般边界的均匀随机菱形铺砌给出了渐近结果。利用最速下降法，我们证明定理2.12，从而得到 Υ_m轨迹的极限形状，以及路径的普适局部涨落；这些涨落由 Okounkov–Reshetikhin 引入的不完全贝塔核所刻画[OR03]。后者是 Borodin–Okounkov–Olshanski 引入的离散正弦核的二维扩展 [BOO00]。

5.1 极限区域

The l我们考虑的核的极限区域为 K_{walks}（p_1， t_1；p_2， t_2）（2.14）如下：

$$m \to +\infty; \qquad q = e^{-\gamma/m} \nearrow 1; \qquad t_2 = \lfloor m\tau \rfloor, \quad t_1 = t_2 + \Delta t; \qquad p_2 = \lfloor m\rho \rfloor, \quad p_1 = p_2 + \Delta p. \tag{5.1}$$

这里，$\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$, $\gamma > 0$以及量 $\Delta t = t_1 - t_2, \Delta p = p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$均为固定值。固定差值 Δt, Δp 的情形称为体极限，它描述全局观测点 $(\tau, \rho) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$周围的局部关联。最后，我们假设初始构型$\vec{x} \in \mathbb{W}_m$ 按如下方式缩放：

$$x_i = \lfloor m\, g\,(i/m) \rfloor, \quad 1 \leq i \leq m; \qquad g(u) = \sum_{i=1}^{L} (u + C_i)\mathbf{1}_{u \in [a_i, a_{i+1})}, \tag{5.2}$$

其中 $L \geq 1$ 固定（这是 $\vec{x}$ 中密集堆积粒子簇的数量），并且

$$0 < C_1 < C_2 < \ldots < C_L, \qquad 0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{L+1} = 1 \tag{5.3}$$

是簇参数，而 $g(u)$ 是弱递增的，其导数为 0 或 1。

我们采用 [Oko02第 3]节中概述的标准最速下降法。为此，我们首先将二重积分中的被积函数 $K_{\text{walks}}(p_1, t_1; p_2, t_2)$（2.14）重写为

$$\begin{aligned}
&-\frac{q^{-t_1-p_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\frac{z^{-t_2}w^{t_1}}{w-z}\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-p_1-t_1};q)_{t_1+1}}\frac{(zq^{1-p_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{(w^{-1};q)_\infty}{(z^{-1};q)_\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w}\\
&=-\frac{q^{-t_1-p_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\frac{(q;q)_{t_1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{1}{(w-z)(1-zq^{-p_2})(1-zq^{-p_2-t_2})}\exp\left\{m\left(S_m(w;t_1,p_1)-S_m(z;t_2,p_2)\right)\right\},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_m(w;t,p) \coloneqq \frac{t}{m}\log w - \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{t}\log(1-wq^{-p-t+i})\\
+\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{\infty}\log(1-w^{-1}q^{i})-\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\log(1-w^{-1}q^{x_r}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

此处，对数的分支可以任意选取，只要 S_m 在属于复上半平面的 w 中全纯即可。事实上，在 $S_m(w;t_1,p_1)$ 和 $S_m(z;t_2,p_2)$ 中采用相同的分支，都会使被积函数指数中的符号相同。

利用（5.1）–（5.2），我们定义函数 S_m 的极限形式：

$$\begin{aligned}
S(w;\tau,\rho) \coloneqq \tau\log w - \int_0^{\tau}\log\left(1-we^{\gamma(\tau+\rho-u)}\right)du\\
+\int_0^{\infty}\log\left(1-w^{-1}e^{-\gamma u}\right)du-\int_0^{1}\log\left(1-w^{-1}e^{-\gamma g(u)}\right)du.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

引理 5.1。当 $m \to +\infty$ 时，我们有 $S_m(w;\lfloor m\tau\rfloor,\lfloor m\rho\rfloor) = S(w;\tau,\rho) + O(m^{-1})$，且对于 w 以及分别属于 $\{w\colon \text{虚部 } w>0\}$ 和 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 的紧子集的 (τ,ρ)，上述结论一致成立。

证明。这是由（5.4）中的黎曼和收敛到（5.5）中的相应积分得到的，因为被积函数是分段 C^1 函数，定义在 u 中，且其范数在 w、τ、ρ 分别属于各自定义域的紧子集时一致有界。

□

（5.5）中的积分可以用二重对数函数表示，该函数具有以下级数表示和积分表示

$$\mathrm{Li}_2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^k}{k^2} = -\eta\int_0^{\infty}\log\left(1-\xi e^{-\eta u}\right)du. \tag{5.6}$$

级数在 $|\xi|<1$ 时收敛，而积分表示（对任意 $\eta>0$ 均有效，但我们主要将其用于 $\eta=\gamma$）取决于对数的某个分支。例如，我们可以选择 $\mathrm{Li}_2(\xi)$ 的一个分支，使其割线位于 $\xi\in\mathbb{R}_{\geq 1}$。我们有

$$\mathrm{Li}_2'(\xi) = -\frac{\log(1-\xi)}{\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{Li}_2(\xi) = \frac{1}{1-\xi}. \tag{5.7}$$

使用此记号并利用（5.2），我们有

$$S(w;\tau,\rho) = \tau \log w - \gamma^{-1}\mathrm{Li}_2(we^{\gamma\rho}) + \gamma^{-1}\mathrm{Li}_2\big(we^{\gamma(\rho+\tau)}\big) \\ - \gamma^{-1}\mathrm{Li}_2(w^{-1}) + \gamma^{-1}\sum_{i=1}^{L}\Big[\mathrm{Li}_2\big(w^{-1}e^{-\gamma(a_i+C_i)}\big) - \mathrm{Li}_2\big(w^{-1}e^{-\gamma(a_{i+1}+C_i)}\big)\Big]. \tag{5.8}$$

5.2 临界点与冻结边界

我们来统计 $S(w;\ \tau,\ \rho)$ 在复上半平面中的临界点。回忆一下，根据定义，若 w 是临界点，则 $S'(w;\ \tau,\ \rho) = 0$，其中导数是对 w 求的。观察 $e^{\gamma w S'(w\ ;\ \tau,\ \rho)}$，可知临界点必须满足以下代数方程：

$$\frac{we^{\gamma(\tau+1)}}{w-1}\cdot\frac{we^{\gamma\rho}-1}{we^{\gamma(\rho+\tau)}-1}\prod_{i=1}^{L}\frac{we^{\gamma(a_i+C_i)}-1}{we^{\gamma(a_{i+1}+C_i)}-1} = 1. \tag{5.9}$$

引理 5.2。对于任意 $\tau,\ \rho > 0$，方程 (5.9) 在复上半平面 w 中至多有一个非实根。

我们将上半平面中的这个根记为 $w_c = w_c(\tau,\ \rho)$。

引理 5.2 的证明。设 $p_{num}(w)$ 和 $p_{den}(w)$ 分别为 (5.9) 左端分母和分子中的多项式。首先，考虑 $p_{num}(w)$ 和 $p_{den}(w)$ 的图像与 $w \in \mathbb{R}$ 的交点，来统计 (5.9) 的实根。这两个多项式p_{num} 和 p_{den} 的次数均为 $L+2$，且只有实根。由于它们的最高次项系数同号，我们可以并且将假设 $p_{num}(-\infty) = p_{den}(-\infty) = +\infty$。

$p_{num}(w)$ 的根为 0、$e^{-\gamma\rho}$和 $w_i^{num}:= e^{-\gamma(a_i+C_i)}$，$1 \le i \le L$。类似地，$p_{den}(w)$ 的根为 1、$e^{-\gamma(\rho+\tau)}$和 $w_i^{den}:= e^{-\gamma(a_{i+1}+C_i)}$，$1 \le i \le L$。根据（5.2），这些根交错排列如下

$$0 \le w_{den}^{i} < w_{num}^{i} < w_{den}^{i-1} \le 1, \qquad 2 \le i \le L. \tag{5.10}$$

我们先讨论两个示例，说明如何计算根的个数。先来看 $\rho > (a_{L+1}+C_L)$。那么，$p_{den}(w)$ 最左边的两个根是 0 和 $e^{-\rho}$，而 $p_{num}(w)$ 最左边的两个根是 $e^{-\gamma(\rho+\tau)}$ 和 $e^{-\gamma(a_{L+1}+C_L)}$。此外，$0 < e^{-\gamma(\rho+\tau)} < e^{-\rho} < e^{-\gamma(a_{L+1}+C_L)}$。我们看到，在 p_{num} 的各根之间的每一条 $L+1$ 线段上，p_{num} 的图像与 p_{den} 的图像相交。通过这种计数，方程（5.9）至少有 $L+1$ 个实数解。由于该方程等价于一个次数至多为 $L+2$ 的多项式方程，因此（5.9）没有复数解。图5展示了一个示例。

现在让我们减小 ρ，同时保持 $\rho+\tau$ 不变。某个时刻，我们会得到一个重根 $e^{-\gamma\rho} = e^{-\gamma(a_{L+1}+C_L)}$；继续减小 ρ 后，交错关系便会被破坏。此时，在 $L-1$ 或 $L+1$ 的图像交点处，可能会有根（按重数计），参见图 6 以作说明。当有 $L-1$ 个交点时，(5.9) 可能有一对复共轭非实根。可见，这样的根对至多只有一对。

现在我们来描述 $\rho < (a_{L+1}+C_L)$ 的情形。回顾一下，$e^{-\gamma(a_{L+1}+C_L)} \le e^{-\gamma\rho} \le 1$，因此存在某个 $1 \le i \le L$ 使得 $w_i^{den} \le e^{-\gamma\rho} \le w_{i-1}^{den}$，为方便起见，我们令 $w_0^{den} = 1$。由 (5.10) 还可得 $w_i^{den} < w_i^{num} < w_{i-1}^{den}$，因此分子的两个根为 w_i^{num}

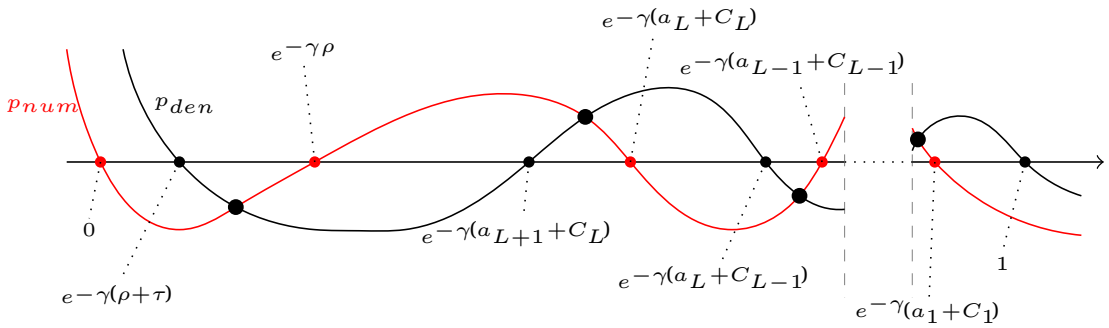


图5： ρ较大时， p_{num} 和 p_{den} 的图像。

且 $e^{-\gamma\rho}$ 位于分母的两个根之间。将 w_i^{num}与 $e^{-\gamma\rho}$之间的区间记为 I，则 $[0,1]=[0,\min(w_i^{num},e^{-\gamma\rho})]\cup I\cup[\max(w_i^{num},e^{-\gamma\rho}),1]$。请注意，当 p_{num} 存在重根时，这些区间中有些可能为空。

若 $e^{-\gamma(\rho+\tau)}\in I$，则交错关系恢复，并且我们得到类似于第一种情形的结构，如图5所示。图像 p_{num}和 p_{den}相交 $L+1$次，因此至少有 $L+1$个实临界点，故不存在复根。

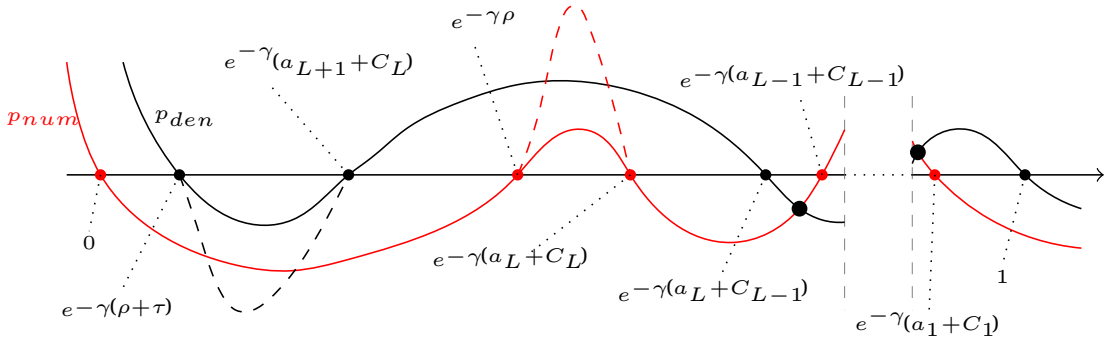


图6： $\rho+\tau>a_{L+1}+c_L>\rho>a_L+c_L$时 p_{num}和 p_{den}的图像。可能的虚线图像对应于复根不存在的情形，而实线图像对应于上半平面中恰有一个复根的情形。

另一方面，如果 $e^{-\gamma(\rho+\tau)}\notin I$，则该构型与图 6类似，并且我们有$L-1$ 或 $L+1$ 个交点，因此至多只有一个复根可能位于上半平面。这就完成了证明。

□

定义 5.3。 令 $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ 为满足以下条件的点对 (τ, ρ) 的开集： $S(w; \tau, \rho)$ 由 (5.5)、(5.8) 定义，且有一个非实临界点 w_c 位于上半平面。我们称 $\mathcal{D}$ 为液态区域，其边界曲线 $\partial\mathcal{D}$ 为 冻结边界。

下面我们来求出冻结边界的参数化 $\partial\mathcal{D}$。由于方程（5.9）的系数为实数，当（τ， ρ）趋近于 $\partial\mathcal{D}$时，相应的临界点 w_c 会趋近于它的复共轭w_c。在 $\partial\mathcal{D}$ 处，方程（5.9）的这两个根合并，因此冻结边界就是方程（5.9）的判别式曲线。因此，我们可以取 $w_c \in \mathbb{R}$ 作为这条曲线的参数 $\tau = \tau（w_c）$， $\rho = \rho（w_c）$。

记

$$F(w) := \frac{w}{w-1} \prod_{i=1}^{L} \frac{w e^{\gamma(a_i + C_i)} - 1}{w e^{\gamma(a_{i+1} + C_i)} - 1}.$$

于是，方程（5.9关于重根的两个方程给出了 $\partial\mathcal{D}$ 在指数坐标（$e^{\gamma\tau}$， $e^{\gamma\rho}$）下的有理参数化：

$$e^{\gamma\tau(w)} = \frac{(wF(w))' - e^{-\gamma}}{wF'(w) - F(w) + e^{\gamma}F^2(w)}, \qquad e^{\gamma\rho(w)} = \frac{e^{\gamma}F'(w)}{e^{\gamma}(wF(w))' - 1}, \qquad w \in \mathbb{R}. \tag{5.11}$$

我们利用这一显式参数化绘制了第3 节中图2.6所示的冻结边界。

5.3 对 S（w； τ， ρ）的分析

在本小节中，我们假设（τ， ρ） $\in \mathcal{D}$，并考察从临界点 w_c出发的最速下降路径 Im S（w； τ， ρ）$=$和 Im S（w_c； τ， ρ）的行为。在下一节5.4中，我们将利用这些信息，将（ K_{walks} （2.14）中的原始积分路径变形为最速下降路径。这将得到定理2.12。

首先，我们考察 Im $S(w;\ \tau,\ \rho)$ 接近实轴时的行为，即 $w = v + \mathbf{i}\varepsilon$，$v \in \mathbb{R}$，且 $\varepsilon > 0$ 足够小且固定。在 $\log w$ 和 $\mathrm{Li}_2(w)$ 出现在（5.8）中时，我们取对数的标准分支，其支割线沿负实轴。利用（5.6）中的积分表示，我们看到 $\mathrm{Li}_2(\xi)$ 的支割线沿着 $[1, +\infty)$。

引理 5.4。 对于充分小的固定 $\varepsilon > 0$，函数 $v \mapsto \mathrm{Im}\ S(v + \mathbf{i}\varepsilon;\ \tau, \rho), v \in \mathbb{R}$ 的图像与任意水平线至多有四个交点。若存在四个交点，则其中最左侧的交点位于零点左侧的一个小邻域内，并且当 $\varepsilon \to 0$时趋于0 。

函数图像参见图 7 。

*Proo*引理*5.4*中的函数。观察代入（5.8）中各函数的如下行为 ：

- 的图像

$$v \mapsto \mathrm{Im}(\tau \log(v + \mathbf{i}\varepsilon)) = \tau \tan^{-1}(\varepsilon/v) + \pi\tau \mathbf{1}_{v<0}$$

位于阶跃函数 $v \mapsto \pi\tau\mathbf{1}_{v<0}$ 的图像的 $O(\varepsilon)$ 邻域内，并附加从 $(0, \pi)$ 到 $(0,0)$ 的竖直线段。

- $v \mapsto \mathrm{Im}\big(\mathrm{Li}_2(v+\mathbf{i}\varepsilon)\big)$ 的图像位于函数$\chi_+(v) := \pi \log v \cdot \mathbf{1}_{v>1}$的图像的 $O(\varepsilon)$ 邻域内。这是因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\big(\mathrm{Li}_2(v+\mathbf{i}\varepsilon)\big) &= -\int_0^\infty \mathrm{Arg}\left(1-(v+\mathbf{i}\varepsilon)e^{-u}\right) du \\ &= \pi \int_0^\infty \mathbf{1}_{1-ve^{-u}<0}\, du + O(\varepsilon) \\ &= \pi \log v \cdot \mathbf{1}_{v>1} + O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{5.12}$$

- 函数 $v \mapsto$ 虚部$\big(\mathrm{Li}_2(1/(v+\mathbf{i}\varepsilon))\big)$ 的图像位于 $O(\varepsilon)$ 邻域内，该邻域围绕以下函数的图像：$\chi_-(v) := \pi \log v \cdot \mathbf{1}_{0<v<1}$ 并附加一条从 (0,0) 到 $(0,-\infty)$ 的垂直线。此结论可通过类似于展开式 (5.12) 的方法得到。

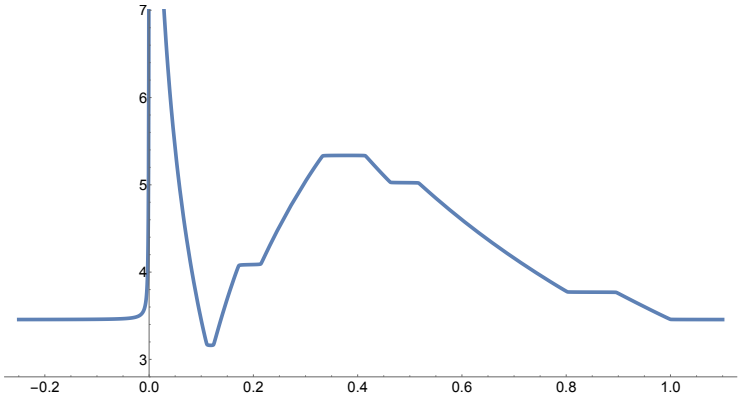


图 7：当 ε较小时，$v \mapsto$虚部 $S(v+\mathbf{i}\varepsilon;\, \tau, \rho)$ 的图像。对任意固定的 $\varepsilon > 0$，该函数均连续。其最大值位于零附近，且阶为 $O(|\log \varepsilon|)$。

因此，当 ε较小时，$v \mapsto$虚部 $S(v+\mathbf{i}\varepsilon;\, \tau, \rho)$ 的图像位于以下函数图像的 $O(\varepsilon)$ 邻域内：

$$\begin{aligned}S_{\mathbb{R}}(v;\tau,\rho) := \pi\tau \mathbf{1}_{v<0} &- \gamma^{-1}\chi_+(ve^{\gamma\rho}) + \gamma^{-1}\chi_+(ve^{\gamma(\rho+\tau)}) \\ &- \gamma^{-1}\chi_-(v) + \gamma^{-1}\sum_{i=1}^{L}\left[\chi_-(ve^{\gamma(a_i+C_i)}) - \chi_-(ve^{\gamma(a_{i+1}+C_i)})\right].\end{aligned}$$

我们看到，对于 $v < 0$以及充分大的 v，函数 $S_{\mathbb{R}}$等于 $\pi\tau$。接下来，函数 $S_{\mathbb{R}}$ 关于 $\log v$是分段线性的。由于 a_i 和 C_i (5.3) 的排序，容易看出，当 $S_{\mathbb{R}}(v;\, \tau, \rho)$ 时，$v > 0$ 首先随 v单调不增，随后可能单调不减 v，最后再次随 v 单调不减，直至稳定在值 $\pi\tau$。

此外，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，前极限函数 $v \mapsto$虚部 $S(v+\mathbf{i}\varepsilon;\, \tau, \rho)$ 都不是常数。因此我们可以看到，前极限函数的图像与任意水平线至多相交四次：在 $v = 0$ 左侧的一个小邻域内至多相交一次，在 $v > 0$ 处至多相交三次。当 ε 很小时，$v \mapsto$虚部 $S(v+\mathbf{i}\varepsilon;\, \tau, \rho)$ 的图像会变得越来越陡，因此我们可以看到，与一条水平线相交的最左点会在 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 0。至此证明完成。 □

现在我们来考察当 $|w|$ 很大时，虚部 $S(w;\tau,\rho)$ 的行为。

引理 5.5。我们有

$$\lim_{R\to+\infty}\operatorname{Im}S(Re^{\mathbf{i}\theta};\tau,\rho)=\pi\tau,$$

关于 $\theta\in[0,\pi]$ 一致成立。

证明。显然，我们有虚部$(\log Re^{\mathbf{i}\theta})=\theta$。此外，对于 $|w|\to+\infty$，$\mathrm{Li}_2(w^{-1})\to 0$，因为 Li_2 在 0 处连续。要完成证明，还需证明

$$\operatorname{Im}\big(\mathrm{Li}_2(Re^{\mathbf{i}\theta})\big)\sim(\pi-\theta)\log R,\qquad R\to+\infty,$$

关于 $\theta\in[0,\pi]$ 一致成立。我们有 [数字图书馆数学函数，（25.12.4）]

$$\operatorname{Im}\big(\mathrm{Li}_2(Re^{\mathbf{i}\theta})\big)=-\operatorname{Im}\big(\mathrm{Li}_2(R^{-1}e^{-\mathbf{i}\theta})\big)-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\log(-Re^{\mathbf{i}\theta})\Big)^2.$$

当 $R\to+\infty$ 时，第一项趋于零；对于第二项，我们有

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\log(-Re^{\mathbf{i}\theta})\Big)^2=-\operatorname{Re}\Big(\log(-Re^{\mathbf{i}\theta})\Big)\operatorname{Im}\Big(\log(-Re^{\mathbf{i}\theta})\Big)=-\log R\cdot(\theta-\pi),$$

由此即得。 □

5.4 轮廓变形与收敛到不完全贝塔核

引理 5.4 和 5.5 表明，当 (τ,ρ) 位于液态区域 $\mathcal{D}$时，从临界点 w_c（位于上半平面）出发的四条半轮廓线均终止于实轴上。我们将这些点记为

$$u_-^z=0<u_-^w<u_+^z<u_+^w. \tag{5.13}$$

我们将最左边的点取为 0，作为引理 $\varepsilon\to 0$ 5.4 中最左边交点的极限。此外，由引理 5.4 的证明可知

$$u_-^w<e^{-\gamma(\tau+\rho)}<u_+^z<e^{-\gamma\rho}<u_+^w. \tag{5.14}$$

我们将两个闭合的正向轮廓 $\operatorname{Im}S(w;\tau,\rho)=\operatorname{Im}S(w_c;\tau,\rho)$ 记为 γ_z,γ_w。二者都经过 w_c 和 w_c，轮廓 γ_z 经过 u_-^z,u_+^z，而 γ_w 经过 u_-^w,u_+^w。

引理 5.6. 我们有 $\operatorname{Re}S(u_\pm^z;\tau,\rho)>\operatorname{Re}S(w_c;\tau,\rho)$ 以及 $\operatorname{Re}S(u_\pm^w;\tau,\rho)<\operatorname{Re}S(w_c;\tau,\rho)$。

这些不等式为我们关于点（5.13）以及轮廓线 γ_z，γ_w 的记号提供了依据。后者将成为相关核中的新积分轮廓。

引理 5.6 的证明。显然，在轮廓线 $\operatorname{Im}S(w;\tau,\rho)=\operatorname{Im}S(w_c;\tau,\rho)$ 上（这些轮廓线分别是最陡下降/上升轮廓线），S 的实部是单调的。此外，在从临界点 w_c（它是 $\operatorname{Re}S$的一个鞍点）出发的四条半轮廓线上，$\operatorname{Re}S$ 的增减行为交替出现。因此，只要证明$+\infty=\operatorname{Re}S(u_-^z;\tau,\rho)>\operatorname{Re}S(w_c;\tau,\rho)$，结论便可得出。也就是说，我们要证明 $\operatorname{Re}S(w,\tau,\rho)\to+\infty$ 当 $|w|\to 0$时。

使用 [DLMF, (25.12.4)] 与引理 5.5的证明类似，对于足够小的 $|w|$：

$$\mathrm{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w^{-1})\big) = -\,\mathrm{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w)\big) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\big(\log(-w^{-1})\big)^2$$

对于 $|w| \to 0$，右侧的第一项趋于零，而对于最后一项，我们有

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\big(\log(-w^{-1})\big)^2 = -\frac{1}{2}(\log|w|)^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{Arg}(-w^{-1}))^2$$

该论证有界，因此由（5.8）可知，$\mathrm{Re}\ S(w;\tau,\rho)$ 在 $|w|$ 趋于零时的渐近行为为

$$-\tau\log(|w|^{-1}) + \frac{\gamma^{-1}}{2}(\log|w|)^2 + \frac{\gamma^{-1}}{2}\sum_{i=1}^{L}\Big(\big(\log|we^{\gamma(a_{i+1}+C_i)}|\big)^2 - \big(\log|we^{\gamma(a_i+C_i)}|\big)^2\Big) + \mathrm{const.}$$

项 $-\tau\log(|w|^{-1})$ 的阶低于对数平方的阶，并且很容易看出，后者的总贡献为 $+\infty$。证明完毕。□

回顾核 K_{walks} (2.14) 中原有的积分路径，为方便起见，我们在此重述：

$$K_{\mathrm{walks}}(p_1,t_1;p_2,t_2) = \mathbf{1}_{t_1=t_2}\mathbf{1}_{p_1=p_2} - \mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2+t_2>p_1+t_1}\frac{q^{(t_1-t_2)(p_1+t_1)}(q^{p_1-p_2+t_1-t_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}}$$
$$-\frac{q^{-t_1-p_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oiint dz\,dw\,\frac{z^{-t_2}w^{t_1}}{w-z}\frac{(q;q)_{t_1}}{(wq^{-p_1-t_1};q)_{t_1+1}}\frac{(zq^{1-p_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{(w^{-1};q)_\infty}{(z^{-1};q)_\infty}\prod_{r=1}^{m}\frac{1-q^{x_r}/z}{1-q^{x_r}/w}, \tag{5.15}$$

w 轮廓是以 0 为中心的任意小正向圆周，而 z 轮廓线为正向，环绕 $q^{p_2+t_2}, q^{p_2+t_2+1}, q^{p_2+t_2+2}, \ldots$ 以及 w 轮廓，并且不包围被积函数的其他 z 极点。被积函数的奇点如下（示意图见图 8）：

- 在 w 中，$w=0$ 处有一个本性奇点，所有简单极点都位于

$$w = z \quad \text{and} \quad w \in \{q^{p_1+j}\}_{j=0}^{t_1} \bigcap \{q^{x_r}\}_{r=1}^{m}. \tag{5.16}$$

- 在 z 中，所有简单极点都位于

$$z = w \quad \text{and} \quad z \in \{q^{j}\}_{j=0}^{\infty} \setminus \Big(\{q^{p_2+j}\}_{j=1}^{t_2-1} \bigcup \{q^{x_r}\}_{r=1}^{m}\Big). \tag{5.17}$$

注意，由于分母中存在函数 $(z^{-1};q)_\infty$，$z=0$ 不是极点。此外，注意当自变量为 w 时，被积函数在无穷远处的渐近行为为 $O(w^{-2})$。这意味着它在 $w=\infty$ 处的留数为零。

在体相渐近区域（5.1）–（5.2）中，假设位置（τ，ρ）处于液态区域 $\mathcal{D}$（定义 5.3）。我们的目标是将 K_{walks}（5.15）中的轮廓变形为新的轮廓，使其在非实临界点 w_c，w_c处相交，并在实轴的小邻域之外与最速下降轮廓重合$\overline{\gamma_z}$，γ_w（定义见引理 5.6之前）。取一个较小的 $\varepsilon > 0$，并按以下顺序进行轮廓变形：

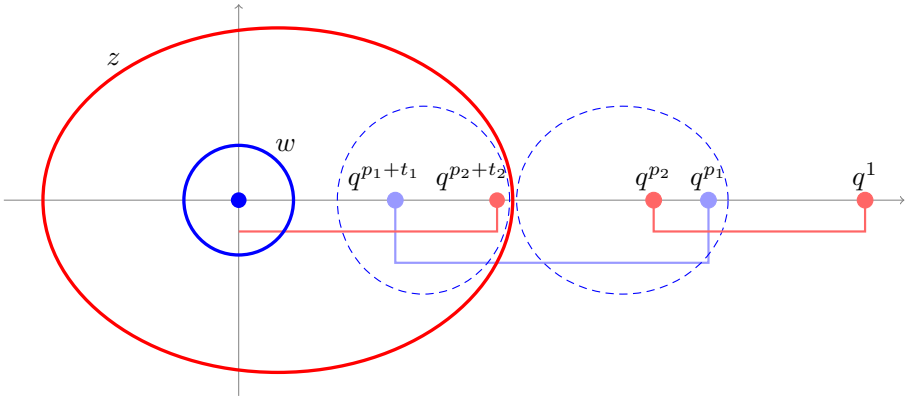


图8：粗曲线表示原始的 w 和 z 轮廓线 K_{walks} （5.15）。可能的w 极点（5.16）位于 q^{p_1} 和 $q^{p_1+t_1}$之间。可能的 z 极点（5.17）位于 q^{p_2+1} 和 $q^{p_2+t_2-1}$之间的线段之外。请注意， p_1 和 p_2 之间的相对位置，以及 p_1+t_1和 p_2+t_2之间的相对位置，可能是任意的；图中仅展示了其中一种可能性。虚线曲线的并集就是将其拖过无穷远处后得到的新 w 轮廓线。

(1) 将 w 轮廓保持为以 0 为圆心、半径为 $\varepsilon/2$的小圆，将 z 轮廓变形，使其在 ε-邻域之外与最速下降轮廓 γ_z 重合。在ε-邻域内，为确保从旧轮廓变形到新轮廓时不穿过被积函数的任何 z 极点，我们需要采取相应措施。具体而言，在 ε-邻域内，让新的 z 轮廓绕过 $u_-^z=0$，沿半径为 ε 的圆经过 0，而不是沿 γ_z直线到达 0。对于位于 $e^{-\gamma(\tau+\rho)}$ 和 $e^{-\gamma\rho}$ 之间的 u_+^z （见（5.14）），虽然它可能不在 $q^{p_2+t_2}$ 和 q^{p_2}之间，让新的 z 轮廓沿与$\mathbb{R}$相距 ε 的直线延伸，然后绕过现有极点，并确保与这些极点的距离至少为 ε （示意图见图 9）。将新的 z 轮廓记为 γ_z^ε。

（2）将 w 拖过无穷远处，也就是说，将沿 w 0附近小轮廓线的积分替换为沿其他所有 w-极点的积分的负值，这些极点列于（5.16）中。因此，我们得到沿图8中虚线轮廓的并集的积分的负值，再减去 $2\pi\mathbf{i}$ 乘以被积函数在 $w=z$ 处的留数（其仍位于 z 沿 γ_z^ε的单重积分之下）。

（3）现在将 w 轮廓变形为最速下降轮廓 γ_w，使其位于 ε 的邻域之外，其中 $\mathbb{R}$。在 ε 的邻域内， $\mathbb{R}$ 我们修改新的 w 轮廓，使变形不会在实轴上的点处取得任何留数， $w=q^j$ （这与轮廓 γ_z^ε 类似，参见图 9 中的示意图）。将新的 w 轮廓记为 γ_w^ε。将 w 轮廓变形为 γ_w^ε 时，当且仅当 $w=z$ 位于其轮廓的右侧时，会在 z 处取得一个留数；沿逆时针方向，w_c 从 w_c 到 。

—

计入轮廓变形过程中所有留数和符号变化后，我们得到

核 K_{walks} (5.15) 的形式为：

$$
\begin{aligned}
K_{\text{walks}}(p_1,t_1;p_2,t_2) &= -\mathbf{1}_{t_2>t_1}\mathbf{1}_{p_2+t_2>p_1+t_1}\frac{q^{(t_1-t_2)(p_1+t_1)}(q^{p_1-p_2+t_1-t_2+1};q)_{t_2-t_1-1}}{(q;q)_{t_2-t_1-1}} \\
&+ \mathbf{1}_{t_1=t_2}\mathbf{1}_{p_1=p_2} + \frac{q^{-t_1-p_1}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{w_c\to\overline{w}_c}\frac{z^{t_1-t_2}(q;q)_{t_1}(zq^{1-p_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}(zq^{-p_1-t_1};q)_{t_1+1}}\,dz \\
&+ \frac{q^{-t_1-p_1}}{(2\pi\mathbf{i})^2}\oint_{\gamma_z^\varepsilon}dz\oint_{\gamma_w^\varepsilon}dw\,\frac{(q;q)_{t_1}}{(q;q)_{t_2-1}}\frac{\exp\{m\,(S_m(w;t_1,p_1)-S_m(z;t_2,p_2))\}}{(w-z)(1-zq^{-p_2})(1-zq^{-p_2-t_2})},
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

这里的单重积分取遍 轮廓的左侧部分 γ_z^ε，从 w_c 到 w_c，方向为逆时针，并采用记号（5.4）。

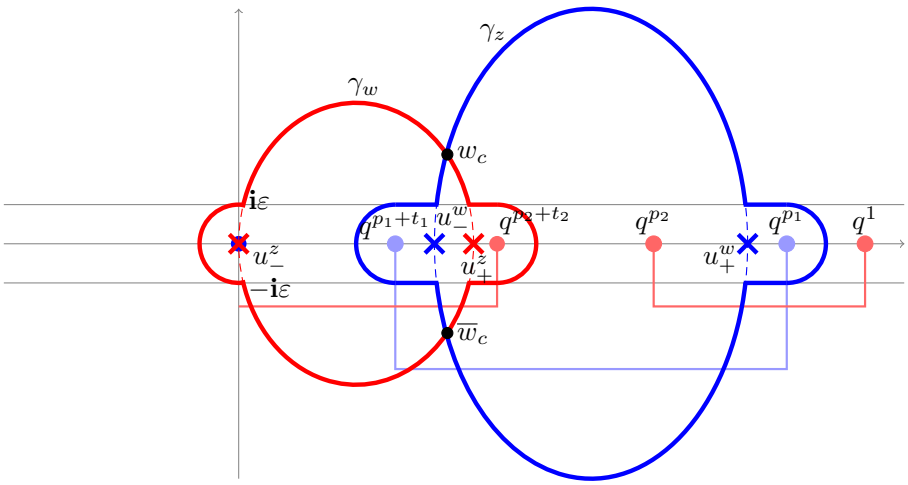


图 9：将积分路径变形为最速下降路径，并在实轴的 ε 邻域内进行修正，以避免取到不必要的留数。注意，当 m 较大时，ε 邻域内的四处修正并非全部存在。

引理 5.7。 在 $\varepsilon = m^{-1}$的体极限区域 （5.1） – （5.2） 中， （5.18） 中的双重轮廓积分 趋于零。

证明。除双重围道积分中的 $\exp\{m\,(S_m(w;\,t_1,p_1)\,-\,S_m(z;\,t_2,p_2))\}$ 外，在我们的极限区域内，所有量都保持有界。由引理 5.1，函数 S_m 可由 S 良好近似。由于在 $\mathbb{R}$ 的 ε 邻域之外，积分路径是函数 S 的最速下降路径，因此我们看到，远离实轴的轮廓线部分所作的贡献趋于零。这是因为在 w_c 和 w_c 的某个小邻域之外，被积函数的绝对值对某个 $c>0$ 有界于 e^{-cm}。

为了估计实轴附近的贡献，我们需要对附加轮廓的直线段和圆弧部分上 $\mathrm{Re}\;S(w;\,\tau,\,\rho)$ 的导数进行界定。所有这些非最速下降附加轮廓的长度都为 $\varepsilon = m^{-1}$ 阶。事实上，

例如，一条附加轮廓可以从 q^{p_1} 延伸到 u_+^w，且由于 $u_+^w > e^{-\gamma\rho}$，该轮廓的长度不超过 q^{p_1} 与 $e^{-\gamma\rho}$之间的距离。这个距离为 $1/m$ 阶，见（5.1）。因此，只需将附加轮廓上 $\mathrm{Re}\ S(w;\ \tau,\ \rho)$ 的导数界定为 $o(m^{1-\delta})$，其中 $\delta > 0$ 为某个常数。事实上，此时 $\mathrm{Re}\ S(w;\ \tau,\ \rho)$ 沿非最速下降附加轮廓的总变化量为 $o(m^{-\delta})$ 阶，而 $e^{m(-c+o(m^{-\delta}))}$ 仍会以指数速度趋于零。

为了估计在曲线 $z(\theta) = (x(\theta)\ y(\theta))$ 的某个邻域内全纯的函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部的导数，根据柯西–黎曼方程，我们有：

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re} f(z(\theta)) = x'(\theta)\operatorname{Re} f'(z(\theta)) - y'(\theta)\operatorname{Im} f'(z(\theta)).$$

现在我们来考察函数 $S(w;\ \tau,\rho)$（5.8）。式（5.8）中的不同项具有不同的奇点，我们依次考察这些奇点。首先，在$u_-^z = 0$ 修正轮廓 $w(\theta) = \varepsilon e^{\mathbf{i}\theta}$ 的某个邻域内，轮廓呈圆弧状，没有直线部分。（此处及以下证明中，C 表示一个固定的、足够大的正常数，其值可能因不等式而异）：

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\big(\log w(\theta)\big) = 0, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\big(\mathrm{Li}_2(Aw(\theta)^{-1})\big)\right| \le C,$$

对于任意 $A > 0$，式（5.8）中的所有其他项在 0 附近均为正则函数。

下一个奇点可能出现在 $u_\pm^w$ 或 $u_\pm^z$ 的邻域内。在这些邻域中，修正轮廓可能包含直线和圆弧段。通过变量替换，只需估计 $\mathrm{Li}_2(w)$ 和 $\mathrm{Li}_2(w^{-1})$ 的实部在 $w = 1$ 邻域内的导数（除 $w = 0$ 外，这些函数在其他所有点均为正则函数；我们已在证明上文中考察过 $w = 0$）。对于圆形轮廓 $w(\theta) = 1 + \varepsilon e^{\mathbf{i}\theta}$，我们有：

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w(\theta))\big)\right| \le C\varepsilon\log(\varepsilon^{-1}), \qquad \left|\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w(\theta)^{-1})\big)\right| \le C\varepsilon\log(\varepsilon^{-1}),$$

对于直线轮廓 $w(x) = x \pm \mathbf{i}\varepsilon$，我们有：

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w(x))\big)\right| \le C\log(\varepsilon^{-1}), \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\big(\mathrm{Li}_2(w(x)^{-1})\big)\right| \le C\log(\varepsilon^{-1}),$$

我们看到，$\mathrm{Re}\ S(w;\ \tau,\rho)$ 的导数的绝对值上界为 $C\log(\varepsilon^{-1}) = C\log m$，对于任意 $\delta < 1$，该上界为 $o(m^{1-\delta})$。证明完毕。 □

剩下的工作是计算右端（5.18）中除可忽略的二重积分外所有其他项的极限：

引理 5.8。 在体极限区域 (5.1)–(5.2)下，前面三项之和收敛于 (5.18)

$$(-1)^{\Delta t} e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}\left(\mathbf{1}_{t_1=t_2}\mathbf{1}_{p_1=p_2} - \mathsf{B}_\omega(t_1 - t_2, p_1 - p_2)\right),$$

其中B_ω 为不完全贝塔核（定义 *2.11*），并且

$$\omega = \omega(\tau,\rho) := \frac{1 - w_c(\tau,\rho)e^{\gamma\rho}}{1 - w_c(\tau,\rho)e^{\gamma(\tau+\rho)}}, \tag{5.19}$$

其中 $w_c(\tau,\rho)$ 是 $S(w;\ \tau,\ \rho)$ 5.8）在上半平面中的临界点（参见引理 *5.2*）。

因子 $(-1)^{\Delta t}e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}$ 只是对核进行的规范变换，不会改变行列式点过程。

引理的证明 5.8。回顾一下，量 $\Delta t = t_1 - t_2$、$\Delta p = p_1 - p_2$ 是固定的。(5.18) 右侧的前三项具有如下形式

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\Delta t=\Delta p=0} - \mathbf{1}_{\Delta t<0}\mathbf{1}_{\Delta t+\Delta p<0}\frac{q^{\Delta t(p_1+t_1)}(q^{\Delta t+\Delta p+1};q)_{-\Delta t-1}}{(q;q)_{-\Delta t-1}} \\ + \frac{q^{-t_1-p_1}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{w_c\to\overline{w}_c}\frac{z^{\Delta t}(q;q)_{t_2+\Delta t}(zq^{1-p_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(q;q)_{t_2-1}(zq^{-p_2-t_2-\Delta p-\Delta t};q)_{t_2+\Delta t+1}}\,dz.\end{aligned} \tag{5.20}$$

这里的积分弧是轮廓的左半部分，按逆时针方向从 w_c 到 $\overline{w_c}$。

对于 $\Delta t < 0$ 和 $\Delta t + \Delta p < 0$，我们有：

$$\frac{q^{\Delta t(p_1+t_1)}(q^{\Delta t+\Delta p+1};q)_{-\Delta t-1}}{(q;q)_{-\Delta t-1}} \to (-1)^{-\Delta t-1}e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}\binom{-\Delta t-\Delta p-1}{-\Delta t-1}.$$

事实上，这是因为当 a固定时，$\frac{1-q^a}{1=q^b} \to \frac{a}{b}$，$b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 当 $q \to 1$时。

在被积函数中，我们有

$$\frac{(q;q)_{t_2+\Delta t}}{(q;q)_{t_2-1}} = (q^{t_2};q)_{\Delta t+1} \to (1-e^{-\gamma\tau})^{\Delta t+1},$$

使用带负指标的 q-Pochhammer 符号的标准记号 $(a;\,q)_{-k} = (aq^{-k};q)_k^{-1}$，$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。类似地，

$$\begin{aligned}&\frac{(zq^{1-p_2-t_2};q)_{t_2-1}}{(zq^{-p_2-t_2-\Delta p-\Delta t};q)_{t_2+\Delta t+1}} \\ &\qquad = \frac{(zq^{1-p_2-\Delta p};q)_{\Delta p-1}}{(zq^{-p_2-t_2-\Delta p-\Delta t};q)_{\Delta t+\Delta p+1}} \to \left(1-ze^{\gamma\rho}\right)^{\Delta p-1}\left(1-ze^{\gamma(\tau+\rho)}\right)^{-\Delta t-\Delta p-1}.\end{aligned}$$

我们来进行变量代换

$$u = \frac{1-ze^{\gamma\rho}}{1-ze^{\gamma(\tau+\rho)}}, \qquad z = e^{-\gamma\rho}\frac{1-u}{1-e^{\gamma\tau}u}, \qquad dz = -e^{-\gamma\rho}\frac{1-e^{\gamma\tau}}{(1-e^{\gamma\tau}u)^2}\,du.$$

经过这一变量代换，(5.20) 收敛于

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\Delta t=\Delta p=0} + \mathbf{1}_{\Delta t<0}\mathbf{1}_{\Delta t+\Delta p<0}(-1)^{\Delta t}e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}\binom{-\Delta t-\Delta p-1}{-\Delta t-1} \\ + \frac{(-1)^{\Delta t}e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\omega\to\overline{\omega}}(1-u)^{\Delta t}u^{\Delta p-1}\,du,\end{aligned} \tag{5.21}$$

其中 ω 由（5.19）给出，且该点位于上半平面。积分路径从 ω 到 $\overline{\omega}$，并在 0 和 1 之间穿过实轴。

在（5.21）中，我们可以去掉整体因子 $(-1)^{\Delta t} e^{-\gamma(\tau+\rho)\Delta t}$，因为它是一个规范变换，会得到等价的行列式核。最后，对于 $\Delta t < 0$，我们写作

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\omega \to \overline{\omega}} (1-u)^{\Delta t} u^{\Delta p - 1}\, du = -\operatorname{Res}_{u=0} (1-u)^{\Delta t} u^{\Delta p-1} - \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\overline{\omega}}^{\omega} (1-u)^{\Delta t} u^{\Delta p-1}\, du,$$

其中，右侧从 ω 到 ω 的积分弧穿过 0 左侧的实轴。容易看出，在 $u = 0$ 处的负留数恰好与（5.21）中的第二项相抵消。对于 $\Delta t \geq 0$，（5.21）中的积分等于 $-\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\omega}^{\omega} (1-u)^{\Delta t} u^{\Delta p-1}\, du$，其中从 ω 到 ω 的积分弧穿过 0 和 1 之间的实轴。证明完毕。 □

核中的围道变形 K_{walks} (5.15)以及引理 5.7 和 5.8 完成了定理 2.12的证明。

参考文献

[Agg19] A. Aggarwal. 菱形铺砌局部统计的普适性。arXiv 预印本，2019年。arXiv:1907.09991 [math.PR].[BG13] A. Borodin 和 V. Gorin. 无限多个不相交随机游走的马尔可夫过程。《概率论及相关领域》，155(3-4):935–997，2013年。arXiv:1106.1299[math.PR].[BGR10] A. Borodin、V. Gorin 和 E. Rains. 盒中平面分拆上的 q-分布。《数学选集》，16(4):731–789，2010年。arXiv:0905.0679 [math-ph].[BKMM07] J. Baik、T. Kriecherbauer、K. T.-R. McLaughlin 和 P. D. Miller.《离散正交多项式：渐近性与应用》。数学研究年刊。普林斯顿大学出版社，2007年。arXiv:math/0310278 [math.CA].[BOO00] A. Borodin、A. Okounkov 和 G. Olshanski. 对称群普朗歇尔测度的渐近性。《美国数学会杂志》，13(3):481–515，2000年。arXiv:math/9905032 [math.CO].[Bor11] A. Borodin. 行列式点过程。载于 G. Akemann、J. Baik 和 P. Di Francesco 编，《牛津随机矩阵理论手册》。牛津大学出版社，2011年。arXiv:0911.1153 [math.PR].[CIW19] P. Caputo、D. Ioffe 和 V. Wachtel. 几何面积倾斜下布朗聚合物的约束。《电子概率学报》，24(none):1–21，2019年。arXiv:1809.03209 [math.PR].[CK01] R. Cerf 和 R. Kenyon. 三维伊辛模型中沃尔夫晶体的低温展开。《数学物理通讯》，222:147–179，2001年。[CKP01] H. Cohn、R. Kenyon 和 J. Propp. 多米诺骨牌铺砌的变分原理。《美国数学会杂志》，14(2):297–346，2001年。arXiv:math/0008220 [math.CO].[DFG19] P. Di Francesco 和 E. Guitter. 用切线法推导具有任意起点的 q-加权路径的冰点曲线。《物理学杂志A》，52(11):115205，2019年。arXiv:1810.07936 [math-ph].

[DLMF] NIST数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2022-12-15发布的1.1.8版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[DM15] E. Duse 和 A. Metcalfe. 离散交错图案的渐近几何：第一部分。《国际数学杂志》，26(11):1550093，2015年。arXiv:1412.6653 [math.PR].[DM20] E Duse 和 A. Metcalfe. 离散交错图案的渐近几何：第二部分。《傅里叶研究所年刊》，70(1):375–436，2020年。arXiv:1507.00467 [math-ph].[Doo84] J.L. Doob. 经典势理论及其概率论对应理论。施普林格，1984年。[Dys62] F.J. Dyson. 随机矩阵特征值的布朗运动模型。《数学物理杂志》，3(6):1191–1198，1962年。[FS23] P.L. Ferrari 和 S. Shlosman. Airy$_2$ 过程与三维伊辛模型。《物理学杂志A：数学与理论》，56(1):014003，2023年。arXiv:2209.14047[math.PR].[GH22] V. Gorin 和 J. Huang. 动态环方程。arXiv 预印本，2022年。arXiv:2205.15785 [math.PR].[GO09] A. Gnedin 和 G. Olshanski. 德·菲内蒂定理的 q 类比。《电子组合学杂志》，16:R16，2009年。arXiv:0905.0367 [math.PR].[Gor08] V. Gorin. 不相交路径与 Hahn正交多项式系综。《函数分析及其应用》，42(3):180–197，2008年。arXiv:0708.2349 [math.PR].[Gor21] V. Gorin. 随机菱形铺砌讲义。《剑桥高等数学研究丛书》。剑桥大学出版社，2021年。[GP19] V. Gorin 和 L. Petrov. 非碰撞随机游走局部统计的普适性。《概率年刊》，47(5):2686–2753，2019年。arXiv:1608.03243 [math.PR].[Hay56] W.K. Hayman. 斯特林公式的一种推广。《纯粹与应用数学杂志》，196:67–95，1956年。[Hua21] J. Huang. β-非碰撞泊松随机游走：大数定律与中心极限定理。《国际数学研究通知》，2021(8):5898–5942，2021年。arXiv:1708.07115 [math.PR].[Kas67] P. Kasteleyn. 图论与晶体物理学。载于《图论与理论物理学》，第43–110页。学术出版社，伦敦，1967年。[Ken97] R. Kenyon. 晶格二聚体的局部统计。《亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计》，33:591–618，1997年。arXiv:math/0105054 [math.CO].[Ken09] R. Kenyon. 二聚体讲义。2009年。arXiv:0910.3129 [math.PR].

[KM59] S. Karlin 和 J. McGregor。《重合概率》。《太平洋数学杂志》，9:1141–1164，1959年。[KO07] R. Kenyon 和 A. Okounkov。《极限形状与复 Burgers 方程》。《数学学报》，199(2):263–302，2007年。arXiv:math-ph/0507007。[KOR02] W. K¨onig、N. O'Connell 和 S. Roch。《非碰撞随机游走、串联队列与离散正交多项式系综》。《电子概率杂志》，7(5):1–24，2002年。[KOS06] R. Kenyon、A. Okounkov 和 S. Sheffield。《二聚体与阿米巴》。《数学年刊》，163:1019–1056，2006年。arXiv:math-ph/0311005。[LT15] B. Laslier 和 F. Toninelli。《菱形铺砌、Glauber 动力学与宏观形状》。《数学物理通讯》，338(3):1287–1326，2015年。arXiv:1310.5844 [math.PR]。[Mut06] L. Mutafchiev。《大整数随机平面分拆的最大部分大小》。《整数：组合数论电子期刊》，6:A13，2006年。[Oko02] A. Okounkov。《对称函数与随机分拆》。载于 S. Fomin 编，《对称函数 2001：进展综述与展望》。克吕维尔学术出版社，2002年。arXiv:math/0309074 [math.CO]。[OR03] A. Okounkov 和 N. Reshetikhin。《Schur 过程的关联函数及其在随机三维杨图局部几何中的应用》。《美国数学会杂志》，16(3):581–603，2003年。arXiv:math/0107056 [math.CO]。[OR07] A. Okounkov 和 N. Reshetikhin。《随机斜平面分拆与 Pearcey 过程》。《数学物理通讯》，269(3):571–609，2007年。arXiv:math/0503508 [math.CO]。[Pet14] L. Petrov。《通过 Gelfand–Tsetlin 图式研究随机菱形铺砌的渐近性》。《概率论及相关领域》，160(3):429–487，2014年。arXiv:1202.3901 [math.PR]。[Pet15] L. Petrov。《多边形均匀随机菱形铺砌的渐近性：高斯自由场》。《概率年刊》，43(1):1–43，2015年。arXiv:1206.5123 [math.PR]。[Pet22] L. Petrov。《带吸收壁的非碰撞 Macdonald 游走》。《SIGMA》，18:21，2022年。arXiv:2204.09206 [math.PR]。[She05] S. Sheffield。《随机曲面》。《Astérisque》，304，2005年。arXiv:math/0304049[math.PR]。[TF61] H. Temperley 和 M. Fisher。《统计力学中的二聚体问题——一个精确结果》。《哲学杂志》，6(68):1061–1063，1961年。

University of Virginia、 Charlottesville、 VA、 USA电子邮件：lenia.petrov@gmail.com 电子邮件：me@mtikhonov.com