arXiv:2303.02382v1 [quant-ph] 4 Mar 2023

同伦类型论中的拓扑量子门

David Jaz Myers* Hisham Sati*, † Urs Schreiber*

摘要

尽管显而易见，要实现可扩展量子计算机，拓扑保护不可或缺，但拓扑量子逻辑门的概念基础可以说一直不够稳固，无论是在物理实现方面，还是在其信息论本质方面。

基于弦/M理论中缺陷膜的近期研究成果 [SS22-Def] 以及凝聚态物理理论中与之全息对偶的任意子缺陷研究成果 [SS22-Ord], , 我们在此阐释（正如 [SS22-TQC]中所宣布的），如何以一种出人意料的简洁方式，在参数化点集拓扑中表述现实拓扑量子门的规格；这些量子门通过拓扑有序量子材料中的任意子缺陷编织来运作。参数化点集拓扑具有如此根本的地位，以至于可在现代同伦类型化编程语言（如 cubicalAgda）中对其进行认证。

我们提出，这种非凡的概念交汇或能共同推动真正的拓扑量子编程以及同伦类型论在现实世界中的应用发展；可以说，这两者的发展都未能达到人们的高度期待；无论如何，它为借助了解现实拓扑量子硬件实际物理原理的高级认证语言，模拟和验证拓扑量子计算架构提供了一种强有力的范式。

在一篇配套文章 [QP] （发表于 [《科学》22b]）中，我们解释了如何进一步转向“依赖线性”同伦数据类型，从而将这一方案自然扩展为完整的量子编程/认证语言；在该语言中，我们的拓扑量子门可以被编译为经验证量子电路，并配备量子测量门和经典控制。

谨以此文悼念尤里·马宁；他
引入了量子计算和高斯-马宁联络，
却不知道二者之间存在密切关系。

目录

1 引言 2 2 背景与展望 5 3 拓扑量子门..... 19 4 .....通过参数化点集拓扑 224.1 关于普通上同调与广义上同调.22 4.2 关于扭曲广义上同调.28**5 .....通过依赖同伦类型论 33**5.1 从数据类型到同伦类型.33 5.2 上同调数据的单值化.56**6 任意子编织门的同伦数据类型 70**

*数学系、理学部；以及纽约大学阿布扎比分校研究院量子与拓扑系统中心，纽约大学阿布扎比分校，阿联酋。

†库朗数学科学研究所，纽约大学，纽约。作者感谢*Tamkeen* 在纽约大学阿布扎比分校研究院资助 CG008下提供的支持。

CENTER FOR QUANTUM & TOPOLOGICAL SYSTEMS

1 引言

量子计算中对拓扑学的需求。尽管人们对量子计算这一构想（文献 2.1）寄予厚望，但专家们也充分认识到（文献 2.5 ），要实现超越现有 NISQ 机器（文献 2.3 ）的实用量子计算，就必须开发强大的稳定化机制，以保护量子数据免受退相干影响。这或许可以在软件层面通过在现有量子硬件范式中实现足够的冗余来达成（“量子纠错”）；但更有可能的是，还需要在硬件层面直接提供纠错保护，利用量子材料的量子态，而这些量子态受到一类通常称为拓扑的基本物理原理（文献 2.12）的稳定，具体而言，是由量子材料的拓扑相中出现的拓扑序所稳定（文献 2.7）。

拓扑量子门这一悬而未决的问题。 尽管从长远来看，拓扑量子计算（文献 2.4）的发展道路或许势在必行，但其理论基础可以说一直不够稳固（参见 [Va21][SS22-Ord，第 2], 文献 2.9 页）；尽管人们对此兴趣浓厚，而且粗略浏览文献可能会让人产生相反的印象。对此，或许有一部分原因在于迄今为止唯一一次在实验室实现拓扑保护量子比特的尝试显然未能成功（文献 2.8）。总体而言，最初提出、至今仍最具希望的设想——通过对任意子缺陷世界线进行绝热 （文献 2.6）编织 （文献 2.20），在拓扑序基态上运作的拓扑量子逻辑门（文献 2.7）——已不再是学界关注的焦点：实验物理学家一直专注于拓扑状态，即使检测到这些状态，它们也会因其本质而无法移动，因而无法编织（文献 2.8）；而理论物理学家则一直在探索一般意义上的任意子编织，其研究与物理可实现性的考量相去甚远（参见文献 2.9 和第 4 页）。

一个源自高能物理学的解法……然而，在近期对拓扑量子材料中缺陷的重新分析中[SS22-Ord] （文献 2.7）——沿用了对弦/M理论中稳定缺陷膜的类似（“对偶”）考量 [SS22-Def]（文献 2.11）——我们发现了一个详尽且现实的绝热任意子编织模型，展示了如何将基于拓扑K理论（文献 2.16）对物质拓扑相（文献 2.7）所作的既有分类，扩展到描述支持辫群统计（文献 2.17）的拓扑序基态。事实证明，对任意子编织的这一描述自然源自参数化同伦论（第 4 节讨论）中的基本构造，揭示出拓扑量子门具有一种此前未受充分认识的、更深层且纯粹属于同伦论的本质（文献 2.12）。

……使其适用于经认证的量子编程。这种以参数化同伦论表述拓扑量子门的方式，鉴于经认证（“带类型”）编程语言理论（文献 2.26）的一项引人注目的现代进展，也值得关注：严格遵循为所有数据指定数据类型这一原则，尤其是为其他数据的有序对的等同证书指定数据类型，会使这些数据类型表现得恰如参数化同伦论中的同伦类型。实际上，如今称为同伦类型论（“HoTT”，文献 2.27）的基础认证语言，既可用作通用编程语言，也可用作参数化同伦论中各种构造的证明语言。

主张与总体概述。 总之，这表明，同伦类型化编程语言（文献 2.27，第5.1节中的阐述）可自然地用于编码（模拟）并形式化验证实际的拓扑量子逻辑门（文献 2.4），从而为实际拓扑量子计算平台的模拟与认证提供自然的理论基础。我们曾在 [SS22-TQC] 中简要宣布这一结果；本文将详细介绍并解释：

> **第4节** 传统代数拓扑文献（文献 2.12）所理解的相关参数化点集拓扑；**第5节** Agda 编程语言（文献 2.28）中实际运用的相关依赖同伦类型论；**第6节** 用于编码拓扑量子门的同伦数据结构（定义 6.7）的构造：定理 6.8。

更具技术性的概述。 在结束之前，我们先稍微详细地概述一下我们的构造/主张：我们的出发点是以下两个事实，它们分别为各自领域的专家所“熟知”，但二者引人注目的结合似乎此前并未受到重视：

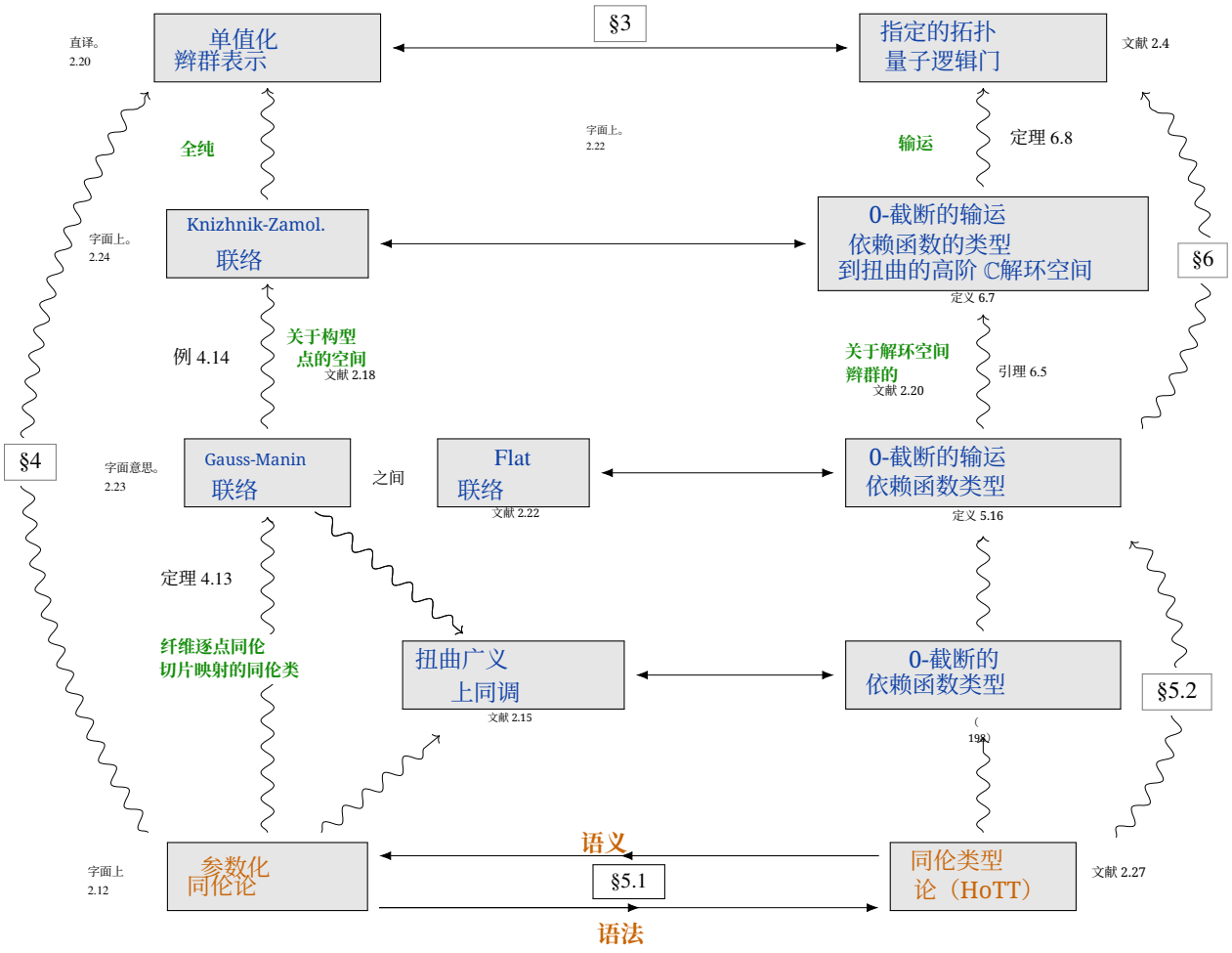
(1) [SS22-Def, §5]: 合理可期的未来拓扑量子计算硬件，只能实现那些任意子编织量子门（文献 2.20）：它们通过 Knizhnik-Zamolodchikov（KZ）联络（文献 2.24）的单值化辫群表示（文献 2.21），作用于来自共形场论的“$\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-共形块”上的量子态。对于级别 $k = 2$，其中包括广受欢迎的马约拉纳／伊辛任意子；而对于 $k = 3$，则包括万有的“斐波那契任意子”（文献 2.19）。

> 通常，人们会广泛假设（参见 [Va21]）任意子编织可由任意辫群表示或任意酉编织融合范畴来描述。然而，合理可期的物理实现预计会更具体地由仿射 $\mathfrak{su}_2$-表示的模张量范畴给出；这些表示是 Chern-Simons 理论中的量子态，因而也是（手征）流代数（即 WZW）共形场论中的关联函数（文献 2.24）。

(2) [SS22-Def，第2]节：一项称为 KZ 解的“超几何积分构造”（文献 2.25）的技术性结果表明，恰恰是这些 $\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-单值化辫群表示在代数拓扑（文献 2.12）中具有自然构造；在该理论中，它们由平面中点的构形空间（文献 2.18）上的纤维逐点扭曲上同调群（文献 2.15）上的典范高斯-马宁联络（文献 2.23）的单值化给出。

这非常引人注目，因为上面的第一项若按字面理解，涉及一系列相当漫长而复杂的、源自共形场论和仿射李代数表示论的构造；而第二项只涉及代数拓扑中最基本的概念。正是通过这种从共形量子场论到纯粹代数拓扑的转换（在第4节中讨论），拓扑量子门才能被同伦类型化编程语言完全理解（如第5节所述）。

更为详细地说，我们构造与证明的结构如下列流程图所示：



结论。因此，我们在此提供了一种此前缺失的对拓扑量子门的理解，它：**（i）**自然植根于同伦数学的现代基础，**（ii）**充分认识到拓扑量子材料背后的物理原理，并且**（iii）**能够直接在 Agda 等最先进的程序认证语言中实现。

前两点意味着，这种构造既适用于纯数学分析，又能反映相关的实际物理学；第三点则使其能够应用于实际编程语言，以进行验证和模拟。

应用示例：经认证的拓扑量子编译。一旦拓扑量子硬件可用，通常在模拟拓扑量子电路时，实现任何量子算法的关键步骤（例如 [ZW20]）都是将其编译为一个电路（图 *QC*），该电路由拓扑量子硬件实际支持的逻辑门组成。

虽然*Solovay-Kitaev*定理 [Ki97][So00] 在较弱的假设下保证，对于任意给定的精度要求，都存在这样的量子电路（见 [DN06][Br14]），但要在给定的操作约束下找到最优电路仍需付出努力——目前这通常通过穷举完成（例如 [BHZS05][HZBS07][HBS09][JS21，第 IV 节]）。我们的结果提供了一种认证语言（文献 2.26），它体现了拓扑量子编译的分析细节，实现了以下要素的结合：

（1）现代精确实数计算机分析（参见文献 2.29 和第 71 页），用于认证一个酉算子近似于另一个酉算子；**（2）**新颖的拓扑语言构造，用于认证此类算子是否源自物理上的任意子编织（定理 6.8）。

这或许能为基于实际物理操作原理，对现实中的拓扑量子门进行量子编译的完整形式化验证打开大门；从长远来看，这项任务或许是量子计算不可或缺的组成部分（参见文献 2.5）。

展望。 我们这里只是初步探讨类型论或许可以应用于以下主题：

• 在圆柱上插入“威尔逊线”时，我们在定义 6.7、定理 6.8 中将 $\mathfrak{su}_2$-单值化编码为同伦数据类型；它等价于（一个手征半部分的） $\mathfrak{su}_2$-**陈-西蒙斯理论**量子传播子（参见 [CR97][Ga00, §5]）。

• 作为类型构造子，定义 6.7 显然适用于（57）所示的特定扭曲之外的情形：只有为了将其范畴语义识别为共形块上熟悉的 KZ 单值，才需要采用这种选择。但更一般的扭曲仍可能具有可识别的语义。例如，在 [SS22-Def, 注 2.22] 中，我们为分数能级 $\kappa \longmapsto \kappa/q$ 将得到某些任意子量子态所预期的**对数共形场论**共形块提供了证据。

• 定义 6.7 所体现的辫子（文献 2.20）是嵌入的带框架协边界的一种特殊情形。事实上，我们发现此处所述构造的方式是（遵循 [SS22-Conf][CSS21]）将其视为（扭曲）*Cohomo- topy* 模空间上同调的一种特殊情形；后者通过庞特里亚金定理编码嵌入的带框架协边界（参见 [SS21-MF][SS20-Tad]）。

最后但同样重要的是，同伦类型论（文献 2.27）的若干有趣扩展可自然而然地用于处理拓扑量子编程的这些方面及其他方面——我们计划在别处讨论这些内容：

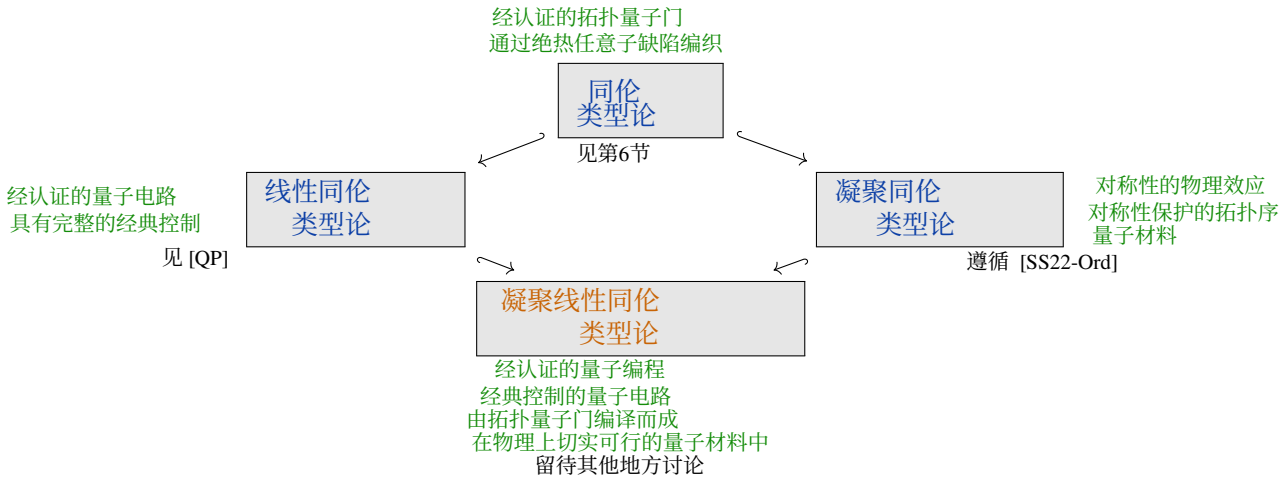
– **线性 HoTT 与通用量子编程**。 同伦数据类型的一种自然扩展是（依赖的）线性——即量子——数据类型（[Ri 22], 已在 [Sc14a] 中预见），它提供了一种通用量子编程语言（见 [Sc22b]），既体现了量子数据类型的线性（例如不可克隆性），也涵盖量子测量过程和经典控制机制。

事实上，除了普通的量子数据类型之外，它还涉及依赖的高阶同伦线性类型，也就是参数化谱，例如这里使用的由参数化埃伦伯格-麦克莱恩类型（文献 2.14）构成的参数化谱。这意味着，定义 6.7 中基本相同的同伦数据结构若构造为线性同伦类型，便可将拓扑量子门整合到功能完备的量子电路语言中，并支持量子测量门和经典控制；相关内容将在一篇配套论文 [QP]中讨论。

– **凝聚同伦类型论与拓扑量子门的固体物理学**。 对 [SS22-Ord] 的分析（文献 2.17）得出结论：在拓扑有序量子材料中实现的真实拓扑量子门，可由 Gauss-Manin（GM）联络的全纯描述（文献 2.23）；其作用对象不仅是扭曲普通上同调（本文对此有所讨论），还包括扭曲与等变与微分（*TED*）拓扑K上同调（文献 2.16）。后者通过一种称为次陈特征的比较映射对 KZ 单值进行了细化。这预示着，传统观点认为单值化辫门由克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫（KZ）联络的全纯实现，而实际情况会出现物理修正：次 TED-陈特征余核中的辫门操作实际上无法通过真实拓扑量子材料中缺陷的绝热编织来实现，而核中则会出现新的 K-理论辫操作。

将凝聚（沿用 [La94][La07] 的术语）模态算子系统（[SSS12, §3][Sc13][SS20-Orb][SS21-Bun]）纳入考量，便能自然地将固体物理学中用于处理这些修正所需的微分与等变结构引入同伦论；这种做法同样便于在类型论中实现，此时称为凝聚同伦类型论（[ScSh14][Sc15][We17][Sh18][My21][My22][MR23]）。

这些线性和凝聚同伦类型论的精化自然应当结合起来，形成凝聚线性同伦类型论（相关语义见 [Sc13, §4.1.2][BNV16][GS19]）。我们认为，它将成为借助现实的拓扑量子门，对经典控制量子编程进行认证的终极平台： [1]



[1]有趣的是，相容线性同伦论也是一种语义上下文，在其中可以自然地为高能物理的关键要素建立形式化意义，具体而言，即弦/M理论（参见 [Sc14b][SS20-Orb，第 6] 页）。这与强耦合量子系统（例如任意子拓扑序）和弦/M理论之间的深层关系相一致，参见 [SS22-Ord，注 2。8][Sa23][Sc23]

2 背景与展望

由于我们正在连接此前鲜少密切交集的物理学、数学和计算机科学领域，因此在此提供一份索引，列出各种技术术语，并附上简要说明及相关文献指引。读者可以选择是否逐条阅读本节，也完全可以先跳过，待有需要时再回来查阅。

文献 2.1 (量子计算)。量子计算的总体构想最初由尤里·马宁提出[Ma80][Ma00]，，保罗·贝尼奥夫 [Be80] 和理查德·费曼 [Fe82]，使其逐渐成形，戴维·多伊奇 [De89]，指出它可能具有重大的实际意义；彼得·肖尔等人 [Sh94][Si97]..... 证明了这一点，前提是如果能够控制量子纠错（文献 2.5）。彼得·肖尔等人 [Sh95] 证明，这至少在理论上是可行的。

关于量子计算和量子信息论一般原理的教科书式介绍包括： [NC10][RP11][BCR18][BEZ20]。关于该领域现状的概述可见于 [Pr22]，而 NISQ 机器的相关讨论（文献 2.3）也提供了相关观点；后续讨论所需的基础介绍可见于 [Sc22a]。

这里我们关注计算的低硬件层级表述：基本指令（“逻辑门名称”）被映射为状态空间上的变换（例如计算机寄存器上的变换），而程序则由这类指令的路径（“逻辑电路”）构成，并作为迭代的状态变换执行——我们将在第3节对此作进一步阐述。从这一非常基础的视角来看，量子计算有一个关键特点值得注意，那就是：

经典状态空间上的操作是（状态的）有限集合之间的映射，与之对应的量子操作则是可逆的（文献 2.2）有限维复向量空间之间的线性映射。（在定理 4.13 和 6.8 中，这些向量空间以复上同调群的形式出现，见文献 2.15。）

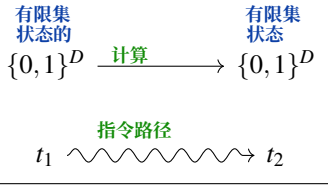
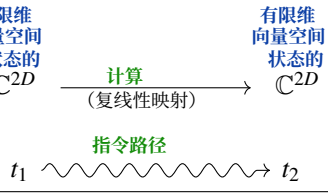
经典计算	量子计算
	

表 D. 经典数字计算（程序）是有限集（比特）之间的函数（映射），而与之对应的量子计算（尤其是）有限维维数复向量空间之间的线性映射。请参阅第3节中的讨论。

量子计算过程的这种复线性在很大程度上是其丰富性的来源，因为现在存在连续统（不可数多个）可能的状态，因此也有相应的数据（见文献 2.29）；而经典计算机看到的只有有限集。尤其是，对量子计算过程的验证/认证（文献 2.26）（例如证明给定的一组量子门可编译为指定的线性映射，且精度符合要求；参见第 3 页），一般属于构造性分析/精确实数计算问题（文献 2.29）。

量子计算的其他关键方面，例如这些线性映射的酉性（一方面，即它们保持希尔伯特空间结构，从而保持量子物理的概率解释）以及非酉状态坍缩（发生于量子测量时），在本文中仅起附带作用，但将在配套文章 [QP] 中得到全面阐述。

文献 2.2 (可逆计算)。量子计算的概念发展促使我们重新评估计算基本原理。例如，在基本的微观层面上，所有物理过程——因而所有计算过程——都是可逆的。执行不可逆的经典逻辑门（例如 AND : 比特^2 →比特）意味着计算机要将信息丢弃到一个任意复杂的环境中——也就是说，与之发生相互作用：这就是朗道尔原理 [Be03]。这一点表面上或许看似微不足道，但正是这种环境相互作用必须与微观系统隔离，才能实现相干量子计算过程（文献 2.5）——依照量子力学的预言，该过程会根据幺正薛定谔演化而具有可逆性。因此，量子电路（不包括量子测量门；此处暂不讨论这些门，而将在配套的 [QP] 中加以介绍）是一种可逆计算形式（例如 [Ki97, §2.2][NC10, §1.4.1, 3.2.5][Am+20, §9]）。

有趣的是，计算的这一根本可逆性恰好原生地反映在同伦类型化编程语言（文献 2.27）中——在第3节将底层计算表述为“路径提升”的框架下，它对应于以识别证书（71）形式呈现的“参数路径”的可逆性（78），因而也对应于第5.1节回顾的、基于空间/∞-群胚的同伦类型论指称语义。

文献 2.3 (NISQ 计算机)。目前已有的量子计算机（例如基于“超导量子比特”的计算机，参见 [CW08][HWFZ20]）证明了量子计算这一理念（文献 2.1）原则上可行，但其计算资源十分有限，因为它们噪声（非常）多，而且（充其量）规模中等：这类计算机被称为“NISQ 机器” [Pr18][LB20]。目前所缺少的是抗噪声保护机制，以便扩大量子存储器的规模并延长其相干时间。可以说，最重要的这类保护机制（文献 2.5）是拓扑保护（文献 2.4）。

文献 2.4 (拓扑量子计算）。拓扑量子计算这一理念——具体而言（我们将在第3节中加以阐述），即由陈-西蒙斯/WZW理论（文献 2.24）控制的拓扑量子材料（文献 2.7）中任意子缺陷（文献 2.17）世界线的绝热（文献 2.6）编织（文献 2.18）所实现的拓扑量子逻辑门——被归功于 [Ki03][Fr98][FKLW03][FLW02b]（另见 [KL04]），并在 [NSSFD08] 中得到进一步阐述（关于离散规范群，即 Dijkgraaf-Witten理论的类似讨论，见 [OP99][Mo03][Mo04]）。综述包括 [BP08][RW18]，教材论述包括 [Wa10][Pa12][SL13][St20][Si21]。

有趣的是，拓扑量子计算的关键原理，以及更一般地（如第3节所讨论），早已在 [ZR99]中以“全纯量子计算”之名得到了清晰阐述。

请注意，传统文献倾向于抽象地讨论这一问题，甚至在理论上也忽视了（参见 [Va21]）任意子缺陷编织在实际材料中实现的物理实现问题（文献 2.9）。此前颇为流行的、通过“马约拉纳零模”实现的实验方案，如今看来似乎存疑（文献 2.8）。另一方面，拓扑半金属动量空间中的能带节点缺陷编织（文献 2.7）或许很有前景（文献 2.10）。

文献 2.5 (对拓扑量子保护的需求）。尽管拓扑量子计算（文献 2.4）的理念有时可能被表述为量子计算若干有趣替代方案之一，但有充分理由认为，任何在当前可用的 NISQ 机器（文献 2.3）之外实际有用、因而可扩展的量子计算架构，都必然必须受到拓扑量子保护：

> [Sau17]: “小型 [NISQ] 机器不太可能揭示真正的宏观量子现象，而这类现象没有经典对应物。这很可能需要一种可扩展的量子计算方法 [.....] 即基于 [.....]拓扑量子计算（TQC） [.....] TQC 的核心思想是将量子比特编码到物质拓扑相的状态中。编码在此类状态中的量子比特预期会受到拓扑保护，或对环境的‘窥探之眼’具有鲁棒性；而环境被认为是传统量子计算的大敌。”

> [DS22a]: “我们如今拥有的量子比特系统是一项了不起的科学成就，但它们并未让我们更接近拥有一台能够解决任何人真正关心的问题的量子计算机。 [.....] 所缺少的是这一突破 [.....] 通过使用稳定性高得多的量子比特来绕过量子纠错，这种方法称为拓扑量子计算。”

文献 2.6 （拓扑量子门的绝热性质）。通过对任意子（文献 2.17）缺陷世界线（文献 2.4）进行编织（文献 2.18）来操作简并量子基态，是由量子绝热定理（例如， [Ne80][ASY87][RO12][BDF20]）给出的酉变换的一个实例。从这个意义上说，拓扑量子计算是“绝热量子计算”的一个实例 [FGGS00][AvDKLLR07]，这一点有时很难从文献中辨识出来。一方面，这是因为该术语通常默认用于（非拓扑的）量子退火过程[GH20]；另一方面，实验上对探测完全固定在纳米线端点处的“马约拉纳零模”（文献 2.8）的关注，似乎导致人们完全忽视了最终对编织的需求。

明确指出拓扑量子门过程具有绝热性质的参考文献包括（除 [ZR99] 外）：[CFP02，第 2][页； 7][FKLW03，第 6] [页；11][NSSFD08，第 1][页； 50, 52][CGD15][RO12，第 19][页；321]Pa12，第 页；CLBFNMCMCSt20，第 页。

我们之所以强调这一点，是因为量子物理学中的绝热变换是路径提升（文献 2.30）的一种实例——也就是说，是将经典参数路径映射到依赖于这些经典参数（即：以这些参数为纤维基底）的量子态空间之间的（线性）映射（19）。具体而言：量子绝热变换就是量子态丛 [Si83][WZ84]上相应联络的平行移动（文献 2.22）（对于“拓扑”过程而言是平坦联络，见文献 2.22；综述见 [Be89][Va18][St20，第 §2] 节），其全纯/单值化被称为贝里相位 [Be84]。

有趣的是，这种通过路径提升实现绝热量子变换的现象，已被同伦类型语言原生地刻画（文献 2.27），见第3节。

文献 2.7（拓扑量子材料）。物质拓扑相（教材论述包括 [Va18][St20，第II节]）是晶体材料的一种基态，其中，占据布洛赫态（固定原子晶格中电子/正电子的状态）在布里渊环面（晶格动量空间，参见文献 2.10）上的向量丛是拓扑非平凡的，即它在（扭曲的、等变的）拓扑K理论中具有非平凡类（文献 2.7）。如果某个基态是简并的，且其关于缺陷位置的绝热（文献 2.6）依赖构成一个辫群表示（文献 2.21），则称该基态表现出拓扑序 [We91][St20，第6节2] 。 [SS22-Ord]中提供了带有全面文献指引的综述。

文献2.8 (马约拉纳零模？)。近年来，许多关于实现拓扑量子计算（文献2.4）的关注都集中在这样一种设想上：拓扑量子态可能以“马约拉纳零模”的形式存在，它们局域于超导／半导体纳米线的端点处 [Ki01]；相关综述见 [Ma22][DS22b]。然而，一系列关于实验探测到此类模式的重要声明现已被撤回或受到质疑（例如见 [DSP21]）。即使能够探测到此类模式，按照设计，它们也无法移动，因此不可能成为

实现拓扑编织量子门（文献2.4）的平台——原本意义上的拓扑编织量子门，是基于绝热编织运动（文献2.6）的。尽管有人认为，可以通过其他方式模拟某种对不可移动的“马约拉纳零模”进行的有效编织，但这种说法似乎并不可信（当然也尚未得到证明）；更重要的是，即便如此，这种模拟也不太可能保有实际绝热编织（文献2.6）所具有的拓扑保护性质，从而背离了初衷。

因此，我们认为，即使局域于纳米线中的马约拉纳零模确实存在，它们也不太可能支持我们在此所关注的、原始且已确立的拓扑量子门概念（文献 2.4）。在动量空间中对能带节点进行编织，或许能提供一种更有希望的实际拓扑量子门实验实现方式（文献 2.10）

文献 2.9 （任意子的数学规范化描述）。尽管任意子（文献 2.17）的基本理念似乎很清楚，但难以实现的并不仅仅是其实验实现（参见文献 2.8）；可以说，甚至在数学物理中对其进行理论推导和确定的过程也一直相当粗略（参见 [Va21]）。数学／理论固体物理学文献中的许多论述都想当然地认为，对于“什么是任意子种类？”（参见文献 2.19）这一问题，答案是：“任意酉辫群表示！”，因此是：任意酉R矩阵！（例如 [KL04], , 参见文献 2.21）；或者在较近的文献中，为了涵盖不同的任意子种类（文献 2.19），答案变成了：“任意酉编织融合范畴！”（可追溯至 [Ki06，第8节、第E][NSSFD08，页28][Wa10，第6节3]，并且在众多综述中反复出现，通常未注明出处，例如 [RW18，第2.4节1][Ro22，第2节2]）。

基本思想，至少对于缺陷任意子而言，是它们的经典参数空间是一个有效二维量子材料中的点的构型空间（文献 2.18）（或者是其对偶布里渊环面中的点的构型空间，文献 2.10），从而任意子位置在材料的拓扑有序基态（文献 2.7）上绝热运动时的贝里相位变换（文献 2.6）构成一个辫群表示（文献 2.21）。

尽管这听起来颇为合理，但据我们所知，唯一一个从物理学第一性原理出发的详细推导，是我们近期在 [SS22-Ord，第3节3]中的论证；而其中的结果更加具体，也略有不同：任意子波函数由特定的 K 理论（文献 2.16）修正给出（参见第4页），具体而言，是对 $\widehat{\mathfrak{su}_2}_k$-单值化编织规则（$\mathfrak{su}_2$-任意子，参见 [SS22-Ord，注3.12]）的修正。更具体地说——这也是当前讨论的关键所在——任意子编织由 $\mathfrak{su}_2$-KZ 联络（文献 2.24）的全纯给出，该联络作为扭曲广义上同调群丛（文献 2.15）在点的构型空间（文献 2.18）上的高斯-马宁联络（文献 2.23）而产生。尽管这种任意子的上同调推导与辫融合范畴的传统公设存在重叠——经过一些修正和具体化之后——（见 [SS22-Ord，注3.12]），但它有一个显著差异：它可以直接（通过第4节中的翻译）用于在同伦类型化编程语言中进行认证（相关讨论见第6节）。

文献 2.10 (动量空间中能带节点的编织。稍作思考便会发现，拓扑编织量子门这一概念（文献 2.4）仅依赖于量子材料抽象构型空间（其基态，文献 2.7）的性质，而不依赖于一个未明言的假设：该空间与物理空间（“位置空间”）相等同。尤其是，如果量子材料的动量空间（布里渊环面，文献 2.7）中存在合适的拓扑缺陷，那么通常针对位置空间中可能存在的任意子缺陷（文献 2.17）所提出的所有论证，都可立即应用于该材料的动量空间。尽管这一可能性直到最近才受到关注（[SS22-Ord，注 3.9]），拓扑量子材料中的动量空间缺陷早已广为人知、得到充分确立并经过深入研究：它们就是拓扑半金属中的能带节点（即狄拉克点/外尔点）。此外，通过操控外部参数（绝热地，文献 2.6）来控制这些节点的移动并使其可能发生编织（文献 2.20），已在多种（超）材料中得到证实，而且似乎是一种相当普遍的性质。相关参考文献汇总于 [SS22-Ord，注 3.9]。

文献 2.11 (强关联量子系统的全息模型)。不仅是拓扑序物态的物理学（文献 2.4），一般而言，任何强相互作用量子系统的物理学都不属于（例如 [Str13]）传统上可用的多数“微扰”解析方法的适用范围。人们常说量子场论是迄今构想出的最精确物理理论，但这一说法实际上默指一个特殊情形：现有的微扰方法恰好能够很好地发挥作用，即量子电动力学（QED）。然而，即便是室温下的量子色动力学（QCD）——它旨在描述的正是普通物质（的原子核）——其耦合也如此之强，以至于目前尚无一套连贯的理论（只有一大堆不完整的模型和计算机格点模拟）。要找到 QCD 的非微扰完备化，详细解释“组成夸克”如何被“禁闭”在原子核等强子束缚态中，是一项尚未解决的“千禧年难题”（相关优秀介绍见 [RS20][Ro21][DRS22][Ro22]）。

解决这一问题的一种有前景的方法，是聚焦于“通量管”的动力学。人们认为，通量管连接任意两个夸克，并由此使它们紧密束缚。微妙的量子效应使这些通量管表现得 [Po98][Po99][Po02]仿佛是弦，在更高维的时空中传播，而它们的端点（夸克）则被限制在实际时空超曲面上。如今，这一超曲面呈现为嵌入更高维“体时空”中的（$3+1$）维超曲面（称为“膜”）。这种表述后来被称为“全息量子色动力学”（综述见 [Er15][RZ16, §4]），是较著名但不太现实的反德西特/共形场论对应 的一种变体（综述见 [AGM00]）。在弦理论中，将强耦合凝聚态物质系统描述为相交膜模型的类似方法，称为全息量子

物质（或其变体名称）[ZLSS15][HLS18]。在这里，核力由“贝里联络”（文献 2.6）担当，夸克则由费米准粒子担当；参见 [SS22-Def，表 1]。

虽然这种强耦合量子理论的弦理论图景的完整非微扰完备化也仍有待构建（暂定名：“M理论” [Du99]），但在此情形下，已有一整套相互关联的线索和一致性检验可供参考（这得益于后来被称为“第二次超弦革命”的洞见 [Schw96]）。正是通过探索这些线索（见 [SS22-Def], ，并参见 [SS22-Conf]），人们发现了本文讨论的拓扑量子门模型，见[SS22-Ord]。本文并不需要（也不假定读者具备）这些弦理论背景知识，但了解这些背景或许有助于从更广阔的视角理解这些构造。

文献 2.12 (拓扑学与同伦论)。严格来说，拓扑学研究一般空间——“拓扑空间”，例如任意维数的欧几里得空间，也包括映射空间（如 [AGP02, §1]）、构形空间（文献 2.18）、参数空间等——在连续变形（同胚）下的性质；而同伦论研究这些空间在较宽松的（弱）同伦等价概念下的性质（该概念涉及空间之间连续映射的连续变形）：同伦类型。不过，拓扑的一词常被用于更准确地说应称为同伦的情形，因此术语上的差异变得模糊（参见 [Mill19, p. vii]）。这在“拓扑量子计算”（文献 2.4）中尤为明显；它实际上关注的是由连续（因而也是拓扑的）计算路径的同伦类参数化的量子门，其中对变形（即同伦）的不变性体现了计算对噪声的鲁棒性，参见第3节中的图 H 。

这样一来，“拓扑量子计算”中的限定词“拓扑”与“同伦类型论”中的“同伦”实际上是同义的！

另一方面，还可以进一步区分：

- **点集拓扑**——研究熟悉的空间概念，即由集合中的点构成、并带有拓扑凝聚结构的空间的拓扑学／同伦论；
- **代数拓扑**——通过对拓扑空间的（上）同调群进行同调代数研究拓扑空间（文献 2.15）；而这些同调群往往只取决于底层的同伦类型，因此该学科实际上事实上属于同伦论；
- **抽象同伦论**——关注拓扑空间之外的同伦类型模型——特别是单纯集合，参见下文 (107) 附近——以及各种变体，例如局部、等变、稳定等同伦类型。
- 所有这些概念的**参数化**版本，其中所有空间及其上的构造都可以随某个参数空间而变化。

基础点集拓扑的教科书式导论包括 [Ja84][Mu13] ，而以这些拓扑基础为依据的代数拓扑和同伦论导论包括 [Sp66][Ja84][Ro88][Br93][Ha02][AGP02][tD08][Str11][Ar11]。（关于该领域的早期历史，参见 [Hi88]。）我们在第4节需要的参数化点集拓扑／同伦论，依照 [MS06], ，在 [Bo70][BB78]中作了介绍。抽象同伦论（可追溯至 [Br65][Qu67][Br73][Ad74]）例如在 [KP97][Ri14][Ri20], 中有所回顾；而我们上下文所需事实的简明总结见于 [FSS20-Cha, §A][SS21-Bun, §3.1]）。

出于标准的技术原因，我们假设下文中的所有拓扑空间均满足：(a) 紧生成的（参见[SS21-Bun, (1.2)]）；(b) 具有某个CW复形的同伦类型。

文献 2.13 (同伦群)。拓扑空间X（文献 2.11）的基本同伦不变量是其同伦群 $\pi_n(X)$（例如， [AGP02，第3]节）。其中最重要的是连通空间的基本群 $\pi_1(X)$，它是空间中以任意固定点为基点的闭环的变形类所构成的群（例如， [AGP02，第 2.5]节）。类似地，连通空间的高阶同伦群 $\pi_n(X)$是从n球面S^n 到X 的基点映射的变形类——当$n \geq 2$时，这些都是阿贝尔群。

最后，对于不一定连通的空间X ，我们有其道路连通分支的集合，记作 $\pi_0(X)$。例如，映射空间Map(Y, X)的连通分支就是从$Y \to X$的映射的同伦类。

文献 2.14 (Eilenberg-MacLane 空间)。对于任意阿贝尔群A 和$n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ，存在一个在同伦等价（文献 2.12）意义下唯一的连通拓扑空间，称为*Eilenberg-MacLane (EM)* 空间（例如， [AGP02，第6]节），也等价地记作$K(A,n)$或$B^n A$ 。其同伦群（文献 2.13）仅在次数n处为A ：

$$\pi_{n'}\left(B^n A\right) \simeq \begin{cases} A & \text{if } n' = n, \\ * & \text{otherwise}. \end{cases}$$

如果 $n = 1$ ，那么 BG 也存在于非阿贝尔的 G 群中，称为 G-主丛的分类空间。对于阿贝尔群 A，其第 n 个 EM- 空间自然等价于（$n+1$）阶

$$B^n A \simeq \Omega B^{n+1} A$$

这使它们构成一个谱HA，即 A 的 Eilenberg-MacLane谱。

最后，给定一个群G（可能是非阿贝尔的）通过同态作用于阿贝尔群A，我们有对分类空间G上的EM空间的相应参数化：

$$\begin{array}{ccc} B^n A & \longrightarrow & B^n A /\!\!/ G \\ & & \downarrow \\ & & BG \end{array}$$

文献2.15 （**上同调**）。拓扑空间（文献 2.12）的普通上同调群 $H^n(X;A)$传统上是用上链引入的，但对我们的目的而言，等价且至关重要的重新表述是（例如 [AGP02, §7.1, Cor. 12.1.20] 参见 [FSS20-Cha, Ex. 2.2]）将其视为映入一个 Eilenberg-MacLane空间（文献 2.13）的映射的同伦类：

$$H^n(X;A) \;=\; \pi_0\big(\mathrm{Map}(X, B^n A)\big)\,.$$

若$n = 1$ 和G 是一个可能为非阿贝尔的群，则

$$H^1(X;G) \;=\; \pi_0\big(\mathrm{Map}(X, BG)\big)$$

称为X的第一非阿贝尔上同调。这是广义非阿贝尔上同调的显然特例（参见[FSS20-Cha, §2.1]）：对于任意空间 $\mathscr{A}$，我们取X 的、系数取为 $\mathscr{A}$的上同调为

$$\mathscr{A}(X) \;:\equiv\; \pi_0\big(\mathrm{Map}(X, \mathscr{A})\big)\,. \tag{1}$$

例如，若 $\mathscr{A} = S^n$，则得到一种称为 上同伦。的上同调理论

通常会考虑这样的特殊情形：$\mathscr{A}$ 是带基点空间序列 $\{E^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 中的一部分，其中每个空间都配备了到下一个空间的基点环路空间的弱同伦等价（一个空间谱 ）。在这种情况下

$$E^n(X) \;=\; \pi_0\big(\mathrm{Map}\big(X, E_n\big)\big)$$

是 X的 *Whitehead*广义上同调，系数为 E。

例如，若 $E_0 =$Fre　　$\mathrm{d}^{\mathbb{K}}$ 是可分无限维 $\mathbb{K}$-希尔伯特空间上的*Fredholm*算子 空间，　　n

$$\mathrm{KU}^{-n}(X) \;=\; \pi_0\left(\mathrm{Map}\big(X, \Omega^n \mathrm{Fred}^{\mathbb{C}}\big)\right), \qquad \mathrm{KO}^{-n}(X) \;=\; \pi_0\left(\mathrm{Map}\big(X, \Omega^n \mathrm{Fred}^{\mathbb{R}}\big)\right)$$

是 X的拓扑K上同调（参见文献 2.16）

更一般地，如果系数空间 $\mathscr{A}$ 受群 G 作用（为便于说明，我们假设该群是离散的），那么可以在分类空间 BG 上构造一个 $\mathscr{A}$-纤维丛，它与万有 G-主丛 EG 相关联（也称为 $\mathscr{A}$ 关于 G 的 *Borel*构造 或 同伦商 ）。相应地，将上同调的定义 (1) 推广到“BG 上的切片范畴”，便得到广义上同调的 扭曲上同调 （见 [FSS20-Cha，第 2.2] 节）

$$\underset{\substack{\text{twisted}\\ \text{cohomology}}}{\mathscr{A}^{\tau}(X)} \;:\equiv\; \pi_0\Big(\mathrm{Map}\big(X, \mathscr{A}/\!\!/G\big)_{BG}\Big) \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} & & \mathscr{A}/\!\!/G \\ & \overset{\tau}{\nearrow} & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\text{twist}]{} & BG \end{array} \right\}_{/\mathrm{hmtp}} \;=\; \left\{ \begin{array}{ccccc} & & E & \longrightarrow & \mathscr{A}/\!\!/G \\ & \overset{\tau}{\nearrow} & \downarrow & (\mathrm{pb}) & \downarrow \\ X & = & X & \xrightarrow[\text{twist}]{\tau} & BG \end{array} \right\}_{/\mathrm{hmtp}}$$

（universal local coefficient bundle；local coefficient bundle）

如果 $\mathscr{A} = B^n\mathbb{C}$ 是复数环（视为离散阿贝尔群）的 n 重去环化，而 $G = \mathbb{C}^\times$ 表示其单位群（离散群！）及其在 $\mathbb{C}$ 上的典范乘法作用，那么右侧的局部系数丛 E 对于 $n = 0$ 而言，就是一个平坦线丛 $\mathscr{L}$（文献 2.22），或者更确切地说，是其底层的水平覆盖空间（文献 2.30）。

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L} & \longrightarrow & \mathbb{C}/\!\!/\mathbb{C}^\times \\ \downarrow & (\mathrm{pb}) & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\tau]{} & B\mathbb{C}^\times \end{array}$$

（局部系统 平坦复线丛；……的分类空间 复数单位离散群）

对于一般的 n，它是扭曲的普通复上同调的局部系数丛，其系数为

$$H^n(X;\mathscr{L}) \;=\; H^{n+\tau}(X;\mathbb{C}) \;\simeq\; \pi_0\Big(\mathrm{Map}\big(X, B^n\mathbb{C}/\!\!/\mathbb{C}^\times\big)_{B\mathbb{C}^\times}\Big)\,. \tag{2}$$

这就是为什么平坦向量丛常被简称为“局部系统”（即扭曲普通上同调的系数），参见文献 2.22。关于相应扭曲上同调的讨论可追溯至 [De70, §2, 6], , 教科书式的论述见 [Vo03II, §5.1.1]。

以“局部系统的上同调”的形式， $\mathscr{L}$ 在（2）左侧的扭曲上同调被广泛用于讨论超几何积分构造（文献 2.25）。

文献 2.16（拓扑相的 K理论分类）。在（极）低温下，“弱相关”晶体材料中的电子会在构成晶格的原子核的库仑背景中，逐步填充最低可用的单电子基态（例如 [Va18，第 2] 节）。随着电子的波矢/动量遍历可用的晶格动量所构成的布里渊环面 （例如 [FM12，第 52] 页），这些价态 在布里渊环面上形成一个复向量丛（18）。如果这个向量丛是“拓扑非平凡的”，则称该晶体材料处于物质拓扑相 （文献 2.7）。

更具体地说，对电子状态进行完整的相对论计算表明，其基态丛在布里渊环面的拓扑K上同调（文献 2.15）中构成一个类，该类由电子价带丛以及可能混入的正电子基态组成（[SS22-Ord，事实 2.3], ，这一观点最初由 [Ki09]提出，颇具影响力）。此外，如果电子动力学遵循晶体对称性，那么其价带丛也遵循这些对称性，并由布里渊环面上相应的等变K理论分类 [FM12]。更一般地说，如果电子动力学还遵循某些内部对称性和/或受到贝里相位的影响，那么其基态由TED K理论分类 [SS22-Ord，第2.3、3.1]节。

然而，如果强关联（强相互作用，参见文献 2.11）材料中的电子彼此相互作用，那么更恰当地说，其基态必须由联合的n电子状态表示——n 越大，相互作用越强。根据泡利不相容原理（该原理禁止任意一对动量重合时n电子状态成为非平凡状态），这些状态在布里渊环面上n个不同点的构型空间（文献 2.18）上构成一个向量丛。因此，通常对这类n点构型空间的TED K上同调，才是此类拓扑序（强关联）拓扑相的分类依据 [SS22-Ord，第3.2]节。

文献2.17（任意子）。按照惯例（关于这一主题及以下方面的文献综述见 [SS22-Ord，第3节。3]），人们通常将任意子这一概念解释为假想的粒子种类：从概念上说，它们介于已确立的玻色子与已确立的费米子之间——玻色子在成对交换时，其联合量子态不发生任何变换；费米子在成对交换时，其联合量子态则会获得一个符号 $-1 = \exp(\mathrm{i}\pi) \in \mathrm{U}(1)$：人们设想任意子在成对交换时可获得任意给定的相位 $\exp(\phi\mathrm{i}) \in \mathrm{U}(1)$，由此得名。在温和的假设下，这种情况（仅）对余维为2的量子粒子才有非平凡意义；因此，尤其适用于有效二维材料中的点状（准）粒子激发（例如类似石墨烯的原子单层晶体）。对这一概念作表面上显而易见的推广，如果交换相位是作用于较高维联合量子态希尔伯特空间上的某个酉群 $\mathrm{U}(n)$ 中更一般的酉算子，人们便称之为非阿贝尔的任意子。

如需了解近期关于任意子物理的综述文献概况，可参见例如 [MMN23]。

然而，尽管这种动机广受欢迎，它却掩盖了一个关键事实：此类任意子相位因子理应取决于任意子彼此绕行所经过的动力学编织路径（文献 2.20）（从而构成一种辫群表示，文献 2.21）；而玻色子/费米子相位则是其波函数的运动学属性，即使没有发生任何有效运动，这些相位也会受到约束。事实上，仔细考察理论物理文献中讨论的更具体的任意子模型，首先会发现任意子有两种截然不同的重要形态（参见 [SS22-Ord，表 5]），而这两种形态都不太符合上述流行的直观动机：

一方面，阿贝尔任意子被认为可建模为类费米子的准粒子，它们通过所谓的“虚规范场”相互耦合，因此其量子传播 会相对于彼此获得阿哈罗诺夫–玻姆相位 。另一方面，非阿贝尔任意子被认为是拓扑有序量子材料中的缺陷，它们在经典参数演化驱动下绝热运动 （文献 2.6）时会获得贝里相位。与此同时，人们或许可以说，关于这类非阿贝尔任意子如何在现实材料中出现的微观理解，仍然难以捉摸（参见文献 2.8）。

我们认为，第一个令人满意的任意子理论模型——即（a）将这两种概念统一起来，同时（b）将其理论恰当地嵌入预期承载它们的周围物质拓扑相（文献 2.7）理论之中——是 [SS22-Ord，第3节。3], 其中读者还可找到对该主题传统文献的广泛引述。 [SS22-Ord，第3节。3] 中的任意子模型归结为：

(1) 任意子量子基态是给定量子材料的带穿孔的布里渊环面中点的构形空间（文献 2.18）的 TED K理论（文献 2.16）中的类——由其 TED 陈特征近似，而后者是普通TED 上同调中的一个类；**(2)** 任意子相位因子是定义在布里渊环面中穿孔点的构形空间上的、所得 TED（K）上同调群丛的高斯-马宁联络（文献 2.23）的整体量。

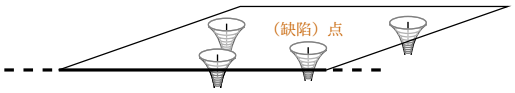
[SS22-Def] 的主要结果是：在以普通 TED 上同调而非完整 TED K理论为基础的近似下，这一方案实际上再现了任意子编织预期描述中的大部分内容，因此可从第一性原理推导出该描述。提升至完整 TED K理论后，则会预言对这一传统图景的微妙“挠性”修正（参见第 4 页）。

文献 2.18（（缺陷）点的构型空间）。通过绝热（文献 2.6）编织（文献 2.20）来控制拓扑量子计算量子门操作（文献 2.4）的参数，是量子材料（文献 2.7）中缺陷（文献 2.17）的构型；人们通常默认这些缺陷是空间位置，但它们也可能是由“动量空间”中的点给出的临界动量（文献 2.10）。具体而言，若要使这些缺陷具有任意子性质，它们在环境量子材料中的余维必须为 $=2$；对于点状缺陷，这意味着量子材料必须是有效二维晶体，由单层或极少数原子层构成（例如如今广为人知的石墨烯）。本文聚焦的正是这种情形。

关键在于假设这些缺陷彼此保持分离，因此缺陷点具有不同的位置（也可能意味着：它们在动量空间中具有不同的位置，从而具有不同的波矢！）。在物理现实中，或许可以迫使缺陷合并，但对于我们所关注的材料而言，这应当对应于系统基态发生实质上的不连续变化；基于与我们不考虑彻底破坏晶体结构这一过程相同的理由，我们也忽略这种情况：虽然在物理上可行，但这会使我们脱离量子材料这一研究对象的范围，而这里所关注的正是对这类材料的描述。

总之，拓扑量子门所涉及的缺陷位置参数在曲面上不同点的构型空间中移动。对于实际的二维晶体而言，这个曲面是一个（布里渊）环面，但为简便起见，我们在这里忽略环面的整体拓扑；这意味着我们考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中点的构型，在这一语境下通常将其视为复平面 $\mathbb{C}$。

图 D——平面中（缺陷）点的构型 .
在实验室实现中，平面代表晶体量子材料的原子单层（至多是薄薄的多层结构）（文献 2.7），或其波矢的傅里叶对偶空间（对应晶体中的激发）；而这些点则代表该结构中的任意子缺陷（文献 2.17）（例如二维半金属的能带节点，文献 2.10）。
从数学上说，整个构型本身就是平面中点的构型空间（3）里的一个点（参见文献 2.19）。共同移动缺陷的位置，意味着沿着这个构型空间中的一条曲线移动（文献 2.20），也就是让这些点沿着一条“辫”共同移动（文献 2.20）。



这种平面中点的构型参数空间早已在纯数学领域得到研究 [FaN62]; [FH01], 的教材对此作了介绍，温和的入门介绍还包括 [Will20][Wils18], , 更多细节可见 [Co09], , 而关于我们所涉上下文的简要回顾见 [SS22-Conf]。它们在数学上的许多趣味之处，在于这样一个事实（5）：这些空间是辫群的 Eilenberg-MacLane 空间（文献 2.14） [FaN62][FoN62] （文献 2.20）。

具体而言，平面 $\mathbb{R}^2$ 中由自然数 $+1$ 个有序点（带有标签 1、2、.....、自然数 $+1$，参见文献 2.19）的构型空间是积空间 $(\mathbb{R}^2)^{N+1}$ 中的补空间，即由自然数 $+1$ 个点构成（这些点可以重合）的空间中，去掉任意一对点重合所在的子空间：

$$\underset{\text{configuration space of ordered points}}{\underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}\left(\mathbb{R}^2\right)} :\equiv \underbrace{\left(\mathbb{R}^2\right)\times\cdots\times\left(\mathbb{R}^2\right)}_{N+1\text{ factors}} \underset{\text{minus}}{\setminus} \underset{\text{subspace where any pair of points coincide}}{\left\{ z_1,\cdots,z_{N+1}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underset{I,\neq J}{\exists}\; z_I = z_J \right\}} \tag{3}$$

对称群 Sym(自然数 $+1$) 显然通过置换标签的顺序作用于这样的有序构型空间；而此作用的商就是无序配置空间

$$\underset{\text{configuration space of un-ordered points}}{\mathrm{Conf}_{N+1}(\mathbb{R}^2)} :\equiv \underset{\text{configuration space of ordered points}}{\underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^2)} \underset{\text{modulo}}{/} \underset{\text{permutations}}{\mathrm{Sym}(N+1)}. \tag{4}$$

这些构型空间 (3) (4) 自然继承了拓扑空间（文献 2.12——事实上是光滑流形）的结构，而相关论述指出（[FaN62, p. 118][FoN62, §2], 见 [Wils18, §2.2][Will20, pp. 9]），其底层同伦类型（文献 2.12）是（纯）辫群（文献 2.20）的去环化（第一个 Eilenberg-MacLane空间，文献 2.14）：

$$\begin{aligned} \underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^2) &\underset{\text{whe}}{\simeq} B\,\mathrm{PBr}(N+1), \quad \text{i.e.:} \quad \pi_k\Big(\underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^2)\Big) = \begin{cases} \mathrm{PBr}(N+1) & \text{if } k=1 \\ * & \text{otherwise} \end{cases} \\ \mathrm{Conf}_{N+1}(\mathbb{R}^2) &\underset{\text{whe}}{\simeq} B\,\mathrm{Br}(N+1). \end{aligned} \tag{5}$$

这里非平凡的论断是，高阶同伦群 $\pi_{k\geq 2}$ 全都平凡：构型空间是连通的（$\pi_0 = *$），这一点相当明显；而（纯）辫群则可理解为被 定义 (7) 为剩下的非平凡基本群 π_1。

虽然研究得不那么广泛（除超几何 KZ 解这一领域外，文献 2.25），但对我们的分析至关重要的是，这些有序 构型空间通过自然的局部平凡纤维化彼此相连，其映射会忘掉构型中的最后一个点（见 [FaN62，定理 3],；另见 [Bir75，定理 1.2], ； [Wils18，第 2.1] 节中的阐述）：

$$\begin{array}{ccc} \underset{\{1,\cdots,N+2\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^2) & & (z_1,\cdots,z_N,z_{N+1},z_{N+2}) \\ \downarrow \mathrm{pr}_{N+1}^{N+2} & & \\ \underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^1) & & (z_1,\cdots,z_N,z_{N+1}) \\ \downarrow \mathrm{pr}_{N}^{N+1} & & \\ \underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^1) & & (z_1,\cdots,z_N,). \end{array} \tag{6}$$

在同伦类型上，这给出了解环辫群的纤维化（206），它推动了最终构造中的任意子编织（225）。

文献 2.19 (任意子种类)。关于构型空间的数学文献（文献 2.18）通常默认考虑无序配置空间（4）及其对应的一般辫群（文献 2.20）。但符合物理实际的缺陷（图 D）往往呈现不同的“种类”，因而带有不同的标签，所以用有序配置空间（3）及其对应的纯辫群（7）来描述。

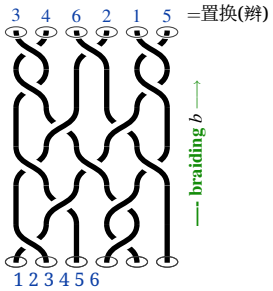
从辫表示（文献 2.21）的角度来看，相关物理学文献将关注点转向编织张量/融合范畴（参见 [SS22-Ord，注 3.12]），体现了这种差异；这也是编码辫子的每条股线都带有一个标签（此处为范畴中的一个对象）的一种方式。

具体而言，对于由 $\mathfrak{su}_2$ 共形块上的 KZ 联络的全纯／输运所产生的现实 单值化编织表示，可能的任意子种类由权标记（在共形场论中称为“最高权”，见[SS22-Def，第 8] 页），也就是由自然数 $\mathrm{w} \in \{0,1,\cdots,k\}$ 标记，其范围从平凡情形 0（对应于：没有缺陷）到一个固定的“层级” $k = \kappa - 2 \in \mathbb{N}$，该层级决定了由此产生的编织相位，见下文（53）。

例如（参见 [JS21][GHL22]以及 [SS22-Def，第 5.2] 节所列的其他参考文献）：

- 广为人知的马约拉纳任意子 （亦称伊辛任意子）对应于$k = 2$ $(\kappa = 4)$，其权为 0、1、2 的种类通常分别记作“1”、“σ”和“ψ”。
- 第一类其编织门对量子计算具有万有性的任意子，是对应于$k = 3$ $(\kappa = 5)$[2]的“斐波那契任意子”。
- 此外，还有“对费米子”以及更高层级$k \geq 3$ 上的一整类任意子 $\mathfrak{su}_2$ 类别。它们（目前）尚未拥有自己的名称，但都能实现拓扑量子计算的万有性（见 [KMM23]）。

文献 2.20 (编织)。回顾一下（例如，见 [Mi72]），“群”指的是作用于某个对象的一组操作，这些操作可以结合地复合且可逆（参见第 53 页）。所谓辫群（源自 [Ar25], ，专著包括[FoN62][Bir75], ，阐述见 [Will20]），是指平面上固定数目$N+1$ 个不重合点从某个固定构型出发、再回到该固定构型的联合连续运动所构成的群。在时空中，这些点在此类操作下所描绘的“世界线”看起来像一条有$N+1$ 股线的辫子，因此得名。

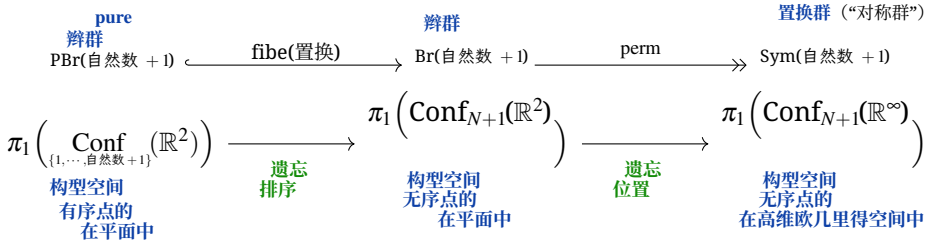


与实际的辫子一样，这里约定：如果两个此类操作之间的差异仅在于对“股线”进行连续变形，且在此过程中既不使其断裂也不使其相交，那么就将二者视为相同；换言之，即在环境 $\mathbb{R}^3$ 中进行同痕变形。

简明而精确地说（稍后我们会给出更明确的描述），只需指出，辫群就是平面中点的构型空间的基本群 π_1（文献 2.13，文献 2.18）。这里，构型中的点是否视为有序的 （用数字 $1,\cdots,$自然数 $+1$标记）至关重要：若如此，则称为纯辫群；若视为不可区分的（尽管无论如何，它们的位置都各不相同！），则称为通常意义上的辫群：沿一般辫b 运动后，给定点的次序可能会发生置换

[2]与物理学文献，尤其是关于斐波那契任意子的文献进行比较时，请注意，对于处于奇数层级的任意子，通常只列出偶权重物种。

置换为 perm(b)；当且仅当该置换是平凡置换时，这个辫才是纯的：



(7)

由于这些构型空间没有其他非平凡的同伦群（5），垂直等同也就意味着，这些构型空间的同伦类型等价地构成了辫群的 1 次数去环化空间，或分类空间，或 Eilenberg-MacLane 空间（文献 2.14）；特别是：

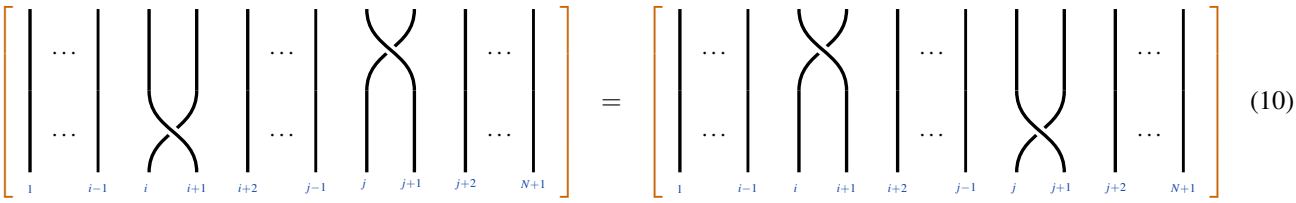
$$\underset{\{1,\cdots,N+1\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{R}^1) \underset{\text{whe}}{\simeq} B\,\mathrm{PBr}(N+1) \underset{\text{whe}}{\simeq} K\big(\mathrm{PBr}(N+1),1\big)\,. \tag{8}$$

描述辫群 Br($N+1$) 的一种更明确的方式是首先注意到，显然，任意辫都可以由这类初等辫复合而成；它们所做的只是让一对相邻点彼此交错而过：



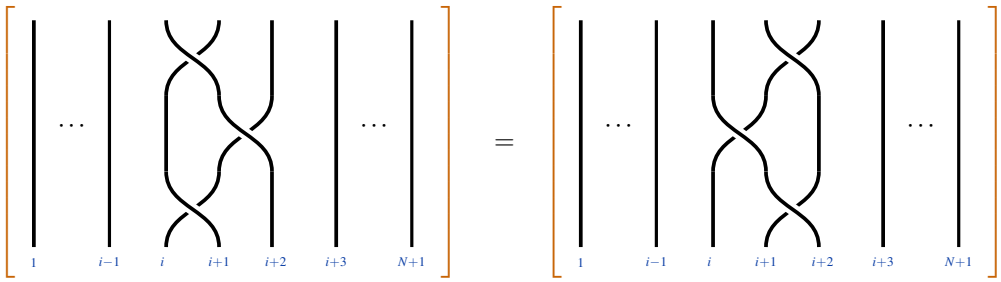
(9)

虽然任意辫都可以由这些生成元复合而成，但并非每一对这样的复合都会产生不同的辫。例如，如果一对这样的初等辫作用于不相交的辫股，那么在适当的辫的连续变形意义下，它们的施用顺序无关紧要：



(10)

另一方面，当连续的三个初等辫确实作用于相同的股线时，显然可以通过如下连续变形将它们联系起来：



(11)

Artin 的一个经典定理 [Ar25, §3] (参见 [FoN62, §7])指出，这些是这些生成元之间唯一的关系，也就是说，辫群由这些生成元和关系给出表示，其含义与群表示的一般意义相同（例如， [MKS66][Jo90],参见第 64 页）：[3]

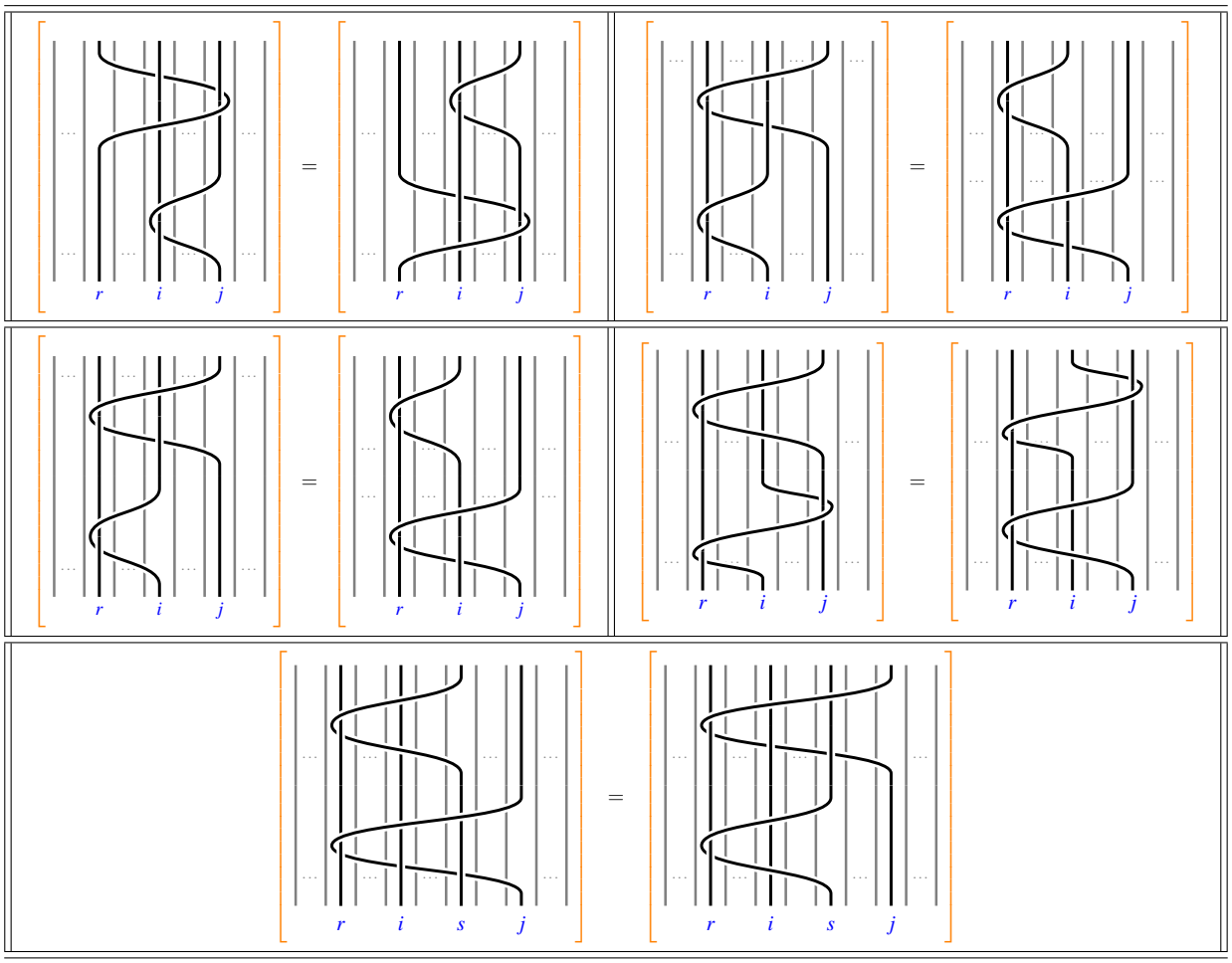
[3]在 (12) 中，我们将单位元纳入生成元集合，只是为了遵循下文 (179) 中采用的惯例；在该处，将自由群构造视为作用于带基点集合上的运算最为自然。

$$\underset{\text{braid group}}{\mathrm{Br}(N+1)} \simeq \mathrm{FreeGrp}\big(\underbrace{\{e, b_1, \cdots, , b_n\}}_{\text{Artin generators (9)}}\big) \Big/ \left(\begin{array}{l} b_i \cdot b_j = b_j \cdot b_i \text{ if } i+1 < j \\ b_i \cdot b_{i+1} \cdot b_i = b_{i+1} \cdot b_i \cdot b_{i+1} \end{array} \right) \qquad (12)$$

Artin 辫关系10 11 ( )( )

对于纯辫群（7）也是如此：显然，任何纯辫都可以通过复合这样的“编织”得到，其中一股线恰好套住另一股线：

$$\underset{\substack{(i,j)\text{第} \\ \text{g生成元 g} \\ \text{纯辫}}}{b_{ij}} :\equiv \quad \left[\begin{array}{c} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \\ \\



(17)

请注意，所有这些纯辫关系都是交换子关系 [Le10，注 3.10]，，即一个纯辫生成元与若干纯辫生成元的乘积可交换，例如 (14) 中的那些关系。这意味着，从纯辫群到一个阿贝尔群的群同态，可由向纯阿廷生成元 (13) 任意指定阿贝尔群元素来给出（用于下文的引理 6.5）。

文献 2.21 (酉辫表示)。酉辫表示（参见 [Ab15]）是由酉算子（作用于任意希尔伯特空间）给出的（纯）辫群（文献 2.20）的线性表示，因此是如下形式的群同态

$$\rho : \underset{\text{辫群}}{\mathrm{Br}(\text{自然数}+1)} \xrightarrow{\text{同态}} \underset{\text{酉群}}{\mathrm{U}(k)}, \qquad \text{或者直接} \qquad \rho : \underset{\text{辫群}}{\overset{\text{pure}}{\mathrm{PBr}}(\text{自然数}+1)} \xrightarrow{\text{同态}} \underset{\text{酉群}}{!\ \mathrm{U}(k)}。$$

在拓扑量子计算（文献 2.4）的上下文中，可以设想 $\rho(b)$ 是作用于有效二维拓扑量子材料（文献 2.7）基态上的酉变换，该变换由沿给定辫 b（文献 2.20）绝热移动 自然数 $+1$ 个任意子（文献 2.17）缺陷点（文献 2.18）所诱导。

一些作者（例如 [KL04]）考虑非纯辫群（7）的表征，特别是在 $k = (\text{自然数}+1)d$ 的情形下，每条辫股都为整个希尔伯特空间贡献一个d维张量因子（因此满足第一个阿廷辫关系（10））。此时，剩余的第二个阿廷辫关系（11）的表征条件即著名的杨-巴克斯特方程 （例如 [YG91][Ab15，§5]），它在纯代数中得到了广泛研究。

同样地，如果股线（任意子）带有标签（不同的任意子种类，文献 2.19），从而我们考察的是<style id='1'>纯辫群的表征，那么许多作者会研究辫融合范畴所对应的代数结构；这一研究可追溯至 [Ki06, §8, §E][NSSFD08, pp. 28][Wa10, §6.3]，并在大量综述中反复出现，例如 [RW18, §2.4.1][Ro22, §2.2]。

然而，被认为可在量子材料中物理实现的编织变换，更具体地说是作为单值化表征出现的，即共形块丛上的 *Knizhnik-Zamolodchikov*联络的全纯/输运（例如 [TH01][Ab15，第4][GHL22]节），参见文献 2.24 及图 *A*。

文献2.22 （平坦向量丛、局部系统、全纯与单值化）。无论好坏，纯数学中的下列术语彼此大致等价；其用法选择更多取决于学科上下文和作者背景，而非其作为现象本身的潜在内涵，这反映了后者的重要性：

- 平坦向量丛
- 局部系统（系数的）
- 全纯（平坦平行移动的）
- 单值化

首先，（拓扑意义上的，文献 2.12）向量丛 是向量空间的局部平凡纤维化，也就是说，是一个拓扑空间之间的连续映射 $p_{\mathscr{H}}\colon \mathscr{H} \to X$，使得对于开覆盖 $\{U_i \subset X\}_{i\in I}$, $\coprod_{i\in I} U_i =: U \twoheadrightarrow X$，它看起来像某个“典型纤维”向量空间 $\mathscr{H}_0$ 上的平凡纤维化 $\mathrm{pr}_U\colon U \times \mathscr{H}_0 \to U$；并且 pr_1由覆盖交集 $U \times_X U \rightrightarrows U$ 上诱导的过渡函数 是 pr_2 连续且纤维逐点线性的。

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathscr{H}_0 & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathscr{H}}} \\ U & \twoheadrightarrow & P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{向量丛} \\ \\ \\ \text{开覆盖} \quad \text{基空间} \end{array} \tag{18}$$

在第3节关于量子物理的应用中，基空间P 是一个经典参数 空间，而纤维 $\mathscr{H}_p$ （位于p 上）是（或者更准确地说：其底层结构是）由这些外部参数决定的量子系统的量子态希尔伯特空间。

现在，这个向量丛上的平坦联络 （即将其各个纤维彼此连接起来）是一条规则，用于将基空间P 中的路径提升（文献 2.30）到全空间 $\mathscr{H}$中；对于起点的每一种提升方式都适用，并满足：（1）这些提升只依赖于路径的同伦类（端点固定）；（2）与路径的拼接相容；（3）将常值路径提升为常值路径。更准确地说，这种提升称为平坦联络的平行移动；而联络本身则被理解为提升“无穷小路径”（路径的切向量）的规则。当拓扑向量丛配备了可微结构时，这一概念便有意义。

沿闭合 路径（表示底空间P基本群中的元素，文献 2.13）进行的这种平行移动称为平坦联络的单值化 （它构成了基本群在基点上方纤维上的一个线性表示）；而这种单值化等价地刻画了P每个连通分支上的平坦联络（[De70，§I.1],例如参见 [Di04，命题 2.5.1]）。

因此，向量丛 $\mathscr{H} \twoheadrightarrow P$ 上的平坦联络会在局部将 $\mathscr{H}$分层为水平子空间，从而构成覆盖空间 $\mathscr{H}^\delta \twoheadrightarrow P$ （文献 2.30）。最后（不过这里我们不再需要这一点）：这个覆盖空间$\mathscr{H}^\delta$ 的局部截面层 是一个向量空间的局部常值层，因此称为局部系统 （这一术语可追溯至 [St43],教科书中的论述包括 [Vo03I，§9.2.1][Di04，§2.5]）。这一术语是系数局部系统的简称，指将这类平坦向量丛用作扭曲上同调的系数（文献 2.15）。

文献 2.23 (高斯-马宁联络)。 从参数化的视角研究代数拓扑（文献 2.12），自然会引出对参数空间上的纤维化（上）同调群（文献 2.15）的考察。在适当条件下，这些基空间上的（上）同调群丛带有典范平坦联络（文献 2.22），这意味着存在一种典范方式，可以沿着参数值之间的短路径识别（上）同调元素。

在代数几何的上下文中，这种高斯-马宁联络 的概念归功于 [Ma58] [4]；另见 [Gro66][Ka68][KO68][Gri70]。在 §4 中，我们关注拓扑纤维丛上的扭曲上同调（文献 2.15 ），遵循 [EFK98, §7.5][Vo03I, Def. 9.13][Ko02, §1.5, 2.1], ，其中超几何积分构造 （文献 2.25）表明，高斯-马宁联络的一个特例是*Knizhnik-Zamolodchikov* 联络。

文献 2.24 (共形块上的Knizhnik-Zamolodchikov 联络)。有效二维拓扑量子材料（文献 2.7）的拓扑有序基态的希尔伯特空间，随任意子缺陷（文献 2.18）的位置而变化；人们认为（文献 2.4），这些空间就是切恩－西蒙斯场论的状态空间，或者更确切地说，是其“手征半部分”，称为 WZW（又称仿射流代数）共形场论的“共形块”空间（参见 [FMS97, §C]）。 [SS22-Ord, §3]中论证了从第一性原理推导这一（此前未经证明，参见 [Va21]）假设。

随着参数（缺陷构型）的变化，这些共形块空间在点的构型空间（文献 2.18）上构成一个丛，并携带一种称为 *Knizhnik-Zamolodchikov*联络 的典范平坦联络（文献 2.22）， [FMS97, §15.3.2][Ko02, §1.5, 2.1][Ab15, §4],参见例 4.14。

该 KZ联络的单值化（文献 2.22）构成点的构型空间的基本群的一个酉表示，因而构成一个辫群表示（文献 2.21）；人们认为，它反映了通过任意子编织（文献 2.9）操作拓扑量子门（文献 2.4）的过程。这里我们通过其超几何积分表示（文献 2.25）来考察这一切。

[4]尤里·马宁因此率先提出了量子计算（文献 2.1）和高斯-马宁联络（文献 2.23——高斯之名在此仅是对一位历史数学家的泛泛致敬）。我们的结果表明，这两个看似无关的思想实际上密切相关。

文献 2.25 （共形块的超几何积分构造 [SS22-Def, 命题。 2.15, 2.17]）。称为在共形场论中已知的超几何积分构造，归根结底是以下两者之间的一个等价：

（1）带有其 KZ联络的共形块丛（文献 2.24）

(2) 配备其高斯-马宁联络（文献 2.23，例 4.14）的$N+\bullet$个点的构形空间（文献 2.18）的适当扭曲上同调群（文献 2.15）所构成的丛。

这一思想最初源于共形场论中数位作者的工作，早期参考文献是 [DJMM90]； [EFK98, §4, §7] 给出了更易读的论述。对于适当的参数（53），所得 KZ联络恰好就是 $\mathfrak{su}_2$-共形块上的联络，这一证明归功于 [FSV94]。[5]

这一证明相当技术性（但我们努力在 [SS22-Def，第2]节中简洁地阐明关键结果），这见证了传统 $\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-共形块概念所继承的复杂性，也更加凸显了这样一个非凡事实：超几何积分构造揭示出，共形块等价于一种纯粹的上同调构造。正是这一非凡事实使我们能够在下一步中，进一步将共形块的丛识别为一种极其简单的同伦数据结构（见下文定理6.8）。

文献 2.26 （软件验证、数据类型化及其数学语义学）。计算机科学与纯数学在 [ML82] 中通过对经认证的软件（例如 [Ch07]）的研究实现了深刻交汇：对任意程序进行正确实现的形式化验证（例如通过规定数值舍入误差的界，参见文献 2.29）恰好与相应数学定理的严格（且构造性的）证明相吻合，反之亦然。（从技术上说，这得益于*BHK*对应，见下文公式（92）附近。）这类验证/证明语言（如 Agda，文献 2.28）是（依赖）类型化的，因为它们处理的每一项数据都严格对应一个精确的数据类型；该数据类型规定了数据必须满足的严格规范，才能作为该类型的输入或输出（[ML82][Th91][St93][Lu94][Gu95][Co11][Ha16]）。

这类数据类型化的抽象理论称为（依赖）类型论，而此处相关的现代流派通常称为*Martin-L¨*类型论，以纪念 [ML71][ML75][ML84], 。更多阐述和介绍也可参见[Ho97][UFP13]。

一旦遵循这一类型化原则，编写程序与验证其正确性之间的差异便会消失。此外，这种类型正确的函数式程序也可以等价地理解为一个数学对象，即一个数学函数（60），它将其输入类型的“空间”中的数据映射到其输出类型的数据——这称为其指称语义（这一开创性思想源自 [Sc70][ScSt71], ；阐述见 [SK95, §9]）；更具体地说，对于依赖类型理论而言，这就是其在局部笛卡尔闭范畴（67）中的范畴语义 [参见84][Ho97, §3], ；例如 [Ja98][Sh12]中对此有回顾。若纳入单值性公理（105），那么这一范畴语义便发生于（106）“高阶几何空间”（又称 ∞-叠）范畴中，这些范畴称为模型拓扑斯 [Re10] （∞-拓扑斯 [Lu09], ；见下文（107）附近）。这一论断最初由 [Aw12]猜想，并由 [Sh19], 完整证明；阐述见 [Ri22]。

数据类型的验证计算理论与数学空间理论之间这种紧密的相互关联，被称为计算三部曲 (59)，相关参考文献见 [SS22-TQC，第 4] 页。正是通过将计算三部曲推广到同伦类型化的这块“罗塞塔石碑”（文献 2.27），我们才能把拓扑量子门的代数拓扑（第4节）转译为其同伦类型论（第5节）。

文献 2.27 (同伦类型化编程)。一种如此基础、如此常见，以至于人们容易认为理所当然的数据操作，就是将一对数据彼此等同。然而，若认真看待通过数据类型化进行程序验证的理念（文献 2.26），就还必须考虑任意给定类型的数据对之间的等同证书；因此，这些证书本身也必须是“等同类型”的数据 [ML75，第1节。7], 见下文 (71) 附近。

这表面上或许显得微不足道，但这种“彻底类型化”的编程语言（其技术术语是：内涵类型理论，见 [St93，第 4, 13][Ho95 页，第 16] 页）却带来了深刻的结果：如今，给定一对这样的等同证书，同样的逻辑也适用于它们自身，进而引出对识别的识别的考察（最早由 [HS98] 加以阐述），并由此导向更高阶的识别，无穷尽地。

值得注意的是，配备了这类恒等类型塔的数据类型的“指称语义”（文献 2.26），以及由此对应的纯数学，正是（[AW09][Aw12], 在 [Sh12][Ri22] 中的阐述）抽象同伦论（文献 2.12）：其中，恒等类型被解释为路径空间（73），而高阶等同则对应于高阶同伦（78）。人们也会以一种略显含糊的方式来表述这一现状：HoTT 在同伦论中具有语义，反过来说，HoTT 是同伦论的语法 ——我们将在下文第5.1节回顾这种对应关系。

自从这一点得到理解以来，传统的（“直觉主义 Martin-L¨of”）类型论 [ML75][NPS90] 基本上就被称为同伦类型论 （HoTT）——尤其是在再加上一条“单值性”公理[6] (105)时；该公理强制数据类型本身的等同与其操作等价相一致（详见

[5]注意，这些作者也会用实李代数的复化 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$来表述。[6] 单值性公理通常被归功于 [Vo10], , 但这一思想（名称不同）实际上源自 [HS98, 第5节。4], 不过，当时采用的等价类型存在细微但错误之处（后来由 [UFP13, Thm. 4.1.3]指出）。 [Vo10, p. 8, 10] 的新贡献是为类型之间的（“弱”）等价给出了一个恰当的定义（103）。

[Ac11]）。

关于“非正式”（人类可读）HoTT的标准教科书式论述见 [UFP13], ； [BLL13],则提供了温和的入门介绍（前者内容更详尽）；另见下文第5.1节。可运行同伦类型程序的软件包括 Agda（文献 2.28）和 Coq[7]（不过后者缺少计算单值性（105））。

文献 2.28（**编程／认证语言** Agda）。同伦类型语言 Agda（文献 2.27）由 [No09], 开发；其具有计算单值性的“立方”扩展（105）由 [VMA19]开发。关于 Agda 中依赖类型论（文献 2.26）的入门介绍，参见 [St16] ；关于 Agda 中同伦类型论（文献 2.27）的入门介绍，参见[Es19]。与本文讨论相关的现有 Agda 代码库包括： [1lab][UniMath]。

文献 2.29 (精确实数计算)。软件认证（文献 2.26）的一个重要应用，是用于处理精确实数计算（[Vui88][YD95][PE97]）的算法，即涉及或要求任意高数值精度的运算。基本策略是用一种算法表示实数：对于任何给定的精度界限，该算法都能产生一个有理数，并保证其与目标实数的误差不超过指定界限（参见下文注 6.2）。计算机上的传统浮点算术以容易产生舍入误差且难以验证而著称，而精确实数计算则提供能够以数学方式证明满足指定精度界限的算法。精确实数计算的基础数学是构造性分析 [Bish67][BB85][Br99] （数十年前便已全面发展，当时主要出于哲学考量，被视为经典分析的一种替代方案），并且可自然地用带类型的编程语言实现（例如 [O'C07][GNSW07]），如 Agda（文献 2.28）所示：[Mu22][Lu15],参见第 71 页。

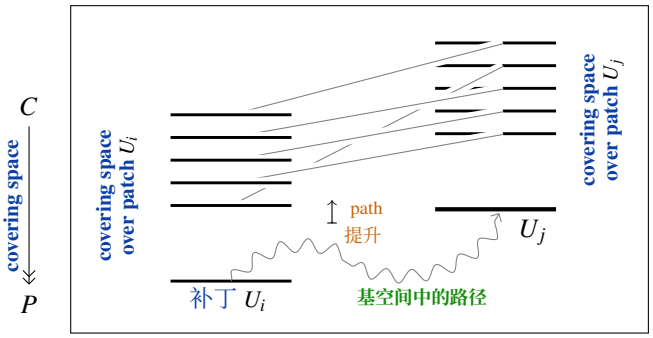
实分析在物理学和工程学中模拟经典系统的应用无需赘述；而量子计算系统的模拟则更为根本地涉及实分析，因为量子态所在的向量空间（希尔伯特空间）包含任意精度的数据，即使相应的经典状态空间是有限集也是如此（参见表 D）。具体而言，在量子计算（文献 2.1）中，经典计算在有限比特集*bits* 上的对应物，是有限维复向量空间（例如任意子的情形下，共形块*conformalblocks* 构成的空间，文献 2.17）上的（酉）线性算子；而对此类算子的认证本身就涉及任意精度算术——参见下文第6节的讨论。

事实上，量子计算的核心问题，即将一组指定的量子逻辑门编译为一个量子电路，使其计算结果为指定的酉算子，必须在精确实数算术（构造性分析）的意义下理解，才能针对任意有限的精度界进行验证（参见第 3 页）。

文献 2.30 (路径提升与纤维传输)。从“点集拓扑”迈向真正同伦论（文献 2.12）的典型现象，是通过“路径提升”在覆盖空间的纤维上诱导的“输运”运算对覆盖空间进行分类（例如 [tD08,§3][Mø11]）。

覆叠空间基本定理（例如 [tD08, Thm. 3.3.2][Mø11, 7.8]）表明，覆盖空间也可以等价地按照其底空间 P的基本群 $\pi_1(P)$（文献 2.13）通过提升底空间中的闭路径所给出的输运作用来分类。

这一情形的一大类例子来自配备平坦联络的向量丛 $\mathscr{X} \twoheadrightarrow P$ （“局部系统”，文献 2.22）：平坦联络在局部将其分层为“水平子空间”，从而使其成为覆盖空间 $\mathscr{H}^{\delta} \twoheadrightarrow P$。相应的路径提升就是平坦联络所诱导的“平行移动”。



（更一般地，如果对于“基空间”B 中的每个欧几里得族连续路径，以及通过p 将相应起点族提升到X的每一种方式，都存在将整个路径族相容地提升到X的方式，那么就称拓扑空间之间的映射$p\colon X \to B$ 为一个*Serre*纤维化 。如果将这些提升路径视为线段，起点沿着它们“流动”至终点，那么这样的提升同样可以沿着B 中的路径，以同伦正确的方式对p 的纤维进行“函子性传输”（例如[tD08，第5节.6]）。

注意到每个（离散）群G 都是某个拓扑空间的基本群，具体来说，是其Eilenberg-MacLane空间$BG = K(G,1)$的基本群（文献 2.14）。这意味着，在我们的上下文中，作用于同一存储器状态空间上的所有可逆逻辑门系统（文献 2.2），都等价地体现为某个覆盖空间中由路径提升所诱导的传输操作！我们将在第3节进一步阐述这一观点。

有趣的是，这种路径提升/纤维传输是同伦类型化编程语言（文献 2.27）中的一种原生语言构造（74），例如 Agda（文献 2.28）。这一非凡事实推动了我们在下文第5节和第6节中的讨论，正如我们现在在第3节中所强调的：

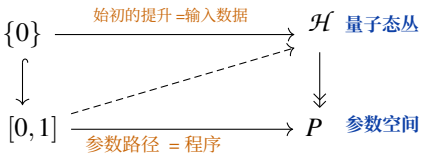
[7] Coq登录页面： `coq.inria.fr`[8]Agda登录页面：
`wiki.portal.chalmers.se/agda`

3 拓扑量子门.....

尽管拓扑量子逻辑门这一宽泛概念如今已有25年历史，且已成为经典（文献 2.4），但其概念上的细节或许始终有些难以捉摸，无论是关于其物理实现（参见文献 2.8），还是其信息论本质（文献 2.9）。本节将对拓扑量子门的基本思想作一简要的现代化回顾与阐释，并结合其上同调实现（[SS22-Ord], 文献 2.16），揭示其隐秘本质：[SS22-TQC]它是参数化点集拓扑（将在下文第4节展开）和同伦类型论（将在下文第5节展开）中的一种基本构造：

我们讨论的核心主题是以下观察／主张：

> 基本的（量子）计算过程是
> 经典参数路径的提升，也就是程序，
> 到状态空间的（线性）映射，也就是（量子）门。



(19)

这听起来或许很简单，但我们认为它意义深远（[ZR99][NDGD06][DN08][LW17] 中也有类似说法）：也就是说，底层硬件级（量子）计算的自然认证语言应当原生支持路径提升 （文献 2.30）。这在传统编程语言中闻所未闻，却是同伦类型语言的标志（74）！（文献 2.27）此外，在将底层计算等同于路径提升的基础上，同伦类型语言原生体现了基本量子计算过程的关键可逆性（76）（文献 2.2）。

量子电路的思想。例如，量子电路 （文献 2.1）实际上 就是对一系列基本线性算子U_p （即“门”）按照一系列计算指令p进行编译。以可控的方式选择不同的经典指令路径，就会得到不同的量子算法；量子输运对经典指令路径的这种依赖，正是量子计算可编程的含义（量子计算的电路模型 [De89], 例如 [NC10，第 II.4] 节）。

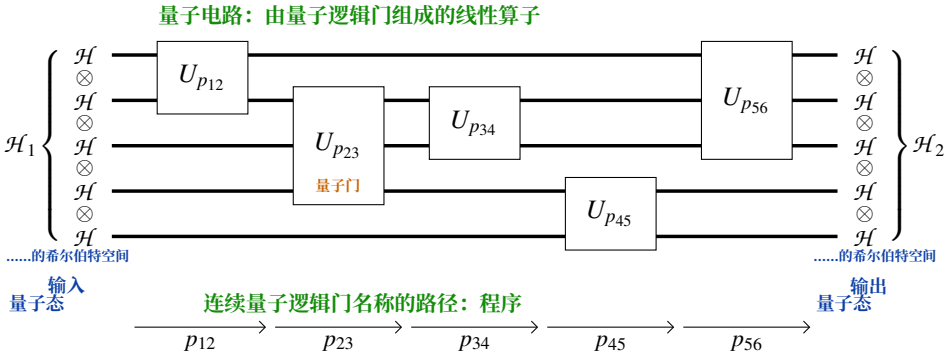


图 QC. 一个作用于复合量子系统的量子逻辑电路（每个系统以实线表示），由一系列量子逻辑门依次组合而成（以方框表示）。

这类量子电路可自然地理解为定义在线性类型上的复合函数；我们将在配套文章 [QP] 中进一步阐述这一点。这里我们聚焦于单个（拓扑量子）量子门的内部运作。

然而，在量子计算机的实际实验室实现中，离散化指令步骤这一理想化概念必然要由实际物理过程近似实现；无论这些过程看起来多么突发，其本质上都是连续的。这意味着，所有真实的量子计算过程都依赖于经典参数空间中的连续路径。

例如，对于许多量子计算架构而言，无论是最初的自旋共振 原理（参见例如[Co00][Eq22]），还是当代的超导量子比特 （例如， [CW08][HWFZ20]），操作量子门都意味着向系统中发送持续有限时间的电磁脉冲（分别参见例如 [GIB12] 和 [MFL22],）：因此，这类量子计算机的硬件级指令是环境电磁场构型空间中的连续参数路径，其基本形式如下：

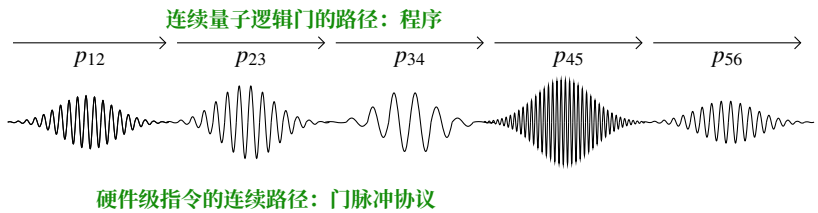


图 P。 在常见类型的 NISQ 机器（文献 2.3）上执行量子算法——例如当前流行的超导量子比特 架构——相当于使量子系统接受一种门脉冲协议 的射频/微波调制（左侧示意图），从而驱动其沿着构型空间中外部参数（此处为电磁腔场振幅）的一条连续路径 运动。

这旨在强调，所有量子计算从根本上说都是由连续经典参数路径控制的量子态演化。现在，拓扑量子计算对应一种特殊情形：这些连续参数路径（1）是绝热的，并且它们对系统状态的作用（2）是同伦不变的：

绝热量子输运的思想。 如图 *P* 所示，传统的计算过程会在量子系统与其控制环境之间交换能量。事实上，常见的 NISQ 架构（文献 2.3）旨在将量子比特态编码为非谐量子振子的能量本征态，因此，在这些系统上执行计算，本质上就是在其能级之间跃迁（即臭名昭著的量子跃迁）。与此同时，这些与环境之间的能量相互作用通道，正是导致这些 NISQ 机器受到噪声和退相干影响的原因。

相比之下，拓扑量子过程（文献 2.4）首先完全发生在拓扑量子材料（文献 2.7）的（拓扑序）基态上，因此也就是发生在其最低能态上，且不从环境中吸收任何能量：臭名昭著的能隙衡量了物质拓扑相（文献 2.7）的保真度，并将其拓扑基态与普通激发态区分开来；它所提供的余地，足以让控制环境释放能量而不扰乱相干量子相。

这一情形可以由数学量子力学中的一个经典定理精妙地概括：量子绝热定理（文献 2.6）指出（正如 [ZR99] 已经为量子计算清楚阐明的那样），在外部经典参数足够缓慢（= “绝热”）变化的渐近极限下，所诱导的量子系统演化渐近地保持有能隙的能量本征态，因此尤其会保持有能隙的基态，进而通过酉算子U_p 作用于有能隙基态的希尔伯特空间$\mathcal{H}$；这些酉算子随参数路径p连续变化。

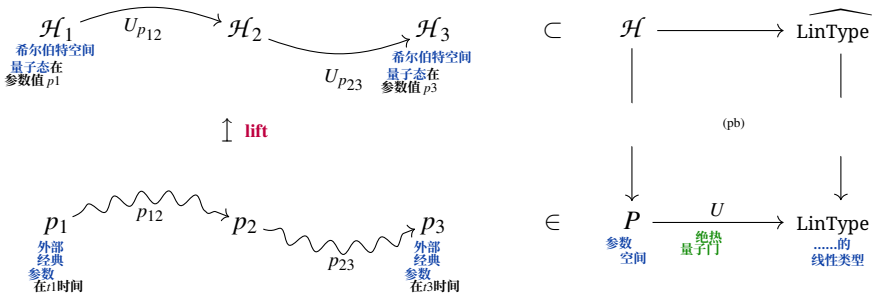
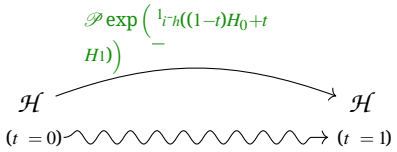


图 T. 左图示意了量子态沿着依赖于经典参数空间中连续路径的线性映射进行“绝热”（文献 2.6）输运。

右侧图表展示了我们如何用依赖于某个基同伦类型的（线性）同伦类型族来描述此类情形，详见下文第 5节（参见下文（74）和（106）；请注意，我们将量子数据类型的线性讨论留给 [QP]）。

量子退火的思想。 例如，在量子计算中，上述量子绝热定理的一个广为人知的实现，就是“量子退火”范式 [KN98][FGGS00]（综述见 [RSDC 22]）。这里考虑一条单参数路径，它在给定的两个哈密顿算符H_0,H_1 之间进行线性插值，且定义在固定的希尔伯特空间$\mathcal{H}:\equiv \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}2$上：

如果能够安排这两个哈密顿算符都具有唯一且有能隙的基态，并且第一个哈密顿算符的基态可以制备，而第二个哈密顿算符的基态虽未知，却可与某个给定计算问题的答案相对应，那么相应的绝热量子输运就能有效地计算出该答案。



由于量子退火仅限于寻找唯一基态，因此它本身并不是一种万有可编程的计算形式：它只能保证找到H_1 的基态，不会完成其他任何事情。不过，这种局限性下的退火确实预示了拓扑量子计算在简并情形中的一个关键特征（参见文献 2.6）：由于H_1 的基态是唯一的，退火过程实际上并不依赖于所选的确切参数路径；它对计算路径的扰动具有鲁棒性（参见 [CFP02，第 2]页）。

拓扑量子计算的理念。一般来说，实现可编程量子过程这一理论上简单明了的理念（文献 2.1）时，面临的重大实际问题在于：真实的量子机器并非处于理想化的孤立环境中，而是与其环境耦合；环境必然如同“热浴”一般发挥作用：环境中不可避免的噪声会造成扰动，往往使机器的量子态退相干，从而倾向于破坏预期的量子计算（参见文献 2.5）。

具体而言，真实实验室中可实现的参数路径都带有噪声（参见文献 2.3），因此可以看作是从围绕预期路径的一系列微小扰动中随机抽取的。沿着这样一组带噪声的路径输运纯量子态，通常会得到纯态的退相干混合态，而这可能不再支持量子算法赖以运行的量子干涉效应；除非能够以某种方式保证，依赖这些路径的量子输运实际上不受它们的微小扰动影响，而真正只取决于这些路径的全局性质。

这就是拓扑量子计算（文献 2.4）的思想：确保量子绝热过程仅取决于参数路径（相对于其端点）的拓扑同伦类（文献 2.12、2.13）。

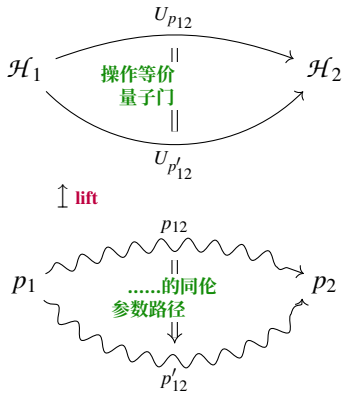
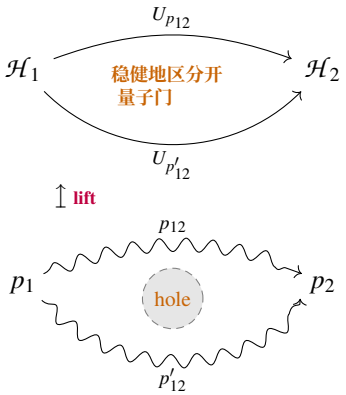


图 H. 若绝热量子输运（图 T）仅取决于固定端点之间的参数路径在小幅连续变形下的等价类，也就是仅取决于同伦（左侧所示），则称其具有拓扑性质（更准确地说：具有同伦性质，参见文献 2.12）。

在这种情况下，量子输运稳健地 取决于参数路径的“全局”性质，例如它们围绕参数空间中“孔洞”的绕数（参见文献 2.13；右侧示意图），因而构成一种拓扑量子计算（文献 2.4）。



拓扑量子 计算机科学家因此开始寻找依赖于经典参数空间的拓扑量子材料，这些材料 依赖于经典参数空间 其中具有丰富的“孔洞”结构，也就是说，其基本群 （文献 2.13 ）.

任意子编织栅格的构想。此类拓扑量子系统可能有几种选择（参见 [ZR99]），但 Kitaev 最初提出的方案（文献 2.1）或许最有前景，而且如今常被视为拓扑量子计算本身的代名词。在这一设想中，量子材料的有能隙且拓扑有序的基态（文献 2.7）在拓扑上取决于若干组（$z1$，$\cdots$，z_n）成对不同的位置，这些位置对应缺陷点（“任意子”，文献 2.17），它们实际上被限制在曲面 Σ 内移动（例如，由几层原子单层构成的晶体材料）。

例如，人们非常关注这样一种观点：这类缺陷可能由量子流体表面上的量子涡旋实现，例如某些玻色–爱因斯坦凝聚体（如 [MPSS19]）。缺陷参数也可以更加抽象，例如拓扑半金属中电子动量 的临界“节点”值（而非位置值）（文献 2.10）。这类节点动量值通常会随一些相当容易控制的外部参数而变化，例如施加在材料晶体结构上的外部应变。

无论如何，在这种情况下，经典参数空间P 实际上就是曲面 Σ上的点的构型空间 （文献 2.18）

$$\underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\Sigma) \;=\; \left\{(z_1,\cdots,z_N)\in\Sigma \;\middle|\; \underset{I\neq J}{\forall} z_I \neq z_J\right\}.$$

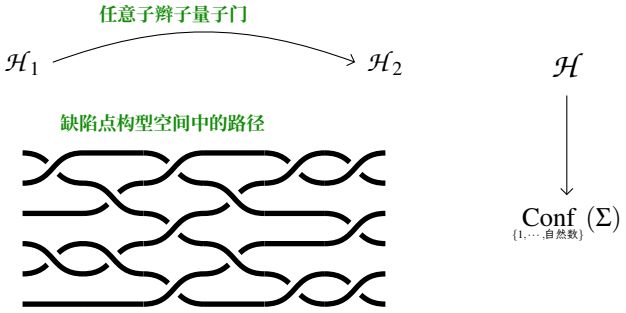
这类空间中的一条路径 是一个由n个缺陷“世界线”组成的元组；这些缺陷可以彼此绕行，但永不重合（在任一给定时刻），因此在三维空间中形成n 股线的“辫”状图案（文献 2.20）。

这意味着，即使 Σ 在拓扑上是平凡的（例如， Σ 可以是穿过玻色–爱因斯坦凝聚体赤道的圆盘），$\mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,N\}}(\Sigma)$中仍存在许多不同的路径同伦类，分别对应所有那些
无法解开的辫子。如果能找到一种量子材料，其简并基态沿着缺陷点的这类编织在拓扑上发生非平凡输运，那么就能以 Freedman 和 Kitaev 最初提出的意义（文献 2.4），通过任意子编织门 实现拓扑量子计算。

图 A。 如果依赖参数的量子系统（图 T）的经典参数空间是平面中（任意子）缺陷点的构型空间（文献 2.18，文献 2.17），那么参数路径就是一条辫 （文献 2.20）。

如果拓扑量子系统的（简并）基态在拓扑上依赖于缺陷点的位置（文献 2.7），那么沿着这类辫子路径进行绝热输运，就会实现构成辫群线性表示的量子门。

在技术上可行的 $\mathfrak{su}_2$-任意子情形中，这就是典范平坦 KZ 联络在构型空间上共形块丛上的单值表示（文献 2.24）。



经认证的编织门数据类型这一构想。 然而，现有量子编程语言无法呈现拓扑编织量子门复杂的内部结构；而通过共形量子场论方法传统地实现这些信息，不仅构建起来极为艰巨，使用起来也效率低下。不过，对这些编织门的操作和编译进行详细验证（文献 2.26），对于实现实用的可扩展量子计算（文献 2.5）无疑至关重要，并且现在就能用于拓扑量子模拟。

我们的主张是，通过同伦类型化编程语言这一新颖视角（文献 2.27）来看待这个问题，便能得到一个优雅的解法：用于构造能够认证辫量子门操作的数据类型，竟然本质上是原生语言构造（下文定理 6.8）。现在我们对此作出说明。

4 .....通过参数化点集拓扑

我们在此表明，在参数化同伦论（文献 2.12）的上下文中，纤维丛上的纤维逐点上同调群丛（文献 2.15）上的高斯-马宁联络（文献 2.23）可以用初等方式描述：这就是非扭曲情形的定理 4.9，以及更广义的扭曲情形的定理 4.13 的内容。

这种重新表述非常初等（就其技术意义而言），因此一旦用相应的同伦类型论形式语言表述（我们将在第5节转向这一语言），它实际上就成了同义反复：展示平坦高斯–马宁联络的覆盖空间，只不过是映入相应分类空间的逐纤维 映射空间（切片范畴中的内部同对象）的逐纤维 0-截断。这一结论直接适用于扭曲广义和／或非阿贝尔的上同调理论，例如扭曲 K 理论和扭曲上同伦群。将其应用于平面上点的构形空间的扭曲复上同调群，可得到$\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-共形块丛上的克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫（KZ）联络（文献 2.24），进而得到 $\mathfrak{su}_2$-任意子的特征性单值化辫群表示（文献 2.20）。

这里我们运用参数化“点集”同伦论（仅取其最基础的方面；其内容见 [MS06], , 可追溯至 [Bo70]），以说明丛的纤维上（扭曲）广义上同调群中的高斯-马宁联络，是由到给定分类空间（分类纤维化）的纤维逐点映射空间（纤维逐点截面空间）的纤维逐点第0个波斯特尼科夫阶段所呈现的。(127)

掌握参数化点集同伦论的相关概念和结果后，证明便很直接。因此，我们借此机会在行文过程中简要介绍并回顾参数化拓扑学的基础知识，以便让一般数学读者也能较为完整地理解证明。

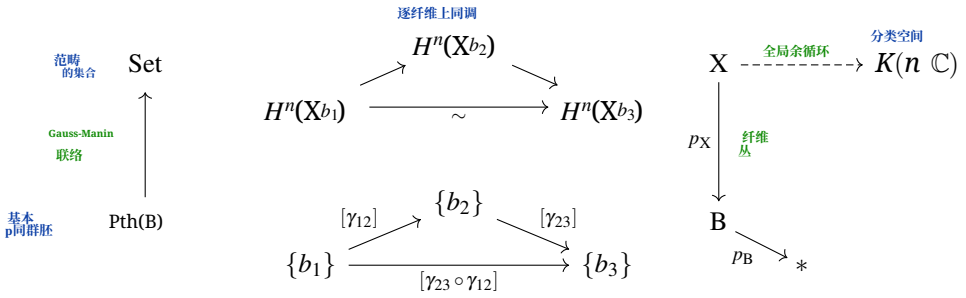
局部平凡纤维丛的纤维逐点扭曲上同调群上的高斯-马宁联络，其构造本身无需借助此处所用的抽象工具也能理解；[EFK98, §7.5] 提供了这类较为初等论证的概要。不过，正是我们的抽象重述，以同伦类型论的语言优雅地刻画了高斯-马宁联络；我们将在下文第5节讨论这一点。

下文将反复使用粘贴律（沿一个方向）：在任何具有拉回的范畴中，沿复合态射的拉回等于沿两个因子的拉回的粘贴（例如 [AHS90, 命题 11.10], 另见 [GPP21, 命题8]）：

$$\begin{array}{ccc} (f_2\circ f_1)^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_X} \\ B'' & \xrightarrow[f_2\circ f_1]{} & B \end{array} \quad\simeq\quad \begin{array}{ccccc} f_2^*\big(f_1^*X\big) & \longrightarrow & f_1^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow \\ B'' & \xrightarrow[f_2]{} & B' & \xrightarrow[f_1]{} & B \end{array} \tag{20}$$

4.1 普通上同调与广义上同调

给定一个足够良好的纤维化$p_{\mathrm{X}}:\mathrm{X}\to\mathrm{B}$，其纤维 X_b（对$b\in B$）的普通复上同调群$H^n(\mathrm{X}_b):\equiv H^n(\mathrm{X}_b;\mathbb{C})$构成一个位于 B 上的阿贝尔群丛，并配备平坦联络，称为高斯-马宁联络（文献 4.13）。这意味着，高斯-马宁联络提供了一种规则，使得空间X_b 的上同调类能够随着这些空间随参数 b 变化 $\in$B而得到一致输运。此外，联络的平坦性意味着，上同调类所诱导的输运仅取决于参数路径 $\gamma\colon[0,1]\to\mathrm{B}$ 的端点相对同伦类 $[\gamma]$。如果 B 连通，这等价于说，高斯-马宁联络给出了B 的基本群到任意固定$b_\bullet$处$H^n(X_{b_\bullet};A)$的自同构群的一个同态。



(21)

事实上，这同样适用于扭曲上同调群；在这种情况下，克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫联络就成为一个特例。我们稍后（§4.2）会回到这一点。

传统上，高斯-马宁联络是以代数方式构造的。在这里，我们完全从同伦理论的角度出发，而是利用这样一个事实：CW型拓扑空间的扭曲普通上同调是可表的，也就是说，对于$n \in \mathbb{N}$，存在一个拓扑空间 $\mathrm{K}(n\ \mathbb{C})$（第$n$个*Eilenberg-MacLane*空间），使得上同调可以与映入其中的映射空间的连通分支相对应：

$$H^n(\mathrm{X}_b) \simeq \pi_0\mathrm{Map}\big(\mathrm{X}_b, \mathrm{K}(\mathbb{C}, n)\big)\,. \tag{22}$$

映射空间。对于映射　　空间，为了使其运作良好，我们可以不受实际限制地假设自己处于紧生成　　ry

$$\mathrm{kTopSpc} \hookrightarrow \mathrm{TopSpc} \tag{23}$$

空间（“k空间”，参见 [SS21-Bun，注 1.0.15] 中的相关指引）。这里，对于 $\mathrm{X}_b \in \mathrm{kTopSpc}$，我们有如下形式的伴随（笛卡尔张量/同态伴随，例如 [Bo94II，第 7.1、7.2][Br93，第 VII.2]）：

$$\mathrm{kTopSpc} \underset{\mathrm{Map}(\mathrm{X},-)}{\overset{\mathrm{X}\times(-)}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathrm{kTopSpc}\,, \tag{24}$$

这意味着对于 k-拓扑空间存在指数律，即如下形式的映射自然双射：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{kTopSpc}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \mathrm{kTopSpc}\big(\mathrm{X}, \mathrm{Map}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})\big) \\ \big(X\times Y \xrightarrow{(x,y)\mapsto f(x,y)} Z\big) & \mapsto & \Big(X \xrightarrow{x\mapsto (y\mapsto f(x,y))} \mathrm{Map}\big(Y, Z\big)\Big). \end{array} \tag{25}$$

顺便一提，在形式范畴论中，传统上会用一条水平线分隔通用的伴随映射对，以此表示这种伴随关系：

$$\frac{X\times Y \xrightarrow{\ f\ } Z}{X \xrightarrow[\tilde{f}]{} \mathrm{Map}(Y, Z)\,.}$$

这又让人联想到形式逻辑中的古老传统：用这种方式表示自然演绎步骤 [Ge34]（参见 [Ge69]）：这里我们可以将其理解为：“给定一个映射 $f\colon X\times Y \to Z$，我们可以推导出一个映射 $\tilde{f}\colon X \to \mathrm{Map}(Y, Z)$，反之亦然。”这不仅仅是一个类比，它初步揭示了（代数）拓扑学与（依赖）类型论之间的语法—语义关系，我们将在 [?]，（参见约 (66)）附近运用这一关系。

广义上同调。以下关于纤维丛上高斯-马宁联络的构造，只依赖于如式（22）中此类分类空间的存在，而不依赖于它的具体性质。这意味着该构造也适用于“广义上同调理论”。

- 例如，如果$E_n(-)$ 是一种 Whitehead广义上同调理论，例如拓扑K理论、椭圆上同调或配边上同调，那么就存在一个分类空间谱 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得
$$E^n(X_b) \simeq \pi_0\mathrm{Map}(\mathrm{X}_b, E_n)\,.$$
- 反过来看，对于任意拓扑空间 $\mathrm{A} \in \mathrm{kTopSpc}$，我们可以将其视为
$$A^0(X_b) \coloneqq \pi_0\mathrm{Map}(\mathrm{X}_b, \mathrm{A}) \tag{26}$$
以 A为系数的非阿贝尔广义上同调。
- 例如，如果 $\mathrm{A} = BG$ 是离散群或紧李群G的分类空间，那么
$$BG^0(X_b) \simeq H^1(X_b; G)$$
这等价于传统的以G为系数的1度非阿贝尔上同调，它对G-主丛进行分类。
- 或者，如果 $\mathrm{A} = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是拓扑n维球面，那么
$$(S^n)^0(X_b) \simeq \pi^n(X_b)$$
是不稳定的上同伦。

纤维映射空间。现在的关键事实是，在参数化同伦论（例如 [CJ98][BM21][MS06]）中，如果基空间 B 是（紧生成的且）豪斯多夫的，我们将一直作此假设，那么映射空间构造（24）可以推广到切片：

$$B \in \mathrm{kHausSpc} \hookrightarrow \mathrm{kTopSpc}\,. \tag{27}$$

这里，切片范畴 $\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}$ 是这样一个范畴：其对象（X，p_{X}）是配备了连续映射$p_{\mathrm{X}}\colon \mathrm{X} \xrightarrow{\ !\ } \mathrm{B}$ 的 k-拓扑空间 X，而其态射（X，p_{X}）$\xrightarrow{\ !\ }$（Y，p_{Y}）是相容映射 $\mathrm{X} \xrightarrow{\ !\ } \mathrm{Y}$，因此：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\big((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}),(\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}})\big) \;=\; \mathrm{kTopSpc}\big(\mathrm{X},\mathrm{Y}\big) \underset{\mathrm{kTopSpc}(\mathrm{X},\mathrm{B})}{\times} \{p_{\mathrm{X}}\} & \longrightarrow & \mathrm{kTopSpc}\big(\mathrm{X},\mathrm{Y}\big) \\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathrm{Y}}\circ(-)} \\ \{p_{\mathrm{X}}\} & \hookrightarrow & \mathrm{kTopSpc}\big(\mathrm{X},\mathrm{B}\big). \end{array} \tag{28}$$

如果我们通过 p_{X} (21) 将 X 理解为切片范畴 $\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}$ over B 中的一个对象，并将 $p_{\mathrm{B}}^{*}\mathrm{A}$ 表示为切片范畴中以 B 为底空间、纤维为 A 的平凡纤维丛，那么它们的纤维映射空间 就是一个自身纤维化在 B 上的拓扑空间，使得纤维映射空间的纤维是各纤维上的普通映射空间 (24)：

$$\begin{array}{ccc} \overset{\text{纤维上的普通映射空间}}{\text{映射}}(\mathrm{X}_b,\ \mathrm{A}) & \longrightarrow & \overset{\text{纤维映射空间 (自身也是 B 上的拓扑空间)}}{\text{映射}}\big((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}),\ p_{\mathrm{B}}^{*}\mathrm{A}\big). \\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\ b\ } & \underset{\text{参数空间}}{\mathrm{B}} \end{array} \tag{29}$$

总纤维映射空间上拓扑的恰当选择颇为微妙[9]，而这种拓扑确实存在这一结果（见[MS06，第 1.3.7–1.3.9]，节，依据 [BB78，定理 3.5]）可视为引擎，使我们能够从点集拓扑的角度巧妙地重新构造高斯-马宁联络。这里，恰当的拓扑是指能确保切片范畴中伴随（24）的类似形式成立的拓扑

$$\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}} \underset{\mathrm{Map}((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}),-)}{\overset{(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\times(-)}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}, \tag{30}$$

因此，等价地说，就是切片范畴中的指数律 [BB78，定理 3.5][MS06，（1.3.9）]：一个如下形式的自然双射

$$\mathrm{kTopSpc}_{/B}\Big(\overset{\text{Fiberwise product space}}{(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\times(\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}})},(\mathrm{Z},p_{\mathrm{Z}})\Big) \;\simeq\; \mathrm{kTopSpc}_{/B}\Big((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}),\overset{\text{Fiberwise mapping space}}{\mathrm{Map}\big((\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}}),(\mathrm{Z},p_{\mathrm{Z}})\big)}\Big), \tag{31}$$

此时，右侧的积是切片范畴中的积，因此是 k-拓扑空间的纤维积：

$$(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\times(\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}}) \;\simeq\; \big(\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{Y},\, p_{\mathrm{X}}\circ\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{Y}}\circ\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}\big).$$

当然，该积的单位元是基空间上的恒等映射：

$$(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\times(\mathrm{B},\mathrm{id}_{\mathrm{B}}) \;\simeq\; (\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}). \tag{32}$$

切片范畴中的这一指数律蕴含了大量有用的结构：

命题 4.1（**基变换伴随三元组**）。对于基空间之间的任意映射 $f\colon \mathrm{B} \xrightarrow{!} \mathrm{B}'$ (27)，存在一个“基变换”伴随三元组

$$\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}} \underset{f_*}{\overset{f_!}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}} \overset{f^*}{\longleftarrow} \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}, \tag{33}$$

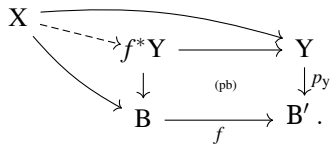
其中 f^* 表示拉回运算（在 kTopSpc 中构造），其左伴随 $f_!$ 由与 f 进行后复合给出，而右伴随 f_* 则由以下拉回构造给出：

$$\begin{array}{ccc} f_*(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}) & \longrightarrow & \mathrm{Map}\big((\mathrm{B},f),(\mathrm{X},f\circ p_{\mathrm{X}})\big) \\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow \\ (\mathrm{B}',\mathrm{id}_{\mathrm{B}'}) & \xrightarrow[\widetilde{\mathrm{id}}]{} & \mathrm{Map}\big((\mathrm{B},f),(\mathrm{B},f)\big). \end{array} \tag{34}$$

[9]“点集拓扑　参数化空间的拓扑出乎意料地微妙。参数化映射空间尤其精细。”[MS06，第 1 页　5]

证明。 对于左伴随（$f_! \dashv f^*$），所需的同态集同构可由拉回的泛性质立即得出：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& f^*\mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(pb)}"] & \mathrm{Y} \arrow[d, "p_{\mathrm{Y}}"] \\
& \mathrm{B} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{B}'.
\end{tikzcd}$$

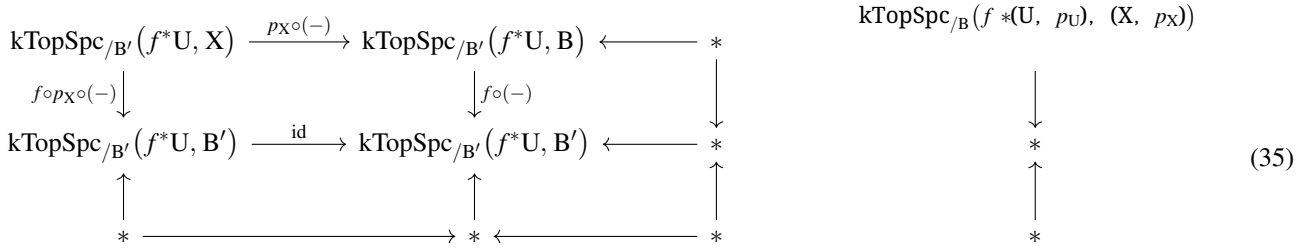


对于右伴随，所需的同态集同构可由以下一系列自然同构得到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big((U,p_{\mathrm{U}}),f_*(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\big) &\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((U,p_{\mathrm{U}}),\mathrm{Map}\big((\mathrm{B},f),(\mathrm{X},f\circ p_{\mathrm{X}})\big)\underset{\mathrm{Map}\left((\mathrm{B},f),(\mathrm{B},f)\right)}{\times}\{\widetilde{\mathrm{id}}\}\Big) && \text{by (34)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((U,p_{\mathrm{U}}),\mathrm{Map}\big((\mathrm{B},f),(\mathrm{X},f\circ p_{\mathrm{X}})\big)\Big)\underset{\mathrm{Map}\left((U,p_{\mathrm{U}}),\mathrm{Map}\left((\mathrm{B},f),(\mathrm{B},f)\right)\right)}{\times}\{\widetilde{\mathrm{id}}\} && \text{by (28)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((U,p_{\mathrm{U}})\times(\mathrm{B},f),(\mathrm{X},f\circ p_{\mathrm{X}})\Big)\underset{\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\left((U,p_{\mathrm{U}})\times(\mathrm{B},f),(\mathrm{B},f)\right)}{\times}\{\widetilde{\mathrm{id}}\} && \text{by (31)}\\
&\simeq \Big(\mathrm{kTopSpc}(f^*\mathrm{U},\mathrm{X})\underset{\mathrm{kTopSpc}(f^*\mathrm{U},\mathrm{B}')}{\times}*\Big)\underset{\left(\mathrm{kTopSpc}(f^*\mathrm{U},\mathrm{B})\underset{\mathrm{kTopSpc}(f^*\mathrm{U},\mathrm{B}')}{\times}*\right)}{\times}\{\widetilde{\mathrm{id}}\} && \text{by (28)}\\
&\simeq \text{映射}(f^*\mathrm{U},\ \mathrm{X})\underset{\text{映射}(f^*\mathrm{U},\mathrm{B})}{\times}* && \text{by (35)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big(f^*(\mathrm{U},\ p_{\mathrm{U}}),\ (\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}})\big) && \text{by (28)}.
\end{aligned}$$

这里倒数第二步是注意到纤维积（极限）可以互换：我们无需先计算下图中垂直纤维积的水平纤维积，而可以先计算水平纤维积（如右侧所示，同样由式（28）得到）：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big(f^*\mathrm{U},\mathrm{X}\big) \arrow[r, "p_{\mathrm{X}}\circ(-)"] \arrow[d, "f\circ p_{\mathrm{X}}\circ(-)"'] & \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big(f^*\mathrm{U},\mathrm{B}\big) \arrow[d, "f\circ(-)"] & * \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big(f^*\mathrm{U},\mathrm{B}'\big) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\big(f^*\mathrm{U},\mathrm{B}'\big) & * \arrow[l] \\
* \arrow[u] \arrow[r] & * \arrow[u] & * \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\big(f\ *(\mathrm{U},\ p_{\mathrm{U}}),\ (\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}})\big) \arrow[d] \\
* \\
* \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{35}$$



因此，显然剩下的垂直纤维积正如所声称的那样。 □

例 4.2（截面空间）。当 $\mathrm{B}' = *$ 属于 (33) 时，右基变换 (34) 构造出截面空间：

$$\Gamma_{\mathrm{X}_b}(-) \simeq (p_{\mathrm{X}_b})_* : \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{X}_b} \longrightarrow \mathrm{kTopSpc}. \tag{36}$$

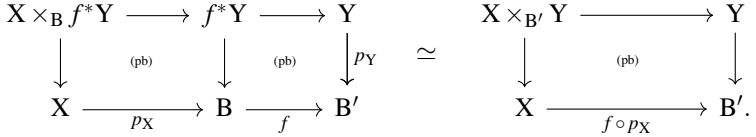
一般而言，可以将右基变换理解为形成逐纤维的截面空间 s.

命题 4.3 （笛卡尔弗罗贝尼乌斯互反律）。对于映射 $f\colon \mathrm{B} -! \mathrm{B}'$，其为底空间之间的映射(27)，我们有一个自然同构

$$f_!\big((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\times f^*(\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}})\big) \simeq \big(f_!(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\big)\times(\mathrm{Y},p_{\mathrm{Y}}), \tag{37}$$

其中 （$f_! \dashv f^*$）是左基变换伴随（33）。

证明。这由下式得出 粘贴律（20）表明，在此情形下，kTopSpc 中的以下拉回方块相互一致 ：



$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}} f^*\mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(pb)}"] & f^*\mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(pb)}"] & \mathrm{Y} \arrow[d, "p_{\mathrm{Y}}"] \\
\mathrm{X} \arrow[r, "p_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{B}'
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}
\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}'}\mathrm{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{(pb)}"] & \mathrm{Y} \arrow[d] \\
\mathrm{X} \arrow[r, "f\circ p_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{B}'.
\end{tikzcd}$$

□

作为 (29) 的推广，我们有：

命题 4.4 (基变换是闭函子)。沿任意底空间的连续映射 (27) $f\colon B' \to B$ 对纤维映射空间进行拉回（基变换），所得空间是其参数的拉回的纤维映射空间：

$$f^*\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\big) \;\simeq\; \mathrm{Map}\big(f^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X}),f^*(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\big)\,. \tag{38}$$

证明。对以下自然同构序列在 $\mathrm{kTopSpc}^{\mathrm{op}}_{/B}$ 上应用米田引理：

$$\begin{aligned}
\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((\mathrm{U},p_\mathrm{U}),f^*\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\big)\Big) &\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\Big(f_!(\mathrm{U},p_\mathrm{U}),\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\big)\Big) && \text{by (33)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\Big(\big(f_!(\mathrm{U},p_\mathrm{U})\big)\times(\mathrm{X},p_\mathrm{X}),(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\Big) && \text{by (31)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\Big(f_!\big((\mathrm{U},p_\mathrm{U})\times f^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X})\big),(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\Big) && \text{by (37)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((\mathrm{U},p_\mathrm{U})\times f^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X}),f^*(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\Big) && \text{by (33)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}'}\Big((\mathrm{U},p_\mathrm{U}),\mathrm{Map}\big(f^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X}),f^*(\mathrm{Y},p_\mathrm{Y})\big)\Big) && \text{by (31)}\,.
\end{aligned}$$

□

对于当前情形，这带来如下推论：

命题 4.5 (从纤维丛出发的纤维映射空间是纤维丛)。设 $(\mathrm{X},\ p_\mathrm{X})\in\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}$ 是一个具有局部平凡化的纤维丛

$$\phi:\mathrm{U}\underset{\mathrm{opn}}{\twoheadrightarrow}\mathrm{B}\,,\qquad \textit{such that}\qquad \phi^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X})\simeq p_\mathrm{U}^*\mathrm{X}_0\;:\equiv\;\mathrm{U}\times\mathrm{X}_0\,. \tag{39}$$

那么纤维 映射空间是一个相对于同一开覆盖局部平凡的纤维丛：

$$\phi^*\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),p_\mathrm{B}^*A\big)\simeq p_\mathrm{U}^*\mathrm{Map}\big(\mathrm{X}_0,\mathrm{A}\big). \tag{40}$$

证明。

$$\begin{aligned}
\phi^*\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),p_\mathrm{B}^*A\big) &\simeq \mathrm{Map}\big(\phi^*(\mathrm{X},p_\mathrm{X}),\phi^*p_\mathrm{B}^*\mathrm{A}\big) && \text{by (38)}\\
&\simeq \mathrm{Map}\big(p_\mathrm{U}^*\mathrm{X}_0,p_\mathrm{U}^*\mathrm{A}\big) && \text{by (39)}\\
&\simeq p_\mathrm{U}^*\mathrm{Map}\big(\mathrm{X}_0,\mathrm{A}\big) && \text{by (38).}
\end{aligned}$$

□

纤维化同伦论。此外，纤维映射空间 (29) 上的拓扑也是“同伦正确”的，因为只要 p_X 是 h-纤维化，它到基空间 B 的映射就是 h-纤维化（根据 [Bo70, §6.1]，另见 [MS06, 命题 1.3.11]）；当 B 是可度量化空间且 p_X 是纤维丛时，情况正是如此。这意味着纤维映射空间的纤维实际上是同伦纤维，并且构造路径 ∞-群胚（奇异单纯复形，参见 [SS21-Bun, 命题 3.3.43]）时，

$$\mathrm{kTopSpc}\;\underset{\mathrm{Pth}}{\overset{|-|}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\bot}}}}\;\Delta\mathrm{Set}$$

保留了这一性质：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pth}\,\mathrm{Map}\big(\mathrm{X}_b,\mathrm{A}\big) & \longrightarrow & \mathrm{Pth}\,\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_\mathrm{X}),p_\mathrm{B}^*\mathrm{A}\big).\\
\downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle\in\mathrm{KanFib}}\\
* & \xrightarrow[b]{} & \mathrm{Pth}(\mathrm{B})
\end{array} \tag{41}$$

引理 4.6 (纤维化截断在基变换下保持不变)。对于任意单纯集合映射 $f\colon B'\to B$，*Kan* 纤维化的基变换（拉回）运算 f^* 保持纤维化 *Postnikov* 截断 (127)：

$$f^*\circ\pi_{0/B}\;\simeq\;\pi_{0/B'}\circ f^*\,.$$

证明。将此理解为切片同伦理论中 0-截断 这一一般现象的特例很有帮助[Lu09, 第5.5节.6]。每个态射 $p:X\longrightarrow S$ 都唯一地分解为先经过 $\pi_{0/S}(E)$，成为一个“0-连通”映射，再接一个“0-截断映射”；而这两类映射在同伦拉回下都保持不变（[Lu09, 例 5.2.8.16 & 引理 6.5.1.16(6)]）。因此，根据拼接律 (20)，即可得出该结论；这一拼接律对同伦拉回也成立（[Lu09, 引理 4.4.2.1][GPP21, 命题 8]）：

$$\begin{array}{ccc} f^*X & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \text{0-cnctd}} & \text{(hpb)} & \downarrow{\scriptstyle \text{0-cnctd}} \\ \pi_{0/B'}\big(f^*X\big) & \longrightarrow & \pi_{0/B}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \text{0-cnctd}} & \text{(hpb)} & \downarrow{\scriptstyle \text{0-trnctd}} \\ B' & \xrightarrow{\ f\ } & B\,. \end{array} \tag{42}$$

□

因此，将引理 4.6 应用于图表 (41)，即可得到如下所示的同伦拉回图：

$$\begin{array}{ccccc} \underset{\text{纤维的}}{\overset{A\text{-上同调}}{A^0(\mathrm{X}_b)}} \simeq \pi_0\big(\text{Pth 映射}(\mathrm{X}_b,\ \mathrm{A})\big) & \longrightarrow & \underset{\text{逐纤维 0-截断(路连通分支，群胚的)，纤维的参数空间}}{\pi_{0/\mathrm{Pth(B)}}\Big(\text{Pth 映射}\big((\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}}),\ p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\big)\Big)} & \longrightarrow & \text{集合}^{*/} \\ \downarrow & \text{(hpb)} & \downarrow & \text{(hpb)} & \downarrow{\scriptstyle \underset{\text{分类器}}{\text{覆盖空间}}} \\ \{b\} & \longrightarrow & \underset{\text{基本群胚}}{\underset{\text{基空间的}}{\mathrm{Pth(B)}}} & \xrightarrow{\ \nabla^{\mathrm{GM}}_{X,A}\ } & \text{集合。} \end{array} \tag{43}$$

左边的平方表明，纤维映射空间的逐纤维 0-截断是一个覆盖在 B 的基本群胚上的纤维化，其（同伦）纤维是纤维空间 X_b 的广义上同调集合 (26)。右边所示的同伦拉回可由下式推出：

引理 4.7 (集合的单值宇宙)。 如 (43) 中间所示，任何集合的同伦纤维化都由一个映射 $\nabla^{\mathrm{GM}}_{X,A}$ 到覆盖空间分类器来分类——也就是说，它是沿该映射的同伦拉回，并且该映射在本质上唯一，如 (43) 右侧的平方所示。

证明。 这可以看作一般事实的一个简单特例： ∞-群胚构成一个 ∞-topos，其中存在一个“小纤维化分类器” $\mathrm{Grpd}_\infty^{*/} \longrightarrow \mathrm{Grpd}_\infty$ ([Lu09, 命题 3.3.2.7][Ci19, 第5节.2][KL21])。 □

注 4.8 (将平坦联络视为基本群胚上的函子)。 注意到，Pth(B) 等价于对连通分支 $[b] \in \pi_0(\mathrm{B})$ 取去环化群胚 $\mathbf{B}\pi_1(\mathrm{B},b)$ 的不交并，因此该映射 $\nabla^{\mathrm{GM}}_{X,A}$ (43) 在每个连通分支上等价于一个群同态

$$\Omega_b\big(\nabla^{\mathrm{GM}_{X,A}}\big) : \pi_1(\mathrm{B},b) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(A^0(\mathrm{X}_b)\big)\,.$$

这就是 空间 B 上平坦联络的传统表述（例如 [De70, §I.1][Di04, 命题 2.5.1]） .

此外，由命题 4.5 可知，这个集合局部系统在任何使 p_{X} 平凡化的覆盖上都平凡化，因此它对应于一个覆盖空间，记作如下：

$$\begin{array}{ccccc} \underset{b\in\mathrm{B}}{\forall} & \overset{A\text{-上同调}}{\underset{\text{纤维}}{A^0(\mathrm{X}_b)}} & = & \underset{\text{纤维上的普通映射空间}}{\overset{\text{.....的连通分支}}{\pi_0\text{映射}(\mathrm{X}_b,\ \mathrm{A})}} & \longrightarrow & \underset{\text{纤维映射空间（覆盖在B上）}}{\overset{\text{.....的参数化连通分支}}{\pi_{0/\mathrm{B}}\text{映射}\big((\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}}),\ p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\big)}}\,. \\ & \downarrow & & \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow \\ & * & & \xhookrightarrow{\ b\ } & & \underset{\text{参数空间}}{\mathrm{B}} \end{array} \tag{44}$$

利用这一点，与 [Vo03I，定义 9.13] 的比较即可容易地表明，(43) 中的平坦联络 $\nabla^{\mathrm{GM}}_{X,A}$ 确实就是高斯-马宁联络。总之，到目前为止我们已经证明：

定理 4.9 (通过纤维映射空间研究纤维丛上广义上同调中的高斯-马宁联络)。设 $\mathrm{B} \in \mathrm{kHaus}$ 是一个可度量的豪斯多夫空间，且 $(\mathrm{X}, p_{\mathrm{X}}) \in \mathrm{kTopSpc}/\mathrm{B}$ 是一个局部平凡纤维丛，其典型纤维具有 *CW*复形结构。那么，对于任意 $\mathrm{A} \in \mathrm{kTopSpc}$，纤维 X_b 的 A-上同调集(26) 上的高斯-马宁联络可由（引理 *4.7*）从X 到A的纤维映射空间(30) 的逐纤维 *0*-截断来呈现：

$$\underset{\text{Gauss-Manin connection on A-cohomology}}{\nabla^{\mathrm{GM}}_{X,A}} \quad \underset{\text{Lem. 4.7}}{\longleftrightarrow} \quad \pi_{0/\mathrm{Pth(B)}}\Big(\mathrm{Pth}\,\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},p_{\mathrm{X}}),\,p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\big)\Big)\,.$$

Fiberwise 0-truncation of fiberwise mapping space into A

4.2 扭曲广义上同调

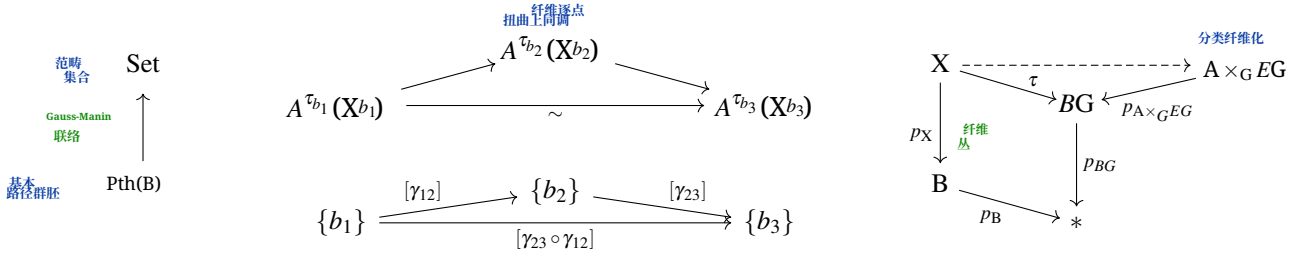
我们将上述讨论推广到逐纤维扭曲上同调的情形（定理 4.13），并引出作为动机的 $\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫方程这一例子（例 4.14）。

现有文献讨论了一个特殊情形：全空间 X 配备了一个平坦复线丛 $\mathscr{L}$，该丛由映射 $\tau\colon \mathrm{X}\to B\mathrm{U}(1)$ 分类。在这种情形下，可以考虑纤维的 τ_b-扭曲复普通上同调，也就是系数取自 $\mathscr{L}$ 的平行局部截面所构成的局部系统的上同调（例如 [Vo03II，第 5.1 节1]）：

$$H^{n+\tau_b}(\mathrm{X}_b;\mathbb{C}) = H^n(\mathrm{X}_b;\mathscr{L}).$$

至少当 p_{X} 是纤维丛时，这些扭曲上同调群仍带有平坦高斯–马宁联络。在 $\mathrm{X} = \mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,n+N\}}(\mathbb{R}^2)$ 是点的构型空间，且 p_X 是忘掉前 n 个 $n+N$ 个点的映射这一例子中，超几何积分构造 将纤维上的扭曲复上同调所带的高斯–马宁联络识别为克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫联络（[EFK98，第 7 节5]）。

以上是我们感兴趣的主要例子。不过，在 [SS22-Def][SS22-Ord] 中，我们说明了，将这种扭曲普通上同调视为扭曲K 理论 群的扭曲陈特征的容身之所是有益的。因此，我们希望更一般地考察扭曲广义上同调群丛上的高斯-马宁联络。



扭曲广义非阿贝尔上同调。作为 (26) 的推广，我们有：

定义 4.10 (**扭曲广义非阿贝尔上同调** [FSS20-Cha, §2.2][SS20-Orb, Rem. 2.94])。对于

- $\mathrm{G}\in \mathrm{Grp}(\mathrm{kTopSpc})$ 是一个拓扑群;
- $\mathrm{G}\curvearrowright\mathrm{A}\in \mathrm{G}\,\mathrm{Act}(\mathrm{kTopSpc})$ 是一个拓扑 G-空间,
- 其中 $(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G},\ p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\in \mathrm{kTopSpc}_{/B\mathrm{G}}$ 是其 Borel构造;
- $\tau_b:\mathrm{X}_b\longrightarrow B\mathrm{G}$ 是一个连续映射;

我们称

$$\begin{aligned} A^{\tau_b}(\mathrm{X}_b) &:= H^{\tau_b}(\mathrm{X}_b;\mathrm{A}) \\ &:= \pi_0\Gamma_{\mathrm{X}}\big((\tau_b)^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G})\big) \\ &\underset{(46)}{\simeq} (p_{B\mathrm{G}})_*\mathrm{Map}\Big(\underbrace{(\mathrm{X}_b,\tau_b)}_{(\tau_b)_!(\mathrm{X}_b,\mathrm{id}_{\mathrm{X}_b})},(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G},p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\Big) \end{aligned} \tag{45}$$

是 τ_b-扭曲的 A-上同调，定义在 X 上$_{b}$。

要看出（45）中所示的、将截面空间与扭曲分类空间上的纤维映射空间的右基变换等同起来的结果，对下面这一列自然双射应用 Yoneda 引理：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{kTopSpc}\Big(\mathrm{U}, (p_{BG})_*\mathrm{Map}\big((\tau_b)_!(\mathrm{X}_b, \mathrm{id}_{\mathrm{X}_b}), (\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)\Big)\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/BG}\Big((p_{BG})^*\mathrm{U}, \mathrm{Map}\big((\tau_b)_!(\mathrm{X}_b, \mathrm{id}_{\mathrm{X}_b}), (\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)\Big) && \text{由 (33)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/BG}\Big(\big((p_{BG})^*\mathrm{U}\big)\times(\tau_b)_!(\mathrm{X}_b, \mathrm{id}_{\mathrm{X}_b}), (\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\Big) && \text{by (31)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/BG}\Big((\tau_b)_!\big((p_{\mathrm{X}_b})^*\mathrm{U}\times(\mathrm{X}_b, \mathrm{id}_{\mathrm{X}_b})\big), (\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\Big) && \text{by (37)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{X}_b}\Big((p_{\mathrm{X}_b})^*\mathrm{U}\times(\mathrm{X}_b, \mathrm{id}_{\mathrm{X}_b}), (\tau_b)^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\Big) && \text{by (33)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{X}_b}\Big((p_{\mathrm{X}_b})^*\mathrm{U}, (\tau_b)^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\Big) && \text{by (32)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}\Big(\mathrm{U}, (p_{\mathrm{X}_b})_*\big((\tau_b)^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)\Big) && \text{by (33)}\\
&\simeq \mathrm{kTopSpc}\Big(\mathrm{U}, \Gamma_{\mathrm{X}_b}\big((\tau_b)^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}} E\mathrm{G}, p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)\Big) && \text{by (36)}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

例 4.11 （系数取值于局部系统的扭曲的普通复上同调）。对于每个$n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{U}(1)\subset\mathbb{C}^\times$ 在 $\mathbb{C}$ 上的典范乘法作用在 n阶 Eilenberg-MacLane空间 $\mathrm{U}(1)\subset\mathrm{K}(\mathbb{C},n)$上诱导出一个作用。对于 $\tau_b:\ \mathrm{Pth}(\mathrm{X}_b)\ \text{–!}\ \mathbf{B}\mathrm{U}(1)$，即复线丛上的平坦联络（备注 4.8）的分类映射（也就是在连通分支 $[b]$ 上的群同态 $\pi_1(\mathrm{B},\ b)\ \text{–!}\ \mathrm{U}(1)$），根据定义 4.10，对应的扭曲上同调就是系数取自该平坦联络的平行截面局部系统 $\mathscr{L}(\tau)$ 的传统上同调（例如 [Vo03I，第5节 5.1.1]）：

$$
\mathrm{K}(\mathbb{C},n)^{\tau}(\mathrm{X}_b)\ =\ H^{n+\tau}(\mathrm{X}_b;\mathbb{C})\ \simeq\ H^n\big(\mathrm{X}_b;\mathscr{L}(\tau)\big).
$$

现在，给定 $\mathrm{G}\curvearrowright\mathrm{A}$，如定义 4.10 所述，以及一个纤维化 $(\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}})\in\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}$，如 §4.1 中之前所述，考虑选取一个全局扭曲，即一个连续映射

$$
\tau:\mathrm{X}\longrightarrow B\mathrm{G}.
$$

通过此扭曲，我们可将 X 视为在积空间 $\mathrm{B}\times B\mathrm{G}$ 上纤维化，因此其纤维也仍然在 $B\mathrm{G}$ 上纤维化

$$
\big(\mathrm{X},(p_{\mathrm{X}},\tau)\big)\ \in\ \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}\times B\mathrm{G}},\qquad\Rightarrow\qquad \underset{b\in\mathrm{B}}{\forall}\ (i_b\times\mathrm{id}_{B\mathrm{G}})^*\big(\mathrm{X},(p_{\mathrm{X}},\tau)\big)\ =\ (\mathrm{X}_b,\tau_b)\ =\ (\tau_b)_!\mathrm{X}_b\ \in\ \mathrm{kTopSpc}_{/B\mathrm{G}}.
$$

构造纤维　　意义下的映射空间 (30)，我们得到 (29) 的如下扭曲推广　　：

$$
\begin{array}{ccc}
\underset{\text{扭曲分类空间上的纤维映射空间}}{\mathrm{Map}\big((\mathrm{X}_b,\ \tau_b),\ (A\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G},\ p_{A\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)} & \longrightarrow & \underset{\text{纤维映射空间(其自身是 B 上的拓扑空间}\times B\mathrm{G})}{\mathrm{Map}\big((\mathrm{X},\ (p_{\mathrm{X}},\ \tau)),\ p_{\mathrm{B}}^*(\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G},\ p_{\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}})\big)}.\\
\downarrow & \text{(pb)} & \downarrow\\
\underset{\text{分类空间的扭曲}}{\{b\}\times B\mathrm{G}} & \xhookrightarrow[ib\ \text{等同类型}\ B\mathrm{G}]{} & \underset{\text{空间}}{\mathrm{B}\times B\mathrm{G}}\ \underset{\text{空间}}{}
\end{array}
\tag{47}
$$

为了将其变为仅在 B 上的拉回图，我们需要 *Beck-Chevalley* 关系 （参见 [Pav91，第 §1][Ba15 节、第 7.5]节以及 [Sc14a，定义 5.5][GL17，第 2.4 节）：

命题 4.12 （笛卡尔 Beck-Chevalley 性质）。给定如下图左侧所示的 *kTopSpc* 中的纤维积图，沿该图进行的可能复合基变换（33）如右侧所示自然同构：

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{Y} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}} & \mathrm{Y}\\
{\scriptstyle \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}}\downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathrm{Y}}}\\
\mathrm{X} & \xrightarrow[p_{\mathrm{X}}]{} & \mathrm{B}
\end{array}
\qquad\Rightarrow\qquad
\begin{cases}
(p_{\mathrm{Y}})^*\circ(p_{\mathrm{X}})_!\ \simeq\ (\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}})_!\circ(\mathrm{pr}_{\mathrm{X}})^*,\\
(p_{\mathrm{X}})^*\circ(p_{\mathrm{Y}})_*\ \simeq\ (\mathrm{pr}_{\mathrm{X}})_*\circ(\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}})^*.
\end{cases}
\tag{48}
$$

证明。(48) 中的第一个同构直接由粘贴律 (20) 得出；对于 $(\mathrm{E},\ p_{\mathrm{E}})\in\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{X}}$，它给出了以下自然等同：

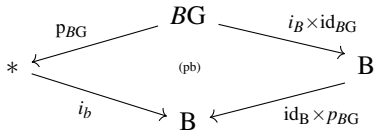
$$
\begin{array}{ccc}
(p_{\mathrm{Y}})^*(p_{\mathrm{X}})_!\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{Y}\\
\downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathrm{Y}}}\\
\mathrm{E} & \xrightarrow[p_{\mathrm{X}}\circ p_{\mathrm{E}}]{} & \mathrm{B}
\end{array}
\ \simeq\
\begin{array}{ccccc}
 & \overset{p_{(\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}})_!(\mathrm{pr}_{\mathrm{X}})^*\mathrm{E}}}{\frown} & & & \\
(\mathrm{prx})^*E & \longrightarrow & \mathrm{X}\times_{\mathrm{B}}\mathrm{Y} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}}} & \mathrm{Y}\\
\downarrow & \text{(pb)} & {\scriptstyle \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}}\downarrow & \text{(pb)} & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathrm{Y}}}\\
E & \xrightarrow[p_{\mathrm{E}}]{} & \mathrm{X} & \xrightarrow[p_{\mathrm{X}}]{} & \mathrm{B}.
\end{array}
$$

由伴随性 (33) 和米田引理可得第二个自然同构：

$$\begin{aligned}\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{X}}\big((\mathrm{U},p_{\mathrm{U}}),(p_{\mathrm{X}})^*(p_{\mathrm{Y}})_*(\mathrm{E},p_{\mathrm{E}})\big) &\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}\big((p_{\mathrm{X}})_!(\mathrm{U},p_{\mathrm{U}}),(p_{\mathrm{Y}})_*(\mathrm{E},p_{\mathrm{E}})\big)\\ &\simeq \mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{Y}}\big((p_{\mathrm{Y}})^*(p_{\mathrm{X}})_!(\mathrm{U},p_{\mathrm{U}}),(\mathrm{E},p_{\mathrm{E}})\big),\end{aligned}$$

同构的另一侧也类似。 □

现在考虑以下特殊情形下的 Beck-Chevalley 关系 (48)



$$\big(i_b\big)^*\circ\big(\mathrm{id}_{\mathrm{B}}\times p_{BG}\big)_*\ \simeq\ \big(p_{BG}\big)_*\circ\big(i_b\times\mathrm{id}_{BG}\big)^*. \tag{49}$$

由 (47) 可推出以下拉回图：

$$\begin{array}{ccc}(p_{BG})_*\text{映射}\big((\mathrm{X}_b,\tau_b),(A\times_G EG,P_{A\times_G EG})\big) & \longrightarrow & (\mathrm{id}_{\mathrm{B}}\times p_{BG})_*\text{映射}\big((\mathrm{X},\ p_{\mathrm{X}}),\ p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}\big).\\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow\\ \{b\} & \xrightarrow[i_b]{} & \mathrm{B}\end{array} \tag{50}$$

由于分类空间BG——按照 Milgram 的构造：$B\mathrm{G}\ =|N(\mathrm{G}\rightrightarrows *)|$（例如，回顾于 [SS21-Bun, (2.64)]）——是一个 CW复形，因而是 Serre余纤维，右侧的映射仍然是 Serre纤维化，因此，对参数化连通分支取值与 (43) 中一样可行，从而得到一个覆盖空间，推广了 (44)；其在$b\ \in$B 上方的纤维是纤维 X_b 的τ_b-扭曲A-上同调（定义 4.10）：

$$\begin{array}{ccc}\pi_0\Big((p_{BG})_*\text{映射}\big((\mathrm{X}_b,\tau_b),(A\times_G EG,P_{A\times_G EG})\big)\Big) & \longrightarrow & \pi_{0/\mathrm{B}}\Big((\mathrm{id}_B\times p_B)_*\text{映射}\big((\mathrm{X},\ (p_{\mathrm{X}},\ \tau)\big),\ p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}\big)\Big).\\ \downarrow & \text{(pb)} & \downarrow\\ * & \xrightarrow[i_b]{} & \mathrm{B}\end{array} \tag{51}$$

τ-扭曲 A-上同调纤维的 $A^\tau(X_b)\ \simeq$

逐纤维连通分支映射（其自身是 B 上的拓扑空间）

如同非扭曲情形，命题 4.5 再次表明，该覆盖空间可与（X，p_{X}）的任意局部平凡化相容地平凡化，从而展示其对应的分类映射 $\nabla^{\mathrm{GM}}{}_{X,\ G\curvearrowright A}$（通过引理 4.7）即为高斯-马宁联络（参见 [EFK98，第 7.5] 节中的描述）。

总之，我们现在已经证明了以下将定理 4.9 推广到扭曲上同调的结论：

定理 4.13 (通过纤维映射空间研究纤维丛上的扭曲广义上同调中的高斯-马宁联络。 令 $\mathrm{B}\ \in\mathrm{kHaus}$ 为可度量化空间，且 $(\mathrm{X},p_{\mathrm{X}})\ \in\mathrm{kTopSpc}_{/\mathrm{B}}$ 为局部平凡纤维丛，其典型纤维具有 *CW* 复形的结构。

那么，对于任意离散或紧李$\mathrm{G}\ \in\mathrm{Grp}(\mathrm{kTopSpc})$ 以及局部系数 $G\curvearrowright\mathrm{A}\ \in\mathrm{GAct}(\mathrm{kTopSpc})$，纤维的扭曲 A-上同调集 (45) 上的高斯-马宁联络由沿 $B\mathrm{G}$ (50) 对从X 到 *Borel* 构造$\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}$的纤维映射空间(47) 进行右基变换后所得的逐纤维 *0*-截断给出：X_b

$$\underbrace{\nabla^{\mathrm{GM}}_{X,\,G\curvearrowright A,\,\tau}}_{\substack{\textbf{Gauss-Manin}\\ \textbf{connection on}\\ \textbf{twisted }A\textbf{-cohomology}}}\quad\underbrace{\longleftrightarrow}_{\text{Lem. 4.7}}\quad\underbrace{\pi_{0/\mathrm{Pth}(\mathrm{B})}\Big(\mathrm{Pth}\,(\mathrm{id}_{\mathrm{B}}\times p_{BG})_*\mathrm{Map}\Big(\big(\mathrm{X},(p_{\mathrm{X}},\tau)\big),\,p_{\mathrm{B}}^*\mathrm{A}\times_{\mathrm{G}}E\mathrm{G}\Big)\Big)}_{\substack{\textbf{Fiberwise 0-truncation of right base change along }B\mathrm{G}\\ \textbf{of fiberwise mapping space into Borel construction on A}}}. \tag{52}$$

在下一节§5中，我们说明 (52) 右侧的同伦论构造如何在 Agda 等同伦类型化编程语言中得到简洁实现：这就是下文的定义 5.16。

但首先，我们现在作出如下例 明确这些一般性考量中与量子计算相关的特殊情形 ：

例4.14 （通过参数化同伦理论得到的 $\widehat{\mathfrak{su}_2}^k$-共形块的克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫联络）。考虑将上述设置特化为以下域纤维化、局部系数和扭曲的选择，并由参数化（参见文献 2.19）：

$N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$	“缺陷”点的数
$n \in \mathbb{N}$	“探针”点的数
$\kappa \in \mathbb{N}_{\geq 2}$	“平移层级”
$(\mathrm{w}_I)_{I=1}^N \in \{0,1,\cdots,\kappa-2\}^N$	缺陷所携带的“权”

(53)

然后按如下方式选取：

(i) 该**域纤维化**

$$\big(\mathrm{X} \xrightarrow{p_X} \mathrm{B}\big) :\equiv \Big(\underset{\{1,\cdots,N+n\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_N^{N+n}} \underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}) \Big) \simeq \Big(B\mathrm{PBr}(N+n) \to B\mathrm{PBr}(N) \Big) \tag{54}$$

是平面中有序点的构形空间的纤维化 (6)（文献 2.18），它会遗忘最后n 个自然数 $+n$点；如右侧所示 (206)，可将其视为解环纯辫群的等价纤维化（文献 2.20）。

(ii) 该**局部系数空间**

$$G \curvearrowright A \quad :\equiv \quad \mathbb{C}^\times \curvearrowright K(\mathbb{C}, n) \tag{55}$$

是例 4.11 中的复Eilenberg-MacLane空间，次数为n，并带有其典范的 $\mathbb{C}^\times$-作用；

(iii) 该**扭曲**

$$\tau_{(\kappa,(\mathrm{w}_I)_{I=1}^N)} : \underset{\{1,\cdots,N+n\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}) \simeq B\mathrm{PBr}(N+n) \longrightarrow B\mathbb{C}^\times , \tag{56}$$

是以下群同态的去环化：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{PBr}(N+n) & \xrightarrow{\Omega\tau} & \mathbb{C}^\times & & \\ b_{I,i} & \longmapsto & \exp\big(2\pi\mathrm{i}\,\tfrac{\mathrm{w}_I}{\kappa}\big) & \text{for} & 1 \leq I \leq N \\ b_{i,j} & \longmapsto & \exp\big(2\pi\mathrm{i}\,\tfrac{2}{\kappa}\big) & & N < i \leq N+n \\ b_{I,J} & \longmapsto & \exp\big(2\pi\mathrm{i}\,\tfrac{\mathrm{w}_I \mathrm{w}_J}{2\kappa}\big) & & \end{array} \tag{57}$$

这里b_{ij} 表示纯辫生成元 (13)。注意，任意此类赋值都满足纯辫关系 (15)，因为这些关系都是群交换子关系，而在诸如 $\mathbb{C}^\times$这样的阿贝尔群中，它们都显然成立。

采用这些选择后，上述高斯-马宁联络就特化为 [EFK98, §7.5] 中讨论的情形，并由 [SS22-Def][SS22-Ord][SS22-TQC]，在我们的上下文中加以回顾，从而得到纤维逐点扭曲普通上同调群丛上的高斯-马宁联络（例 4.11）

$$\big(\{z_I\}_{I=1}^N \in \underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\big) \quad \longmapsto \quad H^n\Big(\underset{\{1,\cdots,n\}}{\mathrm{Conf}}\big(\mathbb{C} \setminus \{z_I\}_{I=1}^N\big); \mathscr{L}\big(\tau_{(\kappa,(\mathrm{w}_I)_{I=1}^N)}\big)\Big)$$

根据 [EFK98, §7.5]，这就是 Knizhnik-Zamolodchikov联络（文献 2.24），它作用于——根据 [FSV94]——黎曼球面上具有权 w1，$\cdots$，w_N（按指定方式）以及 $\mathrm{w}_{N+1} = n + \sum_{I=1}^N \mathrm{w}_I$ 的 自然数 $+1$ 点关联函数的共形块。这是 KZ 解的超几何积分构造（文献 2.25）的结果， [SS22-Def][SS22-Ord] 对此作了进一步回顾（并给出了参考文献）。

（请注意，式（57）最后一行中b_{IJ} 的相位选择遵循 [EFK98, (7.14)][Ko12, (6.1)]。在此处作出不同选择，只会使所得平坦联络与一个平坦线丛作张量积，从而使所得单值化改变这些全局相位。）

总之，在例4.14的情形下，定理 4.13 与例 4.11 表明， $\widehat{\mathfrak{su}_2}^{\kappa-2}$-共形块空间上的 KZ联络，可等价地体现为（右基变换的）逐纤维 0-截断中的一个

纤维映射空间：

KZ-connection on $\widehat{\mathfrak{su}_2}^{\kappa-2}$-conformal blocks on the sphere with $N+1$ insertions of weights $(\mathrm{w}_I)_{I=1}^N$, $\mathrm{w}_{N+1} = n + \sum_I \mathrm{w}_I$

$$\nabla^{\mathrm{KZ}}\left(\kappa, (\mathrm{w}_I)_{I=1}^N, n\right)$$

$$\Big\updownarrow \text{ Lem. 4.7}$$

$$\pi_{0/\mathrm{Pth}\underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})}\left(\mathrm{Pth}\left(\mathrm{id}_{\underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})} \times p_{B\mathbb{Z}_\kappa}\right)_* \mathrm{Map}_{\underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\times B\mathbb{C}^\times}\left(\underset{\{1,\cdots,N+n\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}), \mathrm{K}(\mathbb{C},n)\times_{\mathbb{C}^\times} E\mathbb{C}^\times\right)\right) \tag{58}$$

沿$B\mathbb{C}^\times$ 对从构型空间到埃伦伯格-麦克莱恩纤维丛的纤维映射空间进行右基变换后的逐纤维 0-截断

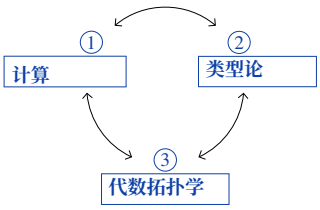
接下来，我们转向如何在 Agda 等同伦类型化编程语言中编码右侧的构造：这将在下文第6节中实现（定理 6.8）。为此，我们先一般性地讨论同伦数据类型理论及其对高斯-马宁联络的编码（第5节）。

5 .....通过依赖同伦类型论

在这里，我们将第4节的拓扑构造改写为同伦类型论（HoTT，文献 2.27）这一编程语言；我们将在第5.1节阐述其动机并作概述：在第5.2节中，我们将先前的定理 4.13 转化为一种数据传输构造（文献 2.30），它通过依赖数据类型族实现，其“语义”由高斯-马宁联络的单值化给出。将此构造特化到例 4.14 的上下文后，便能在下文第6节中得到所承诺的克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫联络单值化的类型论编码，从而也得到任意子编织量子门的编码。

5.1 从数据类型到同伦类型

我们将非正式但详尽地阐述带有同伦数据类型的编程语言的一般原则，从“为所有数据严格地声明相应的数据类型规范”这一想法出发，自然而然地引出同伦论语言结构；这些结构将在第6节中用于自然地规范任意子编织量子门。如今，关于这一同伦类型论（HoTT，文献 2.27）的文献已相当丰富，但我们认为，尚缺少沿以下思路展开的阐述；无论如何，这样的阐述有助于连贯地记录并引用类似罗塞塔石碑的对应关系（同伦论的“计算三部曲”，参见 [SS22-TQC，第 4], 文献 2.26 页）



(59)

将我们的 第4节中的代数拓扑定理转化为第5.2节和第§中的编程语言构造 6:

带类型编程语言的思想..... 每一项由编程语言处理的数据都应被赋予一个数据类型，以指定其预期性质（例如 [ML82][Th91][St93][Lu94][Gu95][Co11][Ha16],参见下文第52页）。

例如，将一个数值数据 d 声明为自然数类型——记作“$d:\mathbb{N}$”（111）——而不是整数类型 $\mathbb{Z}$、有理数类型 $\mathbb{Q}$、实数类型 $\mathbb{R}$ 或复数类型 $\mathbb{C}$（这些都在第6节讨论），可以说明程序后续部分可能或不可能如何处理这一数据。比如，如果一个程序计算出的数能够被证明属于类型 $\mathbb{N}$，而不是限制较少的类型$\mathbb{Z}$，那么就能保证该数非负，这对于后续计算的可靠性可能很重要。

有鉴于此，**带类型的编程语言的**目的在于：T
o decl是程序 f which，给定 *data d of* 输入类型 D，保证 d 产生输出类型 A的数据 $f(d)$
遵循形式逻辑的传统，此类算法（“断言” [RW1910, p. xviii], “证明” [Ch40, §5], “验证”[Ko61, p. 223]）由符号“$\vdash$” [Fr1879, §2]表示，用于表示判断，参见 [ML84, p. 2][ML96, §1]:

编程语言（语法）	**数学指称**（语义）
给定..... Γ, ……此外…… $d:D$ $\vdash$ ……构造 $f_c(x):A$	$\Gamma\times D$ 空间 输入数据 —f→ 函数 / 映射 → A 空间 输出数据

(60)

.....及其数学含义。如右图所示，将数据类型化明确化，可以让人识别出程序显而易见的“数学含义”或“指称语义”（这一开创性思想归功于 [Sc70][ScSt71], ; 相关阐述见[SK95, §9]）：程序 f（保证最终会停止，并随后）在输入类型为 D 的输入上运行时，会输出类型为 A 的数据；显然，它是从类型为 D 的所有数据构成的“空间”映射到类型为 A 的所有数据构成的“空间”的函数 或映射 。这句听起来近乎同义反复的话，随着我们逐步推演类型化编程原则的全部逻辑后果，将发展成编程语言与代数拓扑学之间一种极为强大的关系。

[10]按照惯例，在（60）中，我们将任意类型 Γ 的“常量” c 的通用上下文的指称也包含在内——执行f可能依赖于这些常量；不过，人们或许不想将它们视为外部参数，而是视为传递给程序的隐式参数（例如“标志”）。同样按照惯例，我们通常会在记法上省略这一通用背景上下文。

关于数据类型之数据类型的想法。认真对待数据类型化原则后，人们会意识到，数据类型显然本身也是一种数据——因此也应当为其指定一种数据类型：我们用“Type”表示所有数据类型的（“大型”）数据类型——它通常称为类型宇宙，记作“$\mathscr{U}$”或类似符号 [ML75, §1.10][ML84, 第 47][页；Ho95, §2.3.5][Pa98]。

类型宇宙的语义由集合论中的*Grothendieck* 宇宙给出（例如 [Schu72, 第3节.2], 见 [Kr07，第6.4节.4]），或者更确切地说——通过单值性公理（105）——由其推广到对象分类器“Obj”[Lu09，第6.1节.6], ，见下文（106）附近。

类型论	同伦论
$\Gamma \vdash D:$ 类型	$\Gamma \xrightarrow{D}$ Obj

(61)

数据类型构造的思想。给定这些数据类型后，可以依据相当直观的规则（在 [ML84][ML96], 中遵循“构造性逻辑”（92），其动机阐释得十分清楚）从中构造更多数据类型。例如，给定一对数据类型 X_1 和 X_2, ，可以考虑由数据有序对 *product type* $X_1 \times X_2$ 构成的积类型，其中（d_1, d_2）满足 $d_1 : X_1, d_2 : X_2$。正如记号所示，积类型句法规则的指称语义就是积空间的特征性质：

	编程语言（语法） 关于**积类型**	**数学指称**（语义） 关于**积空间**
Pair type formation rule	给定一种数据类型…… $\vdash X_1 :$ 类型 ……以及另一种…… $\vdash X_2 :$ 类型 $\vdash X_1 \times X_2 :$ 类型 ……我们推断出它们的有序对的数据类型。	给定一个空间…… X_1 ……我们推断出它们的积空间。 $X_1 \times X_2$ X_2 ……以及另一个……
Pair introduction rule	给定一个程序，它计算类型为 X_1 的数据…… $i:I$索引的 X_i-数据…… $\Gamma \vdash x_1 : X_1 \quad \Gamma \vdash x_2 : X_2$ $\Gamma \vdash (x_1, x_2) : X_1 \times X_2$ ……我们推断出一个程序，它计算类型为 $X_1 \times X_2$ 的数据。	给定到一个空间的映射 $x_1 : X_1$ $\Gamma \xrightarrow{(x_1,x_2)} X_1 \times X_2$ ……我们推导出一个映射到积空间 $x_2 : X_2$ 以及到另一个空间的映射
Pair elimination rule	给定一个程序，它计算对类型的数据…… $\Gamma \vdash f : X_1 \times X_2$ $\Gamma \vdash \mathrm{pr}_i(f) : X_i$ ……我们推断出能够计算分量数据的程序。	$\mathrm{pr}_1 \circ f : X_1$ pr_1 $\Gamma \xrightarrow{f} X_1 \times X_2$ 给定一个映射到积空间…… pr_2 $\mathrm{pr}_2 \circ f : X_2$ ……我们推断其分量映射
Pair computation rules	$\Gamma \vdash x_1 : X_1 \quad \Gamma \vdash x_2 : X_2$ $\Gamma \vdash \mathrm{pr}_i(x_1, x_2) \equiv x_i : X_i$ 使得 将配对程序输入投影程序可以还原输入数据…… $\Gamma \vdash p : X_1 \times X_2$ $\Gamma \vdash p \equiv (\mathrm{pr}_1 p, \mathrm{pr}_2 p) : X_i$ ……以及任意对类型的数据都是其投影构成的有序对。	使得该图表可交换…… $x_1 : X_1$ pr_1 $\Gamma \xrightarrow{(x_1,x_2)} X_1 \times X_2$ ……恰好用于 这一映射。 pr_2 $x_2 : X_2$

(62)

在此处及下文中，我们使用以下传统记法表示编程语言的句法规则：

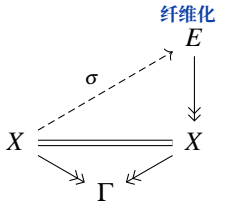
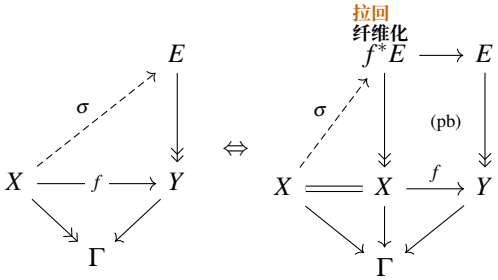
- 水平线表示一条自然演绎规则（[Ge34], 参见 [Ge69]），用于从线条上方的判断（60）推导出线条下方的判断。通过这些规则，有效的带类型程序得以逐步构造（例如 [DA18]）。
- 符号“$\equiv$”将被视为句法相等的项联系起来（“定义相等”，例如 [Ch07, §10.1][Th91, §5.2.1][UFP13, p. 19]），这应与“等同”（71）和“命题相等”（97）相区别。

依赖类型编程语言的思想。一般而言，不仅数据本身，其类型也可能依赖 于给定的数据上下文（见 [Ho97][Ch13, §1.2.2]）。例如，根据先前计算出的自然数 $d:\mathbb{N}$，可以将一个（量子态）向量 ψ_d 明确声明为类型为 $\mathbb{C}^d$ 的元素，即复希尔伯特空间中元素的类型，而该空间的维数为d。这里，这些有限维希尔伯特空间共同构成一个依赖类型，具体来说，它依赖于自然数类型的数据（自然数即为这些空间的维数）。

尽管在这个语法层面上，这看起来可能表面上微不足道（但事实并非如此），一种能够计算此类 ψ_d、同时遵循其依赖类型系统原则的编程语言，具有概念上颇为有趣的语义：它所计算的函数 (60) 现在是一个纤维化的截面：

编程语言（语法）	**数学指称**（语义）
给定…… ……构造 $\Gamma,\ d:\ \mathbb{N} \ \vdash\ \psi_d : \mathbb{C}^d$	$\mathscr{V} = \Gamma \times \prod_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{C}^d$ $\psi_{(-)}$ 纤维化 $\Gamma\times\mathbb{N} = \Gamma\times\mathbb{N}$ 基底

因此，依赖数据类型的指称语义就是纤维化（“丛”，在此上下文中通常称为“显示映射”，参见例如 [Ja98，第 §10][Jo17]），正如同伦论中所知的那样（例如 [Sh15，第 2 节、第 §3]）。

依赖数据类型与依赖数据	**迭代纤维化及其相对截面**
上下文类型 依赖类型 $\Gamma,\ x_c : X_c \ \vdash\ E_c(x_c):$ 类型 $\Gamma,\ x_c : X_c \ \vdash\ \sigma_c(x_c):\ E_c(x_c)$ 依赖项	纤维化 
$\Gamma,\ x:X \ \vdash\ \sigma_c(x_c) : E_c\left(f_c(x_c)\right)$	拉回 纤维化 (pb) 

(63)

聚合依赖数据的思想。给定这样的依赖数据类型 $d:\ D\ \vdash C_d:$ 类型（63），有两种自然的方式可以将所有类型C_d“聚合”为一个单独的数据类型：
(68) 通过构造所有 C_d 的依赖积 $\prod_{d:D} C_d$——给出这种聚合类型的数据，意味着对每个 $d:D$，给出类型为 C_d 的数据，因此给出一个形式为 $(d:D)\to C_d$ 的依赖函数（纤维化的一个截面）；(65) 通过构造所有 C_d 的依赖余积 $\coprod_{d:D} C_d$——给出这种聚合类型的数据，意味着对某个 $d:D$，给出类型为 C_d 的数据，因此给出一个形式为 $(d:D)\times C_d$ 的有序对（纤维化全空间中的一个点）：

给定数据类型：	类型构造子：		给出以下类型：	其中：
$\vdash D:$ 类型 $d:D \ \vdash C_d:$ 类型	**依赖的积**	$\prod_{d:D} C_d = (d:D)\ !\ C_d$	**依赖的函数**	映射 数据d，类型为 D 到 类型为C的数据$_d$
	依赖的余积[11]	$\coprod_{d:D} C_d = (d:D)\times C_d$	**依赖的有序对**	有序对 数据的 类型为 D 与 类型为C的数据$_d$

(64)

具体而言，依赖对类型的推理规则如下，这是对（62）的显然的依赖推广：

给定一个数据类型…… 索引另一个数据类型……

$$\frac{\Gamma \vdash I : \text{类型} \qquad \Gamma, i : I \vdash X_i : \text{类型}}{\Gamma \vdash (i : I) \times X_i : \text{类型}}\ \text{依赖对构造规则}$$

……我们推断……的类型

X_i 与其索引 $i{:}I$ 配对的数据。

给定一个程序计算I-数据…… ……以及一个程序，它计算 X_i-数据……

$$\frac{\Gamma \vdash i : I \qquad \Gamma \vdash x_i : X_i}{\Gamma \vdash (i,x) : (i : I) \times X_i}\ \text{依赖对引入规则}$$

……我们推断出 一个程序，它计算这些有序对 (i,x_i)。

给定 一个程序计算有序对……

$$\frac{\Gamma \vdash p : (i : I) \times X_i}{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_I(p) : I}\ \text{依赖对消去规则}$$

$$\Gamma \vdash \mathrm{pr}_X(p) : X_{\mathrm{pr}_I(p)}$$

……我们推导出 程序，使其计算各个分量……

……使得这些确实是有序对的分量……

$$\frac{\Gamma \vdash i : I \qquad \Gamma \vdash x : X_i}{\Gamma \vdash \mathrm{pr}_I(i, x) \equiv i : I}\ \text{依赖对计算规则}$$

$$\Gamma \vdash \mathrm{pr}_X(i, x) \equiv x : X_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : (i : I) \times X_i}{\Gamma \vdash p \equiv (\mathrm{pr}_I(p), \mathrm{pr}_X(p)) : (i : I) \times X_i}\ \text{依赖对唯一性规则}$$

……并且任何有序对都是由其分量构成的有序对。

(65)

依赖函数类型的伴随推理规则如 (68) 所示。注意 (66)，项引入规则 (68) 在各种依赖关系均为平凡的情形下特化后，所表达的只是函数本身 (60) 与被视为函数类型 数据的函数之间那种微妙却至关重要的差异——其指称语义由映射空间伴随(24) 给出。

项引入函数类型的	内部同态伴随
函数 $\dfrac{\Gamma, d : D \vdash c_d : C}{\Gamma \vdash (d \,!\, c_d) : D \,!\, C}$ 函数类型的数据	map $\dfrac{\Gamma \times D \xrightarrow{f} C}{\Gamma f\text{–}! \ \text{映射}(D, C)}$ 映射空间的元素

(66)

一般依赖函数类型（$\delta : \Delta_\gamma$）！（–）的语义，是通过切片映射空间伴随（31）构造相对截面空间，因此就是（例如 [Sh15，例 2.9]）右基变换运算（p_D），从基 Δ 到基 Γ（33）。

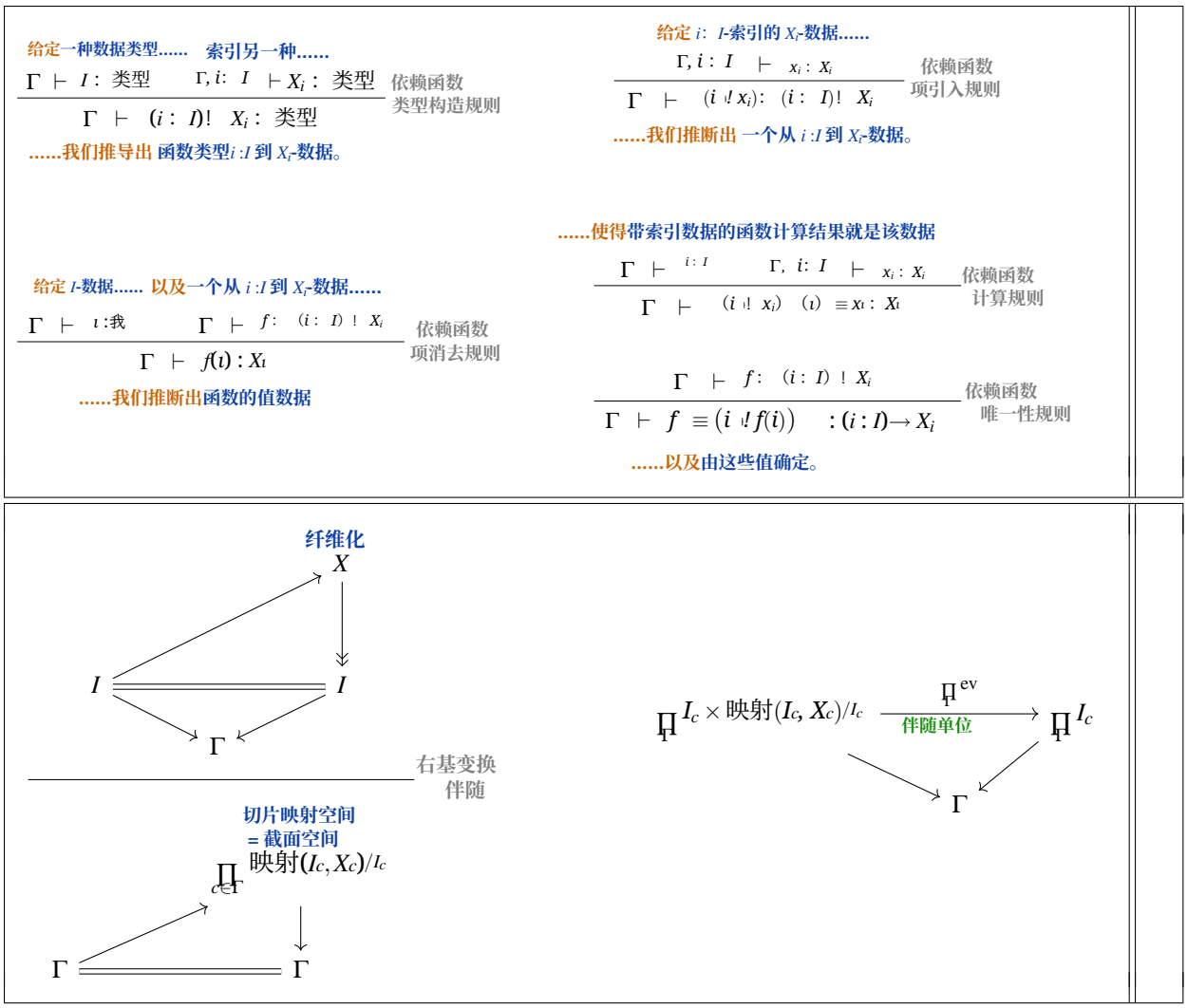
$$\text{类型}_\Delta \underset{((\gamma:\Gamma)\vdash(\delta_\gamma:\Delta_\gamma)\to(-))}{\overset{((\gamma:\Gamma)\vdash(\delta_\gamma:\Delta_\gamma)\times(-))}{\rightleftarrows}} \text{类型}_\Gamma$$

依赖数据类型的聚合	通过局部笛卡尔闭包进行基变换
$\dfrac{(\gamma : \Gamma) \times (\delta : \Delta_\gamma), (d\gamma : D\gamma) \vdash c_{(\delta, d_\gamma)} : C_\delta}{(\gamma : \Gamma), (d\gamma : D\gamma) \vdash (\delta : \Delta_\gamma) \,!\, C_\delta}$ $\delta \mapsto c_{(\Delta_\gamma, d\gamma)}$	$\dfrac{\begin{tikzcd} \Delta \times_\Gamma D \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & C \arrow[dl, "p_C"] \\ & \Delta & \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} D \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p_D"'] & & \text{映射}(\Delta, p_C) \arrow[dl] \\ & \Gamma & \end{tikzcd}}$
$\dfrac{(\gamma : \Gamma) \times (\delta : \Delta_\gamma), (d\gamma : D\gamma) \vdash (c\gamma : C_\Gamma)}{(\gamma : \Gamma), (\delta : \Delta_\gamma) \times (d\gamma : D\gamma) \vdash (c\gamma : C_\Gamma)}$	$\dfrac{\begin{tikzcd} D \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p_D"'] & & \Delta \times_\Gamma C \arrow[dl] \arrow[rr] & & C \arrow[dl, "p_C"] \\ & \Delta \arrow[rr, "p_\Delta"'] & & \Gamma & \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} D \arrow[rrr, dashed] \arrow[dr, "p_D"'] \arrow[drr] & & & C \arrow[dl, "p_C"] \\ & \Delta \arrow[r, "p_\Delta"'] & \Gamma & \end{tikzcd}}$

(67)

[11]依赖对类型的传统记法是“$\Sigma_{d:D} C_d$”的某种变体，读作“依赖和”。尽管这种记法被广泛使用，但它显然是一个误称——而一旦我们将依赖类型论推广为依赖线性类型论 [QP]，，这个误称就会变得致命，因为此时真正的和（在线性代数意义下）会出现在依赖余积旁边。幸运的是，另一种对类型记法（$d : D$）$\times$ C_d（参见 [W¨a，第 1] 页）不仅避开了这种冲突，而且总的来说也可以说更加方便、更具启发性——例如在下方的（67）式和第 52 页中便可看到这一点。

这意味着（如 [See84]，最初所理解的；另见 [CGH14] 和 [Sh15，第 11] 页），具有依赖函数类型构造（68）的依赖数据类型系统，在诸如 kHausSpc（27）这样的空间范畴中具有指称语义；其中每个切片范畴都有一个映射空间伴随，称为局部笛卡尔闭范畴（LCCC），参见下文（107）。



(68)

依赖数据类型的数据类型。例如，将函数数据引入规则 (66) 应用于类型宇宙 (61)，表明 D-依赖数据类型 (63) 与以D-数据为输入、以数据类型为输出的函数 (61) 相同：

$$\frac{d : D \ \vdash \ C_d : \mathrm{Type}}{\vdash \ (d \mapsto C_d) : D \to \mathrm{Type}} \qquad \begin{matrix} D\text{-dependent data type} \\ \\ \text{function data into type universe} \end{matrix} \tag{69}$$

因此，将（大）D-依赖类型的类型定义为

$$\mathrm{Type}_D \ :\equiv \ \big(D \to \mathrm{Type}\big)\,. \tag{70}$$

同伦类型化编程语言的理念。认真对待所有数据都应当具有（依赖）类型这一理念，就意味着数据标识也应如此：用于验证两个数据结构$d_1, d_2 : D$可被等同的证书p ——也就是说，根据其类型D的定义本质，它们在计算上等价——其自身也应是D数据的等同类型中的数据；并且每个数据都应有证书证明其与自身等同：

标识类型	路径空间纤维化
给定…… $\Gamma,\quad X:$ 类型，$\quad (x_1,x_2):X\times X \quad\vdash$ ……我们有 等同类型$_X(x_1,x_2)$：类型	路径空间（映射空间 区间之外） $X^I :\equiv$ 映射$(I,\ X)$；区间 I；$(\mathrm{ev}_0,\ \mathrm{ev}_1)$；$X\times X$；$\{0,1\}$

(71)

(I)所有数据都与自身自反地等同。

自反性证书	为路径纤维化提供截面的常值路径
给定…… $\Gamma,\ x:X \vdash$ ……我们得到 $\mathrm{id}_X(x):$ 等同类型$_X(x,\ x)$ 一些数据 其平凡性的证书 自同一识别。	路径纤维化：对角$^*X^I \to X^I$；$X \to X$；对角映射；对角：$x\mapsto(x,\ x)$；(pb)；$\in$Fib；$X\times X$；$\Leftrightarrow$；路径纤维化：X^I；$\in$Fib；X；对角线：$x\mapsto(x,\ x)$；$X\times X$

(72)

如右图所示，同伦类型论 的基础洞见在于，这类恒等类型的语义就是代数拓扑中的路径空间纤维化（[AW09]）。对此有两种等价的理解方式：

识别的归纳概念。 直观地说，自反自识别（72）应当自由生成识别类型（71）。从操作层面来表达，这意味着，只要指定了函数在这些自反性证书上的取值，就能定义一个从识别类型出发的（依赖）函数。这种识别的归纳定义（参见下文第 46 页）是 [ML75 第 1.7 节及第 94], 页的深刻洞见；该文作者将这一推理规则命名为“J”，并以此名称广为人知：

(J) $\Leftrightarrow$[12]（IIa）和（IIb）（Martin-L¨of，科夸德）

识别证书的归纳原理	常值路径映射对纤维化具有提升性质
给定…… ……依赖于等同的…… $x_1:X,\ x_2:X,\ p_{12}:$ 等同类型$_X(x_1,x_2) \vdash$ ……数据类型…… $E(x_1,x_2,p_{12})$：类型；$x:X \vdash \sigma: E(x,\ x,$ 等同类型$_X(x))$；……并且……；……所有……的数据 自反等同…… $x_1:X,\ x_2:X,\ p_{12}:$等同类型$_X(x_1,x_2) \vdash \widehat{\sigma}:\ E(x_1,x_2,p_{12})$ ……获得…… ……对于任意等同…… 使得 $\widehat{\sigma}($等同类型$_X(x)) \equiv \sigma($等同类型$_X(x))$ ……相容数据。	$X \xrightarrow{\sigma} E = f^*E' \to E'$；$\mathrm{id}_X$；$\widehat{\sigma}$；(pb)；$X^I = X^I \xrightarrow{f} B$

(73)

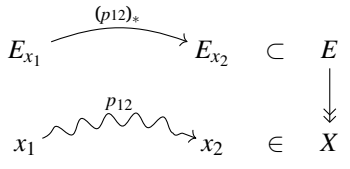
值得注意的是，如（73）右侧所示，Id-归纳规则的语义（[AW09，第3节.4], 参见 [Sh12，第3节，第 26] 页）正是刻画抽象同伦论中“非常好的路径空间对象”的提升性质（[DS95，第4节.12]）：

注意，对 $\mathrm{Id}_X(x_1, x_2)$ 中自反自识别的直观解释会是相等元素对 (x,x) 的对角嵌入 $\mathrm{diag}: X \to X \times X$；但这个映射一般不是纤维化；而同伦论要求将其（在弱等价意义下）替换 为路径空间纤维化 $X^I \twoheadrightarrow X$，这也使得由此得到的自反自识别嵌入 $\mathrm{id}_X : X \to X^I$ 成为“无环余纤维化”，从而推出上述右侧的提升性质。

[12]在类型论文献中，通常直接公设 Id-归纳 J 规则（73）（可追溯至 [ML75，第1.7节及第 94][页；1] NPS90，第8节，在归纳数据类型的一般上下文中，参见第46页）。 [Co11] 阐述了它与“输运”（74）和“反转”（75）相结合的等价性，随后 [LP15]进一步加以阐释；详细证明见 [G¨o18，第 4] 节。从（J） $\Rightarrow$ 推出（II）有着显而易见的含义：J 规则是将输运规则（IIa）应用于唯一性规则（IIb）所给出的那些等同的等同。

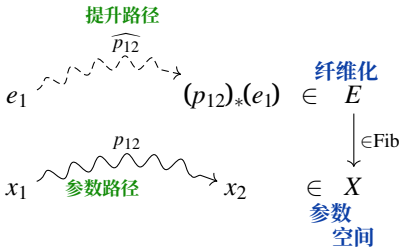
将等同理解为输运。 远早于对等同的这种归纳理解，人们就已将等同刻画为保留所有性质 （“salva veritate”，莱布尼茨 ∼1700，参见 [Le18，第 373] 页）的过程。若将其理解为保留所有依赖数据，则得到以下类型论规则——事实上，它可由等同归纳（73）推出（参见 [UFP13，§2.3]），并具有引人注目的语义解释，即路径提升 和纤维传输 （文献 2.30）：

(IIa) 等同的代换保留计算。

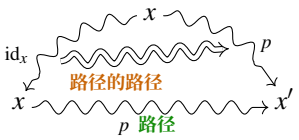
沿变量的等同输运数据	纤维化中的纤维传输
$\dfrac{\Gamma \vdash X:\ \text{类型} \qquad \Gamma,\ x:X \vdash E_x:\ \text{类型}}{\Gamma, x_1, x_2:\ X\ ,\ p_{12}:\ \text{等同类型}_X(x_1,x_2) \vdash (p_{12})_*:E_{x_1} \to E_{x_2}}$ 给定一个X-依赖数据类型…… ……以及X 的等同X-数据…… ……获得变换所有依赖数据。 使得 $\mathrm{id}_X(x)_*:e \mapsto e$	

(74)

(IIa')等同的代换保持等同。

$\dfrac{\Gamma \vdash X:\ \text{类型} \qquad \Gamma,\ x:X \vdash E_x:\ \text{类型}}{\Gamma,\ p_{12}:\ \text{等同类型}_X(x_1,x_2),\ e_1:E_{x_1} \vdash \prod_{x:X} E_x\left((x_1,e_1)\ (x_2,(p_{12})_*(e_1))\right)}$ 给定…… 一个参数类型…… 以及一个依赖于它的类型，… 对于任意参数-等同… 以及初始参数值， 获得 一个与传输数据的等同。	

与以下规则 (75) 结合后，传输/提升规则 (74)等价于恒等归纳（参见前注）： **（IIb）**识别在与恒等的复合下保持不变。

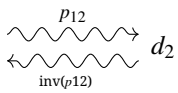
识别证书的本质唯一性	基路径空间的压缩
$\Gamma,\ x,x':\ X,\ \underset{(x,x')}{p:\ \text{等同类型}_X} \vdash \underset{\text{等同类型}_X(x,\ x')}{\text{……我们得到}p_*:\ \text{等同类型}_{(x':\ X)\times}}\left((x,\ \mathrm{id}_X),\ (x',\ p)\right)$ 给定……	

(75)

由此可知，实现这些恒等类型推理规则的依赖类型语言中的**数据类型** 是（纤维化的）**同伦类型** [Aw12]，，因为它们在（弱）同伦等价意义下表现得像拓扑空间：

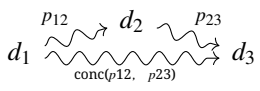
同伦数据类型结构的构想。 非正式地说，路径归纳（73）指出，要定义一个依赖于恒等 $p_{12}:\mathrm{Id}_D(d_1,d_2)$（其中自由变量 d_1 和d_2）的 $E(p_{12})$类型的数据 $\hat{}\sigma$，只需假设d_2 是d_1 且p_{12} 是 $\mathrm{id}_D(d_1)$，并且只需在这个特殊情形下定义相应的数据 $\sigma:\ E\left(\mathrm{id}_X(x_1)\right)$。例如，利用这一点可以得到：

- 恒等的逆 通过声明该自反自识别是它自身的逆（参见 [UFP13，引理 2.1。1] ）：

$\mathrm{inv}_D:(d_1,d_2:D)\to \left(\begin{array}{ccc}\text{等同类型}_D & \to & \text{等同类型}_D(d_2,\ d_1)\\ (d_1,d_2) & \to & \\ \mathrm{id}_{d_1} & \mapsto & \mathrm{id}_{d_1}\end{array}\right)$	

(76)

- 识别的串接通过声明自反识别的串接为平凡（参见 [UFP13，文献 2.1.2]）：

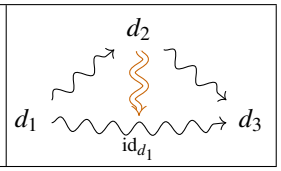
$\mathrm{conc}_D:(d_1,d_2:D)\to \left(\begin{array}{ccc}\text{等同类型}_D & \to & (\text{等同类型}_D(d_2,d_3)!\ \text{等同类型}_D(d_1,d_3)\\ (d_1,d_2) & \to &)\\ \mathrm{id}_{d_1} & \mapsto & (p\ !\ p)\end{array}\right)$	

(77)

同伦类型论的神奇之处在于，像（76）和（77）这样看似同义反复的构造——通过归纳原理（73）——提供了恰到好处的信息，使我们能够了解有关同伦类型的一切信息；而同伦类型这一主题远非 trivial（文献 2.12）。值得注意的是，由此可得：

• 反向识别(76) 在拼接下互为逆(77)（在高阶识别意义下），只需验证这对自反自识别显然成立即可（参见 [UFP13，引理 2.1.4 (ii)]）：

$$\mathrm{ivt}_D : (d_1, d_2 : D) \to \left((p : \text{等同类型}_D(d_1,d_1)) \to \text{等同类型}_{(\mathrm{Id}_D(d1,d1))}\left(\text{拼接}\left(p,\ \text{逆}(p)\right),\ \mathrm{id}_{d_1}\right)\right)$$
$$\mathrm{id}_{d_1} \mapsto \mathrm{id}_{(\mathrm{id}_{d_1})}$$



(78)

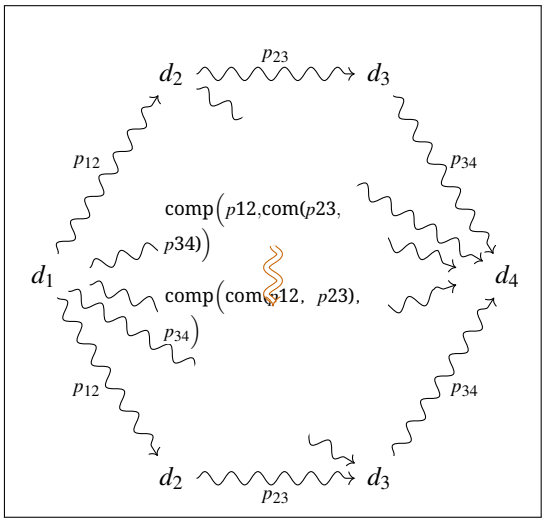
• 识别的串接具有结合性（在高阶识别意义下），只需验证这对自反自识别显然成立即可：

$$\mathrm{ast}_D : (d_1,d_2,d_3,d_4 : D) \to \left(\left(\begin{array}{l}p_{12} : \text{等同类型}_D(d_1,d_2)\ p_{23} : \\ \text{等同类型}_D(d_2,d_3)\ p_{34} : \text{等同类型}_D(d_3,d_4)\end{array}\right) \to \text{等同类型}_{(\mathrm{Id}_D)}\left(\text{连接}\left(p_{12},\text{连接}\left(p_{23},p_{34}\right)\right),\text{连接}\left(\text{连接}\left(p_{12},p_{23}\right),p_{34}\right)\right)\right)$$
$$(\text{等同类型}_{d_1},\ \text{等同类型}_{d_1},\ \text{等同类型}_{d_1}) \mapsto \mathrm{id}_{(\mathrm{id}_{d_1})}$$

(79)

正如 [HS98], 最早观察到的，将其翻译为代数拓扑后，这种结构（即在“对象”d_1 $\rightsquigarrow d_2$ 之间的“箭头”d_1,d_2, 配备了可逆且结合的复合运算）被称为群胚 （术语意思是“类似于群，但可能有多个对象”，参见例如 [Wei96]），具体来说，是相应拓扑空间D的基本路径群胚 （例如 [San11]）。

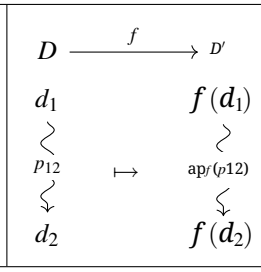
更妙的是，由于可逆性（78）和结合律（77）本身表现为识别的识别（2-箭头），而根据反复应用 Id-归纳规则（73），它们又带有适当的高维类比，包括复合、逆和结合律，因此类型论反映了“高维”群胚结构 [vdBG11], ，正如拓扑空间的“基本2-群胚” [HKK02] 所揭示的那样；更一般地说，这种结构也见于它们的“基本 ∞-群胚”中，通常由 Kan纤维化奇异单纯集（例如 [Lu09, §1.1.2]） [KLV 12]或更一般的纤维化模型 [AW09]来建模。



(80)

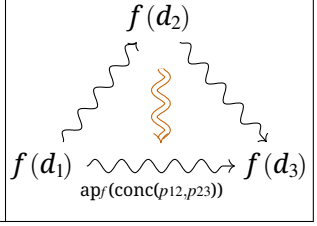
既然数据类型由此揭示出其本质上是 ∞-群胚，人们也会发现，从一种数据类型到另一种数据类型的函数（程序！）本质上 ∞-函子，因为它们尊重这种 ∞-群胚结构；这一点同样可由恒等归纳得出（73）（参见[UFP13，命题 2.2.1]）：

$$f : D \,!\, D' \quad \vdash \quad \mathrm{ap}^f : (d_1, d_2 : D) \,!\, \left(\text{等同类型}_D(d_1,d_2) \to \text{等同类型}_{D'}\left(f(d_1), f(d_2)\right)\right)_{\text{等同类型}_f(d_1)}$$
$$\mathrm{id}_{d_1} \mapsto$$



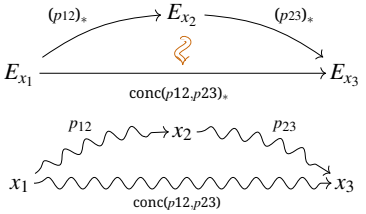
(81)

$$\mathrm{cmpstr}^f : \left(d_1, d_2, d_3 : D\right) \,!\, \left(\left(p_{12} : \text{等同类型}_D(d_1, d_2),\ p_{23} : \text{等同类型}_D(d_2,d_3)\right) \,!\, \text{等同类型}_{\mathrm{Id}_D}\left(\mathrm{ap}_f\left(\mathrm{conc}(p_{12},p_{23})\right), \mathrm{conc}\left(\mathrm{ap}_f(p_{12}),\ \mathrm{ap}^f(p_{23})\right)\right)\right)$$
$$(\mathrm{id}_{d_1},\ \mathrm{id}_{d_1}) \mapsto \mathrm{id}^{\mathrm{id}_{f(d_1)}}$$

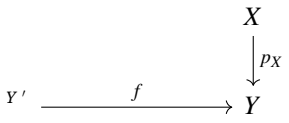
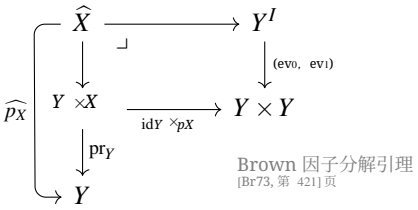
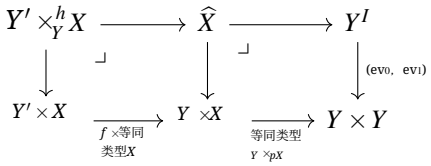
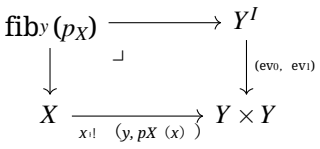
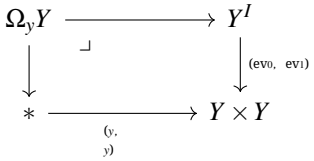
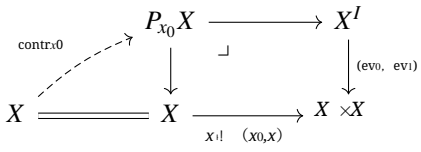


(82)

输运（74）对于等同也具有函子性，这一点同样只需诉诸路径归纳（73）即可轻松证明。

p_{12}: 等同类型$_X(x_1,x_2)$, p_{23}: 等同类型$_X(x_2,x_3)$ $\vdash$ func : 等同类型$((p_{23})_* \circ (p_{12})_*,\ \mathrm{conc}(p_{12},p_{23})_*)$ $\mathrm{id}_{x_1},\ p_{23} \longmapsto \mathrm{id}_{(p_{23})_*}$		(83)

数据类型之间的同伦论基本概念。 在这种同伦类型化编程语言中，数据类型上的基本构造对应于同伦论中的基本构造（文献 2.12）。例如：

口语化	同伦类型论	同伦论	
余跨	$\vdash f:\ Y' ! \ Y$ $\vdash p_X:\ X ! Y$		(84)
纤维化分解	$y:\ Y,\ x:\ X \vdash$ 等同类型$_Y(y, p_X(x))$	 Brown 因子分解引理 [Br73, 第 421] 页	(85)
同伦拉回	$\vdash ((y', x): Y' \times X)$ ×等同类型$_Y(f\ (y'), p_X$ $(x))$		(86)
同伦纤维	$\vdash (x:\ X) \times$ 等同类型$_Y(y,$ $p_X(x))$		(87)
环空间	$\vdash$ 等同类型$_Y($ $y,\ y)$		(88)
压缩	$\vdash$ 压缩$_{x_0}$: $(x:\ X) \to$ 等同类型$_X(x$ $_0, x)$		(89)

命题即数据类型的思想。 唯一存在性 是一个至关重要的逻辑概念——数学中的许多定理都可以表述为：某个概念唯一地确定了给定对象。在类型论的同伦解释中，某个类型X中存在唯一元素这一陈述，转化为X是可缩这一陈述。要说类型X有唯一元素，我们必须给出其中一个元素，并提供一种将其他每个元素都与该元素等同起来的方式。显然，这类证书属于以下类型：

$$\underbrace{\exists!\, X}_{\substack{\text{Certificates that there exists}\\ \text{unique } X\text{-data}}} :\equiv \mathrm{isContractible}(X) :\equiv \underbrace{(x_0 : X)}_{\substack{\text{There is}\\ \text{a datum}}} \times \Big(\underbrace{(x : X)}_{\substack{\text{onto which all}\\ X\text{-data contracts.}}} \to \mathrm{Id}_X(x_0, x)\Big). \tag{90}$$

特别是，如果某个给定数据类型P的所有识别类型 $\mathrm{Id}_P(p,p')$ (71) 都被证明是可缩的 (90)，这意味着所有数据对$p,p' : P$都彼此等同——如果 确实存在这样的数据对。此类类型P至多只有一个元素，而这个元素便被自然地理解为“证明”命题“存在P类型的数据”的真证书：

$$\mathrm{isProposition}(P) :\equiv \big(p, p' : P\big) \to \exists!\, \mathrm{Id}_P\big(p, p'\big)\,. \tag{91}$$

例如，对于任意类型X，断言X具有唯一元素的类型 $\exists!X$ (90) 是一个命题；为一个类型给出唯一元素至多只有一种方式。要给出 $\exists!X$ 的一个元素，其实就是证明X具有唯一元素。

这样一来，命题及其（一阶）命题逻辑就会 在（依赖的）数据类型论内部涌现出来——这一深刻论断以“Curry-Howard同构”（例如 [SU06]）或“命题即类型”这一口号（例如[AB04][Wa15], ; 关于我们同伦语境下的综述，见 [UFP13, 第1节11]）而闻名。此外，在这一等同下，命题上的逻辑联结词不过是各种类型形成规则，这一观察被称为*BHK* 对应 [13] [Tr77, §2][TvD88, 第3节1][Br99, p. 96]:

- 对于 P，P': 命题，积类型 $P \times P'$ (62) 表示命题P 且 P' 成立。
- 对于 P，P': 命题，余积类型 $P \sqcup P'$ (115) 表示命题P 或 P' 成立。
- 对于 P，P' : 命题，函数类型 $P \to P'$ 表示命题P 蕴含 P'。
- 对于 D : 集合， $d : D \vdash P(d)$: 命题– 依赖函数类型 $(d : D) \to P(d)$ (68) 表示命题 $\forall d{:}D P(d)$，即 $P(d)$对所有 d均成立。– (-1) 截断 (128) 依赖对类型$\exists\big((d : D) \times P(d)\big)$ (65) 表示命题$\exists_{d:D} P(d)$，即存在d 使$P(d)$成立。

类型论		逻辑
(-1) 类型	d: $D \vdash P(d)$: 命题	命题
积类型	$P \times P'$	P 且P'
余积类型	$P \sqcup P'$	P 或P'
函数类型	$P \to P'$	P 蕴含P'
依赖的函数类型	$(d : D) \to P(d)$	$\forall_{d:D} P(d)$
(-1) 截断依赖的对类型	$\exists\big((d : D) \times P(d)\big)$	$\exists_{d:D} P(d)$

(92)

正是逻辑中的证明与数据类型的数据之间这种密切关系，使得用类型化语言编写的程序自动附带其正确性证明（文献 2.26）。

请注意，只有当我们考虑依赖数据类型（63）时，这种对应才具有实质内容；因此，这些命题类型依赖的数据类型$d : D \vdash P(d)$: 命题，是关于它们所依赖的类型为D 的数据的命题。例如，构造满足给定命题的数据集的传统方法，是通过这类依赖命题的（未截断）依赖对类型（65）来实现的：

$$\frac{\underbrace{d : D \vdash P(d) : \mathrm{Prop}}_{\substack{\text{proposition about } D\text{-data}}}}{\underbrace{\{d : D \mid P(d)\} :\equiv (d : D) \times P(d) : \mathrm{Type}}_{\substack{D\text{-data verifying this proposition}}}}. \tag{93}$$

这里，要给出 $\{d : D \mid P(d)\}$ 的一个元素，恰好就是给出数据d，并附上一个证书，证明$P(d)$ 成立。例如，我们可以将数 n: $\mathbb{N}$ 是偶数这一命题定义为：能够将它均分为两半的数所构成的类型：

$$\mathrm{isEven}(n) :\equiv (k : \mathbb{N}) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}\big(2k, n\big)\,. \tag{94}$$

于是，我们可以将偶数的类型定义为 $\{n : \mathbb{N} \mid \mathrm{isEven}(n)\}$。虽然严格来说，该类型的元素是三元组（$n$，$k$，$p$），其中 p：等同类型$_{\mathbb{N}}(2 \cdot k,\ n)$ 是 $2k$ 与 n之间的等同，但我们注意到，k 由 n 以及 $2k$等于n这一性质唯一确定，因此将该类型的元素视为偶自然数并无妨碍。

[13] BHK对应（92）源自数学直觉主义学派直觉主义 [Ko32，第 59][Tr69] 页，并最终促成了依赖类型论在 [ML75]中的表述（见 [ML96，第 3] 讲）；这也是人们将其称为“直觉主义类型论”的历史原因。

另一个例子是，由于“是一个命题”本身就是一个命题，我们可以在所有类型中构造出所有命题的类型(61)：

所有命题类型的类型

$$\mathrm{Prop} \;:\equiv\; (P:\mathrm{Type}) \times \mathrm{isProposition}(P) \tag{95}$$

这种意义下的命题数据类型（95）包括：isContractible(–)（90）、isProposition(–)（95）和 isEquivalence(–)（101）。

数据集的概念。在同伦类型化编程语言中，应该如何定义数据集？在这里，关于等式的常见直觉可以帮助我们：集合中元素之间的等式应该是一个命题。反过来，数据集应该是一个数据类型X，其等同类型 $\mathrm{Id}_X(x,\ y)$（71）都是命题（91）——也就是说，$\mathrm{Id}_X(x,\ y)$ 应该表达命题：“x等于y”：

$$\begin{aligned} &\mathrm{isSet}(X) \;:\equiv\; \mathrm{isType}_{\leq 0}(X) \;:\equiv\; (x,y:X) \to \mathrm{isProposition}\big(\mathrm{Id}_X(x,y)\big)\,, \\ &\mathrm{Set} \;:\equiv\; (S:\mathrm{Type}) \times \mathrm{isSet}(S)\,. \end{aligned} \tag{96}$$

这些命题恒等类型的数据值得用表示等式的传统记号来表示（因此称为“命题相等”）：

Given
a data set with a pair of identifiable elements　　obtain
equality as the certificate of their identification.

$$X:\mathrm{Set},\quad x,y:X,\quad \mathrm{Id}_X(x,y) \quad\vdash\quad x=y \;:\equiv\; x \rightsquigarrow y \;:\; \mathrm{Id}_X(x,y)\,. \tag{97}$$

将等同的拼接“conc”（77）记作直接并置后，我们便可以在同伦数据集中得到形式看似经典的等式证明证书，例如：

$$X:\mathrm{Set},\quad x,y,z:X,\quad (x=y):\mathrm{Id}_X(xy),\quad (y=z):\mathrm{Id}_X(yz) \quad\vdash\quad x=y=z \;:\; \mathrm{Id}_X(x,z)\,. \tag{98}$$

这些同伦数据集（96）在同伦类型语言中编码了非同伦编程语言所能处理的普通数据（参见 [RS15]），例如比特类型（110）或自然数类型（111）：Bit $\mathbb{N}$：集合。

高阶同伦的理念　　数据类型。沿着命题数据类型（95）导向　　s
数据集（96）的模式　　，可以得到高阶同伦数据类型的概念：

层级中的下一阶段（最早由 [HS98]观察到）对应于同伦论中所谓的群胚或同伦 *1*-类型（介绍与概述见 [Wei96][San11][Ri20，第 1 节2]），对于这种类型的两个数据，不一定只有一种（或没有）识别它们的方式，而可能有一整组不同的方式：

$$\begin{aligned} &\mathrm{isGroupoid}(X) \;:\equiv\; \mathrm{isType}_{\leq 1}(X) \;:\equiv\; (x,y:X) \to \mathrm{isSet}\big(\mathrm{Id}_X(x,y)\big)\,, \\ &\mathrm{Grpd} \;:\equiv\; \mathrm{Type}_{\leq 1} \;:\equiv\; (\mathscr{G}:\mathrm{Type}) \times \mathrm{isGroupoid}(\mathscr{G})\,. \end{aligned} \tag{99}$$

历史上，从理解这类同伦 1-类型到理解其向更高同伦n-类型的推广，经历了漫长而曲折的过程（参见 [Hi88]）；但在同伦类型语言中，这如今已是显而易见的（这是 [Vo10] 的关键洞见）：

$$\begin{aligned} &\mathrm{isType}_{\leq n+1}(X) \;:\equiv\; (x,y:X) \to \mathrm{isType}_{\leq n}\big(\mathrm{Id}_X(x,y)\big)\,, \\ &\mathrm{Type}_{\leq n+1} \;:\equiv\; (X:\mathrm{Type}) \times \mathrm{isType}_{\leq n}(X)\,. \end{aligned} \tag{100}$$

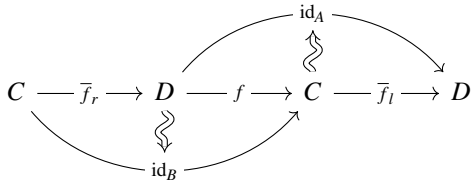
这些同伦数据n-类型的数学语义，就是同伦论中早已为人所知（远在有人想到它与数据类型论的关联之前）的同伦 n- 类型，以及更一般的同伦类型（例如 [Sp66，第 25 页及 §8][Bau95]）。

高阶同伦n类型的基本例子是高维球面 (119)；另请参阅第54页关于高阶结构的评论。人们通常会关注如何截断类型的同伦层级，见下文第5.1页。

[14]在同伦类型论文献中，使用记号“$x =_X y$”表示我们记作 $\mathrm{Id}_X(x,y)$ 的内容，可谓广受欢迎；即使 X 是一个更高阶同伦类型，也依然如此。我们谨此建议，只有在表示（命题）等式这一实际概念时才使用等号——而这正是集合元素的识别——这样既有助于保持数学直觉，也能避免许多争论。

数据类型等价／同构的概念。两个数据类型D，C：类型在名义上可能不同，但如果存在一个数据变换$f: D \to C$，且该变换可以在等同意义下求逆，那么D数据就等价于（“同构” [DiC95][HS98, §5.4][KL21, Def. 3.1.1]）C数据：任何作用于D数据的程序，都可以转换成作用于C数据的程序，反之亦然（例如 [BP01][RPYLG21]）。

或者，也可以问 [Vo10，第 8, 10] 页，是否$f: D \to C$是一个双射（或弱等价，参见下文 (102)）；也就是说，对于$c: C$，我们有唯一的（90）原像$d: \mathrm{fib}_c(f)$ (87)：

数据类型等价	同伦等价
$f: D\,!\,C \vdash$ 一个函数是一个 等价 或 同构 是等价$(f) :\equiv$ iff 我们有一个反向函数，它是左逆 $\begin{cases} (\not{f}l : C\,!\,D) \times \mathrm{Id}_{(D\to D)}(\not{f}l \circ f,\ (d \mapsto d)) \\ \times (\not{f}r : C\,!\,D) \times \mathrm{Id}_{(C!\,C)}(f \circ \not{f}r,\ (c \mapsto c)) \end{cases}$ 以及一个作为右逆的反向函数	
$f: D\,!\,C \vdash$ 函数是一个双射 isBijection(f) $:\equiv$ iff 它的原像本质上是唯一的 $(c: C) \to \exists!$ 等同类型$_c(f)$	“$\forall_{c\in C}$” $\mathrm{fib}_c(f) \simeq *$
数据类型双射	**可缩纤维**

(101)

这两个概念恰好一致 [UFP13, §4.4]:

$$\mathrm{isBijection}(f) \longleftrightarrow \mathrm{isEquivalence}(f)$$
$$\left((c:C) \mapsto \left((d, f(d) \rightsquigarrow c) : \mathrm{fib}_c(f)\right) \mapsto \left(d_0(c) \overset{\mathrm{ctr}_d}{\rightsquigarrow} d, \cdots\right)\right) \longmapsto \left(\begin{array}{l} \overline{f}_l : c \mapsto d_0(c),\ d \mapsto \left(d_0(c) \overset{\mathrm{ctr}_d}{\rightsquigarrow} d\right) \\ \overline{f}_r : c \mapsto d_0(c),\ c \mapsto \mathrm{id}_c \end{array}\right). \tag{102}$$

如果像对待（92）那样，朴素地将（101）右侧的“对所有”量词理解（即使C不是 0-截断的），那么在拓扑空间的经典同伦论（107）中，这种情况就是经典怀特海德定理 的内容（例如[Br93, Cor. 11.14][AGP02, Thm. 6.3.31]），该定理指出，余纤维化空间（CW复形）之间的映射，只要是弱同伦等价（即其所有同伦纤维的同伦群都消失），就是同伦等价。因此，上述类型论中的“双射”最初在 [Vo10]中被称为弱等价。

然而，将（92）中的朴素量词“$\forall_{c:C}$”重新表述为依赖函数构造子（$c:C$） $\to(-)$，其妙处在于极大地扩展了该陈述的普适性：虽然怀特海德定理的各种版本在一般的模型拓扑斯中实际上并不成立（[Lu09, §6.5][UFP13, §8.8]），但等价关系（102）普遍成立。

我们用函数类型的记法表示等价的类型，不过要加上一个“$\sim$”符号:

$$D, C : \mathrm{Type} \quad \vdash \quad \left(D \xrightarrow{\sim} C\right) \ :\equiv \ (f : D \to C) \times \mathrm{isEquivalence}(f) \tag{103}$$

等价的显然例子当然是恒等函数 $a \mapsto a$，它显然也是自身的左逆和右逆，这一点由其自反识别 $\mathrm{id}_{(a\mapsto a)}$ 证明:

$$A : \mathrm{Type} \quad \vdash \quad \left((a \mapsto a), \left(\left(\overline{(a \mapsto a)}\right)^l :\equiv (a \mapsto a), \mathrm{id}_{(a\mapsto a)}\right), \left(\left(\overline{(a \mapsto a)}\right)^r :\equiv (a \mapsto a), \mathrm{id}_{(a\mapsto a)}\right)\right) : \mathrm{Equiv}(A, A). \tag{104}$$

数据类型的单值宇宙这一思想。然而，事先还存在另一种 理解数据类型等同的合理方式。也就是说，既然我们将数据类型A、B 本身视为“数据类型”这一类型的数据，记作A、B：类型（61），那么就存在它们的等同证书（71）c：等同类型$_{\mathrm{Type}}$（A、B），正如对任何其他类型的数据一样。现在，恒等归纳原理（73）给出了一个变换，将数据的这种等同 转化为数据之间的操作性等价 （103）；该等价由将恒等等价$a \mapsto a$（104）取为自同一识别 id_A（72）的操作化而诱导出来:

$$\mathrm{operationalize} : \prod_{A,B:\,\mathrm{Type}} \left(\begin{array}{ccc} \overset{\text{identification certificates between data types}}{\mathrm{Id}_{\mathrm{Type}}(A,B)} & \longrightarrow & \overset{\text{operational equivalences between data types}}{\mathrm{Equiv}(A,B)} \\ \mathrm{id}_A & \longmapsto & (a \mapsto a) \end{array} \right), \quad \text{单值性} : \mathrm{isEquiv}(\text{运算化}). \tag{105}$$

有人[15]说，一个同伦类型语言满足类型宇宙外延性 [HS98，第5节。4]，或者说它具有单值类型宇宙 [Vo10，第 11] 页，若该比较函数本身是一个等价（101）（参见 [Es19，第3节。11][1实验室，第单值性节]）。

单值性公理（105）的另一种体现方式表明 [UFP13，定理 4.8.3]：对于所有基点，记录同伦纤维（87）的操作构成了从函数到给定类型 X 的函数与X-依赖类型（70）之间的等价（101）。从语义上说，这意味着（最初由 [Aw12], 提出猜想，在 [KLV12][Sh15] 中证明了特殊情况，并由 [Sh19], 一般性地证明；综述见 [Ri22]），单值同伦类型语言的类型宇宙是“对象分类器” [Lu09，第6节.1.6]，它们将类型的环境范畴体现为“∞-topos” [Si99][TV][Lu09][Re10]:

单值数据类型宇宙	对象分类器
$\begin{tikzcd} \text{到}X\text{的函数} \\ (Y\colon \text{类型}) \times (Y\,!\ X) \arrow[r, bend left, "(Y,\ f)\ \mapsto\ (x \mapsto \mathrm{fib}_x(f))"] \arrow[r, phantom, "\text{纤维}\ \simeq\ \text{全空间}"] & X\text{-依赖类型} \\ & (X\,!\ \text{类型}) \arrow[l, bend left, "((x:X)\times E_x,\ \mathrm{pr}_X) \leftarrow\!\shortmid (x \mapsto E_x)"] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\text{(pb)}"] & \widehat{\mathrm{Obj}} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathrm{Obj} \end{tikzcd}$

(106)

更具体地说，同伦类型论语法直接解释到 1-范畴中（参见文献 2.26），而这里我们将其理解为“表示”这些 ∞-拓扑斯（这是 [Lu09] 的关键点），称为模型拓扑斯 [Re10]，或更具体地说，称为类型论模型拓扑斯 [Sh19，第1节。3]（基于 [Sh15], 在 [Ri22，第6节中的综述1]），其中对象分类器作为小对象的泛纤维化而存在。

这类模型拓扑斯的典型例子是经典同伦论中的“经典模型拓扑斯”，传统上称为单纯集合的 *Kan-Quillen* 模型范畴。它与k-拓扑空间的 *Serre-Quillen* 模型范畴恰当地等价（即 Quillen 等价，呈现相同的 ∞-拓扑斯——有关回顾和参考文献，见 [FSS20-Cha, §A]）。后者隐含地构成了 §4 中讨论的基础，但它并非严格意义上的“类型论”范畴，因为它并不完全局部笛卡尔闭（仅在底空间为豪斯多夫空间时如此，参见 (27)）：

$$\begin{tikzcd} \text{.....的句法范畴} \\ \text{同伦数据类型} \\ \text{HoTTSyntax} \\ \S 5 \end{tikzcd} \xrightarrow[\text{语义}]{} \begin{tikzcd} \text{类型论的} \\ \text{模型拓扑斯} \\ \text{单纯集合的} \\ \Delta\text{集合}^{\mathrm{Qu}} \end{tikzcd} \xrightarrow[\text{奎伦等价}]{} \begin{tikzcd} \text{模型拓扑斯} \\ \text{拓扑空间的} \\ \text{kTopSpc}^{\mathrm{Qu}} \\ \S 4 \end{tikzcd} \tag{107}$$

（左侧依赖类型理论的范畴语义归功于 [See84][Ho97][Ja98], ，同伦/模型范畴论方面归功于 [AW09], ，最后，单值对象分类器的构造归功于 [KLV12]，其一般化则归功于 [KLV12]。右侧的奎伦等价是经典结果，最早可追溯至 [Qu67], ，参见 [GJ99, §I.11]）

顺便一提，将范围限制到命题类型时，（93）中的等价（106）是这样一个经典事实的同伦论推广：关于类型为 X 的数据的命题，等价地编码为满足该命题的数据所构成的子类型。从语义上说，这体现为拓扑斯理论中已知的 子对象分类器 的存在性 [La70]（例如参见 [Bo94III, §5.1]）

命题类型宇宙	子对象分类器
$\begin{tikzcd} \text{到}X\text{的单射} \\ (Y\colon \text{类型}) \times (Y^{\mathsf{c}}\,!\ X) \arrow[r, bend left, "(Y,\ f)\ \mapsto\ (x \mapsto \mathrm{Fib}_x(f))"] \arrow[r, phantom, "\text{纤维}\ \simeq\ \text{全空间}"] & \text{关于}X\text{的命题} \\ & (X\,!\ \text{命题}) \arrow[l, bend left, "((x:X)\times P_x,\ \mathrm{pr}_X) \leftarrow\!\shortmid (x \mapsto P_x)"] \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\text{(pb)}"] & \widehat{\text{对象}_{-1}} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \text{对象}_{-1} \end{tikzcd}$

(108)

例如，给定一个数据集 D：集合，那么这类数据上的关系 由子类型 $R^{\mathsf{c}} \to D \times D$ 给出，它包含彼此处于关系中的数据对；等价地，也可以用命题 $D \times D \to \mathrm{Prop}$ 来表达，它断言任意一对数据都彼此处于关系中：

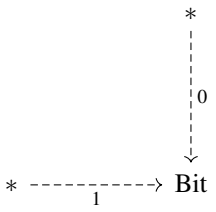
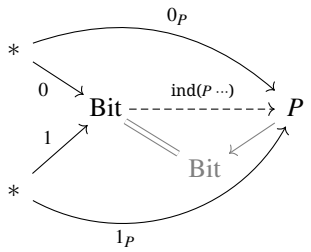
$$(R\colon \text{类型}) \times (r\colon R \to D \times D) \times ((d_1, d_2\colon D) \to \text{是命题}(\underbrace{\mathrm{Fib}_{(d_1,d_2)}(r)}_{\substack{\text{命题，即} \\ d_1, d_2\ \text{处于关系中}}})) \xleftrightarrow{\sim} (D \times D\,!\ \text{命题}) \tag{109}$$

[15]关于这一点，请再次参见脚注 6。

归纳数据类型的思想。 我们已经看到，如何通过构造依赖函数类型、依赖对类型（64）和恒等类型（71），从给定类型构造新的数据类型；接下来还需讨论如何从一开始就引入定义良好的数据类型。

典型的例子是数据类型 Bit : 类型，它包含布尔真值（通常也记作布尔类型）。显然，它的项引入规则 应当说明这种类型有两个数据，即 0、1 : Bit。但我们还需要引入一种语言构造，以确保这种类型没有其他 数据。一个优雅的实现思路是：只要相应地给出两个数据 0_D、$1_D : D$，就可以得到一个从 Bit 到任意其他数据类型 D 的函数 $\to P$。不过，要使这一规则及类似的项消去规则 按预期工作，就必须留意一个微妙之处：由于我们讨论的是一般的依赖的 数据类型（63），因此需要以依赖函数的一般形式来表述。但事实证明，只需考虑D 本身依赖于 Bit 的情形（例如 [ML84，第 35 页-37][AGS12，第3节.1]）：

比特。

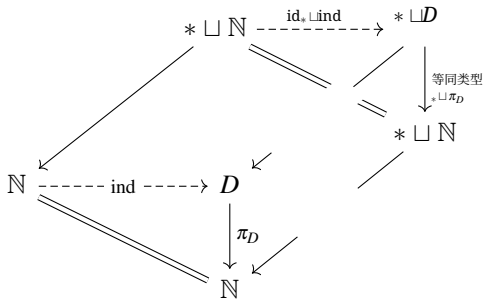
	同伦类型论	**同伦论**
Formation	$\dfrac{}{\vdash \text{比特}:\ \text{类型}}$	
Introduction	$\dfrac{}{\vdash 0:\ \text{比特}} \qquad \dfrac{}{\vdash 1:\ \text{比特}}$	
Elimination	$\dfrac{b:\ \text{比特} \quad \vdash P(b):\ \text{类型};\quad \vdash 0_P : P(0);\quad \vdash 1_P : P(1)}{b:\ \text{比特} \vdash \mathrm{ind}_{(P,0_P,1_P)}(b) : P(b)}$	
Computation	$\mathrm{ind}_{(P,0_P,1_P)}(0) \equiv 0_P$ $\mathrm{ind}_{(P,0_P,1_P)}(1) \equiv 1_P$	

(110)

在同伦论中，这定义了一个由两个点构成的不交并空间——即*0*-球面 ——它由余积 对单点空间 $*$ 的两个副本所作的余积刻画，具有万有性质。这里，从余积出发的万有映射（“项消去子”）记作“$\mathrm{ind}^{(\cdots)}$”，因为事实证明，这是与控制自然数上的经典归纳概念（111）的同一种一般性归纳 概念的一个例子。因此，人们将这种及类似的数据类型称为归纳类型（[CP90][Dy94], ，早期综述见 [PM93][Lu94，第9.2节；2], 详述见 [UFP13，第5节6]）。

具体来说，引入自然数类型的数据有两种方式：一方面，当然有数据 0 : ℕ；另一方面，如果已经给定数据 n: ℕ，那么就有数据 $\mathrm{succ}(n) = n+1$: ℕ。如同比特类型的情形，现在的想法是通过声明：只要任意其他数据类型 具有 ℕ两个构造子的像，就能得到一个函数$\mathbb{N} \to D$ 指向该类型，从而强制这两条引入规则生成 ℕ的所有数据。将这一说法推广到依赖于 ℕ 的类型 D （63），可得到自然数的以下推理规则（111）[ML84，第 38][页；CP90，第 52-53][页；Dy94，§3]:

自然数。

	同伦类型论	同伦论
Formation	$\dfrac{}{\vdash \mathbb{N}:\ \text{类型}}$	$* \sqcup \mathbb{N} \xrightarrow{(0,\text{后继})} \mathbb{N}$
Introduction	$\dfrac{}{\vdash 0:\ \mathbb{N}}$ $\quad$ $\dfrac{\vdash n:\ \mathbb{N}}{\vdash \text{后继}(n):\ \mathbb{N}}$	
Elimination	$\dfrac{\begin{array}{l} n:\mathbb{N} \vdash D(\text{自然数}):\text{类型} \\ \vdash 0_D : D(0) \\ n:\mathbb{N},\ d:D(n) \vdash \text{后继}_D(n,d):D(\text{后继}(n)) \end{array}}{n:\mathbb{N} \vdash \text{ind}_{(D,0_D,\text{后继}_D)}(\text{自然数}):D(\text{自然数})}$	
Computation	$\text{ind}_{(D,0_D,\text{succ}_D)}(0) \equiv 0;$ $\text{ind}_{(D,0_D,\text{后继}_D)}(\text{后继}(n))$ $\equiv \text{后继}_D(n,\text{ind}_{(D,0_D,\text{后继}_D)}(n))$	

(111)

在右侧的指称语义中，我们看到 $\mathbb{N}$ 具有空间上的自函子Id 的（同伦）始初代数结构 $* \sqcup$（即反映零元构造子 0 和一元构造子 succ 的定义域的自函子）。一般而言，同伦论中“良基”归纳类型（“$\mathscr{W}$- 类型”[ML84，第 43] 页）的指称语义由多项式自函子的（同伦）始初代数给出 [Dy97][AGS12][AGS15]。

自然数类型的归纳规则涵盖了经典概念，包括命题的归纳证明和递归构造函数：

• $\mathbb{N}$**-归纳**。当（111）中的依赖类型是命题性的（95）时，也就是说$n:\ \mathbb{N} \vdash D(n)$: 命题是关于自然数的命题（93），那么：– 消去规则（111）的假设是，我们有一个证书 $0_P : P(0)$——即关于 0 的命题的证明；此外，对于每个关于任意自然数 n 的命题的证书/证明 $d : P(n)$，还要有一个证明 $\text{succ}_P : P(n+1)$，即关于$n+1$的命题的证明；– 在这种情况下，消去规则的结论是对所有自然数的命题的证明：$n:\ \mathbb{N} \vdash \text{ind}(n) : P(n)$—— 由此恢复了经典归纳原理。

• $\mathbb{N}$**-递归**。当D 恰好不依赖于n 时：$\mathbb{N}$ 归纳原理（111）就是递归函数的归纳原理。例如，自然数的加法和乘法可以递归定义如下：

$$\begin{array}{ll} D :\equiv \mathbb{N} \to \mathbb{N} & D :\equiv \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0_D :\equiv (k \mapsto k) & 0_D :\equiv (k \mapsto 0) \\ \text{succ}_D(n,f) :\equiv \big(k \mapsto \text{succ}\big(f(k)\big)\big) & \text{succ}_D(n,f) :\equiv \big(k \mapsto f(k)+k\big) \\ \hline +:\equiv \text{ind}_{(D,0_D,\text{succ}_D)} : \mathbb{N} \to \big(\mathbb{N} \to \mathbb{N}\big) & \cdot :\equiv \text{ind}_{(D,0_D,\text{succ}_D)} : \mathbb{N} \to \big(\mathbb{N} \to \mathbb{N}\big) \end{array} \tag{112}$$

唯一与不存在的数据。最后，来看最简单但重要的归纳数据类型示例：单元素类型（通常称为“单位类型”，例如 [UFP13，第 30] 页），其归纳规则证明它是一个（必然可缩的）类型 (90)，且具有唯一的数据：

$$\frac{}{\vdash * : \text{Type}} \qquad \frac{}{\vdash \bullet : *} \qquad \frac{x : * \vdash D(x) : \text{Type};\quad \bullet_D : D(\bullet)}{x : * \vdash \text{ind}_{(D,\bullet_D)}(x) : D(x)} \qquad \text{ind}_{(D,\bullet_D)}(\bullet) = \bullet_D \tag{113}$$

空类型 是由无 数据归纳生成的（例如 [UFP13，§1.7，§A.8][Es19，§2.6]）：

$$\frac{}{\vdash \varnothing :\ \text{类型}} \qquad \frac{x :\ \varnothing \vdash D(x) :\ \text{类型}}{x : \varnothing \vdash \text{等同类型}_D : D(x)} \tag{114}$$

归纳类型一般规则的这一退化情形，给出了古老的逻辑规则矛盾推出任意命题——从矛盾中可以推出任何命题——只要我们将命题视为类型（91）。类型 $\varnothing$ 不可能有任何数据，因为要生成任意类型P 的数据 $\mathrm{ind}(x)\colon P$，需要不满足任何条件（这本身就是矛盾），同时假设给定了 $x\colon \varnothing$（因此 x 必须不存在）。实际上，在进行分类讨论时，会使用 $\varnothing$ 的归纳原理来排除不可能发生的情形；不可能发生的情形将蕴含 $\varnothing$，因此在该情形下，我们仍然可以使用 $\varnothing$的归纳原理证明目标。

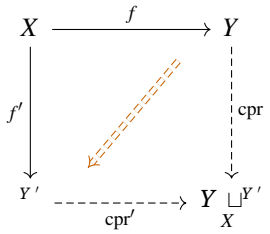
$$\frac{P :\ \text{类型}}{\mathrm{const}_P :\equiv (x :\ \varnothing) \mapsto D) :\ (\varnothing \to \text{类型})} \qquad \frac{}{\mathrm{ind}^{\mathrm{const}_P}\colon (x :\ \varnothing)\ !\ D}$$

高阶归纳类型的思想。但在同伦类型语言中，这些用于构造具体数据类型的归纳原理需要加以推广，以便不仅能引入普通数据，也能引入此类数据的（重新）等同（71）（“高阶归纳类型” [UFP13, §6][vD18, §2.2.6][VMA19, §4]）。例如，在实践中，人们常常考虑这样的数据：它要么属于某个类型Y，要么属于某个类型Y'；但每当有序对（y，y'）(62)作为某个给定程序的输出出现时，数据$y : Y$ 就应当与数据$y' : Y'$等同

$$(f, f') : X \longmapsto Y \times Y'.$$

这类组合数据的类型称为f 与（沿着）f' 的同伦-推出（或 余纤维余积），记作 $Y \underset{X}{\sqcup}_{f'} Y'$，为简洁起见通常简称为 $Y \underset{X}{\sqcup} Y'$。这类同伦余纤维/推出类型的推理规则（例如 [HFLL1616，第 4] 页）显然体现了它们作为同伦余纤维/推出空间的同伦论解释（例如 [Str11，第 7.1][Ar11 节，第 6] 节），如（115）所示：

同伦推出（余纤维余积）

	同伦类型论	**同伦论**
Formation	$\dfrac{\vdash X, Y, Y' : \text{类型};\quad \vdash f : X\,!\,Y;\quad \vdash f' : X\,!\,Y'}{\vdash Y \underset{X}{\sqcup} Y' :\ \text{类型}}$	
Term introduction	$\dfrac{\vdash y :\ Y}{\vdash \mathrm{cpr}(y) : Y \underset{X}{\sqcup}^{Y'}}\qquad \dfrac{\vdash y' :\ Y'}{\vdash \mathrm{cpr}'(y') : Y \underset{X}{\sqcup}^{Y'}}$ $\dfrac{\vdash x :\ X}{\vdash \mathrm{hmt} : \text{等同类型}\left(_{Y \sqcup_{X}^{Y'}}\right)\left(\mathrm{cpr}(f(x)), \mathrm{cpr}'(f'(x))\right)}$	
Term elimination	$\dfrac{\hat{y}\colon Y \sqcup_X Y' \vdash P(\hat{y}) : \text{类型};\quad \vdash \mathrm{cpr}_P\colon \prod_{y\colon Y} P(\mathrm{cpr}(y))\quad \vdash \mathrm{cpr}'_P : \prod_{y'\colon Y'} P(\mathrm{cpr}'(y'));\quad \vdash \mathrm{hmt}_P : \prod_{x\colon X} \text{等同类型}\left(\mathrm{hmt}(x)_*(\mathrm{cpr}_P(f(x))),\ \mathrm{cpr}'_P(f'(x))\right)}{\hat{y}\colon Y \underset{X}{\sqcup} Y' \vdash \mathrm{ind}(P, \mathrm{cpr}_P, \mathrm{cpr}'_P, \mathrm{hmt}_P)(y) : P(\hat{y})}$	
Computation	$\mathrm{ind}(P, \mathrm{cpr}_P, \mathrm{cpr}'_P, \mathrm{hmt}_P) \circ \mathrm{cpr} \equiv \mathrm{cpr}_P;$ $\text{归纳}(P, \mathrm{cpr}_P, \text{余积}'_P, \text{同伦}_P) \circ \text{余积}' \equiv \mathrm{cpr}'_P;$ $x : X \vdash \text{复合} : \text{等同类型}\left(\text{应用}_{\mathrm{ind}}(\text{同伦}(x)),\ \text{同伦}_P(x)\right)$	

(115)

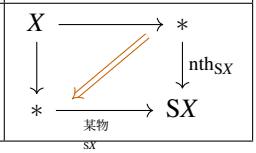
推出的计算规则与其他归纳类型的计算规则略有不同。对于生成元 hmt，我们没有定义相等，而是有一个恒等复合，它将归纳函数 ind 应用于 hmt 所得到的结果与陪域中的同伦 thmt_P 联系起来。函数 apd 是 ap（81）的依赖版本，并以与路径归纳相同的方式定义：

$$\begin{array}{lllll} f:(c:C)\to D(c) & \vdash & \mathrm{apd}_f:(c_1,c_2:C)\longrightarrow & \Big((p:\mathrm{Id}_D(c_1,c_2)) & \to & \mathrm{Id}_{D(c_2)}\big(p_*f(c_1),f(c_2)\big)\Big) \\ & & & \mathrm{id}_{c_1} & \mapsto & \mathrm{id}_{f(c_1)} \end{array} \tag{116}$$

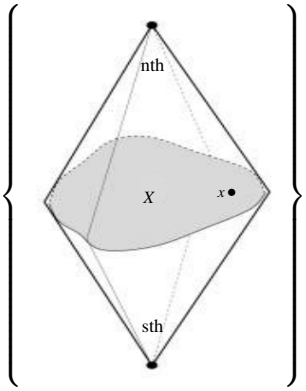
关于高阶归纳类型的计算规则，详见 [UFP13, §6]。在同伦类型论的其他变体中，例如立方类型论([CCHM 15] [CHM18])，推出及其他高阶归纳类型的计算规则可以像其他归纳类型那样，通过定义等式给出。

高阶同伦比特的理念。 作为推出的一个例子，数据类型 X 的（未约化）悬挂 是 $X \xrightarrow{x} \bullet \to *$ (113) 沿自身的同伦推出 (115)，因此得到这样一种数据类型：其中每个数据 x: X 都会被提升为数据对 (nth,sth) 的识别证书：

悬挂。

同伦类型论	同伦论
$\mathrm{S}(X) :\equiv * \sqcup_X *$: 类型	

（非约化）
X的悬挂
$\mathrm{S}X$ $=$



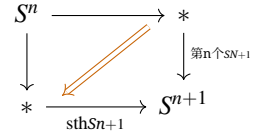
(117)

右侧[16] 标示的是相应的语义，即拓扑悬挂空间（例如 [Ja84，第 41][页； 8]Ha02，第 8] 页）。例如，空类型（114）的悬挂（117）由两个项归纳生成，它们之间没有同伦——这等价于比特类型：$\mathrm{S}\varnothing \simeq$ 比特（110）。

接下来，比特类型的悬挂由以下内容自由生成：(1.) 一对数据点，以及 (2.) 它们之间的一对等同。这就是圆的同伦类型，参见（119）中的示意图。

归纳地，如果$X = S^n$ 是一个n-球面同伦类型，那么它的悬挂就是 $n+1$-球面同伦类型，可表示为以下两者的并集：(1.) 一对极点 nth、sth；以及 (2.) 经过赤道 n 球面中所有点s 的子午线 mer(s)。

n-球面。

同伦类型论	同伦论
$S^{-1} :\equiv \varnothing$ $S^0 :\equiv \mathrm{Bit}$ $S^{n+1} :\equiv \mathrm{S}S^n$	

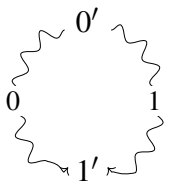
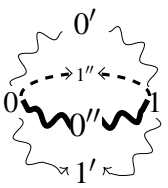
(118)

换句话说，在同伦类型化编程语言中，作为比特（110）典型范例的数据类型比特（Bit），伴随着一个高阶同伦类型塔；它通过 $\mathbb{N}$-归纳（111）由比特的迭代悬挂（117）得到：

根据下文的（130），这些高阶球面类型能够检测数据类型的所有高阶同伦性质。从这个意义上说，同伦类型化编程旨在将比特推广为“高阶同伦比特”：

尽管这种关于同伦数据类型论的观点在数学上既引人入胜，又颇具说服力，但“对高阶同伦比特进行计算”在实际计算机科学中的实践内涵（与其在数学同伦论中的诠释相对）可以说仍然有些难以捉摸。我们在第6节提出，拓扑量子计算（的认证）填补了这一空缺。

高阶同伦比特

经典比特	圆类型	球面类型
S^0 =比特	S^1 =S比特	S^2 = S^{2}比特
0 1		

(119)

[16](117) 右侧的图形改编自 [Mu10，第 14] 页。

同伦余纤维、CW复形与序列余极限。同伦推出 (115) 的另一个重要特例是同伦余纤维（这一概念与同伦纤维 (87)“对偶”）、胞腔附着（例如 [AGP02, 第3节.1]）以及由此得到的胞腔复形（具体而言是“CW复形”，例如 [Ha02, pp. 5][AGP02, 第5节.1]）：

函数的**同伦余纤维** $f:\ Y \to X$ 是以下 余纤维余积类型（115）的一种特殊情形，其中一个 加项是单元素类型（113）：	$\mathrm{cof}\ (f)\ :\equiv *\sqcup_X Y$	$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathrm{cof}\ (f) \end{array}$

(120)

对类型X进行一次n-**胞腔附着** 是函数$f:S^n \to$的余纤维 (120) X，其定义域是n-球面类型 (118)。	$\mathrm{cof}(S^n \xrightarrow{f} X)$	$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ * & \longrightarrow & X \cup_f D\quad n \end{array}$

(121)

更一般地： 一个类型的带索引n-**胞腔附着** X 是相对于某个 参数类型R的推出（ 115）。	$\mathrm{po}\begin{pmatrix} R\times S^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \mathrm{pr}_R & & \\ R & & \end{pmatrix}$	$\begin{array}{ccc} R\times S^n & \xrightarrow{f} & X \\ \mathrm{pr}_R\downarrow & \swarrow & \downarrow \\ R & \longrightarrow & X\cup_f D^n \end{array}$

(122)

一个**有限CW复形**由 空类型（114）通过有限序列的 胞腔附加（121）构成，且其 维数$n_{k+1} \geq n_k$递增	$X^{-1}\ :\equiv \varnothing$ $X^{k+1}:\equiv \mathrm{cof}\left(S^{n_{k+1}} \xrightarrow{f_{(k)}} X^k\right)$ $X\quad :\equiv X^{k_{\max}}$	$\varnothing \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X^k \hookrightarrow X^k \cup_{f_{(k)}} D^{n_{k+1}} =: X^{k+1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X$

(123)

一个**有限集**是一个有限CW复形 （123）是零维。	$X^{-1}\ :\equiv \varnothing$ $X^{k+1}:\equiv \mathrm{cof}(\varnothing \to X^k)$ $X\quad :\equiv X^{k_{\max}}$	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

(124)

A **函数上的序列余极限** $n:\mathbb{N}\vdash X_n:$类型， $n:\ \mathbb{N}\vdash f_n:\ X_n \to X_{n+1}$ 由自然数（111）索引 也可通过同伦推出得到 （115）（例如 [Ri18, §15]）。	$\begin{array}{ccc} ((n:\mathbb{N})\times X_n)\times S^0 & \xrightarrow{\begin{cases}((n,x),0)\mapsto(n+1,f_n(x))\\((n,x),\ 1)\mapsto(n,x)\end{cases}} & (n:\mathbb{N})\times X_n \\ \downarrow ((n,x),i) & & \downarrow \\ (n:\mathbb{N})\times X_n & \xrightarrow{\text{余极限余锥}\ n\ :\ \mathrm{cpr}n:\ Xn\to X_\infty} & X_\infty \end{array}$	

(125)

数据类型的同伦n-截断的思想。当$X:$ 类型不一定是n-截断的（100）时，我们可以构造（例如参见 [UFP13，第 7.3 节，第 223] 页）它的n-截断 $[X]_n:$ 类型$_{\leq n}$：它是以X 为对象、由n-截断类型给出的“最佳近似”，因为它带有一个形如 $\eta_n:X\to[X]_n$ 的函数；该函数在从X 到n-截断类型的函数中是始初的，也就是说，任意这样的函数都能在等价意义下唯一地因数分解（101）。与其他归纳类型一样，自然可以用依赖类型和依赖函数的一般形式来陈述这样的泛映射性质（ump），其形式如下：

同伦类型论	**同伦论**
$Y:[X]_n\to$类型$_{\leq n}\quad\vdash\quad \mathrm{ump}:\mathrm{isEquiv}\left((-)\circ\eta_n\right):\ \prod_{c:[X]_n}Y(c)\to\prod_{x:X}Y\left(\eta_n(x)\right)$	$\begin{array}{ccc} & \overset{\forall}{\dashrightarrow} & Y \\ & \underset{\exists!}{\dashrightarrow} & \uparrow\ n\text{-截断} \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & [X]_n \end{array}$

(126)

例如，由于任何 n 截断类型也都是 $(n+1)$ 截断的，因此这些分解对每个 $X:$类型都给出一个截断塔

$$X \xrightarrow{\eta_n} \cdots \longrightarrow [X]_{n+1} \longrightarrow [X]_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow [X]_0 \longrightarrow [X]_{-1} \equiv: \exists X \tag{127}$$

在同伦论语义中，这称为波斯特尼科夫塔 ([GJ99，推论 3.7][Lu09，第5节5.6 节与第6节6.5])。经典同伦论主要关注波斯特尼科夫塔的高阶层次，但同伦类型论揭示了其低阶层次具有深远的逻辑 意义：

- 类型X 的(-1)-截断——也称为命题截断 [AB04][UFP13，第3节.7][Kr15] ——可理解为生成命题 (91)：存在类型为 X 的数据 （也就是说X “有元素”），参见 (92)：

类型论	逻辑
$\Gamma \vdash \exists X : \equiv [X]_{-1} :$ 命题	$\exists_{x\in X}$

(128)

命题截断的万有性质 (126) 是证明中使用存在量词的通常规则：若要在假设 $\exists X$ 的前提下证明命题P ，我们可以假设存在一个$x : X$。具体而言，如果P 是任意命题，那么要证明 $\exists X \to P$ ，根据万有性质，只需给出一个函数$X \to P$ ；该函数（如同任何函数）可以通过假设一个元素$x : X$ ，然后证明P来定义。

- 0类型的截断X ——也称为集合截断 ——可理解为生成X-数据的等价类集合 (96)；从语义上说，这相当于转到空间的连通分支集合 π_0 ，而对于依赖数据类型，以上所有内容都逐纤维适用 (106)，参见引理 4.6：

同伦类型论	同伦论
$\Gamma \vdash [X]_0 :$ 集合	$\pi_{0/\Gamma}(X)$

(129)

胞腔复形构造n-截断。 在同伦类型论中，遵循 [UFP13，第 7.3 节，第 223],页，流行的做法是通过巧妙的高归纳类型构造，一步构造n-截断 (126)；现在我们介绍另一种n-截断构造，它隐含于 [Ri19]之中，其语义更接近同伦论中n-截断的经典构造。

首先注意到，通过展开n-截断 (100)、环空间 (88)和高维球面 (118)的定义，可以发现（[UFP13，定理 7.2.9][CR21，定理 3.10]），与经典同伦论论证非常相似：一个类型是n-截断的，当且仅当其（$n+1$）重环空间是可缩的（90）；而一个$n+1$重环空间，等价地，是保持给定基点数据的、从$n+1$-球面出发的函数类型（[UFP13，引理 6.5.4]）：

$$\begin{matrix} n : \mathbb{N}, \\ X : \mathrm{Type} \end{matrix} \quad \vdash \quad \mathrm{isType}_{\leq n}(X) \;\simeq\; \Big((x : X) \to \big(\exists!\, \Omega_x^{n+1} X\big)\Big) \;\simeq\; \Big((x : X) \to (f : S^{N+1} \to X) \times \mathrm{Id}\big(f(\mathrm{nth}), x\big)\Big). \tag{130}$$

因此可以预期，n-截断 $[X]_n$ 可通过为所有$f : S^{n+1} \to X$添加平凡化而得到，具体通过以下指标化胞腔附着（122）：

$$\begin{array}{ccc} (S^{n+1} \to X) \times S^{n+1} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & (S^{n+1} \to X) \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X_1 \end{array} \tag{131}$$

虽然这是正确的思路，但所得的结果X_1 可能仍然不是n-截断的，不过它已经更加接近了：我们必须取反复进行该构造所得对象的余极限（遵循 [Ri19，§7.2]）：

定义 5.1 （截断）。 对于$X :$ 类型和$n :$ $\mathbb{N}$，我们定义 $\eta_n : X \to [X]_n$ 为序列余极限（125）的余极限余锥

$$[X]_n :\equiv X_\infty = \mathrm{colim}\big(X :\equiv X_0 \xrightarrow{i_0} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} \cdots\big), \qquad \eta_n :\equiv \mathrm{cpr}_0 : X \to [X]_n \tag{132}$$

在由映射到序列前一阶段的函数$n+2$-胞腔附加i_k索引的$S^{n+1} \to X_k$[17]之上

$$\begin{array}{ccc} (S^{n+1} \to X_k) \times S^{n+1} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & (S^{n+1} \to X_k) \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}}\downarrow & & \downarrow \\ X_k & \xrightarrow{\;i_k\;} & X_{k+1}. \end{array} \tag{133}$$

[17]在经典同伦论中，构造（133）通过显式附加维数不断增高的胞腔集合$n+2+k$来表达，从而迭代地填充高阶同伦群。在这里的类型论表述中，这种维数的增加是隐式 的，因为胞腔附着所依据的不仅是一个集合，而是高阶同伦类型$S^{n+1} \to X_k$（即“内化”了经典构造）。例如，对$X_0 = *$应用$n = -1$的构造后，第一阶段得到$X_1 = S^1$，，因此第二阶段的指标类型是 2-类型$S^0 \to S^1 \simeq S^1 \times S^1$。

命题 5.2 （n-截断的万有性质）。定义 *5.1* 中: $X\,!\,[X]_n$ 的构造具有 n-截断的泛性质(126) 。

证明。 这是 [Ri19，定理 7.2.10] 中给出的对紧类型之间的映射类进行局部化的构造的一个特例。具体而言，推出 (133) 是始初拟F-局部化扩张（[Ri19，定义 7.2.6]）的一个特例，其中取族 F 为到单元素类型 (113) 的终端映射 $S^{n+1} \to *$ 。于是，由于球面根据 [Ri19，推论 7.1.12] 是序列紧的， [Ri19，定理 7.2.10] 即可适用。

[Ri19，定理 7.2.10] 中给出的泛性质并不是我们在 (126) 中给出的依赖的泛性质。然而， [RSS20，§1] 证明了若干刻画模态 （[UFP13，§7.7]）的类似泛性质彼此等价；其中包括 [RSS20，定义 1.2] 中的泛性质 (126)，以及 [Ri19，定理 7.2.10] 中出现的泛性质，即 [RSS20，定义 1.3] 中的泛性质（注意到n-截断类型在有序对类型下封闭，见 [UFP13，定理 7.1.8]）。 □

商集。即使所有涉及的数据类型都是集合（96），而非高阶同伦类型（100），高阶归纳类型形成（第48页）的存在也能发挥奇效；具体而言，它蕴含了编码数据的普通商集的数据类型的存在。这解决了类型论中一个已有十年历史的问题（综述见 [Li14，第1节。1][Mu22，第4.3节。2]），该问题可追溯至构造性数学中集合概念的起源 [Bish67，第 13][页。 15]： 集合被视为配备等价关系的对象，也称为“集合样对象” [Ho95，第1.3节，第5节。1][BCP03] 或“Bishop 集合” [CS07，第3节。1]。

具体而言，给定一个配备关系（109）的数据集（96），若该关系是等价关系，即满足以下条件:

$$\begin{array}{lll} X:\text{集合} & \text{isReflexive}(P) & :\equiv \quad (x:X)\to P(x,x)\,, \\ P:\ X\times X\,!\,\text{命题}, & \text{isSymmetric}(P) & :\equiv \quad (x_0,x_1:P)\times P(x_0,x_1)\to P(x_1,x_0)\,, \\ R:\equiv (x_0,x_1{:}X)\times P(x_0,x_1), & \text{isTransitive}(P) & :\equiv \quad (x_0,x_1,x_2:\ X)\times P(x_0,x_1)\times P(x_1,x_2)\,!\,P(x_0,x_3); \end{array} \tag{134}$$

那么我们得到 商类型 X/R ，即 X 按 R 取商，其定义为（参见 [UFP13，第6节.10][RS15，第1.5节，第2节.4]）作为推出 (115) 的集合截断。该推出来自这样一个函数：选取类型为 X 且彼此有关系的数据对；并沿着另一个函数投影出它们在 S^0 =比特 (119) 中的差异:

$$\cdots \quad\vdash\quad X/R \ :\equiv \left[\ \mathrm{po}\left(\begin{array}{ccc} \big((x_0,x_1),i\big) & \mapsto & x_i \\ R\times S^0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_R} & & \\ R & & \end{array}\right)\right]_0 \ :\ \mathrm{Set} \tag{135}$$

我们也可以将商 X/R 定义为等价关系 R的等价类 的集合。等价类是一个性质$E:\ X\to$ 命题，使得存在一个$x:\ X$，满足对于所有y: $E(y)$当且仅当$P(x,\ y)$。

$$\text{isEquivalenceClass}(E) \ :\equiv\ \exists\Big((x:X)\times\big((y:X)\to(E(y)\xrightarrow{\sim}R(x,y))\big)\Big). \tag{136}$$

那么我们可以定义

$$\cdots\vdash X/R \ :\equiv\ \{E:X\to\mathrm{Prop}\mid \text{isEquivalenceClass}(E)\}. \tag{137}$$

大量示例 出现在数系 类型层级的构造中，我们将在第6节中讨论这一层级 .

经认证的数据结构的思想。 我们在(60)附近曾以软件验证的承诺为由，阐述数据类型化的概念；如今这一点得到了清晰的体现:

通过迭代依赖数据配对 (65)（称为 数据望远镜[Zu75][dB91], 数据记录 [CT08, p. 2] 或类型 类 [GGMR09, §2]）的数据库类型 数据库 B：集合 (96)，并配备构成对 B 数据进行读／写／计算操作（“方法”）的 B 依赖函数 (64)，以及构成数据一致性陈述的等同证书 (71)，便可得到完全可验证的 数据结构。其指称语义正是原本意义上的“数学结构”（例如参见 [Sak20] 中的指引）[Co04] ，即代数（通常称作“结构层级”等）。

Data 结构	**数学 结构**
数据库	底层集合
数据访问 方法	代数 结构
一致性 规范	定律/ 性质

例如，配备了可一致地读写给定 D 数据的方法（称为良构的 D“透镜”结构 [BPV06, §3]）的数据库 B 具有如下形式：

$$\underset{\substack{D\text{-lens structure}\\ \text{on data base}}}{D\mathrm{Lens}} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (B : \mathrm{Set}) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{data}\\ \text{base}\end{array} \\ \left.\begin{array}{l} \times \left(\mathrm{read}_D : B \to D\right) \\ \times \left(\mathrm{write}_D : D \times B \to B\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{access}\\ \text{structure}\end{array} \\ \left.\begin{array}{l} \times \left(\mathrm{rw} : \binom{b:B}{d:D} \to \mathrm{Id}_D\left(\mathrm{read}_D\left(\mathrm{write}_D(d,b)\right), d\right)\right) \\ \times \left(\mathrm{wr} : (b : B) \to \mathrm{Id}_B\left(\mathrm{write}_D\left(\mathrm{read}_D(b), b\right), b\right)\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{consistency}\\ \text{specification}\end{array} \end{array} \right. \tag{138}$$

注意，按照积类型引入规则 (65)，给出一个D透镜数据结构 (138) 意味着 ），

$$\Big(\underbrace{B}_{\text{data base}}, \underbrace{\mathrm{read}_D, \mathrm{write}_D}_{\text{methods}}, \underbrace{\mathrm{rm}, \mathrm{rw}}_{\text{certificates}}\Big) : D\mathrm{Lens} \tag{139}$$

实例化数据 基础B，并为其配备读写方法以及证明这些方法按预期工作的证书 d.

正是通过这种方式，完全数据类型化程序 (60) 会自动获得认证并验证：生成给定结构化类型的数据，必然需要提供一份证书，证明正确的数据行为已经过验证。

群结构。一种具有根本数学意义的数据结构是群数据结构（例如 [Ka09][Es19, §33.10][ilab, §“群论”]），其含义取自抽象群论（例如 [Mi72, §1.1][Ro95]）：

$$\underset{\substack{\text{group}\\ \text{data}\\ \text{structure}}}{\mathrm{Grp}} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (G : \mathrm{Set}) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{data}\\ \text{base}\end{array} \\ \left.\begin{array}{l} \times \left(\mathrm{e} : G\right) \\ \times \left(\cdot : G \times G \to G\right) \\ \times \left((-)^{-1} : G \to G\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{group}\\ \text{structure}\end{array} \\ \left.\begin{array}{l} \times \left(\mathrm{unt} : (g : G) \to \mathrm{Id}_G\left(g \cdot \mathrm{e}, g\right) \times \mathrm{Id}_G\left(\mathrm{e} \cdot g, g\right)\right) \\ \times \left(\mathrm{asc} : \binom{g_1,g_2,}{g_3:G} \to \mathrm{Id}_G\left((g_1 \cdot g_2) \cdot g_3, g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)\right)\right) \\ \times \left(\mathrm{inv} : (g : G) \to \mathrm{Id}_G\left(g \cdot g^{-1}, \mathrm{e}\right) \times \mathrm{Id}_G\left(g^{-1} \cdot g, \mathrm{e}\right)\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{group}\\ \text{laws}\end{array} \end{array} \right. . \tag{140}$$

从历史上看，数学术语“群”是对称群（例如 [Mi72]）或变换群（例如 [tD87]）的简称，意指：某个对象的变换对称群（参见 [tD87, (2.3)]）。有趣的是，同伦类型论的魔力天然揭示了这一含义（参见 [BBCDG21]）：从第 40 页的讨论可以清楚看出，群胚$D : \mathrm{Type}_{\leq 1}$ (99) 中任意数据$d_0 : D$ 的自等同$d_0 \rightsquigarrow d_0$（对称性）——也就是其在d_0 处环路类型 (88) 中的数据——在拼接 (77) 运算下构成一个群 (140)：

$$\underset{\text{Given data 1-type with base datum}}{D : \mathrm{Type}_{\leq 1},\ d_0 : D} \quad \underset{\text{obtain}}{\vdash} \quad \underset{\substack{\text{self-identifications}\\ \text{equipped with}}}{\Big(\Omega_{d_0} D,\ \underset{\substack{\text{self-}\\ \text{identification}}}{\mathrm{e} :\equiv \mathrm{id}_{d_0}},\ \underset{\text{concatenation}}{\cdot :\equiv \mathrm{conc}},\ \underset{\text{reversal}}{(-)^{-1} :\equiv \mathrm{inv}},\ \underset{\text{associativity etc.}}{\cdots}\Big)} \ \underset{\text{forming}}{:}\ \underset{\text{group data.}}{\mathrm{Grp}} \tag{141}$$

沿着这一思路进一步，给定群结构 G (140) 的**子群数据结构** $H \subset G$（例如参见 [Mi72，第1.2]节），可以表述为如下形式的命题 (93)：$P_H : G \to \mathrm{Prop}$（我们可以将其视为）断言：$P_H : g \mapsto$“$g$ 属于$H \subset G$”，并附有证书，证明这些命题确实定义了子群（参见 [Es19，第33.12]节）：

$$\left(G, \mathrm{e}, \cdot, (-)^{-1}\right) : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \underset{\substack{\text{subgroup}\\ \text{structure}}}{\mathrm{SubGrp}(G)} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left(P : G \to \mathrm{Prop}\right) \end{array}\right\} \text{structure} \\ \left.\begin{array}{l} \times \ \left(\mathrm{ptd} : P(\mathrm{e})\right) \\ \times \ \left(\mathrm{mld} : \left((g_1, g_2 : G) \times P(g_1) \times P(g_2)\right) \to P(g_1 \times g_2)\right) \\ \times \ \left(\mathrm{ivd} : \left((g : G) \times P(g)\right) \to P\left(g^{-1}\right)\right) \end{array}\right\} \text{properties} \end{array} \right. \tag{142}$$

由这样的 $P: G \to \mathrm{Prop}$，可以将实际子群数据 (108) 恢复为依赖对 $H :\equiv (g : G) \times P_H(G)$（$G$ 的元素，连同证明它们确实属于该子群的证书）。它通过将G 上的群运算与相应证书配对而继承群结构；这些证书表明，这些运算在H 上确实仍然落在H中：

$$\begin{aligned}
&\big(G, \mathrm{e}, \cdot, (-)^{-1}\big) : \mathrm{Grp} \ \vdash \ \mathrm{SubGrp}(G) \xrightarrow{\text{underlying abstract group structure}} \mathrm{Grp} \\
&\qquad \big(P, \mathrm{ptd}, \mathrm{mld}, \mathrm{ivd}\big) \ \longmapsto \ \begin{pmatrix} H & :\equiv (g : G) \times P(g), \\ \mathrm{e}_H & :\equiv (\mathrm{e}, \mathrm{ptd}), \\ \cdot_H & :\equiv \big((g_1, p_1), (g_2, p_2) : H\big) \mapsto \big(g_1 \cdot g_2, \mathrm{mld}(g_1, g_2, p_1, p_2)\big), \\ (-)^{-1}_H & :\equiv \big((g, p) : H\big) \mapsto \big(g^{-1}, \mathrm{ivd}(g, p)\big) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{143}$$

数据结构识别的思想。将数据结构（第 52 页）定义为由依赖配对的依赖函数和识别构成的望远镜后，只要我们明确掌握任意依赖函数和依赖对的识别，就能明确给出它们的运算等价（103），或者等价地，给出它们的识别（105）。

利用单值性公理（105），这些识别按分量以符合预期的方式进行，其依据是通过恒等归纳（73）很容易定义的比较函数。这一结论称为函数外延性 [Vo10，第 8][UFP13，第 4.9 节，定理 2.9。7] 以及配对的对应结论 [UFP13，定理 2.7。2]）：

$$\text{函数外延性}\quad \mathrm{y} \quad \begin{pmatrix} f, g \\ : (d:D) \to C_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overset{\text{identifications of dependent functions}}{\mathrm{Id}_{(d:D)\to C_d}(f, g)} & \xrightarrow[\sim]{\text{equivalent to}} & \overset{\text{dependent functions of identifications}}{\big((d : D) \to \mathrm{Id}_{C_d}(f(d), g(d))\big)} \\ \mathrm{id}_f & \longmapsto & \big(d \mapsto \mathrm{id}_{f(d)}\big) \end{pmatrix} \tag{144}$$

$$\text{pair extensionality} \quad \begin{pmatrix} (d,c), (d',c') \\ : (d:D) \times C_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overset{\text{identifications of dependent pairs}}{\mathrm{Id}_{(d:D)\times C_d}\big((d, c), (d', c')\big)} & \xrightarrow[\sim]{\text{equivalent to}} & \overset{\text{dependent pairs of identifications}}{\big(p : \mathrm{Id}_D(d, d')\big) \times \mathrm{Id}_{C_{d'}}(p_* c, c')} \\ \mathrm{id}_{(d,c)} & \longmapsto & \big(\mathrm{id}_d, \mathrm{id}_c\big) \end{pmatrix} \tag{145}$$

反复应用这两条规则，可以发现，望远镜／记录数据结构（第 52 页）的等价，是底层基类型上与所有给定结构相容的等价——因此，这些等价是同态，从而重新得到原有的代数概念同构。

例如，群数据结构的等价（140）结果是一个双射群同态 （例如[Mi72, §1.3]），因此也就是群同构，与传统代数意义上的概念相同，不过这里它是从同伦类型论的原理中涌现出来的：

$$\overset{\substack{\text{identifications of} \\ \text{types with group structure}}}{\mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}\Big((G, \mathrm{e}, \mathrm{cmp}, \mathrm{inv}), (G', \mathrm{e}', \mathrm{cmp}', \mathrm{inv}')\Big)} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \left.\big(p : \mathrm{Id}_{\mathrm{Set}}(G, G')\big)\right\} \text{underlying bijection} \\ \left.\begin{array}{l} \times\, \mathrm{Id}_G(p_* \mathrm{e}, \mathrm{e}') \\ \times\, \mathrm{Id}_{G\times G\to G}(p_* \mathrm{cmp}, \mathrm{cmp}') \\ \times\, \mathrm{Id}_{G\to G}(p_* \mathrm{inv}, \mathrm{inv}') \end{array}\right\} \text{homomorphism property} \end{array} \right. \tag{146}$$

本质上，单值同伦类型论中的这一情况（144）—（146）最早由 [CD13]明确提出，后来被称为“结构恒等原理”（遵循 [Ac11]的说法），并在 [UFP13, §9.8] [Es19, §§3.33.1][ANST20] 中作了进一步讨论（另见 [Ts17, §5.1]中关于结构主义的讨论）。

请注意，依赖数据类型论由此令人欣喜地解决了对“数学结构”良好元理论的长期历史探索（参见 [Co04]），并在这一过程中将其与“数据结构”的概念统一起来。

类型论	同伦论
数据类型	同伦类型
数据结构	数学结构
数据基	载体类型

高阶结构的构想。前面关于数据/数学结构的例子（第 52 页）以及下文进一步讨论的许多例子，都基于（数据）集合（第 96 页）；这是文献中传统上所考虑的经典情形。不过，在同伦类型语言中，我们同样可以将高阶同伦类型（第 100 页）视为基类型，从而得到“高阶结构”（取其如今流行的含义，参见例如 [CGX01][JSSW19][FSS19]）。

高阶结构的基本例子包括群的去环化 （147）和高阶去环化（192）；我们将在下文第5节的5.2节讨论这些内容。

总之，同伦类型论作为计算机科学中的一个论断，其非凡洞见可表述如下：

> 任何具有真正彻底的数据类型化的编程语言，本质上
> 都

接下来我们将展示，这如何实现一般情形下高斯-曼宁单值的同伦数据类型的简洁构造（第5.2节），以及具体情形下任意子拓扑量子门的简洁构造（第6节）。

5.2 上同调数据的单值化

现在我们描述这一编程语言构造（下文定义 5.16）；根据第5.1节中的对应关系，它对第4节所发展的扭曲上同调群上的高斯-马宁联络的单值化进行编码，并因此（见下文第6节）具体编码了通过 KZ 联络的单值化实现任意子辫门的运算。

作为一种类型构造本身，我们在下文定义 5.16 中的主要构造相当直接：它不过是两个（高阶）去环化类型之间双重迭代的依赖函数类型的依赖 0-截断——熟悉同伦类型论的读者无需进一步介绍，便能理解定义 5.16，也可以直接跳到后文。

请记住，这种类型论上的简洁性正是我们的要点：按照第5.1节中的对应关系，定义 5.16 中这个现成构造的类型里的传输操作 (74)，显然可解释为我们在第4节证明的由高斯-马宁联络给出的平行移动——然而，其传统构造却远没有这么直接（文献 2.23，文献 2.24）。

不过，为了照顾更广泛的读者并使内容自成一体，而且鉴于类型论文献对以下问题的讨论仍然不多，我们现在先介绍一些类型论基础，涉及人们可能称为**变换群**或**抽象伽罗瓦理论**的理论。无论如何，下文都可作为一个示例，说明如何运用第5.1节的同伦数据类型语言进行具体（尽管按照 [UFP13] 的风格是“非形式化”的）工作（参见下文注 5.7）。

自同一化群。 在 (141) 中我们看到，群结构 (140) 的一个自然来源是带基点类型的“环化” (88)，$\Omega_{d_0}D : \mathrm{Grp}$。由于这只取决于单个数据 $d_0 : D$，而这些环路的自同一化以此为基点，因此给定任意 $G : \mathrm{Grp}$，便可考虑是否存在一个 1-型 (99)——记作 $\mathbf{B}G$，称为 G 的去环化——使得首先存在一个本质上唯一的数据，且其自同一化能以这种方式 (141) 恢复G

$$G \simeq \Omega_* \mathbf{B}G$$

下面的命题 5.9（尤其）断言，所有群都能以这种方式得到，且在等价意义下成立。这带来了一种简洁的群类型替代定义，这种定义只有在同伦类型语言中才可用：*带基点连通 1-型*：

$$\underset{\text{connected 1-types}}{\overset{\text{groups as pointed}}{\mathrm{Type}^{*/}_{0<\bullet\leq 1}}} :\equiv \begin{cases} \mathbf{B}G : \mathrm{Type}_{\leq 1} & \} \text{ higher data} \\ \times\ \mathrm{pt} : \mathbf{B}G & \} \text{ structure} \\ \times\ (t : \mathbf{B}G) \to \exists\, \mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}(\mathrm{pt}, t) & \} \text{ property (connectivity)} \end{cases} \tag{147}$$

从语义上说，这种关于群的同伦论替代观念，以及它与代数定义的等价（命题 5.9），正是环空间的“May 识别定理”的内容 [May72]；该定理推广到 ∞-拓扑斯内部的群 [Lu09, Lem. 7.2.2.11]，并因此在 [NSS12a, p. 7][SS20-Orb, Prop.][SS21-Bun, Prop. 0.2.1], 中得到了大幅扩展。另见下文 (174)。类型论文献在 [BvDR18, p. 6][BBCDG21, §4] 中采纳了这一视角（另见[W¨a]）。

为了以类型论细节证明这一等价（见下文命题 5.9），我们先退一步，列出所有组成要素：

G-作用与扭子。 对于给定的群结构 G，存在其在集合上的作用 这一经典概念（例如 [tD87, (1.1)]）：

定义 5.3（G-集合）。对于群 G（140），一个集合上的左 G-作用结构 ——简称为左 G-集合 ——是如下类型的数据：

$$\left(G, \mathrm{e}, \cdot, (-)^{-1}\right) : \mathrm{Grp} \ \vdash\ \underset{G\text{-set}}{\overset{\text{left } G\text{-action}}{G\mathrm{Act}_L}} :\equiv \begin{cases} (S : \mathrm{Set}) & \} \text{ data} \\ \times\ \left(\curvearrowright : G \times S \to S\right) & \} \text{ structure} \\ \times\ \left(\mathrm{unt} : (s : S) \to \mathrm{Id}\left(\mathrm{e} \curvearrowright s, s\right)\right) & \\ \times\ \left(\mathrm{act} : (g_1, g_2 : G) \to \mathrm{Id}\left((g_2 \cdot g_1) \curvearrowright s,\ g_2 \curvearrowright (g_1 \curvearrowright s)\right)\right) & \} \text{ properties} \end{cases} \tag{148}$$

对应　因此，也存在右 G-集合；这一点差异在某些应用中确实会产生影响，并且将继续产生影响。s:

$$\left(G, \mathrm{e}, \cdot, (-)^{-1}\right) : \mathrm{Grp} \ \vdash\ \underset{G\text{-set}}{\overset{\text{right } G\text{-action}}{G\mathrm{Act}_R}} :\equiv \begin{cases} (S : \mathrm{Set}) & \} \text{ data} \\ \times\ \left(\ \curvearrowleft\ : S \times G \to S\right) & \} \text{ structure} \\ \times\ \left(\mathrm{unt} : (s : S) \to \mathrm{Id}\left(s\ \curvearrowleft\ \mathrm{e}, s\right)\right) & \\ \times\ \left(\mathrm{act} : (g_1, g_2 : G) \to \mathrm{Id}\left(s\ \curvearrowleft\ (g_1 \cdot g_2),\ (s\ \curvearrowleft\ g_1)\ \curvearrowleft\ g_2\right)\right) & \} \text{ properties} \end{cases} \tag{149}$$

我们将遵循通常的约定，以其底层集合的名称来指称一个G-集合，通常省略其结构和性质。

两个G-集合（148）之间的函数是等变的，当且仅当它与G的作用可交换；我们将等变映射的数据集记作 $\mathrm{Hom}_G(X, Y)$：

$$\left.\begin{array}{l} G : \mathrm{Grp}, \\ (S, \curvearrowright), (T, \curvearrowright) : G\,\mathrm{Act}_L \end{array}\right\} \begin{array}{lll} \phi : S \to T & \vdash & \mathrm{isEquivariant}(\varphi) \quad :\equiv \quad (g : G) \times (x : S) \to \mathrm{Id}_Y\big(\varphi(g \curvearrowright s), g \curvearrowright \varphi(s)\big) \\ & \vdash & \mathrm{Hom}_G(X,Y) \quad :\equiv \quad \big\{\varphi : S \to T \mid \mathrm{isEquivariant}(\varphi)\big\}. \end{array} \tag{150}$$

借助同伦论，G-作用（5.3）的类型有一种简洁的改写方式（见下文命题 5.10），与命题 5.9 的去环化等价相一致。

以下是经典G-挠子概念的显然的类型论表述（例如 [Miln80，第3节。4], 参见[BBCDG21，定义 4.8。1]）：

定义 5.4（G-挠子）。设G为一个群（140），则左 G-挠子结构 T 是一个有元素的（128）左G-集合$G \curvearrowright T$（148），其作用是正则的（即自由且传递）：对任意两个元素x，$y : T$，都存在唯一的$g : G$满足$g \curvearrowright x = y$。

$$\big(G, \mathrm{e}, \cdot, (-)^{-1}\big) : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \textit{G-torsor} \quad G\mathrm{Tors}_L :\equiv \left\{\begin{array}{ll} (T, \curvearrowright, \mathrm{unt}, \mathrm{act}) : G\mathrm{Act} & \\ \times\, (x, y : T) \to \exists!\big\{g : G \;\big|\; \mathrm{Id}_T(g \curvearrowright x, y)\big\} & \textit{G-action which is regular} \\ \times\, \exists T & \textit{and inhabited.} \end{array}\right. \tag{151}$$

例如，任意群对自身（即对其底层数据集）的左乘/右乘作用都会使其成为左/右G-托瑟：

$$\big(G\,\mathrm{e}, (-)^{-1}\big) : \mathrm{Grp}, \quad \big(T \equiv G, \curvearrowright :\equiv \cdot, \mathrm{act} :\equiv \mathrm{asc}\big) : G\mathrm{Tor}_L \tag{152}$$

事实上，除等价（101）之外，这就是唯一 的G-托瑟例子：每个G-托瑟都与典范挠子（152）同构，而选择同构相当于选择其中哪个元素与G的单位元对应。下面的引理 5.6 将从类型论角度重新证明这一标准事实；这正是我们此处关注G-托瑟的主要原因，因为它蕴含G-托瑟的类型（151）就是（在等价意义下）G 的去环化（147）（命题 5.9）。

为此，我们首先需要证明，G 托瑟之间的每个等变函数都是等价。以下证明采用了标准论证，但为了展示第 5.1 节概述的类型论规则如何发挥作用，我们会更详细地展开证明。不过，归根结底，这些形式规则允许我们按照直觉预期进行推理，因此在后文中将它们略去不提也是合理的（参见下文注 5.7）。

引理 5.5（托瑟之间的等变映射是同构）。设 G 是一个群（140），且 S 和 T 是左 G-挠子（定义 *5.4*）。那么任意等变映射 φ：$\mathrm{Hom}_G(S, T)$（150）都是同构，即我们有一个等价（101）

$$\mathrm{Hom}_G(S,T) \;\simeq\; \mathrm{Id}_{G\mathrm{Tors}_L}(S,T)$$

等变映射（150）与 G-挠子的识别（71）（151），在此对应关系下，同态的复合对应于识别的拼接（77）。

证明。我们需要构造如下形式的依赖项

$$G : \mathrm{Grp},\ S, T : G\mathrm{Tor}_L,\ \phi : \mathrm{Hom}_G(S,T) \quad \vdash \quad \mathrm{proof}(\phi) : \mathrm{isBijection}(\phi).$$

考虑到这一点，根据结构恒等原理并利用单值性，该陈述将很容易得到 e.

展开 isBijection(–)（101）的定义，我们的目标是如下形式的项：

$$S, T : G\mathrm{Tor}_L,\ \phi : \mathrm{Hom}_G(S,T) \quad \vdash \quad \mathrm{proof}(\phi) : (t : T) \to \exists!\Big((s : S) \times \mathrm{Id}\big(\phi(s), t\big)\Big),$$

这里为了简洁起见，我们在记号上省略了左侧群G 这一假设。但根据依赖函数类型（68）的规则，可以从如下形式的项中推断出这一点：

$$S, T : G\mathrm{Tor}_L,\ \phi : \mathrm{Hom}_G(S,T),\ t : T \quad \vdash \quad \mathrm{proof}(\phi) : \exists!\Big((s : S) \times \mathrm{Id}\big(\phi(s), t\big)\Big).$$

到目前为止，这与经典推理非常相似。但在接下来的步骤中，我们需要取得S的一个元素；从类型论角度来看，这比经典情形稍微微妙一些：也就是说，我们名义上在左侧的假设中所拥有的

——作为S是一个托瑟（151）这一假设的一部分——只是一个项$p\colon\ \exists S$。把这一点用记号明确写出来，我们实际上要寻找的是

$$S,T:G\mathrm{Tor}_L,\ \phi:\mathrm{Hom}_G(S,T),\ t:T,\ p:\exists S\ \ \vdash\ \ \mathrm{proof}(\phi):\exists!\Big((s:S)\times\mathrm{Id}\big(\phi(s),t\big)\Big).$$

单凭假设$p:\exists S$，只能说明"存在"这样一个元素，但通常并不允许我们真的将这样的元素纳入上下文。这里解决问题的关键在于，上述依赖项的右端是一个命题（91）。因此，命题截断的万有性质（126）适用，从而表明上述形式的项实际上等价于如下形式的项：

$$S,T:G\mathrm{Tor}_L,\ \phi:\mathrm{Hom}_G(S,T),\ t:T,\ s:S\ \ \vdash\ \ \mathrm{proof}(\phi):\exists!\Big((s:S)\times\mathrm{Id}\big(\phi(s),t\big)\Big).$$

现在展开右侧的 $\exists!(\text{–})$ 的定义后，我们的目标终于化为以下形式（为便于阅读，右侧在记号上省略了迭代的等同类型；在当前情形下，由于S是一个集合，该类型无论如何都是可缩的（96）：

$$S,T:G\mathrm{Tor}_L,\ \phi:\mathrm{Hom}_G(S,T),\ t:T,\ s:S\ \ \vdash\ \ \mathrm{proof}(\phi):\left((s_t:S)\times\mathrm{Id}\big(\phi(s_t),t\big)\times\left((s'_t:S)\times\mathrm{Id}\big(\phi(s'_t),t\big)\to\mathrm{Id}(s_t,s'_t)\right)\right).\tag{153}$$

请注意，若将这个表达式朗读出来，它几乎就是引理的经典证明开头时会说的话：它指出，给定一个$t:T$，我们需要证明其在 ϕ 下的原像中存在一个s_t——其中我们可以假设已有一个$s\colon S$——并且原像中任何其他元素s'_t都与s_t等同。因此，从这里开始，经典证明思路基本上可以原样套用，利用S和 T 的托瑟性质（在记号上隐含于左侧的假设中）：

首先，由G在T上的作用具有正则性，存在$g_t:G$，使得$g_t\curvearrowright\varphi(s)=t$；又由 φ 的等变性可知$\varphi(g_t\curvearrowright s)=t$。因此，在（153）中，我们可以取$s_t$为

$$t:T,\ s:S\ \ \vdash\ \ s_t:\equiv g_t\curvearrowright s\ :\ S.$$

最后，若$s'_t:S$满足 $\varphi(s'_t)=t$，且是t的另一个原像，那么由同样的推理可得$g'_t:G$，使得$g'_t\curvearrowright s=s'_t$，从而$g'_t\curvearrowright\varphi(s)=t$。但由于形如这样的等式也定义了$g_t$，$G$作用的正则性意味着$g'_t=g_t$；因此$s'_t=g_t\curvearrowright s=s_t$。

□

群的解环与主丛分类。经典同伦论的一项重要成果是证明（RS17，定理 3.5 中有很好的综述 [1]）：在温和条件下，对于一个拓扑群G，存在一个拓扑空间BG，使得映射$X\to BG$的同伦类与X上的"主G-丛"的同构类一一对应；这里的"主G-丛"指的是G托瑟的纤维丛（定义 5.4）——因此称*classifying space* BG为分类空间。

重新证明这一经典定理的一种现代方法是（参见 [SS21-Bun，第 7] 页），观察到：
(i)(a) 在取其同构类之前，群胚 (99) 的 G-主丛等价于 f

"拓扑叠" $X\to\mathbf{B}G$之间的映射，其中 $\mathbf{B}G$ 是 G 的"解环叠"，**(b)** 因此它被识别为主 G-丛的"模叠"，从而也是 G-托瑟的模叠：$\mathbf{B}G\simeq G$托瑟；**(ii)** 分类空间BG 是 $\mathbf{B}G$的底层凝聚形状 （参见第 1 页）。[18]

这种对分类空间理论的现代化重新证明，使其几乎成为形式上的工作，只要我们对（凝聚）同伦论有良好的抽象把握——而（凝聚）同伦类型论正提供了这种把握。（特别是，纤维丛的局部平凡性条件无需作为显式条件声明，而是由单价 HoTT 的托扑斯论语义所蕴含； [SS21-Bun, §4.2]对此有所讨论。）

类型论	几何同伦论
$x:X\ \ \vdash\ \ P_x:G$挠$_L$	主G-丛 又称：G 上的X-托瑟；丛的 带基点的G-扭子；万有 主G-丛 $G\curvearrowright P\longrightarrow G$扭子$^{G/}\ \simeq\ \mathbf{E}G\ \simeq\ *$ $\downarrow$ (pb) $\downarrow$ $\downarrow$ $X\longrightarrow G$扭子 $\simeq\ \mathbf{B}G$ 模叠 G-托瑟的；去环化 群叠

(154)

[18]正因如此，我们采用粗体 $\mathbf{B}(\text{–})$ 来表示"去环化"（147），遵循 [Sc13, p. 74]（参见 [SS21-Bun, p. 7]），以表明它是经典上记作 BG 的对象的拓扑／凝聚式丰富化——而这一记法本身，则是对其首次构造的历史记忆；该构造称为"条构造"。

本着这一思路，我们现在给出上述第一项的类型论形式化证明（第二项中的凝聚性方面超出了本文的范围，但请参见第 4 页的展望）。这正是下文命题 5.9 的内容；为此，我们先证明引理 5.6 和 5.8。尽管这对专家而言或许并不令人意外，但这一结果极其重要，目前尚无法在文献中以这种形式引用（不过， [BBCDG21, §4.13]给出了命题 5.9 的一个结构性较弱的证明）。

引理 5.6（挠子类型解环一个群）。 对于群类型 G（140），$G\mathrm{Tors}_L$（G-挠子的类型）（定义 *5.4*）是一个带基点连通 *1*-型（141），其基点为 G： $G\mathrm{Tors}$（152）

$$G : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \left(G\mathrm{Tors}_L,\ \mathrm{pt} :\equiv G\right) \ :\ \mathrm{Type}^{*/}_{0<\bullet\leq 1}, \tag{155}$$

其环路类型（88）是 G:

$$G : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad p : \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}\left(\Omega_G\left(G\mathrm{Tors}\right), G\right). \tag{156}$$

证明。 首先，为了说明挠子类型是 0-连通的，也就是提供一个符合（147）最后一行所要求形式的证书:

$$T : G\mathrm{Tors}_L \quad \vdash \quad \exists \mathrm{Id}_{G\mathrm{Tors}_L}(G, T)\,.$$

应用引理 5.5 的类型等价，只需证明存在一个等变映射 φ_T: Hom_G（G, T）:

$$T : G\mathrm{Tors}_L \quad \vdash \quad \exists \mathrm{Hom}_G(G, T)\,.$$

将左侧 G-挠子结构所提供的可居留性证书（151）明确写出，这就是

$$T : G\mathrm{Tors}_L,\ p : \exists T \quad \vdash \quad \exists \mathrm{Hom}_G\left(G, T\right).$$

但由于右侧需要一个命题 $\exists$（–）的证明，而该命题由 (-1)-截断（128）给出，其泛性质（126）表明，这类依赖项等价于假设左侧存在一个特定元素t : T 的情形:

$$T : G\mathrm{Tors}_L,\ t : T \quad \vdash \quad \exists \mathrm{Hom}_G\left(G, T\right).$$

此外，将函数类型规则（68）应用于 (-1)-截断单位 η: $\mathrm{Hom}_G\left(G,\ T\right) \to \exists \mathrm{Hom}_G\left(G,\ T\right)$ (127)，意味着我们可以通过构造一个例子来推导出这样的存在性证明:

$$T : G\mathrm{Tors}_L,\ t : T \quad \vdash \quad \phi_t : \mathrm{Hom}_G\left(G, T\right).$$

但我们通过如下设定得到了这样的项:

$$\varphi_t(g) \ :\equiv \ g \mathbin{\circlearrowright} t \tag{157}$$

并给出以下 证书，以证明该函数是等变的（150）；这里我们使用等式串接（98） :

$$g', g : G \quad \vdash \quad \phi_t(g' \cdot g) \underset{(157)}{=} (g' \cdot g) \mathbin{\circlearrowright} t \overset{\mathrm{act}_T}{\underset{(148)}{=}} g' \mathbin{\circlearrowright} (g \mathbin{\circlearrowright} t) \underset{(157)}{=} g' \mathbin{\circlearrowright} \phi_t(g) \ :\ \mathrm{Id}_T\left(\phi_t(g' \cdot g), g' \mathbin{\circlearrowright} \phi_t(g)\right).$$

总之，这就提供了（147）中所需的连通性证书。那里同样需要的 1-截断证书，将直接由第二个断言（156）的证明得出；下面我们就来讨论它（因为G 是 0-截断的，且根据n-截断的递归定义（99））。

展开环空间的定义（88）后，（156）的证明应当是如下形式的依赖项:

$$G : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \mathrm{proof}_G : \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}\left(\mathrm{Id}_{G\mathrm{Tors}}(G, G), G\right).$$

By 应用引理 5.5 中的类型等价后，我们的目标等价地是以下类型的一个项 :

$$G : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \mathrm{proof}_G : \mathrm{Id}_{\mathrm{Grp}}\left(\mathrm{Hom}_G(G, G), G\right).$$

此外，根据类型等 价的单值性（105），我们等价地需要构造一个群之间的逆函数 p 类型

$$G : \mathrm{Grp} \quad \vdash \quad \mathrm{proof}_G :\equiv \left(f_G, f_G^{-1}, \cdots\right) : \mathrm{Hom}_G(G, G) \xrightarrow{\sim} G.$$

现在令函数 f_G 由在单位元处求值得到:

$$\phi : \mathrm{Hom}_G(G, G) \quad \vdash \quad f_G(\phi) \ :\equiv \ \phi(\mathrm{e}) \ :\ G \tag{158}$$

并令其反向函数f_G^{-1}为

$$h:G \quad \vdash \quad f_G^{-1}(h) :\equiv \left(h \mapsto h\cdot g\right) : G \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(G,G). \tag{159}$$

证明这确实构成一对逆函数的证书，依据相等性证书的复合规则（98），其推导方式与经典证明完全相同：

$$f\circ f^{-1}(g) \underset{(159)}{=} f\left(h\mapsto h\cdot g\right) \underset{(158)}{=} \mathrm{e}\cdot g \overset{\mathrm{unt}}{\underset{(148)}{=}} g \quad : \quad \mathrm{Id}\left(f\circ f^{-1}(g), g\right)$$

$$f^{-1}\circ f(\phi) \underset{(158)}{=} f^{-1}\left(\phi(\mathrm{e})\right) \underset{(159)}{=} \left(h\mapsto h \mathbin{\circlearrowleft} \phi(\mathrm{e})\right) \underset{(150)}{=} \left(h\mapsto \phi(h\mathbin{\circlearrowleft}\mathrm{e})\right) \overset{\mathrm{unt}}{\underset{(148)}{=}} \left(h\mapsto \phi(h)\right) \underset{(68)}{=} \phi \quad : \quad \mathrm{Id}\left(f^{-1}\circ f(\phi),\phi\right).$$

这就完成了（156）的证明，也随之完成了（155）的证明。 □

注 5.7（关于证明的观点）。上述引理 5.5 和引理 5.6 的证明旨在展示类型论构造的进行方式（当然，在文献 2.27 所列的文献中还能找到更多说明性示例）。因此，在接下来的证明中，我们将略去对依赖项的细致操作，只指出足够的证明策略，使得构造出完全形式化的类型论证明变得直接明了，尽管可能有些繁琐。

当然，过去一个世纪里，所有严谨数学成果的交流方式恰恰都是如此；人们普遍认为，原则上，所有严谨且可读的人类证明都可以（直接明了地，尽管颇为繁琐地）转换为经典逻辑基础（如 ZFC 集合论）中的完全形式化证明，只要有此需要。然而，重大区别在于，我们几乎没有理由需要 ZFC 集合论中的形式化证明；而在同伦类型论这一新的基础体系中，证明是计算机程序，其构造可能极具价值，例如构造一个用于计算拓扑量子门执行的程序，而这正是我们接下来要实现的目标。

引理 5.8（任意去环化都等价于挠子类型）。设 G 为一个群（140），且 $\left(\mathbf{B}G,\mathrm{pt}\right)$ 是任意一个去环化（147），那么将类型 $\mathbf{B}G$ 中的数据 t 映射到它与 pt 之间的等同类型的函数，可扩展为一个类型等价（101），在 $\mathbf{B}G$ 与 G-挠子类型（定义 *5.4*）之间建立等价：

$$\begin{array}{lll} G:\mathrm{Grp},\ \mathbf{B}G:\mathrm{Type}^{*/}_{0<\bullet\leq 1}, & \vdash & \mathbf{B}G \xrightarrow{\qquad\sim\qquad} G\mathrm{Tors}_L \\ \ell:\left(\Omega_{\mathrm{pt}}\mathbf{B}G,\mathrm{id}_{\mathrm{pt}},\mathrm{conc}\right)\xrightarrow{\sim}\left(G,\mathrm{e},\cdot\right) & & t \qquad\longmapsto\qquad \left(\mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}(\mathrm{pt},t),\mathrm{conc}\right), \end{array} \tag{160}$$

其中，Id（pt,t）上的 G-作用由等同的串接给出，该作用基于给定的环化等价 ℓ：

$$\begin{array}{ccccc} G\times \mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}(\mathrm{pt},t) & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}\left(\mathrm{pt},\mathrm{pt}\right)\times \mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}(\mathrm{pt},t) & \xrightarrow{\quad\mathbin{\circlearrowleft}\quad} & \mathrm{Id}_{\mathbf{B}G}(\mathrm{pt},t) \\ \left(g,\mathrm{pt}\overset{p}{\rightsquigarrow}t\right) & \longmapsto & \left(\mathrm{pt}\overset{\ell_g}{\rightsquigarrow}\mathrm{pt},\mathrm{pt}\overset{p}{\rightsquigarrow}t\right) & \longmapsto & \mathrm{pt}\overset{\mathrm{conc}(\ell_g,p)}{\rightsquigarrow}t \end{array}$$

证明。首先说明构造（160）确实产生了挠子：

占据条件 $\exists\mathrm{Id}(\mathrm{pt},t)$ 是带基点连通型（147）所附带的连通性证书的一部分。此外，给定一对挠子元素，利用它们的求逆（76）和拼接（77），即可在上述作用下得到一个将其中一个映射到另一个的群元素：

$$\begin{array}{l} p,q:\mathrm{Id}(\mathrm{pt},\mathrm{t}) \ \vdash \quad g \quad :\longmapsto \quad \mathrm{pt}\overset{\ell_g :\equiv \mathrm{conc}(p,\mathrm{inv}(q))}{\rightsquigarrow}\mathrm{pt} : \mathrm{Id}(\mathrm{pt},\mathrm{pt}) \\ \qquad\qquad\qquad\

现在，我们已具备足够的工具来陈述环化运算 (141) 的逆等价：

命题 5.9（环路—去环路等价）。 存在一个等价 (101)，介于代数定义的群的类型 Grp (140) 与带基点连通 *1*-型的类型 $\mathrm{Type}^{\geq 0}_{1_\bullet}$(147) 之间：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Type}^{*/}_{0<\bullet\leq 1} & \underset{\Omega_{\mathrm{pt}}(-)}{\overset{\mathbf{B}(-):\equiv(-)\mathrm{Tors}_L}{\underset{\sim}{\rightleftarrows}}} & \mathrm{Grp} \\ (D,\mathrm{pt}) & \longmapsto & \Omega_{\mathrm{pt}}D \end{array} \tag{163}$$

这个等价的一个方向由环路构造 Ω_{pt} (141)给出；另一个方向则是将 G 映射到其左 G-挠子的类型 $G\mathrm{Tors}_L$ (5.4)。

此前在 [LF14], 中也曾使用高阶归纳类型（群胚商 [VW21]）给出了这一结论的另一种类型论证明。现在我们可以通过挠子类型进行去环化，给出一个更具结构性的证明：

证明。 只需证明这两个函数互为逆，且在重新等同意义下满足 (101)；根据前面的引理，这一点显而易见：在一个方向上，根据引理 5.6，我们有：

$$\big(\Omega_G \circ (-)\mathrm{Tors}_L\big)(G) \;\equiv\; \Omega_G\big(G\mathrm{Tors}_L\big) \underset{(156)}{\simeq} G.$$

在另一个方向上，根据引理 5.6 和引理 5.8，我们有

$$\big((-)\mathrm{Tors}_L \circ \Omega_{\mathrm{pt}}\big)(\mathbf{B}G) \;\equiv\; \big(\Omega_{\mathrm{pt}}\mathbf{B}G\big)\mathrm{Tors}_L \underset{(156)}{\simeq} G\mathrm{Tors}_L \underset{(160)}{\simeq} \mathbf{B}G.$$

□

现在，我们可以将G-作用（定义 5.3）的类型重新表述为依赖于G 的去环化的类型——右G-作用正是在这里出现。

命题 5.10（$\mathbf{B}G$上的函数是 G-作用）。 给定 G :Grp (140)，右 G-集合（定义 *5.3*）的类型等价(101) 于从去环化$\mathbf{B}G$（命题 *5.9*）到集合 (96)的函数类型：

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{B}G \to \mathrm{Set}) & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & G\mathrm{Set}_R \\ f & \longmapsto & \big(S :\equiv f(\mathrm{pt}),\ s \quad g :\equiv g_*(s)\big) \end{array} \tag{164}$$

证明。 根据引理 5.8 中的类型等价$\mathbf{B}G \simeq G\mathrm{Tors}_L$，并回想该等价将 $\mathrm{pt} : \mathbf{B}G$ 与$G : G\mathrm{Tors}_L$对应起来，因此我们可以等价地证明以下函数是一个等价

$$\begin{array}{ccc} F \;:\; (G\mathrm{Tors}_L \to \mathrm{Set}) & \longrightarrow & G\mathrm{Set}_R \\ f & \longmapsto & \big(S :\equiv f(G),\ s \quad g :\equiv (h \mapsto h\cdot g)_*(s)\big). \end{array} \tag{165}$$

现在我们将 通过构造该函数的一个显式逆函数，然后证明它确实是逆函数，来实现这一点：

$$\begin{array}{ccc} F^{-1} \;:\; G\mathrm{Set}_R & \longrightarrow & \big(G\mathrm{Tors}_L \to \mathrm{Set}\big) \\ \big(X,\quad\big) & \mapsto & \Big((T,\circlearrowleft) \mapsto X \otimes_G T\Big), \end{array} \tag{166}$$

其中，张量积“$\otimes_G$”（经典记作“$\times_G$”，参见 [SS21-Bun, (1.17)]及其中所列参考文献）表示以下商集(135)：

$$X : G\mathrm{Set}_R,\quad T : G\mathrm{Set}_L \quad\vdash\quad X \otimes_G T \;:\equiv\; \frac{X \times T}{(x \quad g, t) \sim (x, g \circlearrowleft t)}. \tag{167}$$

和往常一样，我们也将商映射下的像记作张量积符号 ol

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{cpr} \;:\; X \times Y & \longrightarrow & X \otimes_G T \\ (x,t) & \mapsto & x \otimes t \end{array} \tag{168}$$

请注意，这意味着可预期的此形式的相等性证书（97）：

$$x:X,\ t:T,\ g:G \quad\vdash\quad (x\quad g)\otimes t \underset{(168)}{=} \mathrm{cpr}\big((x\quad g),t\big) \underset{(167)}{=} \mathrm{cpr}\big(x,g\leftharpoonup t\big) \underset{(168)}{=} x\otimes(g\leftharpoonup t)\ :\ \mathrm{Id}\big(\cdots,\cdots\big) \tag{169}$$

现在为了证明这一论断，我们构造同伦 (101)，以展示 F^{-1} (166) 从两侧都是 F (165) 的同伦逆。首先，从一侧来看，我们需要如下形式的依赖的等价：

$$(X,\quad):G\mathrm{Tors}_R \quad\vdash\quad F\circ F^{-1}(X,\quad)\equiv F\big((T,\leftharpoonup)\mapsto X\otimes_G T\big)\equiv\big(X\otimes_G G,\quad\big)\simeq(X,\quad). \tag{170}$$

根据结构恒等原理，只需构造一个比较函数，使其具有 G-等变性 (150)，并证明它是一个同构。考虑这个函数：

$$\begin{array}{ccccc}(X,\quad):G\mathrm{Tors}_R & \vdash & X & \longrightarrow & X\otimes_G G\\ & & x & \mapsto & x\otimes \mathrm{e}\end{array} \tag{171}$$

为了确认它确实是等变的，我们首先需要描述左侧的 G-作用：由于 G 通过右乘法与 $\mathrm{Hom}_G(G,G)$ 等同，诱导在 $X\otimes_G G$ 上的作用也由右乘法给出：

$$(x\otimes h)\quad g\ =\ x\otimes(h\cdot g). \tag{172}$$

这可以通过恒等归纳 (73) 加以验证：考察类型族 $X\otimes_G(-)$ 如何作用于一个等同 $\varphi\colon \mathrm{Id}^{G\mathrm{Tors}_L}(G,T)$，并观察它对 $\mathrm{id}_G\colon \mathrm{Id}^{G\mathrm{Tors}_L}(G,G)$ 成立。由此，通过如下方式复合相等性证书，我们得到 (171) 确实是等变的证书 (98)：

$$(x\quad g)\otimes \mathrm{e} \underset{(169)}{=} x\otimes(g\leftharpoonup \mathrm{e}) \underset{(152)}{=} x\otimes(g\cdot \mathrm{e}) \underset{(140)}{=} x\otimes(\mathrm{e}\cdot g) \underset{(169)}{=} (x\otimes \mathrm{e})\quad g\,.$$

这就证明了 (171) 是等变的，因此可逆（引理 5.5）。我们也可以很容易地定义其逆：它由 $x\otimes g\longmapsto xg$ 给出；这是良定义的，因为 $x(g\cdot h)=(xg)\,h$。

另一方面，我们需要构造如下形式的依赖等价：

$$f:G\mathrm{Tors}_L\to\mathrm{Set} \quad\vdash\quad F^{-1}\circ F(f)\ \equiv\ F^{-1}\big(f(G)\big)\ \equiv\ \big((T,\leftharpoonup)\mapsto f(G)\otimes_G T\big)\ \simeq\ \big((T,\leftharpoonup)\mapsto f(T,\leftharpoonup)\big)\ \equiv\ f\,.$$

由（单值性和）函数外延性 (144)，只需构造右侧函数自变量之间的 T-依赖双射——考虑以下这个：

$$\begin{array}{ccccc}f(G)\otimes_G T & \longrightarrow & f(T)\\ x\otimes t & \mapsto & (\varphi_t)_*(x)\,,\end{array}$$

其中 $\varphi_t\colon \mathrm{Hom}_G(\mathrm{G},\mathrm{T})$ 是等变同构 $\varphi_t(\mathrm{h}):\equiv \mathrm{h}\leftharpoonup \mathrm{t}$，而 $(\varphi_t)_*\colon \mathrm{f}(\mathrm{G})\,!\,\mathrm{f}(\mathrm{T})$ 是沿着 f 中这一等同的输运。由于 $(\overset{\varphi}{}_{g\leftharpoonup t})_*(\mathrm{x})=(\varphi_t\circ(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg}))_*(\mathrm{x})=(\varphi_t)_*(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg})_*(\mathrm{x})=:(\varphi_t)_*(\mathrm{x\,g})$，此映射在张量积商上是良定义的；这里回忆一下，$\mathrm{f}(\mathrm{G})$ 上的右作用由 $\mathrm{x\,g}:\equiv(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg})_*(\mathrm{x})$ 给出，并用到了输运的函子性 (83)。因此，剩下的就是证明此映射为双射。

设 $\mathrm{y}:\mathrm{f}(\mathrm{T})$，目标是证明它在 $\mathrm{f}(\mathrm{G})\otimes_G\mathrm{T}$ 中有唯一的原像。由于我们要证明命题 $\exists!\mathrm{fib}_{x\otimes t\mapsto(\varphi_t)_*(\mathrm{x})}(\mathrm{y})$，可以假设有一个元素 $\mathrm{t}:\mathrm{T}$（因为根据假设，我们有 $\mathrm{p}:\exists\mathrm{T}$）。于是有 $\mathrm{y}=(\varphi_t)_*((\varphi_t^{-1})_*(\mathrm{y}))$，因此 y 的一个原像为 $(\varphi_t^{-1})_*(\mathrm{y})\otimes\mathrm{t}$。现在假设 $\mathrm{y}=(\varphi_s)_*(\mathrm{x})$，目标是证明 $\mathrm{x}\otimes\mathrm{s}=(\varphi_t^{-1})_*(\mathrm{y})\otimes\mathrm{t}$。由于 T 是一个托瑟，存在唯一的 $\mathrm{g}:\mathrm{G}$，使得 $\mathrm{g}\leftharpoonup\mathrm{t}=\mathrm{s}$；因此，$\varphi_s=\varphi_t\circ(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg})$，整理后可得 $(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg})=\varphi_t^{-1}\circ\varphi_s$。这意味着 $\mathrm{x\,g}=:(\mathrm{h}\ \dot{!}\ \mathrm{hg})_*(\mathrm{x})=(\varphi_t^{-1}\circ\varphi_s)_*(\mathrm{x})=(\varphi_t^{-1})_*(\mathrm{y})$，因此 $\mathrm{x}\otimes\mathrm{s}=\mathrm{x}\otimes(\mathrm{g}\leftharpoonup\mathrm{t})=(\mathrm{x\,g})\otimes\mathrm{t}=(\varphi_t^{-1})_*(\mathrm{y})\otimes\mathrm{t}$。 □

记号 5.11。 为等价关系(164)的逆向构造引入通用、简洁且具有提示性的记号将很有用。我们将其写作如下：

$$\begin{array}{ccccc}G\mathrm{Set} & \longrightarrow & (\mathbf{B}G\to\mathrm{Set})\\ \big(S,\ \leftharpoonup\big) & \longmapsto & \big((G\leftharpoonup S):t\mapsto \leftharpoonup_t S\big)\end{array} \tag{173}$$

备注 5.12（去环化的选择）。由于（根据命题 5.3）G 的一个作用等价于一个函数$\mathbf{B}G \to$集合，并且由于（根据命题 5.9）G 的所有解环空间都等价，因此，针对给定构造中相关的各种作用，量身选择去环化通常是值得的。当我们将$\mathbf{B}R^\times$构造为环R的单位群（188）的类型，即在下文（190）中可与R–识别的R–模（186）的类型时，就会看到这一点。

G-∞作用。命题 5.10 中群作用的等价刻画有一个显著优点：它能立即推广为任意（高阶）同伦类型 $\mathscr{A}$ 上的 G-作用的概念：也就是满足以下条件的函数 $\mathbf{B}G \to$ 类型 (61)：将 $\mathrm{pt} : \mathbf{B}G$ 映至 $\mathscr{A}$。在相关的等同 (69) 下，这些不过是 $\mathbf{B}G$- 依赖数据类型（参见 [BvDR18, §4.2]）：

依赖于悬挂化的类型	群 ∞-作用
$t : \mathbf{B}G \vdash \curvearrowright_t \mathscr{A}$: 类型	万有 G-关联的 $\mathscr{A}$-纤维 ∞-丛 $\begin{array}{ccccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathscr{A}/\!/G & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{Obj}} \\ \downarrow & \overset{(\mathrm{pb})}{\swarrow} & \downarrow & \overset{(\mathrm{pb})}{\swarrow} & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\mathrm{pt}} & \mathbf{B}G & \xrightarrow[G\text{-}\infty\text{-action}]{G \curvearrowright \mathscr{A}} & \mathrm{Obj} \end{array}$
$\vdash (t : \mathbf{B}G) \times (\curvearrowright_t \mathscr{A})$: 类型	$\mathscr{A}/\!/G \simeq$ 同伦商
$\vdash (t : \mathbf{B}G)! \ (\curvearrowright_t \mathscr{A})$: 类型	$\mathscr{A}^G$ 同伦不动点轨迹

(174)

左侧本质上只是句法上的平凡性，而从语义上看，正如右侧所示，它对应于一个颇为深刻的概念，即群（的层）在 ∞-层上的“无限同伦相容作用”或“∞-作用”；详见 [NSS12a、第 4][SS20-Orb、§2.2][SS21-Bun、第3节.23] 及其中的进一步参考文献。特别地，这表明，构成某个$\mathbf{B}G$-依赖类型的“全空间”（106）的依赖有序对类型，在语义上就是相应 ∞-作用的同伦商（而相应的依赖函数类型在语义上则是同伦不动点轨迹）。

具体而言，拓扑空间中G-同伦商 $(-)/\!/G$ 的典范模型 (4) 在温和条件下（当然，当G 是离散群时也成立）由 *Borel*构造 $(-) \times_G EG$给出；显然，它构成与万有G-主丛相关联的拓扑$\mathscr{A}$纤维丛：

同伦类型论	同伦论
$\vdash (t : \mathbf{B}G) \times (\curvearrowright_t \mathscr{A})$: 类型	$\mathscr{A} \times_G EG$ Borel构造

(175)

群同态的去环化 **态射**。与命题 5.10 的证明中类似的构造表明，群同态 s

$$(G, \mathrm{e}_G, \cdot_G, (-)_G^{-1}), (H, \mathrm{e}_H, \cdot_H, (-)_H^{-1}) : \mathrm{Grp} \vdash$$

$$\underset{\text{homomorphisms}}{\text{Group}} \ (G \underset{\mathrm{hom}}{\to} H) :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \{\phi : G \to H\} \quad \text{map of underlying data} \\ \times \ \big(\mathrm{unt} : \mathrm{Id}(\phi(\mathrm{e}_G), \mathrm{e}_H)\big) \\ \times \ \big(\mathrm{hom} : (g_1, g_2 : G) \to \mathrm{Id}(\phi(g_1 \cdot_G g_2), \phi(g_1) \cdot_H \phi(g_2))\big) \end{array} \right\} \ \text{respecting group structure} \tag{176}$$

等价于解环空间之间的基点映射：

$$\begin{array}{ccc} \text{group homomorphisms} & & \text{maps of deloopings} \quad \text{preserving the base point} \\ \big(\phi : G \underset{\mathrm{hom}}{\longrightarrow} H\big) & \xrightarrow{\sim} & \big(\mathbf{B}\phi : \mathbf{B}G \longrightarrow \mathbf{B}H\big) \times \mathrm{Id}\big((\mathbf{B}\phi)(\mathrm{pt}), \mathrm{pt}\big) \\ g \longmapsto \phi(g) & & T \longmapsto H \otimes_G T \quad (h \otimes g) \mapsto h\phi(g) \end{array} \tag{177}$$

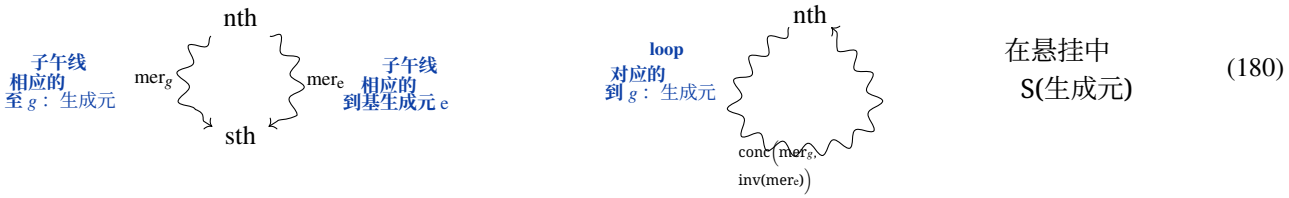
其中张量 积 $H \otimes_G T$定义为以下商集 (135)，并带有显然的 H 左作用 :

$$H \otimes_G T :\equiv \frac{H \times T}{(h\phi(g), t) \sim (h, g \curvearrowright t)}. \tag{178}$$

自由群。 将群视为带基点连通 1-类型的环群 (147)，这一视角启发了一种简洁的构造：集合上由生成元生成的自由群 （例如 [Jo90，第1]节）可以直接看作生成集合加上一个自由附加的基元素 e（参见 [BBCDG21，第6.2]节）的悬挂 (117) 的环群 (141)：

$$\text{Generators} : \text{Set} \quad \vdash \quad \text{FreeGrp}(\text{Generators}) \;:\equiv\; \Omega_{\text{nth}}\Big([\text{S}\big(\{\text{e}\} \sqcup \text{Generators}\big)]_1\Big) \;:\; \text{Grp} \tag{179}$$

此处，每个 g：生成元都可与如下环路等同：将相应的子乍线 (117) 与由基生成元 e 索引的子乍线的逆 (76) 进行拼接 (77) 所得的环路：



(180)

因此，在自由群（179）中，我们可以通过拼接（77）相应的自等价（180），复合任意有限序列的生成元：

$$\underbrace{\text{生成元} \times \cdots \times \text{生成元}}_{n \text{ 个因子}} \longrightarrow \text{FreeGrp}(S)$$
$$(g_1, \cdots, g_n) \longmapsto \text{conc}\big(\text{mer}_{g_1},\ \text{inv}(\text{mer}_e)\ \cdots,\ \text{mer}_{g_n},\ \text{inv}(\text{mer}_e)\big).$$

例如，由单个非平凡生成元生成的自由群，也就是具有单个非基元素 $\text{Generators} :\equiv \{1\}$ 的带基点集合的悬挂的环路类型，是圆的环路类型 (118)；等价地，它是整数群 [UFP13, §8.1] （这些整数即环路绕圆旋转的“绕数”）：

$$\text{FreeGrp}\big(\{\text{e}\} \sqcup \{1\}\big) \;\simeq\; \Omega\,[\text{S}\big(\text{Bit}\big)]_1 \;\simeq\; \Omega S^1 \;\simeq\; \mathbb{Z}. \tag{181}$$

群表示。 此外，将群视为带基点连通 1-型 (147)，还可以通过以生成元与关系来表示群，从而简洁地构造群（例如 [MKS66][Jo90]）： 给定 Generators : 集合，以及一个集合 Relations : 集合，其中包含相应自由群元素之间的关系 (179)

$$p_0\, p_1 \;:\; \text{Relations} \to \text{FreeGrp}(\text{Generators}),$$

其中，我们将关系 r :Relations 解释为断言 $p_0(r)$ 应等于 $p_1(r)$；那么，CW复形 (123) 的 1-截断$[-]_1$ (127) 的环群 (141)——该CW复形的 1-胞腔为 Generators，而其 2-胞腔附加 (122) 为属于 Relations 的自由群元素对——就是由 Generators 和 Relations表示的群：

$$\text{Gen} : \text{Set},\ \ \text{Rel} : \text{Set},\ \ p_1, p_2 : \text{Rel} \to \text{FreeGroup}(\text{Gen}) \quad \vdash \quad \mathbf{B}G(\text{Gen}, \text{Rel}) : \text{Grp}$$

$$\mathbf{B}G(\text{Gen}, \text{Rel}) \;:\equiv\; \left[\text{po}\left(\begin{array}{ccc} \text{Rel} \times S^1 & \xrightarrow{(r, \text{mer}_i) \mapsto p_i(r)} & \text{S}\big(\{\text{e}\} \sqcup \text{Gen}\big) \\ \downarrow & & \\ \text{Rel} & & \end{array}\right)\right]_1 \tag{182}$$

自由群 G(生成元,关系) 本身可以定义为 $\Omega_{\text{nth}}\mathbf{B}G$(生成元,关系)。根据去环化的唯一性（引理 5.8），$\mathbf{B}G$(生成元,关系) 随后等价于左 G(生成元,关系)-扭子的类型。

备注 5.13 （与文献的比较）。 这一构造的一个版本（182）在 [UFP13，第 8.7 例中有简要说明。17]另外，在同伦类型论中（沿用 [LF14，定义 3.1]），通常将（182）的意图写成一种单步高阶归纳类型，其生成元包括二阶等同（即“2-HIT”），而不是像上文那样使用迭代推出。但在文献中似乎尚未有关于n-HIT 的一般理论和语义（$n \geq 2$），——除非将其改写为迭代 1-HIT [vD18，第3节。2], 这正是我们在此采用的方式。

最后但同样重要的是，在经典代数拓扑中，群表示正是以 CW复形中环路的基本群的形式为人所知的（182），参见 [Ro88，定理 7.34][MM10]。

代数。除了这一基础群论之外，我们还需要一些最基本的代数概念（例如 [Kn06], 参见 [1lab，§代数]）：

群结构 (140) 是阿贝尔的（例如 [Fu15]），当群运算是交换的（此时记作加法形式“+”），也就是说，它在自变量置换下保持不变（参见 [BBCDG21，第 4.12] 节）。

$$\underset{\text{AbGrp}}{\overset{\text{abelian group}}{}} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ((A, 0, +, -) : \mathrm{Grp}) \end{array}\right\} \text{underlying group} \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (a_1, a_2 : A) \to \mathrm{Id}_A(a_1 + a_2, a_2 + a_1) \end{array}\right\} \text{abelian property} \end{array} \right. \tag{183}$$

给定 G: Grp，鉴于命题 5.10 和结构恒等原理 (146)，我们可以将从 $\mathbf{B}G$ 到这个阿贝尔群类型 (183) 的函数视为 G 的线性作用（即保留零元素和加法运算）：

$$G\mathrm{LinAction} :\equiv (\mathbf{B}G \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathrm{AbGrp}) \xrightarrow{\mathrm{g}} \tag{184}$$

（交换）环结构（例如 [AF92，第 1][Bl11 节，定义 1.1.1]）是配备了额外乘法运算的阿贝尔群结构 (183)，该乘法运算对阿贝尔加法满足分配律（参见 [Es19，第 33.13] [1lab 节，第 6 节中的 §ring-theory], examples）：

$$\underset{\text{Ring}}{\overset{\text{unital ring}}{}} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} R : \mathrm{Set} \end{array}\right\} \text{data base} \\ \text{abelian group} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\ (0 : R) \\ \times\ (- : R \to R) \\ \times\ (+ : R \times R \to R) \end{array}\right\} \text{structure} \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (r : R) \to \mathrm{Id}_R(0 + r, r) \\ \times\ (r : R) \to \mathrm{Id}_R(-r + r, 0) \\ \times\ (r_1, r_2 : R) \to \mathrm{Id}_R(r_1 + r_2, r_2 + r_1) \\ \times\ (r_1, r_2, r_3 : R) \to \mathrm{Id}_R((r_1 + r_2) + r_3, r_1 + (r_2 + r_3)) \end{array}\right\} \text{properties} \end{array} \right. \\ \text{abelian monoid} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\ (1 : R) \\ \times\ (\cdot : R \times R \to R) \end{array}\right\} \text{structure} \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (r : R) \to \mathrm{Id}_R(1 \cdot r, r) \\ \times\ (r_1, r_2 : R) \to \mathrm{Id}_R(r_1 \cdot r_2, r_2 \cdot r_1) \\ \times\ (r_1, r_2, r_3 : R) \to \mathrm{Id}_R(r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3), (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3) \end{array}\right\} \text{properties} \end{array} \right. \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (r, r_1, r_2 : R) \to \mathrm{Id}_R(r \cdot (r_1 + r_2), r \cdot r_1 + r \cdot r_2) \end{array}\right\} \text{distributivity property} \end{array} \right. \tag{185}$$

给定 R : 环 (185)，t 当给定R-模结构时（例如 [AF92, §2][Bl11, 定义 1.4.1]），它由以下数据类型给出 :

$$R : \mathrm{Ring} \vdash \underset{\mathrm{Mod}_R}{\overset{R\text{-module}}{}} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (N : \mathrm{Set}) \end{array}\right\} \text{data} \\ \text{abelian group} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\ (0 : N) \\ \times\ (- : N \to N) \\ \times\ (+ : N \times N \to N) \end{array}\right\} \text{structure} \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (n : N) \to \mathrm{Id}_N(0 + n, n) \\ \times\ (n : N) \to \mathrm{Id}_N(-n + n, 0) \\ \times\ (n_1, n_2 : N) \to \mathrm{Id}_N(n_1 + n_2, n_2 + n_1) \\ \times\ (n_1, n_2, n_3 : N) \to \mathrm{Id}_N((n_1 + n_2) + n_3, n_1 + (n_2 + n_3)) \end{array}\right\} \end{array} \right. \\ \text{linear } R\text{-action} \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\ (\cdot : R \times N \to N) \end{array}\right\} \text{structure} \\ \left.\begin{array}{l} \times\ (n : N) \to \mathrm{Id}_N(0 \cdot n, 0) \\ \times\ (n : N) \to \mathrm{Id}_N(1 \cdot n, n) \\ \times\ (c_1, c_2 : R, n : N) \to \mathrm{Id}_N(c_1 \cdot (c_2 \cdot n), (c_1 \cdot c_2) \cdot n) \\ \times\ (c : R, n_1, n_2 : N) \to \mathrm{Id}_N(c \cdot (n_1 + n_2), c \cdot n_1 + c \cdot n_2) \\ \times\ (c_1, c_2 : R, n : N) \to \mathrm{Id}_N((c_1 + c_2)n, c_1 \cdot n + c_2 \cdot n) \end{array}\right\} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{186}$$

这里我们将关注那些作为R-线（189）的R-模：

单位群的线性作用。给定一个环 (185)，我们得到：

• **底层阿贝尔群** (183)，其群运算为环的加法运算，而其余的幺半群结构使它成为一个R-模 (186)，我们将用相同的符号表示它：

$$\begin{array}{rccc} (-)_{\mathrm{udl}}: & \mathrm{Ring} & \longrightarrow & R\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{AbGrp} \\ & (R,0,-,+,1,\cdot) & \longmapsto & \Big(R,\big(0,-,+,\cdots\big),\big(\cdot,\cdots\big)\Big) \longmapsto (R,0,-,+), \end{array} \tag{187}$$

• **单位群**[19]，即环中乘法可逆元素所成的群（例如 [Kn06, p. 143]），其群运算为环的乘法运算：

$$\begin{array}{rccc} (-)^{\times}: & \mathrm{Ring} & \longrightarrow & \mathrm{Grp} \\ & \big(R,0,-,+,1,\cdot\big) & \longmapsto & \begin{pmatrix} (r,r^{-1}:R) \\ \times\ \mathrm{Id}_R(r\cdot r^{-1},1) \end{pmatrix}, (1,1),(\cdot,\cdot),(-)^{-1} \Big). \end{array} \tag{188}$$

• 环 R 上的**R-线**（例如 [ABGHR14]），是指那些与Rudl :RMod (187) 本身同构的R-模 (186)（也称为“自由循环R-模”）：

$$R:\mathrm{Ring} \quad \vdash \quad R\mathrm{Line} :\equiv \Big(\big\{N:R\mathrm{Mod}\,\big|\,\exists(N\simeq R_{\mathrm{udl}})\big\},\ \mathrm{pt}:\equiv R\Big) \ :\ \mathrm{Type}^{*/}_{0<\bullet\leq 1}. \tag{189}$$

注意到环上的线与群上的托瑟之间的密切类比，基本上与引理 5.6 相同的证明表明，R-线的类型解环为单位群 (188)。因此，由定理 5.8，我们有一个带基点等价：

$$\begin{array}{rccc} R:\mathrm{Ring} & \vdash & R\mathrm{Line} & \xrightarrow{\sim} R^{\times}\mathrm{Tors}_L \\ & & L & \longmapsto \mathrm{Id}_{R\mathrm{Line}}(R,L). \end{array} \tag{190}$$

因此，我们有理由将$\mathbf{B}R^{\times}:\equiv R$Line定义为$R$-直线的类型。

• **单位群对底层阿贝尔群的作用**：通过环乘法（185），单位群（188）作用（148）于底层阿贝尔群（187），而分配律使这成为一个线性作用（184）：

$$R:\mathrm{Ring} \quad \vdash \quad R^{\times} \circlearrowright R_{\mathrm{udl}} :\equiv \big(R_{\mathrm{udl}},\ \mathrm{act}:\equiv \cdot\,,\cdots\big) : R^{\times}\mathrm{LinAct}_L.$$

不过，根据命题 5.10 和（190），我们也可以在去环化下将其等价地、更优雅地表述为：

$$\begin{array}{rccc} R:\mathrm{Ring} & \vdash & R^{\times} \circlearrowright R_{\mathrm{udl}}: & \mathbf{B}R^{\times} \longrightarrow \mathrm{AbGrp} \\ & & & \big(N,(0,+,-),\cdot\big) \longmapsto \big(N,(0,+,-)\big). \end{array} \tag{191}$$

迭代解环与埃伦伯格–麦克莱恩型。显然，这是对群的解环概念（命题 5.9）的推广：带基点型的去环化（参见 [W¨a, §2][BCTFR23]）是另一个连通的带基点型，其环路类型 (88) 在指定的等价意义下（101）还原为给定的带基点型：

$$\mathscr{A}:\mathrm{Type}, a:\mathscr{A} \quad \vdash \quad \overset{\text{delooping of } (\mathscr{A},a)}{\mathrm{DeLpg}(\mathscr{A},a)} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \Big(\mathbf{B}\mathscr{A}:\mathrm{Type}\Big) \\ \quad \times\ \big(\mathrm{pt}:\mathbf{B}\mathscr{A}\big) \\ \quad \times\ \big(\mathrm{equ}:\Omega_{\mathrm{pt}}\mathbf{B}\mathscr{A} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}\big) \\ \quad \times\ \big(\mathrm{cnd}:\exists!\big[\mathbf{B}\mathscr{A}\big]_0\big) \\ \quad \times\ \Big(\mathrm{ptd}:\mathrm{Id}\big(\mathrm{equ}(\mathrm{id}_{\mathrm{pt}}),a\big)\Big) \end{array} \right. \begin{array}{l} \} \text{ higher data base} \\ \} \text{ higher structure} \\ \} \text{ properties} \end{array} \tag{192}$$

[19]如果相应的环是非交换的，那么单位群不一定是阿贝尔群。不过，在下面的第6节中，我们将专门讨论复数环；其单位群当然是阿贝尔群。

由于带基点型的去环化自身也具有一个底层带基点型

$$\begin{array}{lll} \mathscr{A}:\mathrm{Type},\, a:\mathscr{A} & \vdash & \mathrm{DeLpg}(\mathscr{A},a) \longrightarrow \big(\mathbf{B}\mathscr{A}:\mathrm{Type}\big)\times(\mathrm{pt}:\mathbf{B}\mathscr{A}) \\ & & \big(\mathbf{B}\mathscr{A},\mathrm{pt},\mathrm{equ},\mathrm{cnd},\mathrm{ptd}\big) \longmapsto \big(\mathbf{B}\mathscr{A},\mathrm{pt}\big) \end{array}$$

提出迭代去环化的问题是有意义的:

$$\mathscr{A}:\mathrm{Type},\, a:\mathscr{A},\, n:\mathbb{N} \quad \vdash \quad \overset{\substack{n\text{-fold}\\ \text{delooping of }(\mathscr{A},a)}}{n\mathrm{DeLpg}(\mathscr{A},a)} :\equiv \left\{ \begin{array}{l} \big(\mathbf{B}^n\mathscr{A}:\mathrm{Type}\big) \\ \times\ (\mathrm{pt}:\mathbf{B}^n\mathscr{A}) \\ \times\ \big(\mathrm{equ}:\Omega^n_{\mathrm{pt}}\mathbf{B}^n\mathscr{A} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}\big) \\ \times\ \big(\mathrm{cnt}:\exists!\big[\mathbf{B}^n\mathscr{A}\big]_0\big) \\ \times\ \Big(\mathrm{ptd}:\mathrm{Id}\big(\mathrm{equ}(\mathrm{id}_{\mathrm{pt}}),a\big)\Big) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{higher data base} \\ \text{higher structure} \\ \text{properties} \end{array} \tag{193}$$

这里， Ω^n_{pt} 表示将环化运算（88）视为带基点类型上的自端函数后，进行n次迭代。

在同伦论的指称语义中，这称为迭代环空间结构: [20] [May72][Se73][Lu17, §5.2.6]。如果对所有n 的取值，都相容地给定一系列n重去环化: $\mathbb{N}$，那么就称之为具有无限环空间 结构的连通谱空间 [May77][Ad78][Lu17, §1.4] （类型论讨论包括 [Ca15, §3.2][vD18, §5.3]）。这种结构引出了线性 同伦类型的概念，我们将在配套文章 [QP]中探讨这一概念。例如:

命题 5.14 ([LF14, p. 3 & Thm. 5.4])。 A: 阿贝尔群 (183) 的$(n+1)$重迭代去环化(193) 可以构造为: 对其首次去环化(163)进行 n 重迭代悬挂(117) 后所得结果的 $n+1$截断（定义 *5.1*）:

$$A:\mathrm{AbGrp},\ n:\mathbb{N} \quad \vdash \quad \big(\mathbf{B}^{n+1}A :\equiv \big[\Sigma^n\mathbf{B}A\big]_{n+1}, \mathrm{nth}, \mathrm{equ}\big) : n\mathrm{DeLpg}(A,\mathrm{e}) \tag{194}$$

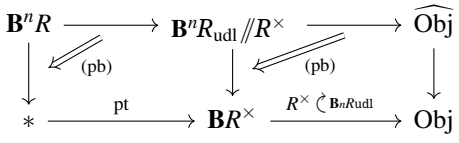
在同伦论的指称语义中，这些阿贝尔群的迭代去环化称为*Eilenberg-MacLane* 空间（文献 2.14），它们是普通上同调的类型／空间分类——见下文（197）。

扭曲高阶去环化与 Eilenberg-MacLane 类型的伴随丛。下文（199）中扭曲上同调定义的一个关键点是，诸如（194）中的高阶去环化之类的类型论构造适用于这样的一般情形: 其中涉及的数据可以依赖于任意给定的上下文。具体而言，将去环化类型$\mathbf{B}G$ （163）置入上下文中，便立即得到一种高阶去环化类型的概念，它们由给定的群G相干地作用（174）:

定义 5.15 （G-等变高阶去环化）。 给定R: 环（185）——并考虑其底层阿贝尔群R_{udl} （187）上的$R^\times \circlearrowright R_{\mathrm{udl}}$ （191）作用，其中$R^\times$（188）——通过在$\mathbf{B}GR^\times$的上下文中应用（194），我们得到环的底层阿贝尔群的扭曲高阶去环化:

$$\begin{array}{lllll} R:\mathrm{Ring},\ n:\mathbb{N} & \vdash & R^\times \circlearrowright \mathbf{B}^n R_{\mathrm{udl}} & : & \mathbf{B}G \longrightarrow \mathrm{Type} \\ & & & & t \longmapsto \underset{(194)}{\mathbf{B}^n}\big(\underset{(173)}{\circlearrowright_t} R_{\mathrm{udl}}\big) \end{array} \tag{195}$$

这个$\mathbf{B}R^\times$依赖类型 (195) 的语义，作为 (174) 的特例，由与万有$R^\times$-主丛相关联的 Eilenberg-MacLane 空间丛给出:

$\mathbf{B}R^\times$**依赖的高阶**R**-去环化**	**万有**$R^\times$**相关的**$K(R_{\mathrm{udl}},\, n)$**-丛**
$t:\ \mathbf{B}R^\times \ \vdash\ \circlearrowright_t \mathbf{B}^n R_{\mathrm{udl}}:$ 类型	

(196)

有了这些准备之后，我们就来讨论本节的主要类型构造，见下文定义 5.16。

[20]这里我们将迭代（去）循环视为$\mathbf{B}^n\mathscr{A}$上的额外结构；或者，也可以改写这些定义，将其视为 $\mathscr{A}$上的额外结构。传统文献往往会忽略这一差异；无论如何，这只是约定上的差别，并不影响实际内容。

扭曲上同调与高斯-马宁联络。 给定R：环（185）和n：$\mathbb{N}$（111），系数为R、次数为n的**普通上同调**是（由）$[-]_0$（127）指定的，即取函数类型（64）到n重去环化$\mathbf{B}^n(-)$（194）的0-截断，其中该去环化对象是R（参见 [Ca15，第3节。 2][W¨a，第4节。1] Agda 中的实现：[BLM22]）的底层阿贝尔群（187）：

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{coefficients}}{R : \mathrm{Ring}},\ \underset{\text{degree}}{n : \mathbb{N}}, \\ X : \mathrm{Type} \\ \underset{\text{domain}}{} \end{array}\right\} \vdash \quad \underset{\text{ordinary cohomology}}{H^n(X;R)} :\equiv \left[X \to \mathbf{B}^n R_{\mathrm{udl}}\right]_0 : \mathrm{Type} \tag{197}$$

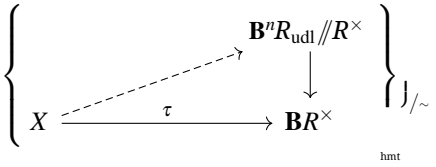
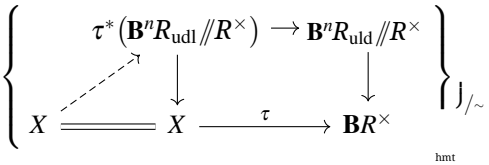
根据第5.1节中的对应关系，这一类型构造显然诠释了普通上同调的传统概念（文献 2.15），参见 [FSS20-Cha，例 1.0.2]中的讨论和参考文献。

进一步给定一个扭曲 τ： $X \to \mathbf{B}R^\times$ (188)，我们称**-扭曲普通上同调**（关于第二个版本 (199)，参见 [vD18，定义 5.4.2]）为X的、系数取R的：

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{coefficients}}{R : \mathrm{Ring}},\ \underset{\text{degree}}{n : \mathbb{N}}, \\ X : \mathrm{Type},\ \tau : X \to \mathbf{B}R^\times \\ \underset{\text{domain}}{} \qquad \underset{\text{twist}}{} \end{array}\right\} \vdash \quad \underset{\text{twisted cohomology}}{H^{n+\tau}(X;R)} :\equiv \left[(t : \mathbf{B}R^\times) \to \left(\mathrm{fib}_t(\tau) \to \mathbf{B}^n(\overset{(195)}{\curvearrowleft}_t R)\right)\right]_0 : \mathrm{Type} \tag{198}$$

$$\simeq \left[\underbrace{(t : \mathbf{B}R^\times) \times (x_t : \mathrm{fib}_t(\tau))}_{(x:X)\ (106)} \to \underbrace{\mathbf{B}^n(\overset{(87)}{\curvearrowleft}_t R)}_{(\tau^*\mathbf{B}(R^\times \curvearrowleft R))(x)}\right]_0 : \mathrm{Type} \tag{199}$$

根据第5.1节中的对应关系，这一类型构造诠释了扭曲普通上同调的传统概念（文献 2.15），参见 [NSS12a，备注 4.22] 以及 [SS20-Orb，备注 2.94][FSS20-Cha，例 2.0.5]中的讨论和参考文献：

扭曲普通上同调 $H^{n+\tau}(X;\ R)$	
同伦类型论	**同伦论**
$\left[(t : \mathbf{B}R^\times) \to \left(\mathrm{fib}_t(\tau) \to \mathbf{B}^n(\overset{t}{\curvearrowleft} R_{\mathrm{uld}})\right)\right]_0$ (198)	
$\left[(x : X) \to \left(\tau^*\mathbf{B}(R^\times \curvearrowleft R_{\mathrm{uld}})\right)(x)\right]_0$ (199)	

(200)

对于 §4.2 中高斯-马宁联络的构造，我们需要考虑这类扭曲上同调类型（200）的 B 索引族。值得注意的是，在同伦数据类型的语法中，这只是一个简单操作：将一个类型B引入上下文，并使项X和 τ 依赖于它：

定义 5.16（扭曲上同调群纤维化上的高斯–马宁传输）。 我们称扭曲普通上同调集的纤维化的数据类型为：

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{coefficients}}{R : \mathrm{Ring}},\ \underset{\text{degree}}{n : \mathbb{N}},\ \underset{\text{parameter base}}{B : \mathrm{Type}}, \\ X_{(-)} : B \to \mathrm{Type},\ \tau_{(-)} : (b : B) \to (X_b \to \mathbf{B}R^\times) \\ \underset{\text{fibration of domains}}{} \qquad \underset{\text{family of twists}}{} \end{array}\right\} \vdash \quad \underset{\text{twisted cohomology}}{H^{n+\tau_{(-)}}(X_{(-)};R)} :\equiv \left[(t : \mathbf{B}R^\times) \to \left(\underbrace{\mathrm{fib}_t(\tau_{(-)})}_{\mathrm{fib}_{(-,t)}(\mathrm{pr}_X,\tau)\ (205)} \to \mathbf{B}^n(\overset{t}{\curvearrowleft} R_{\mathrm{uld}})\right)\right]_0 : \underset{\text{fibered over base}}{B \to \mathrm{Type}} \tag{201}$$

给定这样的纤维化，其高斯-曼宁单值 就是基类型B上的相应输运（74）：

$$\begin{aligned}\mathrm{GMTransport}\ :\ \prod_{b_1,b_2:B}\ \Big(\mathrm{Id}_B(b_1,b_2) &\longrightarrow \Big(H^{n+\tau_{b_1}}\big(X_{b_1};R\big)\ \xrightarrow{\sim}\ H^{n+\tau_{b_2}}\big(X_{b_2};R\big)\Big)\Big).\\ \big(b_1 \overset{p_{12}}{\rightsquigarrow} b_2\big) &\longmapsto \qquad\qquad (p_{12})_*\end{aligned} \tag{202}$$

根据第5.1节中的对应关系并应用定理 4.13，这就是一个类型论构造，其指称语义是扭曲普通上同调集的纤维化上的高斯-马宁联络的平行移动/单值化。

接下来，在第6节中，我们将这一一般构造特化到与 Knizhnik-Zamolodchikov 联络相对应的情形，从而讨论拓扑量子门的运算（见下文定理 6.8）。

在结束本小节时，我们对（5.16）中大括号下的等价作些说明：

注 5.17 （纤维上的扭曲与全局扭曲）。 给定一族定义域类型，并为其配备如（201）中所假设的纤维上扭曲系统，

$$X_{(-)}\ :\ B \longrightarrow \mathrm{Type}, \qquad \tau_{(-)}\ :\ B \longrightarrow \big(X_b \to \mathbf{B}R^{\times}\big)$$

考虑相应的全空间（106）

$$X\ :\equiv\ (b:B)\times X_b\,, \qquad \begin{aligned}\mathrm{pr}_X\ :\ X &\longrightarrow (b:X)\times X_b \longrightarrow B\\ x &\longmapsto (b,x_b) \longmapsto b\end{aligned} \tag{203}$$

并为其配备相应的“全局扭曲”：

$$\begin{aligned}\tau:\ X &=\!=\!= (b:B)\times X_b \longrightarrow \mathbf{B}R^{\times}\\ x &\longmapsto (b,x_b) \longmapsto \tau_b\big(x_b\big)\end{aligned} \tag{204}$$

然后，该配对的纤维类型（87）

$$\big(\mathrm{pr}_X,\tau\big)\ :\ X \longrightarrow B\times\mathbf{B}R^{\times}$$

在任意的 $(b,\ t):B\times\mathbf{B}R^{\times}$ 处，等价于 τ_b 在 t 处的纤维类型：

$$\begin{aligned}\mathrm{fib}_{(b,t)}\big(\mathrm{pr}_X,\tau\big) &= (x:X)\times\mathrm{Id}\Big(\big(\mathrm{pr}_X(x),\tau(x)\big),\big(b,t\big)\Big) && \text{by (87)}\\ &\simeq (x:X)\times\mathrm{Id}\big(\mathrm{pr}_X(x),b\big)\times\mathrm{Id}(\tau(x),t) && \text{by (144)}\\ &\simeq (x_b:X_b)\times\mathrm{Id}\big(\tau_b(x_b),t\big) && \text{by (87) \& (204)}\\ &= \mathrm{fib}_t\big(\tau_b\big) && \text{by (87).}\end{aligned} \tag{205}$$

6 任意子辫门的同伦数据类型

最后，我们将讨论定义 5.16 中高斯-曼宁单值的数据类型构造，如何沿着例 4.14 的思路特化为作用于 $\widehat{\mathfrak{su}_2}_{\kappa-2}$-共形块的 KZ 单值构造，并以如下定义 6.7 和定理 6.8 作结。

这需要对例 4.14 中用到的三个特化（54）—（56）进行编码：

(i) 域纤维化要特化为解环化的**辫群 B** PBr(n + 自然数) → **B**PBr(自然数)；

(ii) 局部系数要特化为复数的 EM 类型 $\mathbb{C}^\times \wr K(\mathbb{C},n)$；

(iii) 扭曲要特化为这样一种映射：对于纯阿廷生成元，它是一个**复指数** $\exp(2\pi\mathrm{i}-)$: $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^\times$列表。

当然，这三者都是经典的数学构造，而在类型化编程语言中对它们进行编码，原则上已有充分的理解。不过，截至本文写作时，专为此处所需的单值计算且归纳式同伦类型化编程语言（例如立方 Agda，文献 2.28）实现的版本，尚无法直接从标准库导入。因此，我们将稍作探讨，说明如何获得这些数据结构。

解环纯辫群的纤维化。 纯辫群的去环化类型 **B**PBr($N+1$) 的构造是我们前面讨论的直接推论：鉴于纯辫群具有由纯辫生成元（13）给出的有限表示（15），我们可以使用构造公式（182）（或者在 Agda 中使用与之等价的 2-HIT）：首先构造纯辫生成元集合（13）的悬挂类型，然后对关系中的每一对自由群元素所形成的环路应用推出（122）：

$$\mathbf{B}\mathrm{PBr}(N+1) :\equiv \left[\ \mathrm{po}\left(\begin{array}{ccc} \overset{(16)\,(17)}{(\text{Artin-Lee relations})\times S^1} & \longrightarrow & \mathrm{S}\left(\{\mathrm{e}\}\sqcup\left\{ b_{ij} = \left[\ \cdots\ \overset{i}{|}\ \cdots\ \overset{j}{|}\ \cdots\ \right]\right\}_{1\le i<j\le N+1}\right) \\ \downarrow & & \\ (\text{Artin-Lee relations}) & & \end{array}\right)\ \right]_1$$

根据经典同伦等价（5），我们可以将其视为有序构形空间的同伦类型的类型论模型：在凝聚同伦类型论 中（我们这里不作讨论，但请参见第 4 页的展望），我们将（或将会）得到如下形式的类型等价：$\mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,N+1\}}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbf{B}\,\mathrm{PBr}(N+1)$。

现在注意，根据纯辫生成元 b_{ij} (15) 的性质，忘掉构形中最后一个或多个点的有序构形空间典范纤维化（6），显然会在纯辫群上诱导出同态，将那些以被丢弃的股线标签为指标的生成元映为平凡元：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,N+2\}}(\mathbb{R}^2) & \overset{\text{whe}}{\simeq} & B\,\mathrm{PBr}(N+2) & b_{I,J} & b_{I,N+1} & b_{I,N+2} & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,N+1\}}(\mathbb{R}^2) & \overset{\text{whe}}{\simeq} & B\,\mathrm{PBr}(N+1) & b_{I,J} & b_{I,N+1} & \mathrm{e} & \text{for } 1\le I<J\le N \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathrm{Conf}_{\{1,\cdots,N\}}(\mathbb{R}^2) & \overset{\text{whe}}{\simeq} & B\,\mathrm{PBr}(N) & b_{I,J} & \mathrm{e} & \mathrm{e} & \end{array} \tag{206}$$

该群同态的去环化 (177) 给出了所需的纤维化：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pr} : \mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数} + n) \to \mathbf{B}\mathrm{Br}(\text{自然数}) & & \\ \mathrm{pt}_{b_{IJ}} & \mapsto & \mathrm{pt}_{b_{IJ}} \\ \mathrm{pt}_{b_{Ii}} & \mapsto & \mathrm{pt}_{\mathrm{e}} \\ \mathrm{pt}_{b_{ij}} & \mapsto & \mathrm{pt}_{\mathrm{e}} \end{array} \qquad \text{for } \begin{array}{l} 1\le I<J\le \text{自然数} \\ N<i<j\le N+n \end{array} \tag{207}$$

构造连续统。为了编码一般的物理现实（尤其是通过下文的定义 6.7 编码拓扑量子门），我们需要实数（“连续统” $\mathbb{R}$，例如 [Ru64]）这一数据结构。尽管这在当今任何执业数学家看来都很初等，但若从带类型的编程语言的纯粹逻辑基础重新审视，便会意识到：仅从自然数类型出发构造实数并验证其预期性质，需要相当多的工作，并且涉及一些微妙之处。这需要非平凡的洞见，这些洞见直到19世纪才得到充分发展（参见 [Co15]），而其“构造性”细化直到20世纪晚期才被完全理解（[Bish67][BB85][Br99]）；如今到了21世纪，人们才开始认识到，这正是与可信计算相关的实数理论（例如 [O'C07][GNSW07]，参见文献 2.29）。

这或许可以说明，Agda 编程语言中的实数算术库（文献 2.26）直到最近才开始开发 [Mu22]（另见 [Lu15]），目前仍在开发中。然而，其构造与证明的基本原则早已为 [Bish67][BB85] 的构造性分析 详细发展出来，并且已为人熟知。更进一步，在同伦数据类型理论中实现后，这一具有开创意义的构造性分析历史性计划可以说在概念上得以圆满完成：所需的商集（135）在这里确实存在，从而解决了以往“setoid”模型遗留的问题（参见 [Li14, §1.1][Mu22, §4.3.2]）。（一种更好的、但目前仍较为假设性的方案，或许是 [UFP13, §11]，见下文注 6.3。）

现在，我们简要列出逐步构造环数据结构的过程，该过程以这种方式生成复数类型：从自然数类型（111）开始，依次经过整数类型（208）、有理数类型（212），最后得到实数类型（215）——这一步需要格外谨慎。

注6.1（环数据结构的显示约定）。在下文中这样做时，请注意：

（i）全文中，我们省略性质证书构造的展示（例如结合律等）：这些构造要么显而易见，要么——对于实数运算的收敛证书（215）而言——所需的思想均已在 [Bish67][BB85] 中给出，并已在 [Lu15][Mu22] 中编码为 Agda。

（ii）因此，我们将商类型 X/R（135）上的函数显示为商 类型 X 上的函数，并省略那些证明证书：它们证明这些函数尊重相关的等价关系，因而能够下降到商上；这一点与命题 5.10 的证明中详述的做法相似。

（iii）按照惯例，我们系统地对数系上的运算采用“重载”记号：例如，在整数上的加法运算的定义（208）中

$$(n_1, m_1) + (n_2, m_2) :\equiv (n_1 + n_2, m_1 + m_2)$$

我们默认左侧的运算从 $+$ 到 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$！ $\mathbb{Z}$（如前一项所述），并由右侧的运算定义；右侧运算则从 $+$ 到 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$！ $\mathbb{N}$，且已在此前构造（112）。

（iv）关于下文中对实数和复数商类型的使用，见下文注释 6.3。

整数。环数据结构（185）的典型（即：始初的）例子是<style id='3'>整数数据类型：其底层集合可以（参见 [UFP13，注释 6.10.7][1lab，§Data.Int]）给出为自然数有序对（62）的商类型（135），其中所取的等价关系（134）将那些交叉和（112）相等的有序对的有序对（n，m）视为相同，因此它们可作为其差 $n - m$ 的替代表示：

$$\begin{aligned}
\vdash\quad & \big(\mathbb{Z}, 0, +, -, 1, \cdot, \big) : \mathrm{Ring} \\
& \text{where} \\
& \mathbb{Z} :\equiv \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, \big((n_1, m_1), (n_2, m_2) : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\big) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}\big(n_1 + m_2, n_2 + m_1\big) \\
& 0 :\equiv (0, 0) \\
& + \;:\; \big((n_1, m_1), (n_2, m_2)\big) \mapsto \big(n_1 + n_2, m_1 + m_2\big) \\
& - \;:\; (n, m) \mapsto (m, n) \\
& 1 :\equiv \big(\mathrm{succ}(0), 0\big) \\
& \cdot \;:\; \big((n_1, m_1), (n_1, m_2)\big) \mapsto \big(n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2,\; m_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot m_2\big)
\end{aligned} \tag{208}$$

使用自然数底层类型的典范嵌入[21]（111）

$$\begin{aligned}
\iota :\; \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
n &\longmapsto (n, 0)
\end{aligned} \tag{209}$$

[21]当然，该包含（209）是幺半群（半群）数据结构的同态，但为简洁起见，此处不详述幺半群结构。

我们得到整数上的序关系

$$\begin{aligned} \leq :\quad & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Prop} \\ & (n_1,n_2) \longmapsto (k:\mathbb{N})\times \mathrm{Id}\big(n_2, n_1+\iota(k)\big) \end{aligned} \tag{210}$$

因此也得到正 整数的子类型（等价于正自然数的子类型）

$$\mathbb{Z}_+ :\equiv (n:\mathbb{Z})\times(1\leq n)\,. \tag{211}$$

有理数。 有理数的环数据结构 (185) 可由有序对的商集 (134) 给出，其中有序对由分子 $p:\mathbb{Z}$ (208) 和分母 $q:\mathbb{Z}_+$ (211) 组成，并遵循分数运算中通常的等同关系，使有序对 (p,q) 可作为分数 p/q 的代称：

$$\begin{aligned} \vdash\quad & (\mathbb{Q},0,+,-,1,\cdot) : \mathrm{Ring} \\ & \text{where} \\ & \mathbb{Q} :\equiv \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+ \,/\, \big((p_1,q_1),(p_1,q_2):\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+\big)\times \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\big(p_1\cdot q_2,\, q_1\cdot p_2\big) \\ & 0 :\equiv (0,1) \\ & + \;:\; \big((p_1,q_1),(p_2,q_2)\big) \mapsto \big(p_1\cdot q_2 + p_2\cdot q_1,\; q_1\cdot q_2\big) \\ & - \;:\; (p,q)\mapsto(-p,q) \\ & 1 :\equiv (1,1) \\ & \cdot \;:\; \big((p_1,q_1),(p,q_2)\big) \mapsto \big(p_1\cdot p_2,\, q_1\cdot q_2\big) \end{aligned} \tag{212}$$

整数上的序关系 (210) 导出有理数上的序关系（请记住，我们要求分母q 为正）：

$$\begin{aligned} \leq :\quad & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Prop} \\ & \big((q_1,p_1),(q_2,p_2)\big) \longmapsto q_1\cdot p_2 \leq q_2\cdot p_1\,. \end{aligned} \tag{213}$$

对于下面在 (215) 中构造实数类型的过程，我们引入一些通用的记号缩写，分别表示正数的乘法逆以及任意有理数的平方

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(-)} :\; & \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & n \longmapsto (1,n) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (-)^2 :\; & \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & r \longmapsto r\cdot r \end{aligned} \tag{214}$$

请注意，平方r^2 (214) 的界 (213) 等价地也可作为绝对值 $|r|$ 的界（我们不单独引入这一概念）。

实数。 以下给出以正则序列 $x^{(-)}:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Q}$ 表示实数 的环数据结构（185）的构造：这些有理数序列（212）由正整数（211）索引，作为它们所收敛到的实数的替代表示。这一定义及其预期性质的验证归功于 [Bish67，第 15][页；BB85，第 18] 页，并由 [Lu15][在 Agda 中实现（Mu22，定义 3.3）。1]（另见 Coq 中的实现 [KS13]，采用了归功于[O'C07]的单子重构）——在其中，实数是附带等价关系（134）的数据集；而我们现在展示相应的商类型（135），但需留意下文的注 6.3：

$$\begin{aligned} \vdash\quad & (\mathbb{R},0,+,-,1,\cdot) : \mathrm{Ring} \\ & \text{where} \\ & \mathbb{R} :\equiv \underbrace{\big(x_{(-)}:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Q}\big)}_{\substack{\text{sequences of}\\ \text{rational numbers (212)}}} \times \Big(\underbrace{(n,m:\mathbb{Z}_+)}_{\text{which converge regularly}} \to \big(x_n-x_m\big)^2 \leq \big(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\big)^2\Big) \Big/ \underbrace{\big(x_{(-)},y_{(-)}\big)}_{\substack{\text{modulo}\quad \text{those}}} \times \Big(\underbrace{(n:\mathbb{Z}_+)}_{\text{that converge to zero}} \to \big(x_n-y_b\big)^2 \leq \big(\tfrac{2}{n}\big)^2\Big) \\ & 0 \;:\; n\mapsto 0 \\ & + \;:\; \big(x_{(-)},y_{(-)}\big) \mapsto \big(n\mapsto x_n+y_n\big) \\ & - \;:\; x_{(-)}\mapsto \big(n\mapsto -x_n\big) \\ & 1 \;:\; n\mapsto 1 \\ & \cdot \;:\; \big(x_{(-)},y_{(-)}\big) \mapsto \big(n\mapsto x_n\cdot y_n\big) \end{aligned} \tag{215}$$

注 6.2 （**实数的计算内容**）。在该数据类型（215）中，任意实数都由一个有理数序列表示；在实际应用中，这些表示序列

$$\frac{\vdash \quad x_{(-)} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}}{n : \mathbb{Z}_+ \quad \vdash \quad x_n : \mathbb{Q}} \tag{216}$$

这些是小型程序（60），对于任意给定但有限的精度 $\sim {}^1\!/_n$，都能将目标数计算到该精度以内。开创构造性分析[Bish67][BB85]的先驱们坚信，这才是真正认识一个实数的含义；无论如何，这就是有限计算机将一个精确实数（而非某个有限的浮点近似）存入其存储器的含义（参见 [Vui88, §3]）。

例如，圆周率 π 可以用BBP公式 [BBP97], 编码，其所需的收敛性证明证书显而易见:

$$\pi :\equiv \left(n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{6k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)\right) : \mathbb{R} \tag{217}$$

注 6.3 （**Bishop实数的柯西完备性及/或其构造性失效**）。实数一个值得期许、甚至构成其本质的性质是柯西完备性（例如 [Ru64, 定义 3.12]），也就是说，任何实数柯西序列都收敛到一个实数。直观而言，这要求实数真正构成一个连续统，使实数直线上不留下任何“空隙”。不过，对于实数可构造序列的收敛性，还是更一般地要求收敛性，两者有所不同:

另一方面，给定一个由实数操作性编码 组成的柯西序列（216），也就是依次由有理数的柯西序列组成，因此给定一个柯西序列的柯西序列

$$x^{(-)}_{(-)} : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \left(\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}\right), \tag{218}$$

那么可以确实证明它收敛（[Bish67，第 27 页，定理 2][BB85，第 29 页，定理 3.3], 参见 [Mu22，定理 3.4.4]）：这就是实数柯西完备性的完全构造性概念。

另一方面，这样的柯 西序列的有理数柯西序列（218）表示单个序列
实数的

$$x^{(-)} : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \tag{219}$$

当我们将后者视为商类型（215）中的对象时。然而，给定仅仅 这样一个类型为（219）的商化柯西序列数据，并没有证明表明它收敛到 $\mathbb{R}$ [Lu07] 中的一个元素。根据 [Bish67，第 27][BB85，第 29] 的构造性证明，若能 将序列（219）提升 回形式为（218）的“构造性”序列，就有可能做到这一点——但一般而言，这同样是不可能的。（相关的“可数选择公理”在类型论中并不以句法方式成立。尽管它在经典模型拓扑斯（107）中在语义上成立，但在我们最终感兴趣的更一般的模型拓扑斯中并不成立，详见第 4 页。）

幸运的是，对于我们预期的应用（见下文定义 6.7），我们似乎从来不关心那些没有构造性提升（218）的实数数据序列（219），因此，[Bish67，第 27][BB85，第 29][Mu22，定理 3.4.4] 证明的操作性柯西完备性确保类型为（215）的实数数据足以满足应用需求。

注 6.4 （实数的其他描述）。 还有其他可能的实数构造方式，它们并不存在 Bishop 实数所具有的柯西完备性缺陷。

(i)最直接的是戴德金实数类型，或双侧戴德金分割（[UFP13，定义 11.2.1]）：

$$\mathbb{R}_D :\equiv \left\{ \begin{array}{l} (L, U : \mathbb{Q} \to \mathrm{Prop}) \ \} \ \textbf{structure} \\ \times \ \Big(\exists\{q : \mathbb{Q} \mid L(q)\} \times \exists\{r : \mathbb{Q} \mid U(r)\}\Big) \\ \times \ \Big((q : \mathbb{Q}) \to L(q) \simeq \exists\{r : \mathbb{Q} \mid (q < r) \times L(r)\}\Big) \\ \times \ \Big((r : \mathbb{Q}) \to R(r) \simeq \exists\{q : \mathbb{Q} \mid (q < r) \times U(q)\}\Big) \\ \times \ \Big((q : \mathbb{Q}) \to (L(q) \times U(q)) \to \varnothing\Big) \\ \times \ \Big((q, r : \mathbb{Q}) \to \exists(L(q) + R(r))\Big) \end{array} \right\} \ \textbf{properties} \tag{220}$$

戴德金实数的优点在于，无需任何非构造性原理即可证明其柯西完备。由于它们显然包含有理数，只需将 $x:\ \mathbb{Q}$ 映射为分割（$q \mapsto (q < x)$，$r \mapsto (x < r)$），这意味着 Bishop实数存在一个到戴德金实数的映射，该映射保持正则序列上的商关系。

(ii) 最后，另一种构造柯西实数类型的原理将其视为更复杂的"高阶归纳-归纳类型"（进一步推广了高阶归纳类型的概念，见第 48 页），已在 [UFP13, §11.3] 中阐述，并证明其确实是柯西完备的（[UFP13, 定理 11.3.49]）。这一新颖的构造原理引起了一些类型论领域的关注，未来很可能会成为一种发展方向；但在本文撰写之时，它尚无法在实践中应用。

复数。 有了实数类型 (215)，构造相应的复数环数据结构 (185) 就很直接了（应用经典公式；例如参见 [Ru64, 定义 1.24]）：

$$\vdash\quad \big(\mathbb{C}, +, -, 0, \cdot, 1\big) : \mathrm{Ring}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\big(z:\mathbb{C}\big) :\equiv \big(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\
&\quad 0 \quad :\equiv (0,0)\\
&\quad + \quad : \Big(\big(\mathrm{Re}(z_1),\mathrm{Im}(z_1)\big), \big(\mathrm{Re}(z_2),\mathrm{Im}(z_2)\big)\Big) \mapsto \big(\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)\big)\\
&\quad - \quad : \big(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\big) \mapsto \big(-\mathrm{Re}(z), -\mathrm{Im}(z)\big)\\
&\quad \cdot \quad : \Big(\big(\mathrm{Re}(z_1),\mathrm{Im}(z_1)\big), \big(\mathrm{Re}(z_2),\mathrm{Im}(z_2)\big)\Big) \mapsto \Big(\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2),\ \mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)\Big)\\
&\quad 1 \quad :\equiv (1,0)
\end{aligned} \tag{221}$$

因此，虚数单位为

$$\mathrm{i} :\equiv (0,1) : \mathbb{C} \tag{222}$$

现在，我们通过将复指数函数的经典级数展开 $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-)^k$（例如 [Ru64, 第 178] 页）与 π (217) 的级数表征相复合，便可得到有理数自变量上的复指数函数；通过经典计算，很容易证明结果是从有理数环 (212) 的底层阿贝尔群 (187) 到复数环 (221) 的单位群 (188) 的群同态 (176)：

$$\exp\big(2\pi\mathrm{i}\cdot(-)\big) \ :\ \mathbb{Q}_{\mathrm{udl}} \xrightarrow[\mathrm{hom}]{} \mathbb{C}^\times . \tag{223}$$

同样，我们很容易为 $\mathbb{C}^\times$ 配备一个证书，证明它是阿贝尔的，$\mathbb{C}^\times$: 阿贝尔群 (183)。

引理 6.5（为纯阿廷生成元指定相位）。 任意一组有理数（每个纯辫生成元对应一个有理数）都定义了一个群同态：

$$\begin{array}{lcl}
N:\mathbb{N}_+,\ n:\mathbb{N} \quad \vdash & \left(r_{(--)} : \begin{array}{c}(k_1,k_2:\mathbb{Z}_+)\\ \times(k_1+1\le k_2)\\ \times(k_2 \le N+n)\end{array} \to \mathbb{Q}\right) & \longrightarrow \Big(\mathbf{B}\,\mathrm{PBr}(N+n) \longrightarrow \mathbf{B}\,\mathbb{C}^\times\Big)\\
& r_{(--)} & \longmapsto \quad \Big(\underbrace{\mathrm{pt}}_{\substack{b_{k_1\,k_2}\\ \textbf{pure braid}\\ \textbf{generators}}} \quad \mapsto \quad \underbrace{\mathrm{pt}}_{\exp\left(2\pi\mathrm{i}\,r_{(k_1\,k_2)}\right)}\Big)
\end{array} \tag{224}$$

证明。 由于纯阿廷生成元 (13) 上的关系 (17) 全都是群交换子关系，而在阿贝尔目标群中，每个群交换子都可以被规范地见证为一个等同。 □

注记 6.6（应用中的特殊情况）。 在特殊情况下，完全可以用经过优化的专用构造来取代这一通用构造。例如，在应用中，如果我们要关注分子等于 $q = 4$ 的有理数（马约拉纳任意子的情况！参见文献 2.19），那么相应的指数就是一个整数复数，可以直接定义：

$$\exp\big(2\pi\mathrm{i}\,p/4\big) \ = \ \mathrm{i}^p .$$

拓扑量子门的同伦数据结构。有了所有这些数据结构，我们可以得出结论。

定义 6.7 (共形块的同伦数据结构)。 特化定义 5.16 后，我们得到以下数据类型：

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\text{punctures}}{N:\mathbb{N}_+},\ \underset{\text{degree}}{n:\mathbb{N}},\ \underset{\text{shifted level}}{\kappa:\mathbb{N}_{\geq 2}}\\ \mathrm{w}_{(-)}:N\to\{0,\cdots,\kappa-2\}\\ \underset{\text{weights}}{}\end{array}\right\}\vdash\left(\vec{z}\mapsto\left[(t:\mathbf{B}\mathbb{C}^\times)\to\left(\mathrm{fib}_{(t,\vec{z})}\left(\mathrm{pr}_N^{N+n},\tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)}\right)\to\mathbf{B}^n\left(\zeta_t\,\mathbb{C}_{\mathrm{udl}}\right)\right)\right]_0\right):\mathbf{B}\,\mathrm{PBr}(N)\to\mathrm{Type}$$

其中

$$\overset{(207)}{\mathrm{pr}_N^{N+n}}:\ \begin{array}{ccc}\mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}+n) & \longrightarrow & \mathbf{B}\,\mathrm{PBr}(\text{自然数})\\ \mathrm{pt}\ (b_{Ii}) & \mapsto & \mathrm{pt}\ (\mathrm{e})\\ \mathrm{pt}\ (b_{IJ}) & \mapsto & \mathrm{pt}\ (b_{IJ})\end{array}\qquad \underset{(53)\ (224)}{\tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)}}:\ \begin{array}{ccc}\mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}+n) & \longrightarrow & \mathbf{B}\,\mathbb{C}^\times\\ \mathrm{pt}\ (b_{Ii}) & \mapsto & \mathrm{pt}\ (\exp(2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{w}_{Ii}))\\ \mathrm{pt}\ (b_{ij}) & \mapsto & \mathrm{pt}\ (\exp(2\pi\mathrm{i}\tfrac{2}{\kappa}))\\ \mathrm{pt}\ (b_{IJ}) & \mapsto & \mathrm{pt}\ (\exp(2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{w}_{\text{等同类型 }J\geq\kappa}))\end{array}\tag{225}$$

定理 6.8 (**作为同伦数据结构的拓扑量子门**)。经典模型拓扑斯(107)中，此数据类型(225) 的传输操作(202) 的语义由克尼日尼克–扎莫洛德奇科夫联络在 $\widehat{\mathfrak{su}}_2^{\kappa-2}$-共形块上的单值化给出（这些共形块定义在黎曼球面上，该球面有 $N+1$ 个权重为$(\mathrm{w}_I)_{I=1}^N$ 和 $\mathrm{w}_{N+1}=n+\sum_I \mathrm{w}_I$的 *puncture*）。

证明。 根据定理 4.13 的例4.14，我们只需证明类型构造式 (225) 的语义等于公式 (58) 所表达的拓扑构造。对 (225) 的子项迭代应用语法/语义对应关系第5.1节，即可得到这一结论，具体步骤如下：

语法	$\xrightarrow{\text{§5.1}}$	语义
$\vec{z}:\mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}),t:\mathbf{B}\mathbb{C}^\times\ \vdash$ $\mathrm{fib}_{(t,\vec{z})}(\mathrm{pr}_N^{N+n},\ \tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)})$：类型	(106) (5)	$\begin{array}{ccc}\underset{\{1,\cdots,\text{自然数}+n\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}) & & \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_{\text{自然数}+n}^{\text{自然数}},\ \tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)})} & & \\ \underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\times B\mathbb{C}^\times & & \end{array}$
$\vec{z}:\ \mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}),\ t:\ \mathbf{B}\mathbb{C}\times\ \vdash$ $\mathbf{B}^n\left(\zeta_t\mathbb{C}_{\mathrm{udl}}\right)$：类型	(67) (175)	$\begin{array}{ccc}\mathrm{K}(\mathbb{C},\ n)\times_{\mathbb{C}^\times}E\mathbb{C}^\times & & \\ \downarrow{\scriptstyle p^*_{\underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}}} & & \\ B\mathbb{C}^\times & & \end{array}$
$\vec{z}:\ \mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}),\ t:\ \mathbf{B}\mathbb{C}^\times\ \vdash$ $\mathrm{fib}_{(t,\vec{z})}(\mathrm{pr}_N^{N+n},\tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)})\ !\ \mathbf{B}^n\left(\zeta^{t}\mathbb{C}_{\mathrm{udl}}\right)$ ： 类型	(66)	$\mathrm{Map}\left(\begin{array}{ccc}\underset{\{1,\cdots,\text{自然数}+n\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C}) & & \mathrm{K}(\mathbb{C},\ n)\times_{\mathbb{C}^\times}E\mathbb{C}^\times\\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_{\text{自然数}+n}^{\text{自然数}},\ \tau_{(\kappa,\mathrm{w}_\bullet)})} & , & p^*_{\underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}}\ \downarrow\\ \underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\times B\mathbb{C}^\times & & B\mathbb{C}^\times\end{array}\right)$
$\vec{z}:\mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数})\ \vdash$ $(t:\mathbf{B}\mathbb{C}^\times)\to T_{\vec{z},t}:$ 类型	(67) (33)	$\begin{array}{ccc} & & T\\ & & \downarrow\\ (\text{等同类型 }\underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}\times P_{B\mathbb{C}^\times})^* & & \underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\times B\mathbb{C}^\times\end{array}$
$\vec{z}:\mathbf{B}\mathrm{PBr}(\text{自然数}),t:\mathbf{B}\mathbb{C}^\times\ \vdash$ $\left[(t:\mathbf{B}\mathbb{C}^\times)\to T_{\vec{z},t}:\text{类型}\right]_0$	(129)	$\pi_{0/\ \underset{\{1,\cdots,\text{自然数}\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})}\left(\begin{array}{ccc} & & T\\ & & \downarrow\\ (\mathrm{id}\times P)_{\underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}B\mathbb{C}^\times}^* & & \underset{\{1,\cdots,N\}}{\mathrm{Conf}}(\mathbb{C})\times B\mathbb{C}^\times\end{array}\right)$
同伦数据类型结构 定义 5.16 特化后的定义 6.7	$\leftrightarrow$	共形块的纤维化 (58) 通过定理 4.13 和例 4.14

□

参考文献

[Ab15] C. A. Abad, 《辫群表示导论》, Rev. Colomb. Mat. 49 1 (2015) 1, [arXiv:1404.0724],[doi:10.15446/recolma.v49n1.54160].[Ac11] P. Aczel, 《论 Voevodsky的单值公理》, 第三届欧洲集合论会议报告 (2011),[ncatlab.org/nlab/files/Aczel-Univalence.pdf].[AHS90] J. Adamek、H. Herrlich 和 G. Strecker, 《抽象与具体范畴》, John Wiley and Sons, 纽约 (1990); 重印于: Reprints in Th. Appl. Categ. 17 (2006), 1-507, [tac:tr17].[Ad74] J. F. Adams, 《稳定同伦与广义同调》, 芝加哥数学讲座, 芝加哥大学出版社, 1974, [ucp:bo21302708].[Ad78] J. F. Adams, 《无限环空间》, 数学年刊研究 90, 普林斯顿大学出版社 (1978),[doi:10.1515/9781400821259].[AGP02] M. Aguilar、S. Gitler 和 C. Prieto, 《从同伦论观点看代数拓扑》, 施普林格, 柏林 (2002),[doi:10.1007/b97586].[AvDKLLR07] D. Aharonov、W. van Dam、J. Kempe、Z. Landau、S. Lloyd 和 O. Regev, 《绝热量子计算等价于标准量子计算》, SIAM J. Computing 37 1 (2007), 166-194, [jstor:20454175],[arXiv:quant-ph/0405098].[AGM00] O. Aharony、S. Gubser、J. Maldacena、H. Ooguri 和 Y. Oz, 《大N场论、弦理论与引力》, Phys. Rep. 323 (2000), 183-386, [doi:10.1016/S0370-1573(99)00083-6], [arXiv:hep-th/9905111].[AN19] B. Ahrens 和 P. R. North, 《单值基础与等价原理》, 载于: 《数学基础沉思》, 《综合》文库 407, 施普林格, 柏林 (2019), [doi:10.1007/978-3-030-15655-8],[arXiv:2202.01892].[ANST20] B. Ahrens、P. R. North、M. Shulman 和 D. Tsementzis, 《高阶结构同一性原理》, LICS '20 (2020), 53–66, [doi:10.1145/3373718.3394755], [arXiv:2004.06572].[Am+20] B. Aman、G. Ciobanu、R. Gl¨uck、R. Kaarsgaard、J. Kari、M. Kutrib、I. Lanese、C. Antares Mezzina、Ł. Mikulski、R. Nagarajan、I. P hillips、G. M. Pinna、L. Prigioniero、I. Ulidowski 和 G. Vidal, 《可逆计算基础》, 载于: 《可逆计算: 拓展计算视野。RC 2020》, 计算机科学讲义 12070, 施普林格, 纽约 (2020), [doi:10.1007/978-3-030-47361-7 1].[AF92] F. W. Anderson 和 K. R. Fuller, 《环与模范畴》, 数学研究生教材 13, 施普林格, 柏林 (1992), [doi:10.1007/978-1-4612-4418-9].[ABGHR14] M. Ando、A. Blumberg、D. Gepner、M. Hopkins 和 C. Rezk, 《R-线丛、RR-模Thom谱和扭曲R-同调的∞-范畴方法》, J. Topology 7 3 (2014), 869–893, [arXiv:1403.4325],[doi:10.1112/jtopol/jtt035].[Ar11] M. Arkowitz, 《同伦论导论》, 施普林格, 柏林 (2011), [doi:10.1007/978-1-4419-7329-0].[Ar25] E. Artin, 《辫理论》, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 4 (1925), 47–72, [doi:10.1007/BF02950718].[ASY87] J. E. Avron、R. Seiler 和 L. G. Yaffe, 《绝热定理及其在量子霍尔效应中的应用》, Commun. Math. Phys. 110 (1987), 33–49, [doi:10.1007/BF01209015].[Aw12] S. Awodey, 《类型论与同伦》, 载于: 《认识论与本体论之争》, 施普林格, 柏林 (2012), 183-201,[doi:10.1007/978-94-007-4435-6 9], [arXiv:1010.1810].[AB04] S. Awodey 和 A. Bauer, 《命题即类型》*J*, J. Logic and Computation 14 (2004), 447-471,[doi:10.1093/logcom/14.4.447].[AGS12] S. Awodey、N. Gambino 和 K. Sojakova, 《同伦类型论中的归纳类型》, LICS'12 (2012), 95–104,[doi:10.1109/LICS.2012.21], [arXiv:1201.3898].[AGS15] S. Awodey、N. Gambino 和 K. Sojakova, 《类型论中的同伦初始代数》, J. Assoc. Comput. Machin. 636 (2017), 1–45, [doi:10.1145/3006383], [arXiv:1504.05531].[AW09] S. Awodey 和 M. Warren, 《恒等类型的同伦论模型》, Math. Proc. Cambridge Philosophical Society 146 (2009), 45-55, [doi:10.1017/S0305004108001783], [arXiv:0709.0248].[BDF20] S. Bachmann、W. De Roeck 和 M. Fraas, 《量子多体系统中的绝热定理》, 载于: 《数学物理中的解析趋势》, Cont. Math. 741 (2020), 43-58, [ams:conm-741], [arXiv:1808.09985].[BBP97] D. Bailey、P. Borwein 和 S. Plouffe, 《快速计算各种多对数常数》, Math. Comp. 66 (1997), 903-913, [doi:1997-66-218/S0025-5718-97-00856-9].[Ba15] P. Balmer, 《群表示叠》, J. Eur. Math. Soc. 17 1 (2015), 189-228, [doi:10.4171/jems/501],[arXiv:1302.6290].[BCP03] G. Barthe、V. Capretta 和 O. Pons, 《类型论中的集合样对象》, J. Funct. Progr. 13 2 (2003), 261-293,[doi:10.1017/S0956796802004501].

[BP01] G. Barthe 和 O. Pons，《依赖类型论中的类型同构与证明复用》，载于：《软件科学与计算结构基础》。FoSSaCS 2001，《计算机科学讲义》2030，施普林格，柏林（2001），[doi:10.1007/3-540-45315-6 4].[Bau95] H. J. Baues，《代数拓扑手册》中的《同伦类型》，North Holland（1995），1-72，[doi:10.1016/B978-0-444-81779-2.X5000-7], [ncatlab.org/nlab/files/Baues-HomotopyTypes.pdf][BCR18] G. Benenti、G. Casati 和 D. Rossini，《量子计算与信息原理》，世界科学出版社，新加坡（2004, 2018），[doi:10.1142/10909].[Be80] P. Benioff，《作为物理系统的计算机：以图灵机表示的计算机的微观量子力学哈密顿量模型》，《统计物理学杂志》22（1980），563–591, [doi:10.1007/BF01011339].[Be03] C. H. Bennett，《关于朗道尔原理、可逆计算和麦克斯韦妖的札记》，《现代物理学史与哲学研究》34 3（2003），501-510, [doi:10.1016/S1355-2198(03)00039-X].[Be84] M. V. Berry，《伴随绝热变化的量子相位因子》，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》392（1984），45–57，[doi:10.1098/rspa.1984.0023].[Be89] M. Berry，《五年后的量子相位》，载于：《物理学中的几何相位》，《数学物理高级丛书》5，世界科学出版社（1989），7–28, [doi:10.1142/0613].[BBCDG21] M. Bezem、U. Buchholtz、P. Cagne、B. I. Dundas 和 D. R. Grayson：《对称性》（2021），[unimath.github.io/SymmetryBook/book.pdf],[github.com/UniMath/agda-unimath/tree/master/src/group-theory].[BvN36] G. Birkhoff 和 J. von Neumann，《量子力学的逻辑》，《数学年刊》37（1936），823-843，[doi:10.2307/1968621].[Bir75] J. S. Birman，《辫子、链环与映射类群》，普林斯顿大学出版社（1975）[ISBN:9780691081496][Bish67] E. Bishop，《构造性分析基础》，麦格劳-希尔（1967），[archive.org/details/foundationsofcon0000bish].[BB85] E. Bishop 和 D. Bridges，《构造性分析》，《数学基础科学》279，施普林格，柏林（1985），[doi:10.1007/978-3-642-61667-9].[Bl11] P. E. Bland，《环及其模》，德古意特，柏林（2011），[doi:10.1515/9783110250237].[BPV06] A. Bohannon、B. C. Pierce 和 J. A. Vaughan，《关系镜头：一种可更新视图语言》，《数据库系统原理》会议论文集（2006），338-347, [doi:10.1145/1142351.1142399].[BHZS05] N. E. Bonesteel、L. Hormozi、G. Zikos 和 S. H. Simon，《量子计算的辫拓扑》，《物理评论快报》95（2005） 140503, [doi:10.1103/PhysRevLett.95.140503], [arXiv:quant-ph/0505065].[Bo70] P. I. Booth，《映射的指数律 I》，《伦敦数学会会刊》s3-20（1970），179-192，[doi:10.1112/plms/s3-20.1.179].[BB78] P. I. Booth 和 R. Brown，《部分映射空间、纤维映射空间与紧开拓扑》，《一般拓扑学及其应用》8（1978），181-195, [doi:10.1016/0016-660X(78)90049-1].[Bo94II] F. Borceux，《范畴与结构》，《范畴代数手册》第2卷，《数学与应用百科全书》50，剑桥大学出版社（1994），[doi:10.1017/CBO9780511525865].[Bo94III] F. Borceux，《层范畴》，《范畴代数手册》第3卷，《数学与应用百科全书》50，剑桥大学出版社（1994），[doi:10.1017/CBO9780511525872].[BEZ20] D. Bouwmeester、A. Ekert 和 A. Zeilinger，《量子信息物理学——量子密码学、量子隐形传态、量子计算》，施普林格，纽约（2020），[doi:10.1007/978-3-662-04209-0].[BM21] V. Braunack-Mayer，《组合参数化谱》，《代数与几何拓扑》21（2021），801-891，[doi:10.2140/agt.2021.21.801], [arXiv:1907.08496].[Br93] G. Bredon，《拓扑与几何》，《数学研究生教材》139，施普林格，柏林（1993），[doi:10.1007/978-1-4757-6848-0].[BP08] G. K. Brennen 和 J. K. Pachos，《为什么要关注用任意子进行计算？》，《皇家学会会刊 A 辑》464（2008），1-24, [doi:10.1098/rspa.2007.0026], [arXiv:0704.2241].[Br99] D. Bridges，《构造性数学：可计算分析的基础》，《理论计算机科学》219 1–2（1999），95-109, [doi:10.1016/S0304-3975(98)00285-0].[Br65] E. H. Brown, Jr.，《抽象同伦论》，《美国数学会汇刊》119（1965），79–85，[doi:10.1090/S0002-9947-1965-0182970-6].[Br73] K. S. Brown，《抽象同伦论与广义层上同调》，《美国数学会汇刊》186（1973），419-458, [jstor:1996573].[Br14] J. W. Brunekreef，《拓扑量子计算与量子编译》，论文，乌得勒支（2014），[studentheses:20.500.12932/17738].[BLL13] G. Brunerie、D. Licata 和 P. Lumsdaine，《类型论中的同伦论》，讲义（2013），[dlicata.wescreates.wesleyan.edu/pubs/bll13homotopy/bll13homotopy.pdf]

[BLM22] G. Brunerie、A. Ljungstr¨om 和 A. M¨ortberg，《立方 Agda 中的合成积分上同调》，第30届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL 2022）216（2022），[doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2022.11].[BCTFR23] U. Buchholtz、J. D. Christensen、J. Taxer´as Flaten 和 E. Rijke，《中心 H-空间与带型》，[arXiv:2301.02636].[BvDR18] U. Buchholtz、F. van Doorn 和 E. Rijke，《同伦类型论中的高阶群》，LICS 33（2018），205-214，[doi:10.1145/3209108.3209150], [arXiv:1802.04315].[Bun76] M. Bunge，《可能性与概率》，载于：《概率论基础、统计推断与科学统计理论》，第17-34页，Reidel 出版社（1976），[doi:10.1007/978-94-010-1438-0 2].[BNV16] U. Bunke、T. Nikolaus 和 M. V¨olkl，《作为谱层的微分上同调理论》，《同伦结构杂志》11（2016），1–66, [doi:10.1007/s40062-014-0092-5], [arXiv:1311.3188].[CR97] D. C. Cabra 和 G. L. Rossini，《共形场论与 *2+1* 陈-西蒙斯理论之间的明确联系》，《现代物理快报 A》12（1997），1687-1697, [doi:10.1142/S0217732397001722], [arXiv:hep-th/9506054].[CMV95] F. Cagliari、S. Mantovani 和 E. Vitale，《Kelley 空间范畴的正则性》，《应用范畴与结构》3（1995），357–361, [doi:10.1007/BF00872904].[CGX01] A. Cattaneo、A. Giaquinto 和 P. Xu，《几何与物理中的高阶结构——献给 Murray Gerstenhaber 和 Jim Stasheff》，《数学进展》287，Birkh¨auser，（2001），[doi:10.1007/978-0-8176-4735-3].[Ca15] E. Cavallo，《同伦类型论中的合成上同调》，博士论文，卡内基梅隆大学（2015），[staff.math.su.se/evan.cavallo/works/thesis15.pdf].[CLBFN15] C. Cesare、A. J. Landahl、D. Bacon、S. T. Flammia 和 A. Neels，《绝热拓扑量子计算》，《物理评论 A》92（2015）012336, [doi:10.1103/PhysRevA.92.012336], [arXiv:1406.2690].[CGD11] M. Cheng、V. Galitski 和 S. Das Sarma，《拓扑超导体中非阿贝尔任意子编织的非绝热效应》，《物理评论 B》84（2011）104529, [doi:10.1103/PhysRevB.84.104529],[arXiv:1106.2549].[CR21] F. Cherubini 和 E. Rijke，《模态下降》，《数学结构与计算机科学》31 4（2021），363-391, [arXiv:2003.09713],[doi:10.1017/S0960129520000201].[CFP02] A. Childs、E. Farhi 和 J. Preskill，《绝热量子计算的鲁棒性》，《物理评论 A》65（2002）012322[arXiv:quant-ph/0108048] [doi:10.1103/PhysRevA.65.012322].[Ch07] A. Chlipala，《依赖类型论中经认证的编程语言工具的实现》，博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校（2007），[UCB/EECS-2007-113].[Ch13] A. Chlipala，《依赖类型编程认证》，麻省理工学院出版社，波士顿（2013），[ISBN:9780262026659].[Ch40] A. Church，《简单类型论的一种表述》，《符号逻辑杂志》5 2（1940），56-68，[doi:doi:10.2307/2266170].[Ci19] D.-C. Cisinski，《高阶范畴与同伦代数》，剑桥大学出版社（2019），[doi:10.1017/9781108588737].[CW08] J. Clarke 和 F. K. Wilhelm，《超导量子比特》，《自然》453（2008），1031–1042，[doi:10.1038/nature07128].[CT08] C. S. Coen 和 E. Tassi，《在类型论中处理数学结构》，载于：《证明与程序的类型》。TYPES 2007，《计算机科学讲义》4941，施普林格（2008），[doi:10.1007/978-3-540-68103-8 11].[Co09] F. R. Cohen，《构形空间及其应用导论》，载于《辫子》，《数学科学研究所讲义丛书》19（2009），183-261，世界科学出版社，新加坡，[doi:10.1142/9789814291415 0003].[CCHM15] C. Cohen、T. Coquand、S. Huber、A. M¨ortberg，《立方类型论：单值性公理的一种构造性解释》，第21届证明与程序类型国际会议（TYPES 2015），5.1-5.34，《莱布尼茨国际信息学会议录》（LIPIcs），德国达格施图尔 [doi:10.48550/arXiv.1611.02108].[Co11] T. Coquand，《等式与依赖类型论》，讲义（2011），[ncatlab.org/nlab/files/Coquand-EqualityAndDependentTypeTheory.pdf].[CD13] T. Coquand 和 N. A. Danielsson，《同构即等式》，《数学探索》24 4（2013），1105-1120，[doi:10.1016/j.indag.2013.09.002].[CHM18] Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders M¨ortberg，《立方类型论中的高阶归纳类型》，载于第33届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会论文集（LICS '18）（2018），计算机协会，纽约州纽约市，255–264。[doi:10.1145/3209108.3209197].[CP90] T. Coquand 和 C. Paulin，《归纳定义类型》，COLOG-88，《计算机科学讲义》417，施普林格，柏林（1990），50-66, [doi:10.1007/3-540-52335-9 47].[CS07] T. Coquand 和 A. Spiwack，《迈向类型论中的构造性同调代数》，载于：《迈向机械化数学助手》。MKM Calculemus 2007，《计算机科学讲义》4573，施普林格，柏林（2007），[doi:10.1007/978-3-540-73086-6 4].

[O'C07] R. O'Connor, 《实数的单子式函数式实现》, 《数学结构与计算机科学》17 1 (2007), 129-159, [doi:10.1017/S0960129506005871], [arXiv:cs/0605058].[Co11] R. Constable, 《类型的胜利：构建计算现实的逻辑》, 讲座发表于：类型、语义与验证, 俄勒冈州（2011）, [www.cs.uoregon.edu/research/summerschool/summer11/lectures/Triumph-of-Types-Extended.pdf].[CSS21] D. Corfield、H. Sati 和 U. Schreiber, 《基本权系是量子态》, [arXiv:2105.02871].[Co04] L. Corry, 《现代代数与数学结构的兴起》, 施普林格, 柏林（2004）, [doi:10.1007/978-3-0348-7917-0].[Co15] L. Corry, 数字简史, 牛津大学出版社（2015）, [ISBN:9780198702597].[Co00] D. G. Cory、R. Laflamme、E. Knill、L. Viola、T. F. Havel、N. Boulant、G. Boutis、E. Fortunato、S. Lloyd、R. Martinez、C. Negrevergne、M. Pravia、Y. Sharf、G. Teklemariam、Y.S. Weinstein 和 W. H. Zurek, 《基于核磁共振的量子信息处理：成果与展望》, Fortsch. Phys. 48 (2000), 875-907, [arXiv:quant-ph/0004104], [doi:10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<875::AID-PROP875>3.0.CO;2-V].[CJ98] M. C. Crabb 和 I. M. James, 《纤维化同伦论》, 施普林格（1998）, [doi:10.1007/978-1-4471-1265-5].[CGH14] P.-L. Curien、R. Garner 和 M. Hofmann, 《重新审视依赖类型论的范畴论解释》, Theor. Comp. Sci. 546 21 (2014), 99-119, [doi:10.1016/j.tcs.2014.03.003].[DS22a] S. Das Sarma, 《量子计算存在炒作问题》, 《麻省理工科技评论》（2022年3月）, [www.technologyreview.com/2022/03/28/1048355/quantum-computing-has-a-hype-problem].[DS22b] S. Das Sarma, 《寻找马约拉纳》, [arXiv:2210.17365].[DSP21] S. Das Sarma 和 H. Pan, 《马约拉纳纳米线中的无序诱导零偏压峰》, Phys. Rev. B 103 (2021)l195158, [doi:10.1103/PhysRevB.103.195158], [arXiv:2103.05628].[DJMM90] E. Date、M. Jimbo、A. Matsuo 和 T. Miwa, 《超几何型积分与 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$克尼日尼克-扎莫洛德奇科夫方程》, Int. J. Mod. Phys. B 4 5 (1990), 1049-1057, [doi:10.1142/S0217979290000528].[DN06] C. M. Dawson 和 M. A. Nielsen, 《 Solovay-Kitaev 算法》, Quantum Info. Comput. 6 1 (2006), 81–95, [doi:10.5555/2011679.2011685], [arXiv:quant-ph/0505030].[dB91] N. de Bruijn, 《类型化 λ 演算中的望远镜映射》, Information and Computation 91 2 (1991), 189-204, [doi:10.1016/0890-5401(91)90066-B].[De70] P. Deligne, 《正则奇点处的微分方程》, 《数学讲义》163, 施普林格（1970）, [ias:355].[De89] D. E. Deutsch, 《量子计算网络》, 英国皇家学会会刊 A 425 1868 (1989), 73-90, [doi:10.1098/rspa.1989.0099].[DiC95] R. Di Cosmo, 《类型同构——从 λ 演算到信息检索与语言设计》, 《理论计算机科学进展》, Birkhäuser（1995）, [doi:10.1007/978-1-4612-2572-0].[FMS97] P. Di Francesco、P. Mathieu 和 D. S´en´echal, 《共形场论》, 施普林格, 柏林（1997）, [doi:10.1007/978-1-4612-2256-9].[Di04] A. Dimca, 《拓扑学中的层》, 施普林格, 柏林（2004）, [doi:10.1007/978-3-642-18868-8].[DRS22] M. Ding、C. D. Roberts 和 S. M. Schmidt, 《强子质量与结构的涌现》, [arXiv:2211.07763].[DA18] P. Downen 和 Z. M. Ariola, 《计算经典逻辑与相继式演算教程》, J. Funct. Progr. 28 (2018) E3, [doi:10.1017/S0956796818000023].[DN08] M. R. Dowling 和 M. A. Nielsen, 《量子计算的几何》, Quantum Info. Comput. 8 10 (2008), 861–899, [doi:10.5555/2016985.2016986], [arXiv:quant-ph/0701004].[Du99] M. Duff, 《十一维世界：超引力、超膜与M理论》, IoP, 布里斯托尔（1999）, [ISBN:9780750306720].[DS95] W. Dwyer 和 J. Spalinski, 《同伦论与模型范畴》, 载于：I. M. James（编）, 《代数拓扑手册》, North Holland（1995）, [doi:10.1016/B978-0-444-81779-2.X5000-7].[Dy94] P. Dybjer, 《归纳族》, 《计算的形式方面》6 (1994), 440–465, [doi:10.1007/BF01211308].[Dy97] P. Dybjer, 《在 Martin-L¨of 类型论中用良序关系表示归纳定义集合》, Theor. Comp. Sci. 176 1–2 (1997), 329-335, [doi:10.1016/S0304-3975(96)00145-4].[Eq22] A. Equbal, 《面向未来量子技术的分子自旋量子比特》, CQTS 量子研讨会（2022年11月）, [ncatlab.org/nlab/show/CQTS#EqubalNov22].[Er15] J. Erlich, 《面向非专业人士的全息量子色动力学导论》, Contemp. Phys. 56 (2015) 2, [arXiv:1407.5002].[Es19] M. H. Escard´o, 《使用 Agda 导论数学的单值基础》（2019）, [arXiv:1911.00580], [cs.bham.ac.uk/∼mhe/HoTT-UF-in-Agda-Lecture-Notes].[EFK98] P. I. Etingof、I. Frenkel 和 A. A Kirillov, 《表示论与克尼日尼克-扎莫洛德奇科夫方程讲义》, Math. Surv. monogr. 58, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯（1998）, [ams.org/surv-58].

[FaN62] E. Fadell 和 L. Neuwirth，《构型空间》，《斯堪的纳维亚数学杂志》10 (1962), 111-118，[doi:10.7146/math.scand.a-10517].[FH01] E. Fadell 和 S. Husseini，《构型空间的几何与拓扑》，施普林格数学专著，柏林（2001），[doi:10.1007/978-3-642-56446-8].[FGGS00] E. Farhi、J. Goldstone、S. Gutmann 和 M. Sipser，《通过绝热演化进行量子计算》，[arXiv:quant-ph/0001106].[Fe82] R. Feynman，《用计算机模拟物理学》，《国际理论物理学杂志》21 (1982) 467–488 [doi:10.1007/BF02650179].[FSV94] B. Feigin、V. Schechtman、A. Varchenko，《WZW模型中超几何关联函数满足的代数方程 I》，Commun. Math. Phys. 163 (1994), 173–184, [doi:10.1007/BF02101739].[FSS19] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber，《M理论的有理高阶结构》，Fortsch. Phys. 67 (2019) 1910017，[doi:10.1002/prop.201910017], [arXiv:1903.02834].[FSS20-Cha] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber，《（扭曲微分）非阿贝尔上同调中的特征映射》，世界科学出版社（2023），[arXiv:2009.11909].[FoN62] R. H. Fox 和 L. Neuwirth，《辫群》，《斯堪的纳维亚数学杂志》10 (1962), 119-126，[doi:10.7146/math.scand.a-10518].[FM12] D. S. Freed 和 G. W. Moore，《扭曲等变物质》，Ann. Henri Poincar´e 14 (2013), 1927–2023，[doi:10.1007/s00023-013-0236-x], [arXiv:1208.5055].[Fr98] M. Freedman，《P/NP 与量子场计算机》，《美国国家科学院院刊》95 1 (1998), 98-101，[doi:10.1073/pnas.95.1.9].[FLW02b] M. H. Freedman、M. Larsen 和 Z. Wang，《一种对量子计算具有普适性的模函子》，Commun. Math. Phys. 227 (2002), 605-622, [doi:10.1007/s002200200645], [arXiv:quant-ph/0001108].[FKLW03] M. Freedman、A. Kitaev、M. Larsen 和 Z. Wang，《拓扑量子计算》，《美国数学会通报》40 (2003) 31, [doi:10.1090/S0273-0979-02-00964-3], [arXiv:quant-ph/0101025].[Fr1879] G. Frege，《概念文字：一种仿照算术构造的纯思维公式语言》，路易斯·内伯特出版社（1879），[ISBN:9783487006239]；英文译本：J. Corcoran 和 D. Levin，《戈特洛布·弗雷格：概念文字及相关论文》，牛津大学出版社（1972），[doi:10.1086/288549].[Fu15] L. Fuchs，《阿贝尔群》，施普林格，柏林（2015），[doi:10.1007/978-3-319-19422-6].[GL17] D. Gaitsgory 和 J. Lurie，《函数域上的韦伊猜想》（2014-2017），[www.math.ias.edu/∼lurie/papers/tamagawa-abridged.pdf].[GGMR09] F. Garillot、G. Gonthier、A. Mahboubi 和 L. Rideau，《数学结构的封装》，载于：《高阶逻辑定理证明。TPHOLs 2009》，《计算机科学讲义》5674，施普林格，柏林（2009），[doi:10.1007/978-3-642-03359-9 23].[Ga00] K. Gawedzki，《共形场论：案例研究》，载于《共形场论——弦与场论中的新非微扰方法》，CRC出版社（2000），[doi:10.1201/9780429502873], [arXiv:hep-th/9904145].[GM56] M. Gell-Mann，《将新粒子解释为位移电荷多重态》，《新西门托》4 2 (1956), 848–866, [doi:10.1007/BF02748000].[Ge34] G. Gentzen，《逻辑推理研究》，《数学杂志》39 (1935), 176–210，[doi:10.1007/BF01201353].[Ge69] G. Gentzen，《逻辑演绎研究》，M. E. Szabo 译（编），载于：《格哈德·根岑文集》，《逻辑与数学基础研究》55，施普林格，柏林（1969），68-131，[ISBN:9780444534194].[GNSW07] H. Geuvers、M. Niqui、B. Spitters 和 F. Wiedijk，《构造性分析、类型与精确实数》，《数学结构与计算机科学》17 01 (2007), 3-36, [doi:10.1017/S0960129506005834].[GJ99] P. Goerss 和 J. F. Jardine，《单纯形同伦论》，《数学进展》，Birkhäuser，波士顿（2009），[doi:10.1007/978-3-0346-0189-4].[G¨o18] L. G¨otz，《Martin-L¨of 的 J 规则》，学士论文，慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，2018年，[math.lmu.de/∼petrakis/Goetz.pdf].[GIB12] D. Golze、M. Icker 和 S. Berger，《使用液态核磁共振实现双量子比特和三量子比特量子计算机》，《磁共振概念》40A 1 (2012), 25-37，[doi:10.1002/cmr.a.21222].[GPP21] A. Govzmann、D. Pi˘stalo 和 N. Poncin，《同伦极限的不确定性与模型》，[arXiv:2109.12395].[GS19] D. Grady 和 H. Sati，《扭曲微分 KO 理论》，[arXiv:1905.09085].[GH20] E. K. Grant 和 T. S. Humble，《绝热量子计算与量子退火》，《牛津研究百科全书》（2020），[doi:10.1093/acrefore/9780190871994.013.32].[Gri70] P. A. Griffiths，《代数流形上的积分周期：主要结果概述及未决问题讨论》，《美国数学会通报》76 (1970), 228-296, [doi:10.1090/S0002-9904-1970-12444-2].

.[Gro66] A. Grothendieck，论代数簇的德拉姆上同调，Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 29（1966），95-103, [http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__29__95_0].[GHL22] X. Gu、B. Haghighat 和 Y. Liu，KZ方程中的伊辛任意子和斐波那契任意子，J. High Energy Phys. 2022（2022） 15, [arXiv:2112.07195][doi:10.1007/JHEP09(2022)015].[Gu95] C. A. Gunter，编程语言中类型的语义，载于：《计算机科学中的逻辑手册》，第3卷：语义结构，牛津大学出版社（1995）， [ISBN:9780198537625].[HKK02] K. A. Hardie、K. H. Kamps 和 R. Kieboom，拓扑空间的一个同伦双群胚，Appl. Categ. Struct. 9（2001），311-327, [doi:10.1023/A:1011270417127].[Ha16] R. Harper，编程语言的实用基础，剑桥大学出版社（2016），[ISBN:9781107150300].[HLS18] S. Hartnoll、A. Lucas 和 S. Sachdev，全息量子物质，麻省理工学院出版社，波士顿，（2018），[ISBN:9780262348010], [arXiv:1612.07324].[Ha02] A. Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社（2002） [ISBN:9780521795401].[https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html].[Hi88] P. Hilton，同调与同伦论的主观历史，Mathematics Magazine 61 5（1988），282-291，[doi:10.2307/2689545].[Ho95] M. Hofmann，内涵型论中的外延概念，博士论文，爱丁堡（1995），《杰出论文》，施普林格（1997）， [ECS-LFCS-95-327],[doi:10.1007/978-1-4471-0963-1].[Ho97] M. Hofmann，依赖类型的语法与语义，载于：《计算的语义与逻辑》，Publ. Newton Inst. 14，剑桥大学出版社（1997），79-130, [doi:10.1017/CBO9780511526619.004].[HS98] M. Hofmann 和 T. Streicher，类型论的群胚解释，载于：《构造性类型论二十五年》，Oxf. Logic Guides. 36，克拉伦登出版社（1998）83-111, [ISBN:9780198501275].[HBS09] L. Hormozi、N. E. Bonesteel 和 S. H. Simon，利用Read-Rezayi态的拓扑量子计算，《物理评论快报》103（2009） 160501, [doi:10.1103/PhysRevLett.103.160501], [arXiv:0903.2239].[HZBS07] L. Hormozi、G. Zikos、N. E. Bonesteel 和 S. H. Simon，拓扑量子编译，Phys. Rev. B 75（2007） 165310, [doi:10.1103/PhysRevB.75.165310], [arXiv:quant-ph/0610111].[HFLL1616] K.-B. Hou、E. Finster、D. Licata 和 P. Lumsdaine，同伦类型论中 Blakers-Massey 连通性定理的机械化，LICS ‘16 （ 2016 ），565–574, [doi:10.1145/2933575.2934545].[arXiv:1605.03227].[HWFZ20] H.-L. Huang、D. Wu、D. Fan 和 X. Zhu，超导量子计算：综述，Science China Information Sciences 63 8（2020），1-32, [doi:10.1007/s11432-020-2881-9], [arXiv:2006.10433].[Ja98] B. Jacobs，范畴逻辑与类型论，《逻辑与数学基础研究》141，爱思唯尔（1998），[ISBN:9780444501707].[Ja84] I. M. James，一般拓扑与同伦论，施普林格，柏林（1984），[doi:10.1007/978-1-4613-8283-6].[Ja84] K. J¨anich，拓扑学，《数学本科教材》，施普林格，柏林（1984）， [ISBN:9780387908922].[JS21] E. G. Johansen 和 T. Simula，斐波那契任意子与马约拉纳费米子——SU(2)$_k$ 任意子模型中编织电路编译的蒙特卡罗方法，PRX Quantum 2（2021） 010334, [arXiv:2008.10790].[doi:10.1103/PRXQuantum.2.010334].[Jo90] D. L. Johnson，群表示，剑桥大学出版社（1990）， [doi:10.1017/CBO9781139168410].[Jo17] A. Joyal，关于族与部落的笔记， [arXiv:1710.10238].[JSSW19] B. Jurˇco、C. Saemann、U. Schreiber 和 M. Wolf，M理论中的高阶结构，Fortsch. Phys. 67（2019），8-9，[doi:10.1002/prop.201910001], [arXiv:1903.02807].[Ka09] F. Kachapova，类型论中群的形式化， [arXiv:2102.09125].[KN98] T. Kadowaki 和 H. Nishimori，横向伊辛模型中的量子退火，Phys. Rev. E. 58（1998），5355-5363, [doi:10.1103/PhysRevE.58.5355], [arXiv:cond-mat/9804280].[KP97] K. H. Kamps 和 T. Porter，抽象同伦与简单同伦理论，世界科学出版社，新加坡（1997），[doi:10.1142/2215].[KLV12] C. Kapulkin、P. LeFanu Lumsdaine 和 V. Voevodsky，单纯集合中的单值性， [arXiv:1203.2553].[KL21] C. Kapulkin 和 P. LeFanu Lumsdaine，单值基础的单纯模型（继Voevodsky之后），J. Eur. Math. Soc. 23（2021），2071–2126, [doi:10.4171/jems/1050], [arXiv:1211.2851].[Ka68] N. M. Katz，论周期矩阵所满足的微分方程，Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 35（1968），223–258, [http://www.numdam.org/item/PMIHES_1968__35__71_0/].[KO68] N. M. Katz 和 T. Oda，论关于参数的德拉姆上同调类的微分，J. Math. Kyoto Univ. 8（1968），199-213, [doi:10.1215/kjm/1250524135]。

[KL04] L. H. Kauffman 和 S. J. Lomonaco Jr.，编织算符是通用量子门，新物理学杂志 6（2004）134, [doi:10.1088/1367-2630/6/1/134], [arXiv:quant-ph/0401090].[Ki97] A. Kitaev，量子计算：算法与纠错，《俄罗斯数学调查》52（1997），1191-1249，[doi:10.1070/rm1997v052n06abeh002155].[Ki01] A. Kitaev，量子线中的未配对马约拉纳费米子，《物理学进展》44 131（2001），131-136，[doi:10.1070/1063-7869/44/10S/S29], [arXiv:cond-mat/0010440].[Ki03] A. Kitaev，通过任意子实现容错量子计算，《物理年鉴》303（2003），2-30，[doi:10.1016/S0003-4916(02)00018-0], [arXiv:quant-ph/9707021].[Ki06] A. Kitaev，精确可解模型中的任意子及其拓展，《物理年刊》321 1（2006）2-111，[doi:10.1016/j.aop.2005.10.005], [arXiv:cond-mat/0506438].[Ki09] A. Kitaev，拓扑绝缘体与超导体周期表，AIP会议论文集 1134（2009）22, [doi:10.1063/1.3149495], [arXiv:0901.2686].[Kn06] A. Knapp，《基础代数》，施普林格，柏林（2006），[doi:10.1007/978-0-8176-4529-8].[Kn96] E. Knill，量子伪代码约定，洛斯阿拉莫斯技术报告 LA-UR-96-2724（1996），[doi:10.2172/366453].[Ko61] S. Kochen，模型论中的超积，《数学年刊》74 2（1961），221-261, [doi:10.2307/1970235].[Ko02] T. Kohno，共形场论与拓扑学，Transl Math. Monogr. 210，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2002），[ams:mmono-210].[Ko12] T. Kohno，辫群的同调表示与KZ联络，J. Singularities 5（2012），94-108，[doi:10.5427/jsing.2012.5g].[KMM23] N. Kolganov、S. Mironov 和 A. Morozov，大k拓扑量子计算机，《核物理B辑》987（2023）116072 [arXiv:2105.03980] [doi:10.1016/j.nuclphysb.2023.116072].[Ko32] A. Kolmogorov，关于直觉主义逻辑的解释，《数学杂志》35（1932），58-65, [doi:10.1007/BF01186549].[Kr15] N. Kraus，命题截断的一般泛性质，载于：TYPES 2014，莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）39（2015） [arXiv:1411.2682] [doi:10.4230/LIPIcs.TYPES.2014.111].[KS13] R. Krebbers 和 B. Spitters，Coq中用于高效精确实数算术的类型类，《计算机科学中的逻辑方法》9 1（2013） 958, [doi:10.2168/LMCS-9(1:1)2013], [arXiv:1106.3448].[Kr07] R. Kr¨omer，工具与对象：范畴论的历史与哲学，施普林格，柏林（2007），[doi:10.1007/978-3-7643-7524-9].[LP15] J. Ladyman 和 S. Presnell，同伦类型论中的恒等，第一部分：路径归纳的论证，《数学哲学》23 3（2015），386–406, [doi:10.1093/philmat/nkv014].[La70] W. Lawvere，量词与层，Actes Congr`es intern. Math. 1（1970），329-334，[ncatlab.org/nlab/files/Lawvere-QuantifiersAndSheaves.pdf].[La94] W. Lawvere，凝聚拓扑斯与康托尔的“全一”，《数学哲学》2 1（1994），5-15，[doi:10.1093/philmat/2.1.5].[La07] W. Lawvere，公理化凝聚，《范畴论及其应用》，19 3（2007），41–49, [tac:19-3].[Le10] E.-K. Lee，纯辫群的一个正表示，《忠清数学会志》23 3（2010），555-561，[JAKO201007648745187].[LW17] J. van Leeuwen 和 J. Wiedermann：知识、表征与计算动力学，《应用哲学研究》28，施普林格，柏林（2017），69-89, [doi:10.1007/978-3-319-43784-2 5].[LM77] J. M. Leinaas 和 J. Myrheim，论全同粒子理论，《新物理学评论B辑》37（1977），1–23，[doi:10.1007/BF02727953].[Le92] A. Lerda，任意子——分数统计粒子的量子力学，《物理学讲义》14，施普林格，柏林（1992），[doi:10.1007/978-3-540-47466-1].[Le18] C. I. Lewis，符号逻辑概览，加州大学出版社，伯克利，（1918），[archive.org/details/surveyofsymbolic00lewiiala].[LB20] F. Leymann 和 J. Barzen，NISQ时代基于量子门的量子算法的残酷真相，《量子科学与技术》5（2020） 044007, [doi:10.1088/2058-9565/abae7d].[Li14] N. Li，类型论中的商类型，博士论文，诺丁汉（2014），[eprints.nottingham.ac.uk:28941].[ncatlab.org/nlab/files/Li-QuotientTypes.pdf].[1lab] A. Liao、J. Coates 和 R. Mullanix，1lab，[https://1lab.dev].[LF14] D. Licata 和 E. Finster，同伦类型论中的Eilenberg-MacLane空间，CSL-LICS ‘14 66（2014），1-9，[doi:10.1145/2603088.2603153].[Lu07] R. Lubarsky，论构造性柯西实数的柯西完备性，Electronic Notes in Theoretical Com- puter Science 167（2007），225-254, [doi:10.1016/j.entcs.2006.09.012]。

.[L¨u51] G. L¨uders，关于测量过程导致的状态变化，《物理年刊》8（1951），322–328，[doi:10.1002/andp.19504430510]；译为：关于测量过程导致的状态变化，《物理年刊》15 9（2006），663-670, [ncatlab.org/nlab/files/Lueders-StateChange.pdf][Lu15] M. Lundfall，在Agda中形式化实数，预印本（2015），[ncatlab.org/nlab/files/Lundfall-RealNumbersInAgda.pdf][Lu94] Z. Luo，《计算与推理——面向计算机科学的类型理论》，克拉伦登出版社，牛津（1994），[ISBN:9780198538356]。[Lu09] J. Lurie，《高阶托普斯理论》，《数学年刊研究》170，普林斯顿大学出版社（2009），[pup:8957],[arXiv:math/0608040]。[Lu17] J. Lurie，《高阶代数》，[https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf][MCMC19] E. Macaluso、T. Comparin、L. Mazza和I. Carusotto，基于角动量和密度分布测量的非阿贝尔任意子融合通道，《物理评论快报》123（2019）266801, [arXiv:1903.03011],[doi:10.1103/PhysRevLett.123.266801]。[MKS66] W. Magnus、A. Karras和D. Solitar，《组合群论：用生成元与关系表示群》，Dover出版社（2004），[ISBN-13:9780486438306]。[Ma58] Y. I. Manin，具有微分的域上的代数曲线（俄文），《苏联科学院消息·数学辑》22（1958），737–756, [bookstore.ams.org/trans2-37], [books.google.com/books?id=fZ7ms3db cMC]。[Ma80] Y. I. Manin，《可计算与不可计算》，苏维埃广播出版社（1980）；后收入：《数学作为隐喻：尤里·I.马宁文选》，文集20，美国数学会（2007），69-77, [ISBN:978-0-8218-4331-4]。[Ma00] Y. I. Manin，经典计算、量子计算与Shor因数分解算法，S´eminaire Bourbaki报告862，Ast´erisque 266（2000），375-404, [numdam:SB 1998-1999 41 375 0], [arXiv:quant-ph/9903008]。[Ma22] P. Marra，面向拓扑量子计算的马约拉纳纳米线：教程，《应用物理学杂志》132（2022）231101, [doi:10.1063/5.0102999], [arXiv:2206.14828]。[ML71] P. Martin-L¨of，《类型理论》，未发表的笔记（1971），[ncatlab.org/nlab/files/MartinLoef1971-ATheoryOfTypes.pdf][ML75] P. Martin-L¨of，直觉主义类型理论：可预测部分，载于：《逻辑讨论会'73》，《逻辑与数学基础研究》80（1975），73-118, [doi:10.1016/S0049-237X(08)71945-1]。[ML84] P. Martin-L¨of（G. Sambin记录的1980年在帕多瓦举办的一系列讲座笔记），《直觉主义类型论》，Bibliopolis，那不勒斯（1984），[ncatlab.org/nlab/files/MartinLofIntuitionisticTypeTheory.pdf][ML82] P. Martin-L¨of，《构造性数学与计算机编程》，《逻辑与数学基础研究》104（1982），153-175, [doi:10.1016/S0049-237X(09)70189-2]。[ML96] P. Martin-L¨of，逻辑常项的含义与逻辑定律的辩护，《北欧哲学逻辑杂志》1（1996），11-60, [docenti.lett.unisi.it/files/4/1/1/6/martinlof4.pdf][MMN23] Y. Masaki、T. Mizushima和M. Nitta，拓扑超导体中的非阿贝尔任意子与非阿贝尔涡旋，[arXiv:2301.11614]。[MM10] B. Mashayekhy和H. Mirebrahimi，有限表示群的一些拓扑观点下的性质，《国际数学、博弈论与代数杂志》18 6（2010），511-515, [arXiv:1012.1744]。[MFL22] E. S. Matekole、Y.-L L. Fang和M. Lin，超导量子比特系统量子最优脉冲控制的方法与结果，2022年IEEE国际并行与分布式处理研讨会专题会议（2022），[doi:10.1109/IPDPSW55747.2022.00102], [arXiv:2202.03260]。[MPSS19] T. Mawson、T. Petersen、J. Slingerland和T. Simula，非阿贝尔涡旋任意子的编织与融合，《物理评论快报》123（2019）140404, [doi:10.1103/PhysRevLett.123.140404], [arXiv:1805.10009]。[May72] P. May，迭代环空间的几何，施普林格，柏林（1972），[doi:10.1007/BFb0067491]。[May77] P. May，无限环空间理论，《美国数学会通报》83 4（1977），456-494，[doi:10.1090/S0002-9904-1977-14318-8], [http://www.math.uchicago.edu/~may/PAPERS/18.pdf][MS06] P. May和J. Sigurdsson，《参数化同伦论》，《美国数学会数学调查与专著》132，美国数学会（2006），[ISBN:9781470413590], [arXiv:math/0411656]。[Mi72] W. Miller，《对称群及其应用》，《纯粹与应用数学》50（1972），第16-60页，爱思唯尔，[ISBN:9780080873657]。[Mill19] H. Miller（编），《同伦论手册》，Chapman and Hall/CRC出版社（2019），[ISBN:9780815369707],[doi:10.1201/9781351251624]。[Miln80] J. Milne，《Etale上同调》，数学丛书33，普林斯顿大学出版社（1980），´ISBN: [9780691082387],jstor:j.ctt1bpmbk[。1]Mo[C. Mochon，来自不可解有限群的任意子足以实现通用量子计算，《物理评论A》67（2003）03] doi:10.1103/PhysRevA.67. 022315, [arXiv:quant-ph/022315], [。

[Mo04] C. Mochon，使用较小群的任意子计算机，《物理评论A》69（2004） 032306, [arXiv:quant-ph/0306063]，[doi:10.1103/PhysRevA.69.032306]。[Mø11] J. Møller，基本群与覆盖空间，讲义， [arXiv:1106.5650]。[Mu13] J. Munkres，《拓扑学》，培生（2013）， [ISBN:1292023627]。[Mu10] F. Muro，上同调理论的可表示性，在联合数学会议CSASC上的报告，布拉格（2010），[ncatlab.org/nlab/files/Muro-Representability.pdf]。[Mu22] Z. Murray，在Agda证明助手中进行构造性分析， [arXiv:2205.08354]，[github.com/z-murray/honours-project-constructive-analysis-in-agda]。[My21] D. J. Myers，高阶群的模态裂分， [arXiv:2106.15390]。[My22] D. J. Myers，综合微分凝聚同伦类型论中的轨形作为微线性类型，[arXiv:2205.15887]。[MR23] D. J. Myers和M. Riley，交换凝聚， [arXiv:2301.13780]。[NSSFD08] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman和S. Das Sarma，非阿贝尔任意子与拓扑量子计算，《现代物理评论》80（2008），1083-1159, [doi:10.1103/RevModPhys.80.1083]，[arXiv:0707.1889]。[Ne80] G. Nenciu，关于量子力学的绝热定理，《物理学杂志A：数学与一般》13（1980）L15，[doi:10.1088/0305-4470/13/2/002]。[NC10] M. A. Nielsen和I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》，剑桥大学出版社（2010）， [ISBN:9780511976667]。[NDGD06] M. A. Nielsen、M. R. Dowling、M. Gu和A. C. Doherty，作为几何的量子计算，《科学》311 5764（2006），1133-1135, [doi:10.1126/science.1121541], [arXiv:quant-ph/0603161]。[NSS12a] T. Nikolaus、U. Schreiber和D. Stevenson，主 ∞-丛——一般理论，《同伦关系结构杂志》10（2015），749–801, [doi:10.1007/s40062-014-0083-6], [arXiv:1207.0248]。[NPS90] B. Nordstr¨om、K. Petersson和J. M. Smith，《Martin-L¨of类型论中的编程》，牛津大学出版社（1990）， [www.cse.chalmers.se/research/group/logic/book]。[No09] U. Norell，在Agda中进行依赖类型编程，载于《高级函数式编程AFP 2008》，《计算机科学讲义》5832（2009），230-266, [doi:10.1007/978-3-642-04652-0 5]。[OP99] R. W. Ogburn和J. Preskill，拓扑量子计算，载于：Williams, C.P.（编），《量子计算与量子通信》，《计算机科学讲义》1509，341，施普林格，柏林（1999），[doi:10.1007/3-540-49208-9-31]。[Pa12] J. K. Pachos，《拓扑量子计算导论》，剑桥大学出版社（2012），[doi:10.1017/CBO9780511792908]。[Pa98] E. Palmgren，类型论中的宇宙，载于：《构造性类型论二十五年》，牛津大学出版社（1998），191–204, [doi:10.1093/oso/9780198501275.003.0012]。[PM93] C. Paulin-Mohring，Coq系统中的归纳定义——规则与性质，载于：《类型化λ演算及其应用TLCA 1993》，《计算机科学讲义》664，施普林格（1993）， [doi:10.1007/BFb0037116]。[Pav91] D. Pavlovi´c，范畴插值：无需直接像的下降与贝克-切瓦利条件，载于：《范畴论》，数学讲义1488，施普林格，柏林（1991）， [doi:10.1007/BFb0084229]，[isg.rhul.ac.uk/dusko/papers/1990-BCDE-Como.pdf]。[Po98] A. Polyakov，《弦理论与夸克禁闭》，《核物理会议增刊》68（1998），1-8，[doi:10.1016/S0920-5632(98)00135-2], [arXiv:hep-th/9711002]。[Po99] A. Polyakov，洞穴之墙，《国际现代物理学杂志A》14（1999），645-658, [arXiv:hep-th/9809057]，[doi:10.1142/S0217751X99000324]。[Po02] A. Polyakov，《规范场与时空》，《国际现代物理学杂志A》17 S1（2002），119-136, [arXiv:hep-th/0110196]，[doi:10.1142/S0217751X02013071]。[PE97] P. Potts和A. Edalat，精确实数计算，预印本（1997），[ncatlab.org/nlab/files/PottsEdalat-ExactRealComputerArithmetic.pdf]。[Pr18] J. Preskill，NISQ时代及之后的量子计算，《Quantum》2（2018） 79, [arXiv:1801.00862]，[doi:10.22331/q-2018-08-06-79]。[Pr22] J. Preskill，量子信息物理学，在第二十八届索尔维物理学会议“量子信息物理学”专题报告（2022）， [arXiv:2208.08064]。[Qu67] D. Quillen，同伦代数，《数学讲义》43，施普林格（1967）， [doi:10.1007/BFb0097438]。[RSDC22] A. Rajak、S. Suzuki、A. Dutta和B. K. Chakrabarti，量子退火：综述，《英国皇家学会哲学汇刊A》381（2022）20210417

, [doi:10 . 1098/rsta . 2021 . 0417], [arXiv:2207 . 01827].

[Rao16] S. Rao, 《阿贝尔任意子与非阿贝尔任意子简介》, 载于: 拓扑学与凝聚态Phys. Texts & Read. in Phys. Sci. **19**施普林格（2017）, 399-437, [doi:10.1007/978-981-10-6841-6_16], [arXiv:1610.09260].[Re22] J. M. Renes, 《量子信息论》, 德古意特, 巴塞尔（2022）, [doi:10.1515/9783110570250].[Re10] C. Rezk, 《拓扑斯与同伦拓扑斯》, 讲义 2010, [ncatlab.org/nlab/files/RezkHomotopyToposes.pdf]
[RZ16] M. Rho 和 I. Zahed（编）, 《多面斯格明子》, 世界科学出版社, 新加坡（2016）, [doi:10.1142/9710].[Ri20] B. Richter, 《从范畴到同伦论》, 《剑桥高等数学研究》188, 剑桥大学出版社（2020）, [doi:10.1017/9781108855891].[RP11] E. Rieffel 和 W. Polak, 《量子计算——温和的入门介绍》, 麻省理工学院出版社, 波士顿（2011）, [ISBN:9780262526678].[Ri14] E. Riehl, 《范畴同伦论》, 剑桥大学出版社（2014）, [ISBN:9781107048454].[Ri22] E. Riehl, 《同伦类型论的 ∞-拓扑斯语义》, Logic and higher structures 讲座, CIRM（2022年2月）, [emilyriehl.github.io/files/semantics.pdf].[RO12] G. Rigolin 和 G. Ortiz, 《具有谱简并的量子系统的绝热定理》, 《物理评论 A》85（2012）062111, [doi:10.1103/PhysRevA.85.062111], [arXiv:1111.5333].[Ri18] E. Rijke, 《同伦类型论导论》, 卡内基梅隆大学讲座（2018）[www.andrew.cmu.edu/user/erijke/hott] [ncatlab.org/nlab/files/Rijke-IntroductionHoTT-2018.pdf].[Ri19] E. Rijke, 《类型分类》, 博士论文, 卡内基梅隆大学, [arXiv:1906.09435].[Ri23] E. Rijke, 《同伦类型论导论》, 剑桥大学出版社（即将出版）, [arXiv:2212.11082].[RSS20] E. Rijke、M. Shulman 和 B. Spitters, 《同伦类型论中的模态》, 《逻辑方法与计算机科学》16（2020）1, [doi:10.23638/LMCS-16(1:2)2020], [arXiv:1706.07526].[RS15] E. Rijke 和 B. Spitters, 《同伦类型论中的集合》, 《数学结构与计算机科学》25 5（2015）, 1172-1202, [doi:10.1017/S0960129514000553], [arXiv:1305.3835].[Ri22] M. Riley, 《用于合成稳定同伦论的束状同伦类型论》, 博士论文, 卫斯理大学（2022）, [doi:10.14418/wes01.3.139].[RPYLG21] T. Ringer、R. Porter、N. Yazdani、J. Leo 和 D. Grossman, 《跨类型等价的证明修复》, [arXiv:2010.00774].[Ro22] C. D. Roberts, 《质子质量的起源》, [arXiv:2211.09905].[Ro21] C. D. Roberts, 《论质量与物质》, 亚太物理学会联合会公报31（2021）6, [doi:10.1007/s43673-021-00005-4], [arXiv:2101.08340].[RS20] C. D. Roberts 和 S. M. Schmidt, 《对强子质量涌现的反思》, 《欧洲物理学杂志·专题》229（2020）, 3319–3340, [doi:10.1140/epjst/e2020-000064-6], [arXiv:2006.08782].[Ro95] J. J. Rotman, 《群论导论》, 施普林格, 柏林（1995）, [doi:10.1007/978-1-4612-4176-8].[Ro88] J. J. Rotman, 《代数拓扑导论》, 《数学研究生教材》119, 施普林格, 柏林（1988）, [doi:10.1007/978-1-4612-4576-6].[Ro22] E. Rowell, 《辫子、运动与拓扑量子计算》, [arXiv:2208.11762].[RW18] E. C. Rowell 和 Z. Wang, 《拓扑量子计算数学》, 《美国数学会通报》55（2018）, 183-238, [doi:10.1090/bull/1605], [arXiv:1705.06206].[Ru64] W. Rudin, 《数学分析原理》, 麦格劳-希尔（1976）, [ISBN13:9780070542358].[RS17] G. Rudolph 和 M. Schmidt, 《微分几何与数学物理——第二部分: 纤维丛、拓扑学与规范场》, 施普林格, 柏林（2017）, [doi:10.1007/978-94-024-0959-8].[RW1910] B. Russell 和 A. Whitehead, 《数学原理》, 剑桥大学出版社（1910, 1927）, [ISBN:9780521067911].[QP] 通过线性同伦类型进行量子编程, 编写中。[Sak20] K. Sakaguchi, 《验证数学结构》, 载于: 《自动推理》。IJCAR 2020, 《计算机科学讲义》12167, 施普林格（2020）, [doi:10.1007/978-3-030-51054-1_8].[San11] A. Santini, 《拓扑群胚》, 候选人项目, 哥本哈根大学（2011）, [ncatlab.org/nlab/files/Santini-Groupoids.pdf].[Sa23] H. Sati, 《通过扭曲等变微分（TED）K理论研究 M理论与物质》, M理论与数学2023、CQTS @ 纽约大学阿布扎比分校演讲（2023）。[SS22-Conf] H. Sati 和 U. Schreiber, 《微分上同伦通过构形空间与弦图推出相交膜可观测量》, 《高等理论数学物理》26（2022）4, [ISSN:1095-0753], [arXiv:1912.10425].[SS20-Tad] H. Sati 和 U. Schreiber, 《等变上同伦推出定向平面膜蝌蚪抵消》, 《几何与物理学杂志》156（2020）, 103775, [doi:10.1016/j.geomphys.2020.103775], [arXiv:1909.12277].[SS20-Orb] H. Sati 和 U. Schreiber, 《适当轨形上同调》, [arXiv:2008.01101]。

[SS21-MF] H. Sati 和 U. Schreiber, 《M/F理论作为 Mf-理论》, [arXiv:2103.01877].[SS21-Bun] H. Sati 和 U. Schreiber, 《等变主 ∞-丛》, [arXiv:2112.13654].[SS22-Def] H. Sati 和 U. Schreiber, 《TED-K理论中的任意子缺陷膜》, 《数学物理评论》（2023）, [doi:10.1142/S0129055X23500095], [arXiv:2203.11838].[SS22-Ord] H. Sati 和 U. Schreiber, 《TED-K理论中的任意子拓扑序》, 《数学物理评论》（2023）, [doi:10.1142/S0129055X23500010], [arXiv:2206.13563].[SS22-TQC] H. Sati 和 U. Schreiber, 《TED-K中的拓扑量子编程》, PlanQC 2022 33（2022）, [arXiv:2209.08331], [ncatlab.org/schreiber/show/Topological+Quantum+Programming+in+TED-K].[SSS12] H. Sati、U. Schreiber 和 J. Stasheff, 《扭曲微分弦结构与五膜结构》, 《数学物理通讯》315（2012）, 169-213, [doi:10.1007/s00220-012-1510-3], [arXiv:0910.4001].[Sau17] J. Sau, 《可扩展拓扑量子计算机路线图》, 《物理学》10（2017）68, [physics.aps.org/articles/v10/68].[Sc13] U. Schreiber, 《凝聚 ∞-拓扑斯中的微分上同调》, 教授资格论文, [arXiv:1310.7930].[Sc14a] U. Schreiber, 《通过线性同伦类型进行量子化》, 讲座笔记, 巴黎第七大学和维也纳 ESI（2014）, [arXiv:1402.7041].[Sc14b] U. Schreiber, 《凝聚同伦类型论中的微分广义上同调》, 数学形式化讲座, H. Poincaré 研究所, 巴黎（2014年5月）, ´ncatlab.org/schreiber/files/SchreiberParis2014.pdf []Sc[U. Schreiber, 《关于模态同伦类型论未来的一些思考》, 德国数学会会议, 汉堡（2015年9月）, 15] ncatlab.org/schreiber/files/SchreiberDMV2015b.pdf []Sc22a[U. Schreiber, 《来自缺陷膜的量子计算纽结》, 数学物理拓扑方法研讨会, 埃里切（2022年9月）,] ncatlab.org/schreiber/show/Knots[for+quantum+computation+from+defect+branes+.]Sc22b[U. Schreiber, 《通过线性同伦类型论实现量子数据类型》, 量子软件 @ QTML2022 研讨会, 那不勒斯（2022年11月）,] ncatlab.org/schreiber/files/QuantumDataInLHoTT-221117.pdf []Sc[U. Schreiber, 《来自 M理论的拓扑量子门》, M理论与数学2023、CQTS @ 纽约大学阿布扎比分校演讲（2023年）。23] ScSh[U. Schreiber 和 M. Shulman, 《凝聚同伦类型论中的量子规范场论》, EPTCS 158（2014）, 109-14] doi:10.4204/EPTCS.158.126, [arXiv:1408.8], [.0054]Schu[H. Schubert, 《范畴》, 施普林格, 柏林（1972）, 72] doi:10.1007/978-3-642-65364- [.3]Schw[J. Schwarz, 《第二次超弦革命》, 萨哈罗夫会议演讲（莫斯科, 1996年5月）, 96] inspire:[arXiv:hep-th/969846], [.9607067]Sc[D. S. Scott, 《计算数学理论纲要》, 载于: 第四届普林斯顿信息科学与系统年会论文集（1970）, 169–70] ncatlab.org/nlab/files/Scott-TheoryOfComputation.pdf176, []ScSt[D. S. Scott 和 C. Strachey, 《走向计算机语言的数学语义学》, 牛津大学计算实验室, 技术专著 PRG-6（1971）, 71] www.cs.ox.ac.uk/files/3228/PRG06.pdf []See[R. A. G. Seely, 《局部笛卡尔闭范畴与类型论》, 《剑桥哲学学会数学学报》95（1984）, 33-48, 84] doi:10.1017/S[.0305004100061284]Se[G. Segal, 《构形空间与迭代环空间》, 《数学发明》21（1973）, 213-221, 73] doi:10.1007/BF[.01390197]Se[P. Selinger, 《迈向量子编程语言》, 《数学结构与计算机科学》14（2004）, 527–586, 04] doi:10.1017/S[.0960129504004256]Sh[P. W. Shor, 《量子计算算法: 离散对数与因数分解》, 第三十五届计算机科学基础年会论文集（1994）, 124-94] doi:10.1109/SFCS.1994.134, [.365700]Sh[P. W. Shor, 《降低量子计算机存储器退相干的方案》, 《物理评论 A》52（1995）R2493(R), 95] doi:10.1103/PhysRevA.52.R[.2493]Sh[M. Shulman, 《同伦类型论微型课程》, 斯旺西大学（2012）, 12] http://home.sandiego.edu/[shulman/hottminicourse~.2012]Sh[M. Shulman, 《逆图表的单值性与同伦规范性》, 《数学结构与计算机科学》25 5（2015）, 1203-15] doi:10.1017/S1277, [arXiv:1203.0960129514000565], [.3253]Sh[M. Shulman, 《实凝聚同伦类型论中的布劳威尔不动点定理》, 《数学结构与计算机科学》28（6）（2018）, 856-18] doi:10.1017/S941, [arXiv:1509.0960129517000147], [.07584] Sh[M. Shulman, 《所有（19] ,1）-拓扑斯都具有严格单值宇宙》, ∞arXiv:1904. [.07004]Si[B. Simon, 《全纯、量子绝热定理与贝里相位》, 《物理评论快报》51（1983）, 2167-2170, 83] doi:10

. 1103/PhysRevLett .51 .2167].

[Si97] D. R. Simon，论量子计算的能力，SIAM《计算杂志》26 5（1997），[doi:10.1137/S0097539796298637]。[Si21] S. H. Simon，《拓扑量子》，讲义和原型书（2021），[www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2021/TopoBook-Sep1-2021.pdf][Si99] C. Simpson，作为∞-预拓扑斯的与闭模型范畴相关联的单纯范畴的吉罗型刻画，[arXiv:math/9903167]。[SK95] K. Slonneger 和 B. Kurtz，指称语义，《程序设计语言的形式语法与语义》，Addison-Wesley（1995），[https://homepage.divms.uiowa.edu/~slonnegr/plf/Book/]。[So00] R. Solovay，李群与量子电路，报告于：量子计算数学研讨会，数学科学研究所（2000），[msri.org/workshops/189/schedules/12826]。[SU06] M. H. Sorensen 和 P. Urzyczyn，Curry-Howard同构讲义，逻辑研究149，爱思唯尔（2006），[ISBN：9780444520777]。[Sp66] E. Spanier，代数拓扑，麦格劳-希尔（1966），施普林格（1982），[doi:10.1007/978-1-4684-9322-1]。[St20] T. D. Stanescu，《拓扑量子物质与量子计算导论》，CRC出版社（2020），[ISBN：9780367574116]。[St43] N. Steenrod，《局部系数同调》，《数学年刊》，第二辑44（1943），610-627, [jstor:1969099]。[SL13] A. Stern 和 N. H. Lindner，拓扑量子计算——从基本概念到首次实验，《科学》339 6124（2013），1179-1184, [doi:10.1126/science.1231473]。[St93] T. Streicher，内涵型论研究，教授资格论文，达姆施塔特（1993），[ncatlab.org/nlab/files/Streicher-IntensionalTT.pdf][Str13] F. Strocchi，《量子场论非微扰基础导论》，牛津大学出版社（2013），[doi:10.1093/acprof:oso/9780199671571.001.0001]。[Str11] J. Strom，现代经典同伦论，数学研究生教材127，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2011），[doi:10.1090/gsm/127]。[St16] A. Stump，《Agda中的经验证的函数式编程》，计算机协会和 Morgan & Claypool（2016），[doi:10.1145/2841316]。[Th91] S. Thompson，《类型论与函数式编程》，Addison-Wesley（1991），[ISBN：0201416670]。[TH01] I. Todorov 和 L. Hadjiivanov，辫群的单值化表示，《物理原子核》64（2001），2059-2068, [doi:10.1134/1.1432899], [arXiv:hep-th/0012099]。[TV] B. To¨en 和 G. Vezzosi，同伦代数几何 I：拓扑斯理论，《数学进展》193 2（2005），257-372，[doi:10.1016/j.aim.2004.05.004], [arXiv:math/0207028]。[tD87] T. tom Dieck，《变换群》，de Gruyter（1987），[doi:10.1515/9783110858372]。[tD08] T. tom Dieck，《代数拓扑》，欧洲数学会（2008），[doi:10.4171/048]。[Tr69] A. S. Troelstra，《直觉主义原理》，数学讲义95，施普林格，柏林（1969），[doi:10.1007/BFb0080643]。[Tr77] A. S. Troelstra，《构造数学的若干方面》，《逻辑与数学基础研究》90（1977），973-1052, [doi:10.1016/S0049-237X(08)71127-3]。[TvD88] A. S. Troelstra 和 D. van Dalen，《数学中的构造主义——导论》，第1卷，《逻辑与数学基础研究》121，North Holland（1988），[ISBN：9780444702661]。[Ts17] D. Tsementzis，作为结构主义基础的单值基础，《综合》194 9（2017），3583–3617，[doi:10.1007/s11229-016-1109-x]。[UniMath] UniMath，[unimath.github.io/UniMath], [unimath.github.io/agda-unimath]。[UFP13] 单值基础项目，《同伦类型论——数学的单值基础》，高等研究院，普林斯顿，2013, [homotopytypetheory.org/book]。[Va21] S. J. Valera，$(2+1)$-维中由交换对称性导出的融合结构，《物理年刊》429（2021）168471，[doi:10.1016/j.aop.2021.168471], [arXiv:2004.06282]。[vdBG11] B. van den Berg 和 R. Garner，类型是弱 ω-群胚，伦敦数学会会刊102 2（2011）370-394, [doi:10.1112/plms/pdq026], [arXiv:0812.0298]。[Va18] D. Vanderbilt，《电子结构理论中的贝里相位——电极化、轨道磁化与拓扑绝缘体》，剑桥大学出版社（2018），[doi:10.1017/9781316662205]。[vD18] F. van Doorn，关于高阶归纳类型与合成同伦论的形式化，博士论文，卡内基梅隆大学（2018），[arXiv:1808.10690]。[VW21] N. Veltri 和 N. van der Weide，将高阶归纳类型构造为群胚商，《计算机科学中的逻辑方法》17 2（2021）

，[doi:10 ·23638/LMCS-17(2:8)2021]，[arXiv:2002 ·08150].

[VMA19] A. Vezzosi、A. M¨ortberg 和 A. Abel，《立方 Agda：一种具有单值性和高阶归纳类型的依赖类型编程语言》，《美国计算机协会编程语言论文集》3 ICFP 87（2019），1–29，[doi:10.1145/3341691].[Vo10] V. Voevodsky，单值基础项目，资助提案申请（2010），[ncatlab.org/nlab/files/Voevodsky-UFP2010.pdf].[Vo03I] C. Voisin，《霍奇理论与复代数几何学 I》，L. Schneps 译，剑桥大学出版社（2002/3），[doi:10.1017/CBO9780511615344].[Vo03II] C. Voisin，《霍奇理论与复代数几何学 II》，L. Schneps 译，剑桥大学出版社（2002/3），[doi:10.1017/CBO9780511615177].[vN32] J. von Neumann，《量子力学的数学基础》，施普林格（1932，1971），[doi:10.1007/978-3-642-96048-2]；译本为：《量子力学的数学基础》，普林斯顿大学出版社（1955），[doi:10.1515/9781400889921].[Vui88] J. Vuillemin，《使用连分数进行精确实数计算》，载于 LFP '88：1988 年美国计算机协会 LISP 与函数式编程会议论文集（1988），第 14-27, [页，doi:10.1145/62678.62681].[Wa15] P. Wadler，《命题即类型》，《美国计算机协会通讯》58 12（2015），75–84, [，doi:10.1145/2699407].[Wa10] Z. Wang，《拓扑量子计算》，CBMS 数学区域会议丛书 112，美国数学会（2010），[ISBN-13:978082184930-9].[W¨a] D. W¨arn，《同伦类型论中的 Eilenberg-MacLane 空间与稳定化》，[arXiv:2301.03685].[Wei96] A. Weinstein，《群胚：统一内外对称性——若干实例巡礼》，《美国数学会通报》43（1996），744-752, [www.ams.org/notices/199607/weinstein.pdf].[We17] F. Wellen，《模态同伦类型论中的嘉当几何》，博士论文，KIT 2017，[arXiv:1806.05966].[ncatlab.org/schreiber/show/thesis+Wellen].[We91] X.-G. Wen，《强关联量子液体中的拓扑序与陈-西蒙斯理论》，《现代物理学国际杂志 B》05 10（1991），1641-1648, [doi:10.1142/S0217979291001541].[WZ84] F. Wilczek 和 A. Zee，《简单动力系统中规范结构的出现》，《物理评论快报》52 24（1984），2111-2114, [doi:10.1103/PhysRevLett.52.2111].[Will20] L. Williams，《面向本科生的构型空间》，罗斯-霍尔曼本科数学期刊 21（2020）8，[rhumj:vol21/iss1/8], [arXiv:1911.11186].[Wils18] J. C. H. Wilson，《辫群的几何与拓扑》，2018 年芝加哥几何与拓扑暑期学校讲座（2018），[ncatlab.org/nlab/files/Wilson-BraidGroups.pdf].[YG91] C. N. Yang 和 M. L. Ge（编），《辫群、纽结理论与统计力学》，《数学物理进展丛书》9，世界科学出版社，新加坡（1991），[doi:10.1142/0796].[YD95] C.-K. Yap 和 T. Dub´e，《精确计算范式》，载于《欧几里得几何中的计算》，《计算丛书讲义》，世界科学出版社（1995），452-492, [doi:10.1142/9789812831699 0011].[ZLSS15] J. Zaanen、Y. Liu、Y.-W. Sun 和 K. Schalm，《凝聚态物理中的全息对偶》，剑桥大学出版社（2015），[doi:10.1017/CBO9781139942492].[ZR99] P. Zanardi 和 M. Rasetti，《全纯量子计算》，《物理学快报 A》264（1999），94-99，[doi:10.1016/S0375-9601(99)00803-8], [arXiv:quant-ph/9904011].[Zu75] J. Zucker，《Automath 中经典数学的形式化》，《国际科学研究中心专题讨论会》249（1975），135-145, [www.win.tue.nl/automath/archive/webversion/aut042/aut042.html]；另见：《逻辑与数学基础研究》133（1994），127-139, [doi:10.1016/S0049-237X(08)70202-7].[ZW20] A. Zulehner 和 R. Wille，《量子电路的模拟与设计》，载于《可逆计算：拓展计算视野。RC 2020》，《计算机科学讲义》12070，施普林格，纽约（2020），[doi:10.1007/978-3-030-47361-7 3]。