复离散 Ginzburg–Landau 方程的耗散局域结构

Dirk Hennig 和 Nikos I. Karachalios*Department of Mathematics, University of Thessaly, Lamia GR35100, Greece*

Jes´us Cuevas-Maraver*Grupo de Física No Lineal, Departamento de Física Aplicada I, Universidad de Sevilla. Escuela Politécnica Superior C/ Virgen de África 7 , , , 41011-Sevilla, Spain*Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS). Edificio Celestino Mutis. Avda. Reina Mercedes s/n, 41012-Sevilla, Spain（日期：2023年3月7日）

复离散 Ginzburg–Landau 方程是非线性晶格动力学的基本模型，其中包含竞争性耗散和能量增益效应。这些机制对于研究许多物理情境下局域结构的存续与毁灭尤为重要。在这项工作中，我们通过引入一种动力传递性论证，证明复离散 Ginzburg–Landau 方程中的耗散孤子波形能够持续相当长的时间。该论证结合了“无黏极限”与“解对初始数据的连续依赖性”这两个概念，考察耗散系统与其哈密顿对应系统之间的关系。因此，它确立了 Ginzburg–Landau 晶格的解与由离散非线性薛定谔晶格和阿布洛维茨-拉迪克晶格描述的保守理想系统之解的接近性。当系统的初始条件在适当度量下足够小，且耗散或增益强度较小时，这种接近性便成立。我们的数值结果与关于耗散亮孤子、暗孤子乃至佩里格林型孤子波形动力学的解析预测高度吻合。

arXiv:2303.02383v1 [nlin.PS] 4 Mar 2023

I. 引言

复离散金兹堡-朗道方程（DGL）在其标准局部形式下

$$\frac{du_n}{dt} = u_n + (1+i\alpha)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - (1+i\beta)\,|u_n|^2 u_n, \quad u_n \in \mathbb{C} \;\; n \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

是众多物理背景中出现的基本离散耗散非线性晶格之一，例如耦合波导、激光器以及低维流体动力系统的动力学 [1]-[9]。DGL 格点的一个重要特征是，它与具有重要物理意义的离散非线性薛定谔方程（DNLS）[10]-[13],相联系

$$i\frac{d\phi_n}{dt} = -\alpha(\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n) + \beta|\phi_n|^2\phi_n, \tag{1.2}$$

即 α，$\beta \to \infty$。将（1.1）和（1.2）除以 α，按 $\tau = \alpha t$ 对时间进行缩放，并记 $\epsilon = 1/\alpha$ 和 $\kappa = \beta/\alpha$，可得 DGL（1.1）和 DNLS（1.2）分别改写为如下形式

$$i\frac{du_n}{d\tau} = i\epsilon u_n + (i\epsilon - 1)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - (i\epsilon - \kappa)\,|u_n|^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

and

$$i\frac{d\phi_n}{d\tau} = -(\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n) + \kappa|\phi_n|^2\phi_n. \tag{1.4}$$

因此，方程（1.4）是在 $\epsilon \to 0^+$的极限下由（1.3）得到的，因而（1.3）可视为（1.4）的耗散扩展。注意，若 α, $\beta \to \infty$，则 κ 的值由 α 和 β 发散的速率决定；对于较大但有限的 α，当 β 处于同一数量级时，有 $\kappa \sim \mathcal{O}$（1）。参数 κ的符号使 DNLS系统呈现聚焦（$\kappa < 0$）或散焦（$\kappa > 0$）特性。

守恒DNLS方程 (1.4) 是不可积的，作为离散介质中局域结构动力学的通用模型，它吸引了广泛关注。人们已通过多种计算和解析方法证实了DNLS方程 (1.4) 中离散呼吸子和离散孤子结构的存在，这些方法涵盖从反连续极限方法到同宿、渐近和变分方法；代表性研究见 [14]-[22] 及其中的参考文献。值得指出的是，关于其存在性的一项主要问题

是，DNLS方程中的行进孤子可能因Peierls-Nabarro势垒而被局域钉扎 [23]。Ablowitz-Ladik（AL）晶格则不存在这种情况

$$i\frac{d\psi_n}{dt} = -(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) + \kappa(\psi_{n+1} + \psi_{n-1})|\psi_n|^2, \ \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.5}$$

该方程是可积的（通过 逆散射变换法 [24]），具有多种解析孤立波解 [25–28], ，并且具 有连续平移对称性，使其能够沿晶格传播。

由于离散局域模的存在涉及保守理想系统 (1.4) 和 (1.5)，因此，无论从数学角度还是物理应用角度来看，一个重要的问题是：在存在线性或非线性增益/损耗效应的情况下，离散孤子结构在多大程度上能够持续存在或存活？对于更现实地描述物理装置而言，这些效应具有重要意义，因而不可忽略。

关于数值识别以及构造包含三次型和其他幂律型、可饱和非线性和/或类似于AL系统非局域非线性的非局域项的 DGL 系统的解析或近似孤子解的代表性工作包括 [29]-[33]。除其物理意义和相关性之外，DGL 系统中非局域项的存在似乎对于识别或构造从可积AL极限中产生的解分岔而来的局域模具有重要作用。这类方法向二维系统的扩展见 [34–36]。

在本文中，我们旨在通过研究 DGL 方程 (1.3) 的局域结构的潜在持久性和演化性质，回答上述问题，并借助我们近期关于涉及局部和非局部非线性的非线性晶格解的动力学一致性结果 [37],[38]。特别地，通过传递性论证，我们建立了耗散增益-损耗方程 (1.3) 的解与 AL 格点 (1.5) 的解之间的接近性结果，即在极限 $\epsilon \to 0$ 下，当初始条件在 l^2 或 l^∞-度量下足够接近，且在相关范数下足够小时，二者的解彼此接近。

让我们进一步分析这一传递性论证。第一步是证明，对于任意 $\epsilon > 0$，DGL (1.3) 的解与 DNLS (1.4) 的解在如下“对初始数据的连续依赖”意义下彼此接近：如果它们的初始条件满足 $||u_0 - \phi_0||_{l^2} \le K_0\varepsilon$，对于任意 $0 < \varepsilon < 1$、$\epsilon \le \varepsilon$，存在某个常数 $K_0 > 0$，则相应的解满足 $||u(t) - \phi(t)|| \le C\varepsilon$，对所有 $t \in [0, T_f]$、任意 $0 < T_f < \infty$ 均成立，并且该常数具有 $C = C(u_0, \phi_0, \kappa, T_f)$ 的形式。在极限 $\varepsilon \to 0$下，我们重新考察 DGL (1.3) 的“无黏性”极限，即 DNLS (1.4)（在耗散离散非线性薛定谔方程的情形下，另见 [39]）。第二步，通过采用 [37, 定理 1.1（第 349], 页）的接近性结果，我们能够将“连续依赖”结果用于我们的目的；这一次研究的是 DNLS (1.4) 的解与 AL 格点 (1.5) 的解之间的关系：假设它们的初始条件~满足 $||\phi_0 - \psi_0||_{l^2} \le C_0\,\varepsilon$，对于任意 $\varepsilon > 0$，则可证明形如 $||\phi(t) - \psi(t)||_{l^2} \le C\varepsilon$ 的估计，其中~ ~再次有 $C = C(\phi_0, \psi_0, \kappa, T_f)$ 的形式。因此，结合上述两个结果，可以得到：当 DCGL 方程 (1.3) 中 $\epsilon \to 0$时，其解收敛于 AL 格点 (1.5) 的解；当它们的初始数据之间的距离$||u^0 - \psi^0||_{l^2} \to 0$，且 $\varepsilon \to 0$ 时，这一收敛通过解析估计得出，并且遵循上述所述的相同 “ 对初始数据的连续依赖 ” 意义。

这一结果的意义在于，对于较小的 $\epsilon > 0$ 值，哈密顿 AL 格点 (1.5) 的解析孤立波解应当能在耗散 DGL 晶格 (1.3) 中持续存在有限时段，而且该时段可以足够长（取决于系统初始数据的接近性和小量性）。具体而言，相应的耗散局域结构在其存续期间应具有与 *AL* 格点解析解接近的函数形式和特征。这些结构包括亮孤子和暗孤子，甚至还包括离散有理解，例如离散佩雷格林孤子。对于 DGL 中存在的所有不同耗散或增益效应情形，这些结果均成立；这些效应会影响解的最大存在区间。

此处需要指出，在 DGL (1.3) 中， ϵ 取正值至关重要。当 $\epsilon > 0$ 时，它可确保对于任意初始数据，解均整体存在，因为情形 $\epsilon > 0$ 对应于线性增益和非线性损耗，分别由项 ϵu_n 和 $\epsilon|u_n|^2u_n$ 表示。为了研究不同增益/损耗情形下局域结构的动力学，我们考虑 (1.3) 的如下变体

$$i\frac{du_n}{dt} = i\epsilon_1 u_n + (i\epsilon_2 - 1)(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - (i\epsilon_3 - \kappa)\,|u_n|^2 u_n, \ \ |\epsilon_i| = \epsilon > 0, \ \ i = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

尽管上述接近性结果在 $|\epsilon_i| = \epsilon \to 0$ 的情况下对 DGL方程 (1.6) 有效，但研究动力学的时间区间 $[0, T_f]$ 应为有限区间，其中 $T_f < T_{\max}$，而 $[0, T_{\max})$ 是方程 (1.6) 解的一般最大存在区间。这一限制源于在线性增益与非线性增益，或线性损耗与非线性增益机制下，解可能在有限时间内发生坍缩（爆破） $T_{\max}$。这与哈密顿DNLS和AL格点形成鲜明对比，后者的解在所有时间内均存在。鉴于这种行为，我们通过数值方法检验了增益与损耗不同机制下 DGL 系统 (1.6) 的理论结果。数值实验结果与关于解的接近性以及上述机制下耗散局域结构整体动力学的解析预测高度吻合。

本文的安排如下：在第二节中，我们证明 DCGL (1.6) 与 AL 格点 (1.5) 的解之间的解析接近性/收敛结果。第三节专门讨论数值研究。在第三节的第一部分，我们证明有限晶格近似解在所有线性和非线性增益/损耗机制下的全局渐近行为的分析结果。这些分析结果对于解释直接数值模拟所展示的耗散局域结构的观测动力学尤为有用。直接数值模拟结果将在第三节第二部分呈现。我们想要指出，这类结果凸显了解的潜在全局渐近稳定性或不稳定性问题的重要性：若针对 DGL方程构造出精确解析解（或其他近似解）（例如参见 [40, 41], [42, 第 208] 页），并对其施加微小扰动，那么它们应遵循本文分析的整体动力学，并在长期演化中表现出不稳定性，其形式包括衰减、坍缩，或收敛至系统全局吸引子所描述的其他渐近状态。第四节总结主要结果，并讨论未来可能开展的研究。

II. 无黏极限与接近性定理

a. 预备知识：解的局部存在性与整体存在。 本文所研究的非线性晶格中涉及的函数空间框架以及线性和非线性算子的性质，见 [37, 38] 及其中的参考文献。特别地，对于 DGL 系统 (1.6)，我们可以证明其在序列空间中的以下局部解存在性结果

$$l^p = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C} \ | \ ||u||_{l^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p \right)^{1/p} \right\}, \ \ 1 \le p \le \infty. \tag{2.7}$$

命题 II.1 任取 $|\epsilon_i| = \epsilon > 0$、 $\kappa \in \mathbb{R}$ 和初始条件 $u(0) = u^0 \in l^2$ 。存在某个$T_{\max}(u^0) > 0$，使得 ***DGL*** 系统 (1.6) 对所有 $0 < T_f < T_{\max}$ 都存在唯一解 $u \in C^1([0, T_f], l^2)$。此外，以下两种情况必有一种成立：要么 $T_{\max} = \infty$ （整体存在），要么 $T_{\max} < \infty$ 且 $\lim_{t\uparrow T_{\max}} ||u(t)||_{\ell^2} = \infty$ （有限时间内坍缩或爆破）。此外，解 u 关于初始条件 $u^0 \in l^2$ 连续依赖，其中连续性相对于 $C([0, T_f], l^2)$ 的范数而言。

我们回顾一下，命题 II.1 的证明使用了连续嵌入

$$l^r \subset l^s, \ \ ||w||_{l^s} \le ||w||_{l^r}, \ \ 1 \le r \le s \le \infty, \tag{2.8}$$

在后文推导各种估计时也将使用这些连续嵌入。

必须特别指出的是，DGL 系统 (1.6)、哈密顿DNLS (1.4) 与 AL 格点 (1.5) 之间存在一个显著差异：DNLS 的解全局存在，而无条件依赖于初始数据的大小以及参数 κ 的符号。这归因于 DNLS系统 (1.4) 满足以下量的守恒律，即功率 P 和哈密顿量 H

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\phi_n|^2, \\ H &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(|\phi_{n+1} - \phi_n|^2 + \frac{\kappa}{2}|\phi_n|^4 \right), \end{aligned}$$

对于 AL系统 (1.5)，相应的量则是修正幂 P_{AL} 和哈密顿量 H_{A} $\qquad\qquad$ L

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{AL}} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ln\left(1 - \kappa|\psi_n|^2\right), \\ H_{\mathrm{AL}} &= \sum_{n} \overline{\psi}_n(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

参数 κ 的符号决定非线性是聚焦（$\kappa < 0$）还是散焦（$\kappa > 0$）。对于 DNLS 和 AL 格点，我们有以下命题，而非命题 II.1。

命题 II.2 *1.* 设 *DNLS* 方程(1.4) 中的 $\kappa \in \mathbb{R}$ （聚焦或散焦）以及 *AL* 方程(1.5) 中的 $\kappa < 0$ （聚焦）满足相应条件，且初始条件 $\phi(0) = \phi^0$、 $\psi(0) = \psi^0 \in l^2$ 任意。则它们的唯一解全局存在，即 $\phi, \psi \in C^1([0,\infty)\ l^2)$。特别地，相应的解满足

$$||\phi(t)||_{l^2}^2 = ||\phi^0||_{l^2}^2, \ \ for\ all\ t \in [0,\infty), \tag{2.9}$$
$$||\psi(t)||_{l^2}^2 \leq C_\kappa ||\psi^0||_{l^2}^2, \ \ for\ all\ t \in [0,\infty), \tag{2.10}$$

其中某个常数 $C_\kappa > 0$ 取决于参数 κ。

2. 考虑散焦 *AL* 方程 (1.5)，其中 $\kappa > 0$。假设初始条件 $\psi(0) = \psi^0$ 满足以下假设：

$$||\psi^0||_\infty < \frac{1}{\kappa} \ \ and \ \ P_{\mathrm{AL}}(0) < \infty. \tag{2.11}$$

那么，其唯一解全局存在，即 $\psi \in C^1([0,\infty)\ l^2)$，并满足估计式

$$||\psi(t)||_{l^2}^2 \leq C'_\kappa ||\psi^0||_{l^2}^2, \ \ for\ all\ t \in [0,\infty), \tag{2.12}$$

其中某个常数 $C'_\kappa > 0$ 也取决于参数 κ。

关于 AL 格点的命题 II.2 的证明，通过采用[37,引理 2.1和命题 3.1], 的论证即可完成，细节从略。

b. 接近性结果的证明。 下面我们将陈述并证明本文的主要分析结果。首先，我们将证明 DGL方程 (1.6) 与离散非线性薛定谔方程 (1.4) 的解之间的接近性，具体而言，就是它们对初始数据的连续依赖。这是引言中所述传递性论证的第一步。

定理 II.1 任取 $0 < |\epsilon_i| = \epsilon < 1$，并令 $[0, T_{\max})$ 为方程 (1.6)解的最大存在区间。考虑任意有限的 T_f，使得 $0 < T_f < T_{\max}$。对于任意满足 $\epsilon \leq \varepsilon$ 的 $0 < \varepsilon < 1$，存在正常数 $C(\kappa, T_f, ||u^0||_{l^2}, ||\phi^0||_{l^2})$，使得对于满足下列条件的初始数据 $u(0) = u^0$ 和 $\phi(0) = \phi^0$

$$||u^0 - \phi^0||_{l^2} \leq K_0 \varepsilon, \tag{2.13}$$

相应的解 *DGL*方程 (1.6) 和（缩放后的）*DNLS*方程 *(1.4)* 的相应解对于任意 $t \in [0, T_f]$ 都满足，

$$||u(t) - \phi(t)||_{l^2} \leq C\varepsilon. \tag{2.14}$$

证明： 我们将使用解之间的距离变量 $\Delta_n = u_n - \phi_n$。用 (1.6) 减去 (1.4)，可知它满足方程

$$\frac{d\Delta_n}{dt} = i\epsilon_1 u_n + (i\epsilon_2 - 2)\Delta_n - i\epsilon_3 |u_n|^2 u_n + \kappa \left[|u_n|^2 u_n - |\phi_n|^2 \phi_n \right]. \tag{2.15}$$

将 (2.15) 乘以 Δ_n，对 $\mathbb{Z}$ 求和并取虚部，得到：

$$\begin{aligned} \frac{d||\Delta||_{l^2}^2}{dt} = 2||\Delta||_{l^2} \frac{d||\Delta||_{l^2}}{dt} = \ & \epsilon_1 \mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{\Delta_n} + \epsilon_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta_{n+1} - \Delta_n|^2 \\ & - \epsilon_3 \mathrm{Re} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 u_n \overline{\Delta_n} + \kappa \mathrm{Im} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[|u_n|^2 u_n - |\phi_n|^2 \phi_n \right] \overline{\Delta_n}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

根据命题 II.1，存在常数 $M = M(\kappa,\ T_f,\ ||u^0||_{l^2})$，使得离散伽辽金方程 (1.6) 的解满足

$$||u||_{l^2} \leq M, \ \ \forall t \in [0, T_f], \tag{2.17}$$

而离散非线性薛定谔方程 (1.4) 的解满足守恒律 (2.9)。利用这些界、柯西–施瓦茨不等式以及包含关系 (2.8)，我们可以估计 (2.16) 右端的每一项。对于第一项和第三项，利用界 (2.17)，可得估计

$$\left|\epsilon_1 \mathrm{Re}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\overline{\Delta_n}\right| \le \epsilon||u||_{l^2}||\Delta||_{l^2} \le \epsilon M||\Delta||_{l^2}, \tag{2.18}$$

$$\left|\epsilon_3 \mathrm{Re}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 u_n\overline{\Delta_n}\right| \le \epsilon\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^6\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\Delta_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon||u||_{l^6}^3||\Delta||_{l^2} \le \epsilon||u||_{l^2}^3||\Delta||_{l^2} \le \epsilon M^3||\Delta||_{l^2}. \tag{2.19}$$

对于第四项，我们使用估计（2.9）和不等式

$$\left||u_n|^2u_n - |\phi_n|^2\phi_n\right| \le |\phi_n|^2|u_n-\phi_n| + |u_n|\left(|\phi_n|+|u_n|\right)|u_n-\phi_n|,$$

得出估计

$$\begin{aligned}\left|\kappa \mathrm{Im}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[|u_n|^2u_n - |\phi_n|^2\phi_n\right]\overline{\Delta_n}\right| &\le |\kappa|\,||\phi||_{l^\infty}^2||\Delta||_{l^2}^2 + |\kappa|\,||u||_{l^\infty}\left(||\phi||_{l^\infty}+||u||_{l^\infty}\right)||\Delta||_{l^2}^2\\ &\le |\kappa|\,||\phi||_{l^2}^2||\Delta||_{l^2}^2 + |\kappa|\,||u||_{l^2}\left(||\phi||_{l^2}+||u||_{l^2}\right)||\Delta||_{l^2}^2\\ &\le |\kappa|\,||\phi^0||_{l^2}^2||\Delta||_{l^2}^2 + |\kappa|\,M\left(||\phi^0||_{l^2}+M\right)||\Delta||_{l^2}^2\\ &= M_0||\Delta||_{l^2}^2,\ \ M_0 = |\kappa|\left[||\phi^0||_{l^2}(1+M)+M^2\right].\end{aligned} \tag{2.20}$$

我们设常数为 $M_1 = M+M^3$, $M_1 = M_1(\kappa,\ T_f,\ ||u^0||_{l^2})$ 和 $M_2 = M_0+4\epsilon$，其中 $M_0 = M_0((\kappa,\ T_f,\ ||u^0||_{l^2},\ ||\phi^0||_{l^2})$，由（2.20）可知。然后，根据（2.16）和估计（2.18）–（2.20），我们看到 $||\Delta||_{l^2}$ 满足线性微分不等式

$$\frac{d||\Delta||_{l^2}}{dt} \le \epsilon M_1 + M_2||\Delta||_{l^2}. \tag{2.21}$$

对 （2.21）积分（或应用格朗沃尔不等式），再结合关于初始数据的假设（2.13），可得 ：

$$\begin{aligned}||\Delta(t)||_{l^2} &\le ||\Delta(0)||_{l^2}\exp(M_2t) + \epsilon\frac{M_1}{M_2}\left[\exp(M_2t)-1\right]\\ &\le \varepsilon K_0\exp(M_2t) + \epsilon\frac{M_1}{M_2}\left[\exp(M_2t)-1\right],\ \ \forall t\in[0,T_f].\end{aligned} \tag{2.22}$$

因此，由于 $\epsilon \le \varepsilon$，式（2.14）中所述的估计在常数

$$C = K_0\exp(M_2T_f) + \frac{M_1}{M_2}\left[\exp(M_2T_f)-1\right], \tag{2.23}$$

这也意味着相应的 极限成立于 (2.14)，证明至此完成 。□

关于二阶系统，请参阅 [43]，其中推导了在质量比较小时，用单原子 FPU 系统的动力学近似含有轻粒子和重粒子的双原子无限 Fermi–Pasta–Ulam (FPU) 系统动力学的误差估计。

式 (2.23) 中常数 C 对 T_f 的指数依赖并不令人意外：另请参阅在考虑复 Ginzburg-Landau 偏微分方程的无黏极限时，复 Ginzburg-Landau 偏微分方程与非线性薛定谔偏微分方程的解之间相关距离函数随时间增长的估计 [44]，，该距离甚至可能呈指数增长 [45]。

传递性论证的第二步基于以下结果：该结果讨论了离散非线性薛定谔方程与 AL 系统的解之间的接近性，其含义是上文讨论的“初始数据的连续依赖性”。证明见 [37, 定理 1.1，第 349] 页。

爆破解情况下的 $T_{\max}$ 解析估计将在第三节针对有限格点的情形予以证明。

定理 II.2 考虑离散非线性薛定谔方程 (1.4) 和 *AL* 方程 (1.5)，并假设它们的初始数据满足命题 *II.2* 中关于全局时间存在性的条件。我们进一步假设，对于每个 $0<\varepsilon<1$，它们的初始条件满足：

$$||\phi^0-\psi^0||_{l^2} \le C_0\,\varepsilon^3, \tag{2.24}$$

$$||\phi^0||_{l^2} \le C_{\phi^0}\,\varepsilon, \tag{2.25}$$

$$P_{AL}(0) = \sum_n \ln\left(1+\kappa|\psi_n(0)|^2\right) \le \ln\left(1+(C_{AL}\,\varepsilon)^2\right), \tag{2.26}$$

˜其中 C_0、C_{ϕ_0}、$C_{AL} > 0$ 为常数。于是，对于任意有限的 $0 < T_f < \infty$，存在常数 $C = C(\phi_0, \psi_0, \kappa, C_0, T_f)$，使得对于每个 $t \in [0, T_f]$，相应的解满足估计

$$||\phi(t) - \psi(t)||_{l^2} \leq \tilde{C}\varepsilon^3. \tag{2.27}$$

定理 II.2 的主要应用之一是，DNLS 方程存在阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 的小振幅解，该解与 AL 方程的孤子解保持 $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$-接近。我们注意到，[37]，的结果对 DNLS 和 AL 格点的聚焦与散焦情形均成立。

结合定理 II.1 和 II.2，我们通过传递性论证的证明得出本文的主要结果。

定理 II.3 设定理 *II.1* 和 *II.2* 的假设 *(2.13)* 及 *(2.24)-(2.26)* 成立。对于任意 $0 < \epsilon \leq \varepsilon < 1$ 以及定理 *II.1* 中所述的任意 T_f，存在正常数 $K_1 > 0$ 使得 $||u^0 - \psi^0|| \leq K_1\varepsilon$，并且存在正常数 $C_1 = C_1(u^0, \phi^0, \psi^0, \kappa, T_f)$，使得 *DGL* 方程 *(1.6)* 和 *AL* 方程 *(1.5)* 的相应解对任意 $t \in [0, T_f]$ 满足估计式

$$||u(t) - \psi(t)||_{l^2} \leq C_1\varepsilon. \tag{2.28}$$

Proof: 由假设 (2.13) 和 (2.24) 可知，初始条件 u^0 和 ψ^0 满足：

$$||u^0 - \psi^0||_{l^2} \leq ||u^0 - \phi^0||_{l^2} + ||\phi^0 - \psi^0||_{l^2} \leq K_0\varepsilon + C_0\varepsilon^3 \leq K_1\varepsilon,$$

对某个 $K_1 > 0$成立。然后，借助估计 (2.14) 和 (2.27)，我们得到

$$\begin{aligned} ||u(t) - \psi(t)||_{l^2} &\leq ||u(t) - \phi(t)||_{l^2} + ||\phi(t) - \psi(t)||_{l^2} \\ &\leq C\varepsilon + \tilde{C}\varepsilon^3 \leq C_1\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.29}$$

˜其中 $\phi(t)$ 是离散非线性薛定谔方程 (1.4) 的解，C_1 是一个依赖于 C 和 C的常数，证明至此完成。□

定理 II.3 表明，当 DCGL 方程 (1.6) 中的 $|\epsilon_i| = \epsilon \to 0$ 满足相应条件时，其解将收敛到 AL 格点 (1.5) 的解；当初始数据 $||u^0 - \psi^0||_{l^2} \to 0$之间的距离满足 $\varepsilon \to 0$时，亦是如此。就离散介质中的局域结构应用而言，定理 II.3 证实，当 DGL方程 (1.6) 是系统的演化方程时，耗散离散孤子在有限时间区间内具有持续性。下一节将通过直接数值模拟展示这种持续性；实际上，我们将在数值上考察以下推论所带来的结果。

推论 II.1 假设 *AL* 方程 (1.5) 和 *DGL* 方程 (1.6) 的初始条件满足$u^0 = \psi^0$和 $||\psi^0||_{l^2} \leq C_{\psi^0}\varepsilon$，对任意 $0 < \varepsilon < 1$、$\epsilon \leq \varepsilon$，其中某个常数为 $C_{\psi^0} > 0$。那么存在一个正数常数 $C_1 = C_1(u^0, \psi^0, \kappa, T_f)$，使得 *DGL*方程*(1.6)*和 *AL* 方程 *(1.5)*的相应解对任意 $t \in [0, T_f]$均满足以下估计

$$||u(t) - \psi(t)||_{l^2} \leq C_1\varepsilon.$$

证明： 我们形式上固定 DNLS 方程 (1.4) 的初始条件，使得 $\phi^0 = \psi^0$，以便应用传递性论证。注意，由于 $u^0 = \psi^0$，对于任意$K_1 > 0$和任意 $0 < \varepsilon < 1$，条件 $||u^0 - \psi^0||_{l^2} \leq K_1\varepsilon$ 显然成立。还要注意，由于 $||\psi^0||_{l^2} \leq C_{\psi^0}\varepsilon$，根据初等不等式 $\ln(1+bx) \leq bx$，对于所有 $b > 0$、$x > 0$，条件 (2.26) 也成立。因此，该推论的结论可由定理 II.3 立即推出。□

还需特别指出，由于局部DGL (1.6) 与其非局部对应物之间的一致性结果（见 [38], ），即使在不存在外部强迫 $g_n = 0$ 的情况下，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$ （见 [38,式 (1.3)]）仍然成立，因此在其初始数据满足类似的小量条件时，非局部DGL也表现出定理 II.3 和推论 II.1 所描述的相同动力学。

III. 数值研究

本节报告关于 DGL方程 (1.6) 中耗散孤立波的持续性和渐近行为的数值研究结果。线性/非线性增益或损耗项的不同情形会导致解呈现不同的动力学特征，正如第一节所展示的，该节讨论由有限晶格

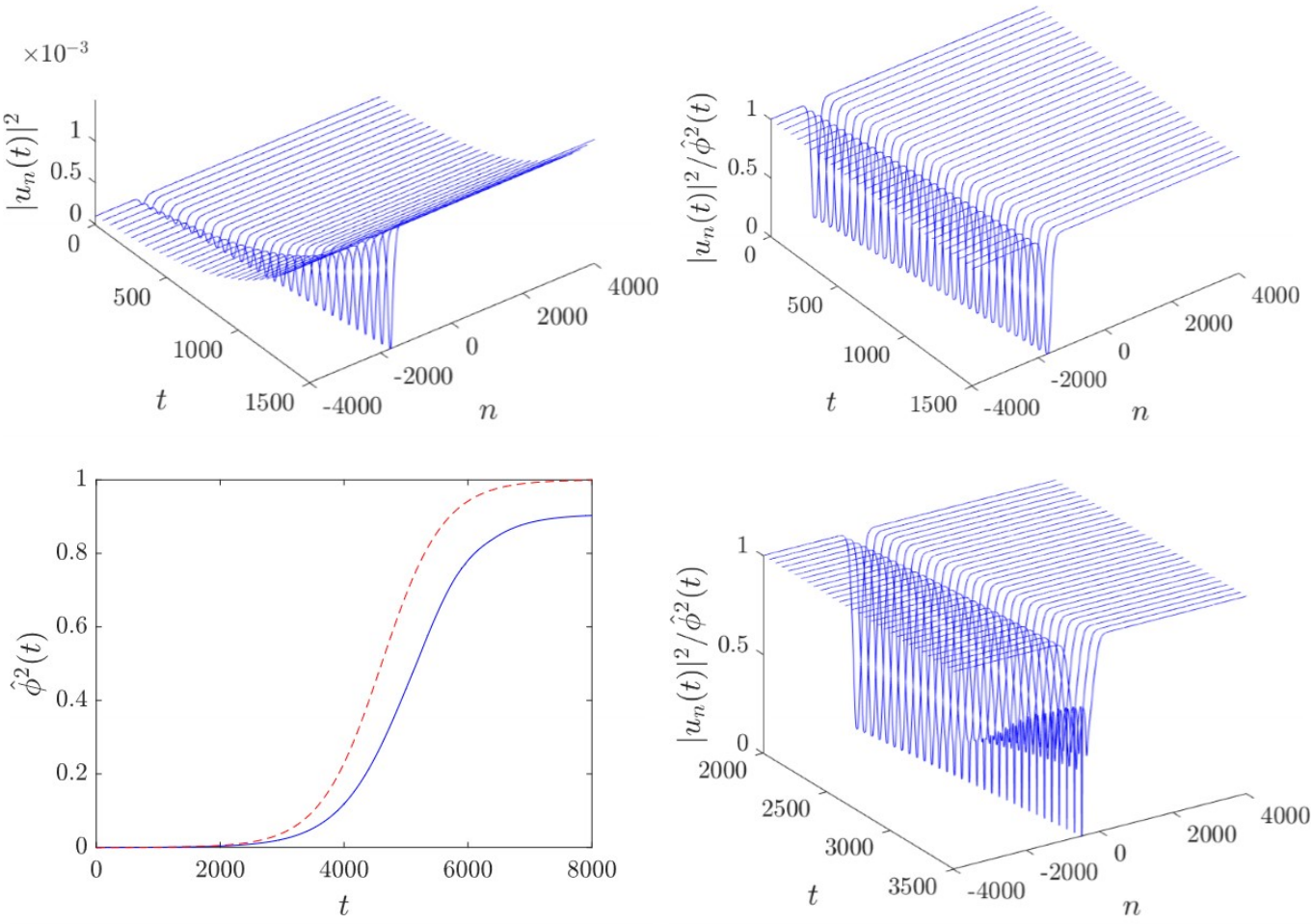

图 1. 对于 DGL 格点 (1.6) 的散焦非线性 ($\kappa = 1 > 0$)，其中 $\epsilon_2 = 0.001$，在线性增益 $\epsilon_1 = 0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 = 0.001$ 的情况下。初始条件 $u_n(0) = \psi_n^d(0)$ 的时空演化由 AL 格点 (1.5) 的暗孤子解析解 (3.24) 定义，其中 $\beta = 0.01$ 和 $\alpha = \pi/10$（详见正文——第 B.a.1 节）。

近似所引起的情况；有限晶格近似是通过施加周期边界条件或狄利克雷边界条件得到的，也是实施数值格式所必需的。我们指出，第二节的接近性结果在系统补充上述边界条件后仍然成立。在第二节中，我们展示了亮孤子、暗孤子和离散有理解作为 DGL 系统 (1.6) 初始条件时，其动力学的数值结果。

A. 有限格点近似的设定及解的渐近行为评述

在数值模拟中，我们考虑占据对称区间 $[-L, L]$ 的有限晶格，其中 $N+1$ 等间距排列的振子的位置由离散空间坐标 $x_n = -L+nh\ n = 0$，1，2，……，N 给出，$h = 2L/N$ 为晶格间距。该有限晶格补充了周期边界条件 $u_n = u_{n+N}$ 或狄利克雷边界条件 $u_0 = u_N = 0$，并且系统在有限维

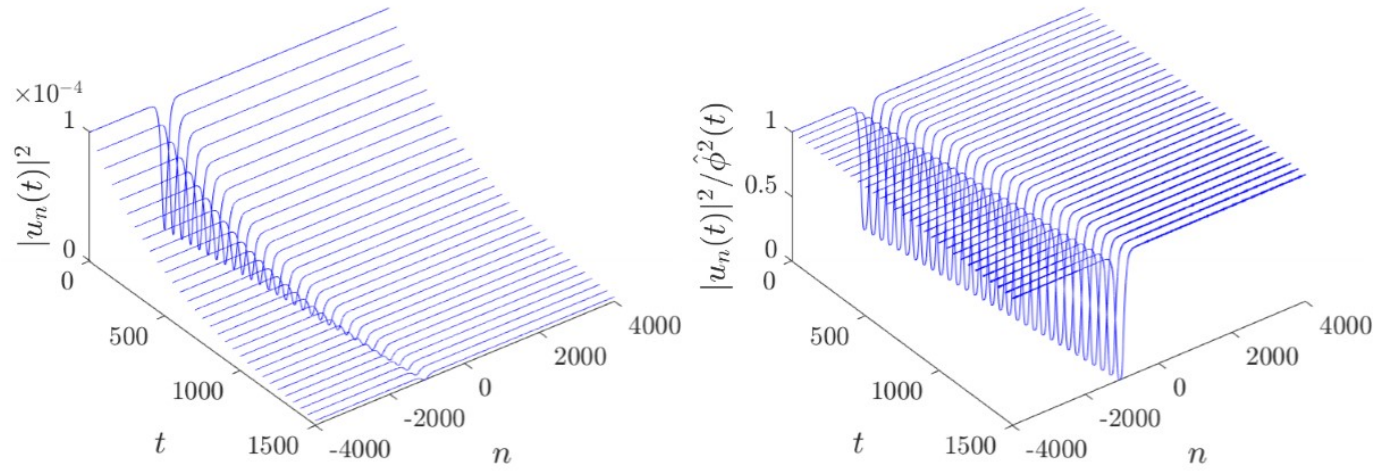

图 2. 对于具有 $\epsilon_2 = 0.001$ 的 DGL 格点 (1.6)，在线性损耗 $\epsilon_1 = -0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 = 0.001$情形下的散焦情形 $\kappa > 0$ 。初始条件和参数同图 1（详见正文——见 B.a.2 节）。

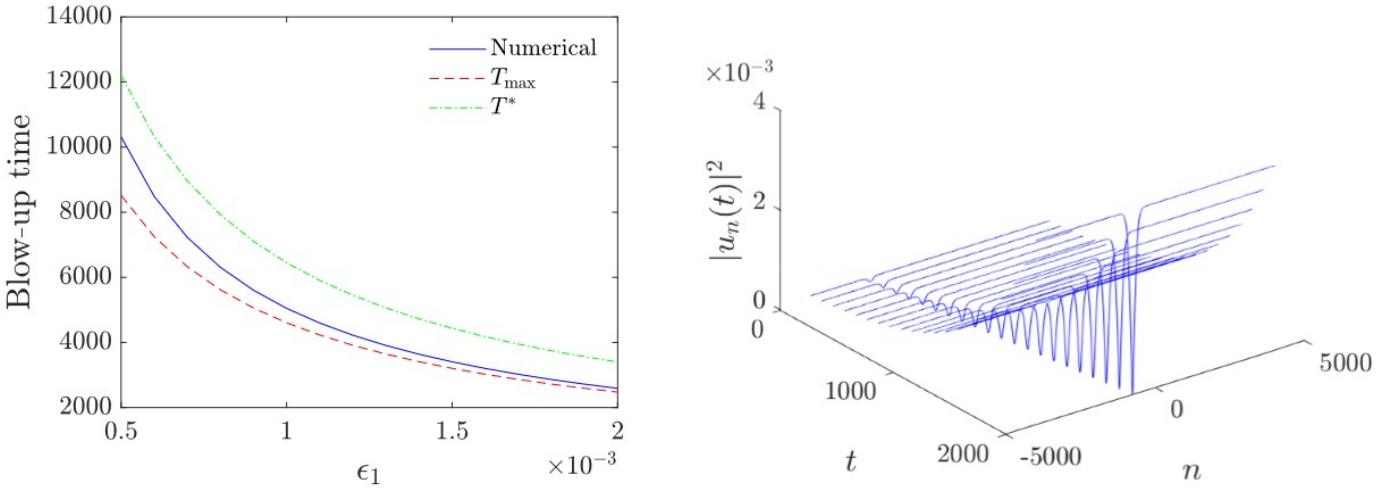

图 3. 爆破解：对于具有 $\epsilon_2 = 0.001$、非线性增益 $\epsilon_3 = -0.001$ （$\tilde{\epsilon}_3 = 0.001$）和线性增益 $\epsilon_1 > 0$的 DGL 格点 (1.6)，其散焦情形 $\kappa > 0$ 。左图：数值爆破时间作为 ϵ_1 [的函数，连续（蓝色）曲线] 与解析上界 (3.12) [点划（绿色）曲线]以及平面波的解析爆破时间 (3.22) [虚线（红色）曲线]进行比较。右图：具有 $\epsilon_1 = 0.001$ 的暗孤子向爆破演化的过程。详见正文——见 B.a.3 节。

空间中

$$l^p_{\rm per} := \left\{ U = (U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R} : \quad U_n = U_{n+N}, \quad \|U\|_{l^p_{\rm per}} := \left(h \sum_{n=0}^{N-1} |U_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

$$l^p_0 := \left\{ U = (U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R} : \quad U_0 = U_N = 0, \quad \|U\|_{l^p_0} := \left(h \sum_{n=1}^{N-1} |U_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

分别地。情形 $h = O(1)$ 对应于系统的离散区间，而情形 $h \to 0$ 近似于连续区间。为简便起见，有限维子空间情形下的范数记为 l^p ，根据不等式，这些范数彼此等价

$$||U||_{\ell^q} \le ||U||_{\ell^p} \le N^{\frac{(q-p)}{qp}} ||U||_{\ell^q}, \quad 1 \le p \le q < \infty. \tag{3.1}$$

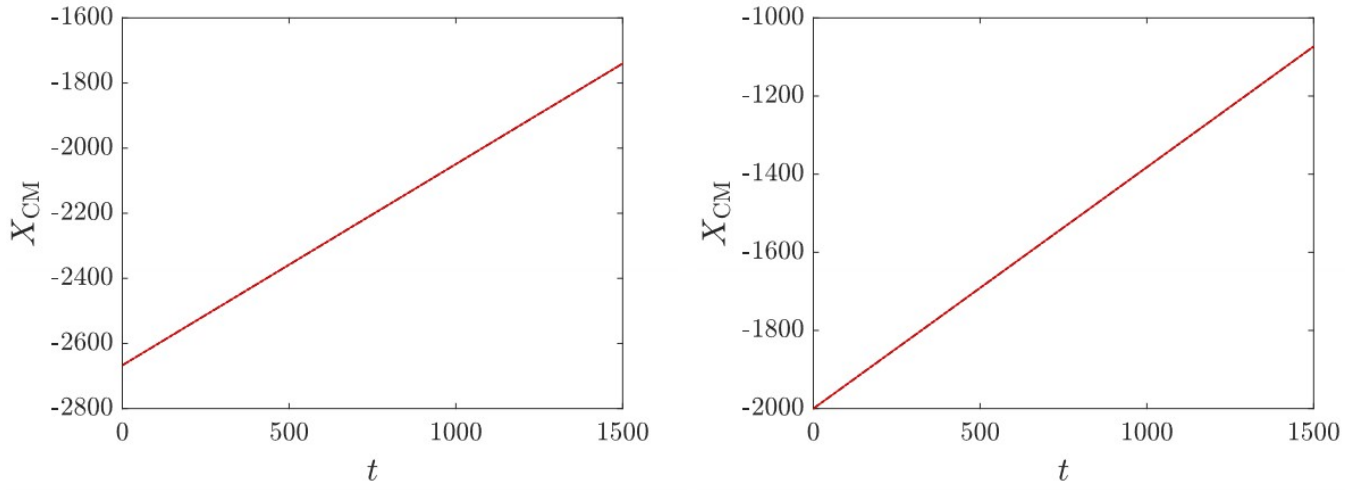

图 4. 图 1（左图）所研究的线性增益/非线性损耗条件下，以及图 2（右图）所研究的线性损耗/非线性损耗条件下，耗散暗孤子的质心演化。黑色虚线表示 AL 格点解析暗孤子，红色实线表示 DGL方程 (1.6) 中的演化。

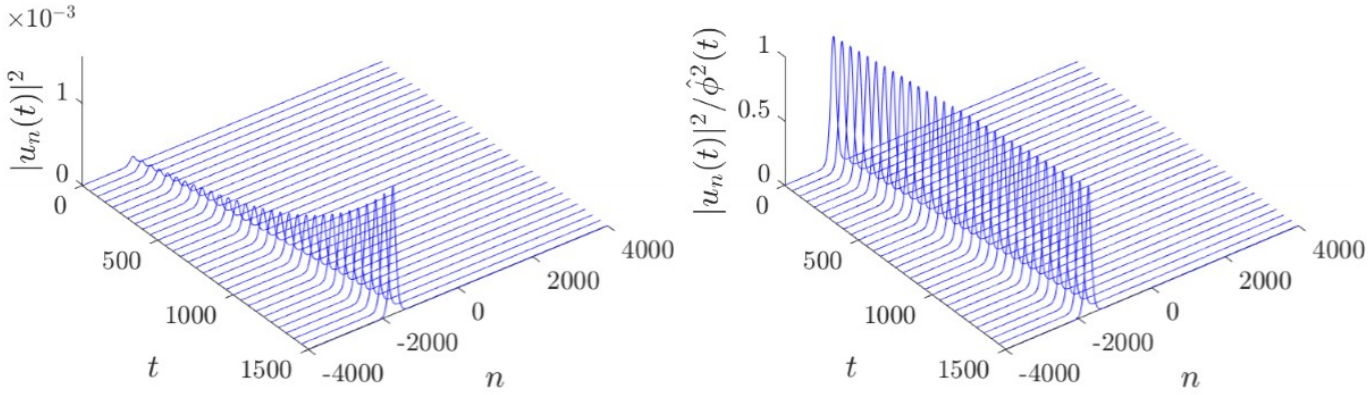

图 5. DGL 格点 (1.6) 的聚焦情形 $\kappa < 0$，在线性增益 $\epsilon_1 = 0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 = 0.001$条件下， $\epsilon_2 = 0.001$ 。由 AL 格点 (1.5) 的亮孤子解析解 (3.26) 所定义的初始条件 $u_n(0) = \psi_n^s(0)$ 的时空演化，其中 $\beta = 0.01$ 且 $\alpha = \pi/10$ （详见正文第 B.b.1 节）。

我们还将使用　　解的空间平均 l^2-范数。该范数的平方记为 b　　y

$$\chi(t) = \frac{h}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|u_n(t)|^2, \quad \text{(periodic boundary conditions)},$$

$$\chi(t) = \frac{h}{N}\sum_{n=1}^{N-1}|u_n(t)|^2, \quad \text{(Dirichlet boundary conditions)}.$$

关于上述边界条件的实现，当将 AL 系统的解析孤子解作为初始数据代入时，边界条件仅在渐近意义下严格满足，如 $L \to \infty$。不过，当 L 足够大时，由此产生的误差对观测到的动力学影响可以忽略不计。

在介绍数值结果之前，有必要解释上述有限晶格近似的渐近行为。为简便起见，我们选择 $\epsilon_2 > 0$ 这一情形，它会对系统产生更强的耗散。关于 $\epsilon_2 \le 0$ 这一情形，我们将在下面的证明之后进行评论。

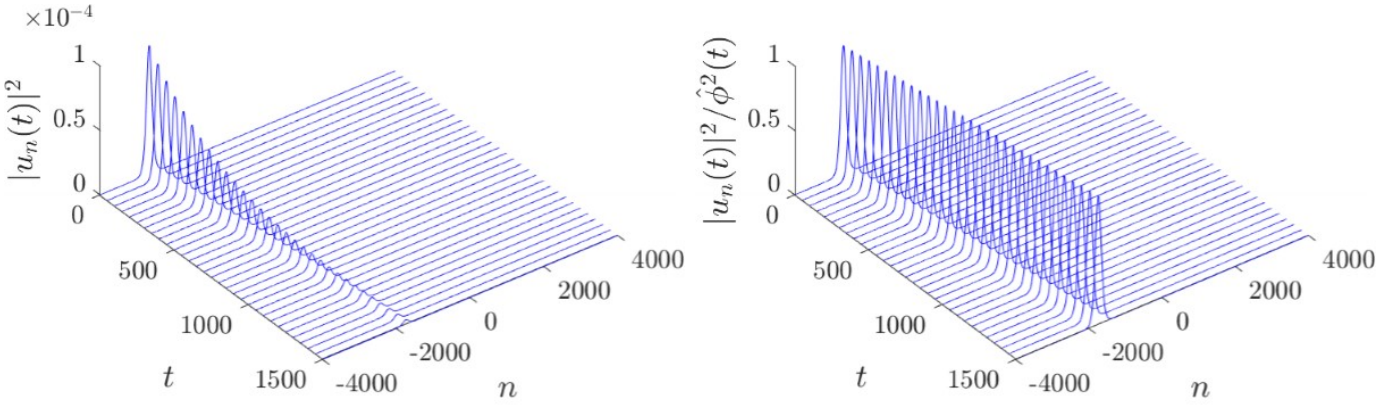

图6. DGL 格点 (1.6) 的聚焦情形 $\kappa<0$，其中 $\epsilon_2=0.001$，具有线性损耗 $\epsilon_1=-0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3=0.001$。初始条件和参数同图 5（详见正文——见 B.b.2 节）。

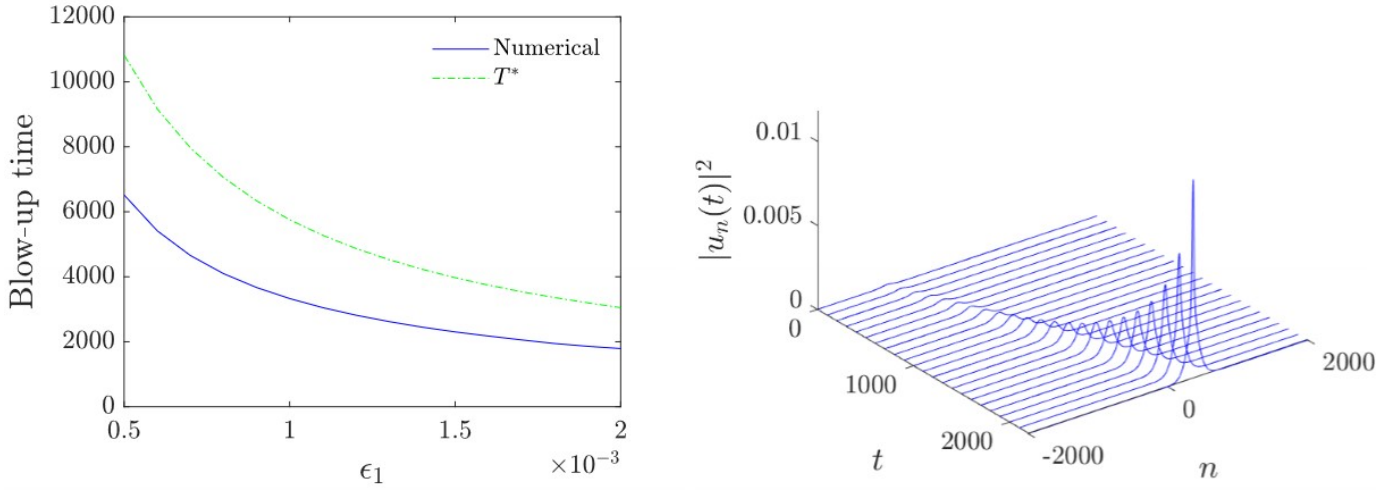

图7. 爆破解：DGL 格点 (1.6) 的聚焦情形 $\kappa<0$，其中 $\epsilon_2=0.001$，非线性增益 $\epsilon_3=-0.001$ （$\tilde{\epsilon}_3=0.001$）和线性增益 $\epsilon_1>0$。左图：数值爆破时间随 ϵ_1 [变化的关系，连续（蓝色）曲线] 与解析上界 (3.12) 对比。右图：亮孤子在 $\epsilon_1=0.001$ 作用下向爆破解的演化。详见正文——见 B.b.3 节。

定理 III.1 在 *DGL*方程 (1.6)中，我们固定 $\epsilon_2>0$，并在晶格上施加周期边界条件或狄利克雷边界条件。对于解的最大存在时间区间$[0,T_{\max})$，我们区分以下情形：

1. 线性增益 $\epsilon_1>0$ 和非线性损耗 $\epsilon_3>0$：此时解全局存在，即 $T_{\max}=\infty$，关于时间一致有界，且解的空间平均 l^2 范数满足

$$\chi(t)\le\left[\frac{e^{-2\epsilon_1 t}}{\chi(0)}+\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}\left(1-e^{-2\epsilon_1 t}\right)\right]^{-1},\qquad \limsup_{t\to\infty}\chi(t)\le\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}. \tag{3.2}$$

2. 线性损耗 $\epsilon_1=-\tilde{\epsilon}_1<0$ 和非线性损耗 $\epsilon_3>0$。我们有 $T_{\max}=\infty$，且系统的解会衰减，

$$\chi(t)\le\left[\frac{e^{2\tilde{\epsilon}_1 t}}{\chi(0)}+\frac{\epsilon_3}{\tilde{\epsilon}_1}\left(1-e^{2\tilde{\epsilon}_1 t}\right)\right]^{-1},\qquad \lim_{t\to\infty}\chi(t)=0. \tag{3.3}$$

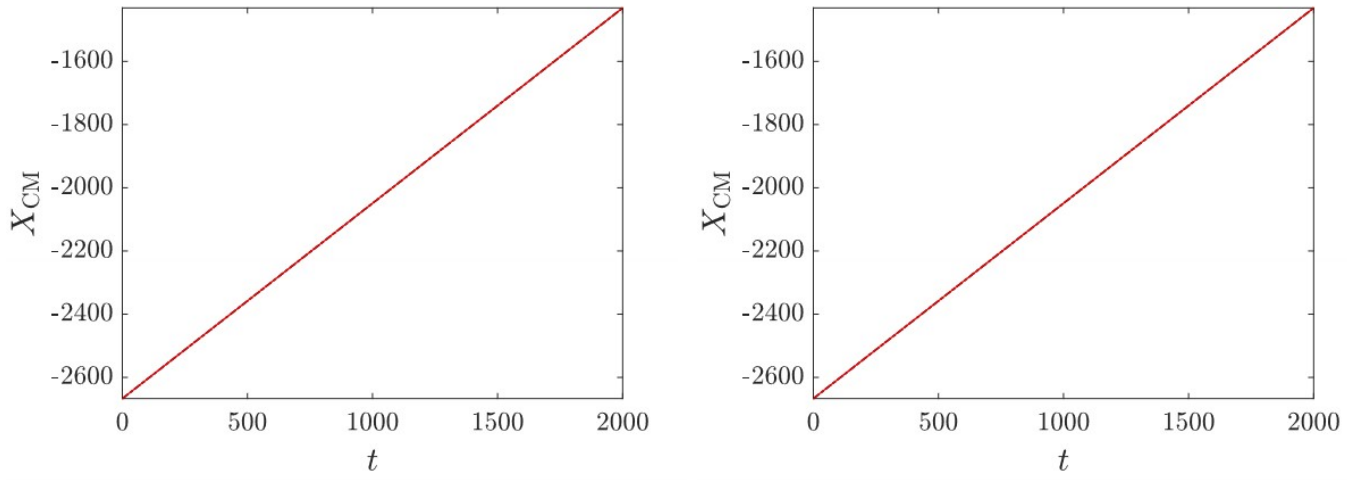

图 8. 图5（左图）所研究的线性增益/非线性损耗情形，以及图 6（右图）所研究的线性损耗/非线性损耗情形下，耗散亮孤子质心的演化。黑色虚线表示 AL 格点上的解析亮孤子，红色实线表示 DGL方程 (1.6) 中的演化。

3. 线性增益或线性损耗 $\epsilon_1 \geq 4\epsilon_2 - \tilde{\epsilon}_3||u^0||^2$ 和非线性增益 $\epsilon_3 = -\tilde{\epsilon}_3 < 0$。对于所有初始数据 $u^0 \in l^2$，系统的解都会在有限时间 $T_{\max}$ 内坍缩（爆破），满足估计

$$T_{\max} \leq \frac{1}{2(\epsilon_1 - 4\epsilon_2)} \ln\left[1 + \frac{\epsilon_1 - 4\epsilon_2}{\tilde{\epsilon}_3||u^0||_{l^2}^2}\right], \quad \epsilon_1 > 4\epsilon_2 - \tilde{\epsilon}_3||u^0||^2 := \epsilon_1^{\text{crit}}, \tag{3.4}$$

$$T_{\max} \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3||u^0||_{l^2}^2}, \quad \epsilon_1 = 4\epsilon_2. \tag{3.5}$$

证明： 我们只考虑周期边界条件的情形，因为狄利克雷边界条件的情形
可以用完全相同的方法证明。1
. Multiplying（对 u_n 取 l^2-内积并取虚部，可得 $\chi(t)$ 满足 es

$$\dot{\chi} + \frac{2\epsilon_2}{N} h \sum_{n=0}^{N-1} |u_{n+1} - u_n|^2 = 2\epsilon_1 \chi - \frac{2\epsilon_3}{N} h \sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^4. \tag{3.6}$$

对 $q = 4$ 和 $p = 2$ 应用不等式 (3.1)，可得

$$||u||_{l^2}^4 \leq N||u||_{l^4}^4, \tag{3.7}$$

由此可估计 (3.6) 中的最后一项，并得到关于 χ 的微分不等式，

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &\leq 2\epsilon_1 \chi - 2\epsilon_3 \left(\frac{h}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2\right)^2 \\ &= 2\epsilon_1 \chi - 2\epsilon_3 \chi^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其属于伯努利型方程，可按如下方式积分：使用式 (3.8) 中的变量替换 $u = \chi^{-1}$，可知 u 满足

$$\dot{u} \geq -2\epsilon_1 u + 2\epsilon_3, \tag{3.9}$$

借助积分因子 $e^{2\epsilon_1 t}$，可求解式 (3.9)，从而得到

$$u(t) \geq u(0)e^{-2\epsilon_1 t} + \frac{\epsilon_3}{\epsilon_1}\left(1 - e^{-2\epsilon_1 t}\right).$$

因此，$\chi(t)$ 如估计式 (3.2) 所述具有上界，由此我们推断解的时间全局存在性，即 $T_{\max} = \infty$ 以及 (3.2) 中所述的极限。

2. 在方程 (3.6) 中设定 $\epsilon_1 = -\tilde{\epsilon}_1 < 0$，并完全按照情形 1 的方法进行，我们得到 (3.3) 中给出的衰减估计。

3. 这次我们将使用 l^p-空间的通常范数。我们设

$$P(t) = h\sum_{n=0}^{N-1} |u_n(t)|^2 = ||u(t)||_{l^2}^2.$$

而与 (3.6) 对应的式子为

$$\dot{P} = 2\epsilon_1 P - 2\epsilon_2 h\sum_{n=0}^{N-1} |u_{n+1} - u_n|^2 + 2\tilde{\epsilon}_3 h\sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^4. \tag{3.10}$$

The 右端的第二项由下列不等式从下方估计

$$-\sum_{n=0}^{N-1} |u_{n+1} - u_n|^2 \geq -4\sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2,$$

第三项则由 (3.1) 的左端估计，其中再次取 $q = 4$ 和 $p = 2$。于是我们得到关于 P 的微分不等式:

$$\dot{P} \geq 2(\epsilon_1 - 4\epsilon_2)P + 2\tilde{\epsilon}_3 P^2. \tag{3.11}$$

再次对伯努利不等式 (3.11) 作变量替换 $\psi = P^{-1}$ 后进行积分，可得对 P 的估计

$$P(t) \geq \left[-\frac{\tilde{\epsilon}_3}{\epsilon_1 - 4\epsilon_2} + \left(\frac{1}{P(0)} + \frac{\tilde{\epsilon}_3}{\epsilon_1 - 4\epsilon_2}\right) e^{-2(\epsilon_1 - 4\epsilon_2)t}\right]^{-1} = B(t),$$

under 要求 $B(t) \geq 0$ 非负。此条件仅在以下情况下满足 ,

$$t < \frac{1}{2(\epsilon_1 - 4\epsilon_2)} \ln\left[1 + \frac{\epsilon_1 - 4\epsilon_2}{\tilde{\epsilon}_3 P(0)}\right] := T^*,$$

且 T^* 是有限的，如果 $\epsilon_1 > \epsilon_1^{\text{crit}}$。在这种情况下，解存在于有限时间区间 $(0, T_{\max})$ 内，且 $T_{\max} \leq T^*$，因为

$$\lim_{t \to T^*} B(t) = \infty,$$

意味着 P发生爆破。类似地，我们使用不等式 (3.12) 再次证明情形 $\epsilon_1 = 4\epsilon_2$。 □

注意，式 (3.4) 中定义的临界值 ϵ_1^{crit}可能将有限时坍缩与整体存在区分开来；当 $\epsilon_1 \leq \epsilon_1^{\text{crit}}$时，这种情况是可以预期的，因为当 $\epsilon_1 \to \epsilon_1^{\text{crit}}$时，$T_{\max} \to +\infty$。还需注意，坍缩不仅会出现在聚焦线性增益/非线性增益机制中，也会出现在满足 $\epsilon_1 < 0$ 且符合式 (3.4) 的线性损耗/非线性增益机制中。

当 ϵ_2 足够小时，可以证明与定理 III.1 的情形 1-3 类似的估计，其函数形式基本相同，只是控制收敛或一致界的指数有所调整。不过，动力学仍由线性和非线性增益/损耗项所支配。例如，爆破时间的估计式 (3.4) 可以修改为

$$T_{\max} \leq \frac{1}{2\epsilon_1} \ln\left[1 + \frac{\epsilon_1}{\tilde{\epsilon}_3 ||u^0||^2}\right] := T^*, \quad \epsilon_1 > -\tilde{\epsilon}_3 ||u^0||^2 := \epsilon_1^{\text{crit}}, \tag{3.12}$$

$$T_{\max} \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3 ||u^0||^2}, \quad \epsilon_1 = 0. \tag{3.13}$$

当 $||\cdot||$ 为标准 l^2-范数或平均范数 $\sqrt{\chi}(\cdot)$ 时，估计式 (3.12)-(3.13) 的函数形式仍然成立。关于接近性定理 II.3 的主要结果，定理 III.1 所描述的情形对于估计区间 $[0, T_f]$ 尤其有用：当 $T_f < T_{\max}$ 时，耗散孤子结构可能在该区间内存续；特别是在塌缩区间，这类信息可能具有重要的物理意义。在衰减区间，明确的衰减率也同样有助于研究耗散局域结构；在线性增益与非线性损耗竞争区间，空间平均能量估计亦然。我们应当强调，上述情形从整体上描述了系统的渐近行为，因为它们对所有初始条件均成立。

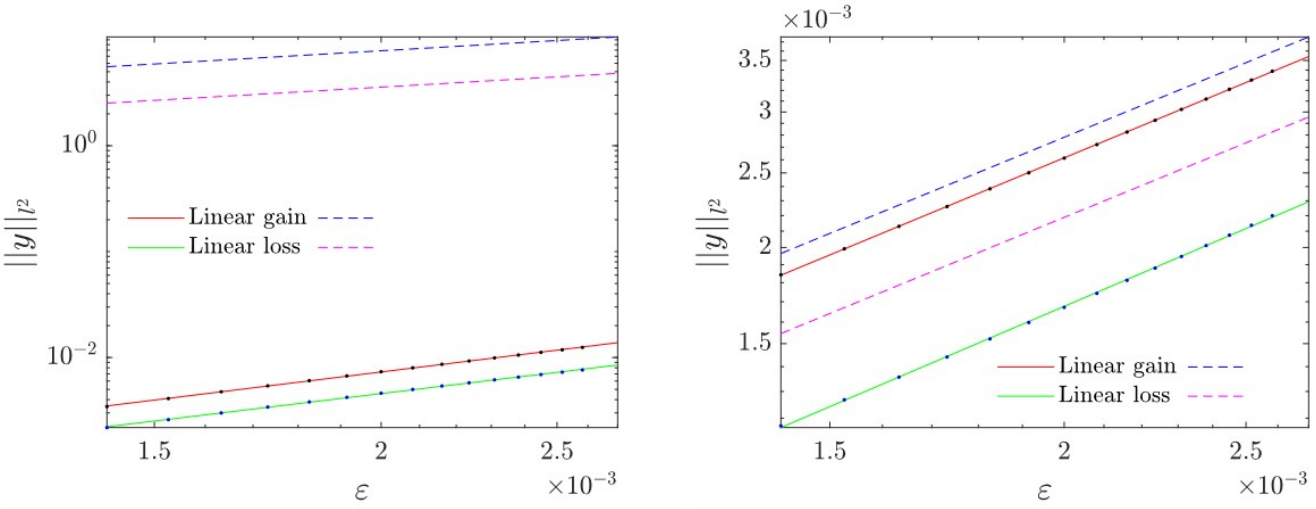

图 9. 对数刻度图显示了 DGL方程 (1.6) 与 AL 格点 (1.5) 的解之间的距离函数 $||y(t)||_{l^2} = ||u(t) - \psi(t)||_{l^2}$ 随 ϵ 的变化，其中 $T_f = 500$ 固定。左图：暗孤子的情形（$\varepsilon = \sqrt{\sum_n \left(\left| |\phi_n(0)|^2 - |u_n(0)|^2 \right| \right)/N}$）。右图：亮孤子的情形（$\varepsilon = \sqrt{\sum_n |u_n(0)|^2/N}$）。详情见正文。

a. 波背景的动力学：定理 *III.1* 中估计的潜在锐性。定理 III.1 中证明的估计可能具有“锐性”，以下分析将对此加以论证：我们考察波背景（以离散平面波的形式）的长时间行为。这种波背景的上方可能存在局域解，例如暗孤子。波背景的演化与稳定性，可能对离散和连续系统中的孤子结构动力学产生重要影响 [46–50]。

对于 DGL方程 (1.6)，为求出背景演化方程，我们假设解的试探形式为

$$u_n = \Phi(t) e^{i\tilde{k} x_n}, \quad \tilde{k} = \frac{\pi k}{L}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

然后将试探解 (3.14) 代入 (1.6)，可知 $\Phi(t)$ 满足复常微分方程，

$$i\frac{d\Phi}{dt} = i\epsilon_1 \Phi + \Lambda \Phi - (i\epsilon_3 - \kappa)|\Phi|^2 \Phi, \tag{3.15}$$

其中 $\Lambda = 4(i\epsilon_2 - 1)\sin^2\left(\frac{\tilde{k}}{2}\right)$。使用相位因子时，常微分方程 (3.15) 右端的第二项可以吸收

$$\Phi(t) = e^{i\Lambda t} b(t),$$

若将其代入 (3.15)，则可知 $b(t)$ 满足方程

$$i\frac{db}{dt} - \kappa|b|^2 b = i\epsilon_1 b - i\epsilon_3 |b|^2 b. \tag{3.16}$$

仍在 (3.16) 中，第二 项可以通过使用 b 的极坐标表达式吸收

$$b(t) = \hat{\phi}(t) e^{\imath\theta(t)}, \quad \hat{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \hat{\phi}^2,$$

由此推导出该标量常微分方程的初值问题，

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \epsilon_1 \hat{\phi} - \epsilon_3 \hat{\phi}^3, \tag{3.17}$$

$$\hat{\phi}(0) = \hat{\phi}_0, \tag{3.18}$$

其中，初始条件 $\hat{\phi}^2(0) = \hat{\phi}_0^2$ 定义了背景的初始振幅（例如，由暗孤子初始条件的背景所诱导）。该问题 (3.17)-(3.18) 的显式解为

$$\hat{\phi}^2(t) = \frac{\epsilon_1 \hat{\phi}_0^2 e^{2\epsilon_1 t}}{\epsilon_1 - \epsilon_3 \hat{\phi}_0^2 + \epsilon_3 \hat{\phi}_0^2 e^{2\epsilon_1 t}}. \tag{3.19}$$

根据显式解 (3.19)，我们可以推导出背景渐近行为的以下情形，这些情形与定理 III.1 中所述的相符：

1. 线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。在此情形下，背景收敛至有限振幅，

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\phi}^2(t) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3}. \tag{3.20}$$

   极限 (3.20) 恰好是定理 III.1 中所述的 (3.2) 的上确界所给出的空间平均能量上界，而解 (3.19) 描述了 (3.2) 中上界的收敛速率。

2. 线性损耗 $\epsilon_1 = -\tilde{\epsilon}_1 < 0$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。在此情形下，背景衰减，

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\phi}^2(t) = 0,$$

   并且解 (3.19) 精确描述了定理 III.1 的 (3.3) 中给出的衰减速率。

3. 非线性增益 $\epsilon_3 = -\tilde{\epsilon}_3 < 0$。在这种情况下，当线性增益/损耗强度满足

$$\epsilon_1 > \epsilon_1^{\text{crit}} := -\tilde{\epsilon}_3 \hat{\phi}_0^2. \tag{3.21}$$

   时，背景会在有限时间内

$$T_{\max} = \frac{1}{2\epsilon_1} \ln\left[1 + \frac{\epsilon_1}{\tilde{\epsilon}_3 \hat{\phi}_0^2}\right]. \tag{3.22}$$

   当 $\epsilon_1 = 0$ 时，背景会在有限时间内爆破

$$T_{\max} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_3 \hat{\phi}_0^2}. \tag{3.23}$$

条件 (3.21) 和爆破时间 $T_{\max}$ (3.22)-(3.23) 的估计与 $\epsilon_2 \le 0$ 情形下给出的 (3.12)-(3.13) 完全相同，因为对于平面波解的试探解，线性耦合项会如常微分方程初值问题 (3.16)-(3.17) 的推导中所述被吸收。

定理 III.1 中关于有限格点近似解的全局渐近行为的情形，以及上述对波背景动力学的分析，将有助于解释数值模拟中观察到的动力学现象；相关结果将在下一小节中报告。

B. 数值结果

根据上一小节的分析，本小节将展示数值结果。数值研究涉及由 AL 格点 (1.5) 的解析解给出的三类初始条件：暗孤子、亮孤子和离散 Peregrine 孤子（PS）。除非另有说明，所有情形下我们均在 DGL 格点 (1.6) 中取参数值 $|\kappa| = 1$, $\epsilon_2 > 0$, 其中 $|\epsilon_i| = 0.001$, $i = 1, 2, 3$。

a. 散焦情形 $\kappa > 0$：暗孤子。 本节展示由 AL 格点 (1.5) 的解析解所给出的暗孤子初始条件所产生的动力学结果，

$$\begin{aligned} \psi_n^d(t) &= A\tanh\left[\beta(n - ct)\right]\exp(-i(\omega t - \alpha n)), \quad A = \tanh\beta, \\ \omega &= \cos\alpha\,\operatorname{sech}\beta, \\ c &= -\beta^{-1}\sin\alpha\tanh\beta, \end{aligned} \tag{3.24}$$

与 $\alpha \in [-\pi, \pi]$ 和 $\beta \in [0, \infty)$。

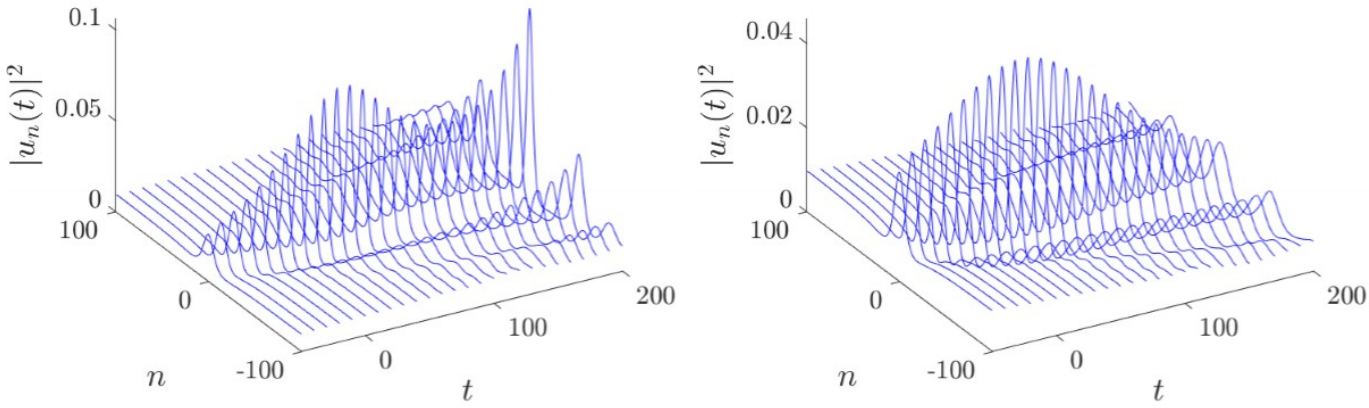

图 10. 聚焦情形 $\kappa < 0$。DGL方程 (1.6) 中的时空演化，其中初始条件 $u_n(0) = \psi_n^r(-50)$ 为 AL 格点 (1.5) 的解析佩雷格林孤子 (3.27)，且 $\epsilon_2 = 0.001$，对于 $q = 0.1$。左图：线性增益 $\epsilon_1 = 0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 = 0.001$。右图：线性损耗 $\epsilon_1 = -0.001$ 和非线性损耗 $\epsilon_3 = 0.001$。详情见正文——参见第 B.c.1 节和第 B.c.2 节。

1. 线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 对抗非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。我们将 $u_n(0) = \psi_n^d(0)$ 用作 $\beta = 0.01$ 和$\alpha = \pi/10$的初始条件。图 1 左上图展示了暗孤子密度 $|u_n|^2$ 的时间演化，右上图则展示了归一化密度 $|u_n|^2/\hat{}\phi^2(t)$，其中 $\hat{}\ \phi^2(t)$ 由 (3.19) 给出。顶部两幅图展示了 $t \in [0, 1500]$ 和 $n \in [-4000, 4000]$的演化。我们观察到，尽管增益/损耗效应使背景发生变形，耗散暗孤子仍呈现出稳健的演化，这与定理 II.3 关于接近性的结果一致。特别是，孤子的演化仅受背景动力学影响，这一点可从归一化密度的演化中看出。两幅图均印证了解析预测的准确性：这些预测由定理 III.1 的情形 1 以及波背景演化的情形 1 描述。耗散孤子轮廓与 AL 格点的解析暗孤子 (3.24) 极为相似，并沿着由常微分方程解 (3.19) 所规定的背景演化轨迹演进。图 1 左下图对此展示得更加明显。清晰可见，对于暗孤子初始条件，背景的演化（以连续蓝色曲线表示）恰好遵循 (3.2) 中给出的估计所描述的动力学，其振幅最终达到 (3.2) 给出的渐近状态。对于所选参数值，该渐近状态应为 $\leq \epsilon_1/\epsilon_3 = 1$。我们强调，估计 (3.2) 所描述的行为适用于所有初始条件。因此，对于上述暗孤子初始数据，预期渐近极限为 $< \epsilon_1/\epsilon_3 = 1$。只有对于形式如 (3.14) 的平面波或空间齐次初始数据，才应预期极限$= \epsilon_1/\epsilon_3 = 1$ 严格相等；此时的动力学由精确的常微分方程初值问题 (3.17)-(3.18) 描述。这一点可由平面波演化的数值结果说明：该平面波与暗孤子初始条件的背景振幅相同，并以红色虚线表示。其动力学恰好由 (3.19) 中给出的常微分方程初值问题的解所描述，且如 (3.20) 所预期，其渐近极限趋于 $\epsilon_1/\epsilon_3 = 1$。

关于变形背景上的暗孤子的行为，暗孤子会不断演化，最终达到后者的渐近状态，而该状态是系统的全局吸引子。如右下图所示，其在 $t \approx 2800$ 之后发生失稳；该图展示了 $t \in [2000, 3500]$ 对应的归一化密度演化。

2. 线性损耗 $\epsilon_1 < 0$ 相对于非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。该情形对应于解的衰减的定理 III.1 中的情形 2，以及波背景衰减动力学的情形 2。耗散孤子的衰减如图 2 左图所示，而右图展示了归一化密度 $|u_n|^2/\hat{}\phi^2(t)$ 的演化，从而证明 AL晶格暗孤子在 DGL 格点中仍然存在，只是受到衰减背景的“模”修改。

3. 爆破解：线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 和非线性增益 $\epsilon_3 < 0$。此情形对应于定理 III.1 中关于解的爆破的情形 3，以及关于波背景爆破动力学的情形 3。由于

参数 ϵ_i 较小，我们固定 $\epsilon_2 = 0.001$、 $\epsilon_3 = -0.001$，改变 $\epsilon_1 = \mathcal{O}(10^{-3})$，将解析估计爆破时间的简化版本 (3.12) 与数值爆破时间进行比较。根据不等式 (3.11) 的形式，对常微分方程 [51], 应用于常微分方程问题 (3.17)-(3.18) 的比较原理表明，平面波的爆破时间 (3.23) 应作为实际爆破时间的下界，而定理 III.1 已证明 (3.12) 给出了上界。图 3 左图展示了这些估计的有效性。点划线（绿色曲线）表示爆破时间 (3.12) 的上界 T^* 随 ϵ_1变化的曲线；在公式 (3.12) 中，我们使用初始数据的平均 l^2-范数。实线（蓝色曲线）表示暗孤子初始条件对应的数值爆破时间。虚线（红色曲线）绘出了平面波对应的解析爆破时间曲线 $T_{\max}$ (3.22)。为计算数值爆破时间，我们与本文的所有模拟一样，采用了 Dormand-Prince 算法，并设置了终止事件：当解的 l^2-范数高于 10^8 时触发。采用更高的爆破阈值只会大幅增加计算时间，却不会明显提高爆破时间的精度。

我们再次强调，解析估计式 (3.12) 对所有初始数据都是通用的，而其与实际爆破时间的接近程度可能取决于具体的初始数据。不过，此类研究超出了本文的范围。另一方面，我们观察到，平面波 (3.23) 的爆破时间与数值结果更为接近。这是可以预料的，因为暗孤子的初始条件类似于恒定背景上的密度凹陷，因此，其趋于爆破的动力学应当更接近平面波的爆破动力学。 $t \in [0, 2000]$ 时暗孤子初始条件趋于爆破的演化如左图所示，其归一化密度与图 1 左下图相同。

与定理 II.3 的接近性结果相关的另一个有趣特征，是比较 AL 暗孤子 $X_{\mathrm{CM}} = X_0 + ct$ 的质心演化与 $c = (2/\beta)$ sin $\alpha \tanh \beta$，以及定义如下的耗散孤子的质心:

$$X_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{n=n_0-\delta}^{n_0+\delta} n(1 - |u_n|^2/|\hat{\phi}|^2)}{\sum_{n=n_0-\delta}^{n_0+\delta}(1 - |u_n|^2/|\hat{\phi}|^2)}, \tag{3.25}$$

其中， n_0 是暗孤子的最低密度位置 $|u_n|^2$ ，而 δ 表示孤子核心的大小（$\delta \sim 100$）。比较结果如图 4 所示。左图对应图 1 所示的线性增益/非线性损耗区域中的动力学，右图则对应图 2 所示的线性损耗/非线性损耗区域中的动力学。我们观察到，在这两种情况下，轨迹在相当长的时间间隔内几乎无法区分。损耗/损耗区域中的轨迹比增益/损耗区域中的轨迹更早开始分离。这是由于损耗/损耗区域中支撑暗孤子的背景发生了衰减。

b. 聚焦情形 $\kappa < 0$: 亮孤子。本节展示关于暗孤子初始条件的动力学结果，这些初始条件由 AL 格点 (1.5) 的解析解给出，

$$\begin{aligned} \psi_n^s(t) &= A\operatorname{sech}\left[\beta(n - ct)\right]\exp(-i(\omega t - \alpha n)), \quad A = \sinh\beta, \\ \omega &= -2\cos\alpha\cosh\beta, \\ c &= 2\beta^{-1}\sin\alpha\sinh\beta, \end{aligned} \tag{3.26}$$

其中 $\alpha \in [-\pi, \pi]$ 和 $\beta \in [0, \infty)$ 。

1. 线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 与非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。我们将 $u_n(0) = \psi_n^s(0)$ 作为 $\beta = 0.01$ 和$\alpha = \pi/10$ 的初始条件。图5左上方的面板展示了亮孤子密度 $|u_n|^2$ 的时间演化，右上方的面板则展示了归一化密度 $|u_n|^2/\hat{}\phi^2(t)$；两个面板均说明了 $t \in [0, 1500]$ 和$n \in [-4000, 4000]$ 的演化。我们再次观察到耗散亮孤子的稳健演化，这由定理 II.3 的接近性结果所保证。其演化仅受到背景动力学的影响，与暗孤子情形相同；后者的动力学与相应常微分方程解 (3.19) 所描述的结果完全一致，如图5底部面板所示，其中背景振幅收敛于渐近状态 $\epsilon_1/\epsilon_3 = 1$。

2.线性损耗 $\epsilon_1 < 0$ 与非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。图 6 左图描绘了耗散亮孤子的衰减，右图则显示归一化密度 $|u_n|^2/\hat{}\phi^2(t)$ 的演化。我们再次观察到，AL 亮孤子在 DGL 格点中持续存在，只是受到衰减背景的改变。

3. 爆破解：线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 和非线性增益 $\epsilon_3 < 0$。我们对亮孤子的爆破动力学进行了研究，与暗孤子的研究类似。参数 ϵ_i 与该研究中

暗孤子的参数相同。唯一缺少的曲线是平面波对应的红色（虚线）曲线 $T_{\max}$ (3.22)，因为它与消失边界条件的情况无关。左侧面板的图7展示了解析上界 (3.12) 相对于数值爆破时间的有效性。为评估数值爆破时间，我们使用了与暗孤子研究相同的数值技术。我们发现，解析上界不像暗孤子情形下那样接近数值爆破时间。通过比较数值爆破时间，我们还发现，亮孤子比暗孤子更早发生爆破。这些效应表明，初始条件的空间分布和局域化特性可能会显著影响爆破情景的结构及其对应的时间。

图8展示了耗散孤子与亮 AL 孤子的质心随时间演化的对比结果。我们再次观察到，在这两种情况下，二者的轨迹在相当长的时间区间内几乎无法区分。请注意，在损耗/损耗区域，我们没有观察到轨迹发散，因为亮孤子在 $|n| \to \infty$ 时消失，并在“零”振幅背景上演化，而该背景不受损耗/损耗动力学的影响。

c. 定理 *II.3* 的接近性估计精度。定理 II.3 确立了 DGL方程 (1.6) 的解以 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 的速率收敛到 AL 格点 (1.5) 的解，其中 $\epsilon \leq \varepsilon \to 0$，且二者初始条件之间的距离为 $||u^0 - \psi^0||_{l^2} = \mathcal{O}(\varepsilon)$。

图9展示了距离 $||y||_{l^2} = ||u(t) - \psi(t)||_{l^2}$ 随 ε 变化的对数刻度图，其中 $T_f = 500$ 固定。左（右）图展示了暗孤子（亮孤子）的情形。两幅图中的虚线分别对应定理 II.3 的解析估计线，其形式为 $||y||_{l^2}$ 对 $C\varepsilon$。对于暗孤子，在对应于上方虚线（蓝色）的线性增益/非线性损耗区域中，我们有 $C = 3.9 \times 10^3$。在线性损耗/非线性损耗区域中，我们有 $C = 1.8 \times 10^3$，对应第二条虚线（紫色）。实线上各点对应数值检测得到的距离函数变化率；这些变化率是针对上述给定的常数 C，拟合到形式为 $||y||_{l^2}$ 对 $C\epsilon^a$ 的直线上得到的。在线性增益/非线性损耗区域中，我们发现 $a = 2.12$，如第一条实线（红色）上的点所示。在线性损耗/非线性损耗区域中，我们发现 $a = 2.07$，如第二条实线（绿色）上的点所示。数值结果表明，解析估计不仅成立，而且距离函数的数值变化率显著更低，具体而言为 $\sim \epsilon^2$ 阶。

对于亮孤子，针对虚线曲线，我们得到的解析估计为：在线性增益／非线性损耗情形下为 $C = 1.0336$，在线性损耗／非线性损耗情形下为 $C = 1.0945$。对于数值确定的速率，我们得到：在线性增益／非线性损耗情形下为 $a = 1.01$，在线性损耗／非线性损耗情形下为 $a = 1.04$，与收敛阶为 $\sim \varepsilon$ 的解析预测非常接近。

总之，尽管理论接近性估计得到了满足，数值研究表明，实际的接近阶可能取决于初始条件的具体性质，例如其局域化类型。在此背景下，理论估计能否得到改进，是一个值得在未来研究中探讨的有趣问题。

d. 聚焦情形 $\kappa < 0$. 离散佩雷格林孤子。 最后，我们给出由 AL 格点 (1.5) 的解析佩雷格林孤子解所提供的离散佩雷格林初始条件所产生的动力学结果，

$$\psi_n^r(t) = q\left[1 - \frac{4(1+q^2)(1+4iq^2t)}{1+4n^2q^2+16q^4t^2(1+q^2)}\right]e^{2iq^2t}, \tag{3.27}$$

其中，参数 q 确定背景振幅。

1. 线性增益 $\epsilon_1 > 0$ 与非线性损耗 $\epsilon_3 > 0$。我们采用 $u_n(0) = \psi_n^r(-50)$ 作为初始条件，背景振幅为 $q = 0.1$。从图10左图可以看出，解析佩雷格林孤子的轮廓一直保持到 $t \approx 50$。正如预期的那样，这些结构并非暂时局域化：随后振幅上升，因为其动力学主要受背景的演化控制，而背景由常微分方程 (3.19) 的解支配。

2. 线性损耗 $\epsilon_1 < 0$ 与非线性损耗的对比 $\epsilon_3 > 0$。损耗/损耗区域似乎在构造类似佩雷格林孤子的离散时空局域波形方面具有更强的物理相关性，因为该区域中的解最终会衰减。因此，我们可以预期，时空波形在最终衰减动力学发生之前能够存续。图 10 右图展示了这一情形。事实上，在解最终衰减之前，由初始条件 $u_n(0) = \psi_n^r(0)$ 所引发的动力学呈现出时空局域模式，与解析阿尔伯特–卢佩雷格林孤子的模式相似。

四、结论

通过引入动力传递性论证，结合耗散与哈密顿可积及不可积非线性晶格之间的“无黏极限”和“对初始数据的连续依赖”这两个概念[37], ，我们证明了当离散金兹堡-朗道方程的耗散或增益强度较小时，其局域结构能够存续。若初始数据也彼此接近，这些存续波形就会接近哈密顿可积阿布洛维茨-拉迪克晶格的解析解，其距离由离散环境空间所诱导的适当度量来衡量。数值模拟证实了主要的接近性理论结果：金兹堡-朗道晶格上以亮孤立波和暗孤立波形式出现的局域结构，在相当长的时间内都与其保守对应系统共享若干主要特征，例如函数形式和速度。此外，与对有限晶格近似（与数值研究相关）的系统分析完全一致，数值结果表明，耗散孤立波的全局渐近行为主要受离散金兹堡-朗道系统中的耗散或损耗效应控制。我们指出，这些结果对于确定离散金兹堡-朗道系统精确解的稳定性也有影响 [40–42], ：如果将这些解的小扰动用作系统的初始条件，它们应呈现出本文所确定的全局渐近行为。然而，动力学的一个重要特征是，阿布洛维茨–拉迪克孤子在耗散系统中仍能存续，“但需考虑”波背景动力学中的增长率/衰减率；这些速率可通过解析方法定量确定，并由耗散或能量增益效应所决定。此外，我们还研究了离散 DGL 系统中具有离散佩雷格林孤子特征的时空局域波形的存在与存续。这些结果或可启发其他应用，例如，在系统中加入额外的适当项 [42] 后，孤立波仍可不发生“变形”而存续。另一个研究方向是将接近性论证推广至连续系统。目前正在开展这方面的研究，相关结果将另行报告[52]。

致谢

我们感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。JCM 感谢欧盟（FEDER 计划 2014-2020）通过安达卢西亚自治区政府经济、知识、企业与大学部（项目 P18-RT-3480 和 US-1380977）以及 MCIN/AEI/10.13039/501100011033（项目 PID2019-110430GB-C21 和 PID2020-112620GB-I00）提供的支持。

作者声明

作者没有需要披露的利益冲突。

作者贡献声明

所有作者对研究构思、设计和手稿撰写的贡献均相同。材料准备、数据收集和分析均由所有作者共同完成。所有作者均阅读并批准了最终手稿。

---

[1] K. Otsuka, *Self-Induced Phase Turbulence and Chaotic Itinerancy in Coupled Laser Systems*, 《物理评论快报》**65**（1990），329–332。[2] N. K. Efremidis 和 D. N. Christodoulides, *Discrete Ginzburg-Landau solitons*, 《物理评论E》**67**（2003），026606。[3] B. A. Malomed、E. Ding、K. W. Chow 和 S. K. Lai, *Pinned modes in lossy lattices with local gain and nonlinearity*, 《物理评论E》**86**（2012），036608。[4] N. K. Efremidis、D. N. Christodoulides 和 K. Hizanidis, *Two-dimensional discrete Ginzburg-Landau solitons*, 《物理评论A》**76**（2007），043839。[5] C. Mej´ıa-Cort´es、J. M. Soto-Crespo、R. Vicencio 和 M. I. Molina, *Vortex solitons of the discrete Ginzburg-Landau equation*, 《物理评论A》**83**（2011），043837。[6] E. Ding、A. Y. S. Tang、K. W. Chow 和 B. A. Malomed, *Pinned modes in two-dimensional lossy lattices with local gain and nonlinearity* **372** 2014 20140018 , 《皇家学会哲学学报A辑》（），。

[7] T. Bohr, A. W. Pedersen 和 M. Jensen, *Transition to turbulence in a discrete Ginzburg-Landau model*, Phys. Rev. A 42 (1990), 3626–3629. [8] I. Peschard 和 P. Le Gal, *Coupled Wakes of Cylinders*, Phys. Rev. Lett. 77 (1996), 3122–3125. [9] H. Willaime, O. Cardoso 和 P. Tabeling, *Frustration in a linear array of vortices*, Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 3247–3251. [10] D. Hennig 和 G. P. Tsironis, *Wave transmission in nonlinear lattices*, Phys. Rep. 307 (1999), 333–432. [11] P. G. Kevrekidis, K. Ø. Rasmussen 和 A. R. Bishop, *The discrete nonlinear Schrödinger equation: A survey of recent results* **15** 2001 2833 2900, Int. Journal of Modern Physics B ( ), – . [12] J.C. Eilbeck 和 M. Johansson, 离散非线性薛定谔方程：二十年回顾，载于：L. V´azquez, R.S. MacKay, M.P. Zorzano（编）， *Localization and Energy Transfer in Nonlinear Systems.* World Scientific，新加坡，第 44–67 页（2003）。[13] P.G. Kevredikis, *The Nonlinear Discrete Schrödinger Equation: Mathematical Analysis Numerial Computations and Physical Perspectives* 2009, (Springer-Verlag, 柏林, 海德堡,). [14] R. S. Mackay 和 S. Aubry, *Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators* **7** 1994 1623 1643, 非线性 ( ), – . [15] S. Aubry, *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*, Physica D 103 (1997), 201–250. [16] J. C. Eilbeck 和 R. Flesch, *Calculation of families of solitary waves on discrete lattices*, Phys. Lett. A 149 (1990), 200–202. [17] J. L. Mar´ín 和 S. Aubry, *Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit*, 非线性 9 (1996), 1501—1528. [18] D. Pelinovsky, *Translationally invariant nonlinear Schrödinger lattices*, 非线性 19 (2006), 2695–2716. [19] M. Weinstein, *Excitation thresholds for nonlinear localized modes on lattices*, 非线性 12 (1999), 673–691. [20] A. Pankov, *Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equations*, 非线性 19 (2006), 27–40. [21] S. Flach 和 A.V. Gorbach, *Discrete Breathers – Advances in theory and applications.* Phys. Rep. 467 (2008), 1–116. [22] P. G. Kevrekidis, *Non-linear waves in lattices: past, present, future*, IMA J. Appl. Math. 76 (2011), 389–423. [23] Y. Kivshar 和 D. Campbell, *Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes*, Phys. Rev. E 48 (1993), 3077–3081.[24] M.J. Ablowitz 和 P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (剑桥大学出版社，纽约，1991)。[25] M.J. Ablowitz 和 J.F. Ladik, *Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis*, J. Math. Phys. 17 (1976), 1011–1018.[26] M.J. Ablowitz 和 J.F. Ladik, *A nonlinear difference scheme and inverse scattering*, Stud. Appl. Math. 65 (1976), 213–229. [27] A. Ankiewicz, N. Akhmediev 和 J. M. Soto-Crespo, *Discrete rogue waves of the Ablowitz-Ladik and Hirota equations*, Phys. Rev. E 82 (2010), 026602. [28] N. Akhmediev 和 A. Ankiewicz, *Modulation instability, Fermi-Pasta-Ulam recurrence, rogue waves, nonlinear phase shift, and exact solutions of the Ablowitz-Ladik equation* **83** 2011 046603, Phys. Rev. E ( ), . [29] N. K. Efremidis 和 D. N. Christodoulides, *Discrete Ginzburg-Landau solitons*, Phys. Rev. E 67 (2003), 026606. [30] B. A. Malomed, E. Ding, K. W. Chow 和 S. K. Lai, *Pinned modes in lossy lattices with local gain and nonlinearity*, Phys. Rev. E 86 (2012), 036608. [31] J.M. Soto-Crespo, N. Akhmediev 和 A. Ankiewicz, *Motion and stability properties of solitons in discrete dissipative structures* **314** 2003 126 130, Phys. Lett. A ( ), – . [32] K. Maruno, A. Ankiewicz 和 N. Akhmediev, *Dissipative solitons of the discrete complex cubic–quintic Ginzburg–Landau equation* **347** 2005 231 240, Phys. Lett. A ( ), – . [33] F. Kh. Abdullaev 和 M. Salerno, *Dissipative solitons in the discrete Ginzburg-Landau equation with saturable nonlinearity*, Phys. Rev. E 97 (2018), 052208. [34] N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides 和 K. Hizanidis, *Two-dimensional discrete Ginzburg-Landau solitons*, Phys. Rev. A 76 (2007), 043839. [35] C. Mej´ía-Cort´es, J. M. Soto-Crespo, R. Vicencio 和 M. I. Molina, *Vortex solitons of the discrete Ginzburg-Landau equation*, Phys. Rev. A 83 (2011), 043837. [36] E. Ding, A. Y. S. Tang, K. W. Chow 和 B. A. Malomed, *Pinned modes in two-dimensional lossy lattices with local gain and nonlinearity* **372** 2014 20140018, Phil. Trans. R. Soc. A ( ), . [37] D. Hennig, N. I. Karachalios 和 J. Cuevas-Maraver, *The closeness of the Ablowitz-Ladik lattice to the Discrete Nonlinear Schrödinger equation* **316** 2022 346 363, J. Differential Equations ( ), – . [38] D. Hennig 和 N. I. Karachalios, *Dynamics of nonlocal and local discrete Ginzburg-Landau equations: global attractors and their congruence* **215** 2022 112647, 20, 非线性分析 ( ), pp. [39] C. Zhao 和 S. Zhou, *Limit behaviour of global attractors for the complex Ginzburg-Landau equation on infinite lattices*, Appl. Math. Lett. 21 (2007), 628-635. [40] C.-Q. Dai, X. Cen 和 S.-S. Wu, *Exact solutions of discrete complex cubic Ginzburg–Landau equation via extended tanh-function approach* **56** 2008 55 62, Comput. Math. with Appl. ( ), - . [41] Z.-J. Liang 和 L. Z. Guo, *Exact Solutions of Discrete Complex Cubic Ginzburg—Landau Equation and Their Linear Stability* **56** 2011 1111 1118, Commun. Theor. Phys. ( ), – . [42] K. Maruno, A. Ankiewicz 和 N. Akhmediev, *Exact localized and periodic solutions of the discrete complex Ginzburg–Landau equation* **221** 2003 199 209, ( ), – . [43] D.E. Pelinovsky 和 G. Schneider, *The monoatomic FPU system as a limit of a diatomic FPU system*, Appl. Math. Lett. 107 (2020), 106387. [44] J. Wu, *The Inviscid Limit of the Complex Ginzburg- Landau Equation*, J. Differential Equations 142 (1998), 413–433.

[45] T. Ogawa 和 T. Yokota, *Uniqueness and inviscid limits of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation in a two-dimensional domain* **245** 2004 105 121 , 《数学物理通讯》（），–。[46] G. Fotopoulos、N. I. Karachalios、V. K. Kouloukovannis 和 K. V. Vetas, *Collapse dynamics for the discrete nonlinear Schrödinger equation with gain and loss* **72** 2019 213 231 , 《非线性科学与数值模拟通讯》（），–。[47] Y. S. Kivshar 和 M. Salerno, *Modulational instabilities in the discrete deformable nonlinear Schrödinger equation*, 《物理评论E》**49** (1994), 3543。[48] B. A. Malomed, *Spatial solitons supported by localized gain*, 《美国光学学会杂志B》**31** (2014), 2460。[49] J. Cuevas-Maraver、P. G. Kevrekidis、D. J. Frantzeskakis、N. I. Karachalios、M. Haragus 和 G. James, *Floquet Analysis of Kuznetsov–Ma breathers: A Path Towards Spectral Stability of Rogue Waves* **96** 2017 012202 , 《物理评论E》（），。[50] J. Sullivan、E. G. Charalampidis、J. Cuevas-Maraver、P. G. Kevrekidis 和 N. I. Karachalios, *Kuznetsov-Ma breather-like solutions in the Salerno model* **135** 2020 607, 1 12 , 《欧洲物理期刊Plus》（）-。[51] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/ B: Nonlinear Monotone Operators* (Springer-Verlag, 纽约, 1990)。[52] D. Hennig、N. I. Karachalios、J. Cuevas-Maraver、D. Mantzavinos 和 I. G. Stratis, *The stability of the nonlinear Schrödinger equation* 2023 ( ), 即将发表。