11顶点有理R矩阵的高秩推广：IRF-顶点关系与结合Yang-Baxter方程

K. Atalikov ◇• A. Zotov ◇•

◇– 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，Gubkina 街 8 号，119991，
俄罗斯莫斯科

•– 国家研究中心“库尔恰托夫研究所”，
Kurchatova 广场 1 号，123182，俄罗斯莫斯科

电子邮箱：kantemir.atalikov@yandex.ru，zotov@mi-ras.ru

arXiv:2303.02391v1 [math-ph] 4 Mar 2023

摘要

我们研究 GL_N 有理 R-矩阵，它在 $N=2$ 情形下化为 11-顶点 R-矩阵。首先，我们利用 IRF-顶点型变换描述它与动力学及半动力学 R-矩阵的关系。作为副产品，我们推导出 GL_N R-矩阵的一种新的显式形式。接下来，我们证明量子 Yang-Baxter 方程和结合 Yang-Baxter 方程。我们还证明了一组其他 R-矩阵性质及 R-矩阵恒等式。

目录

1 引言 2

2 有理 IRF-顶点变换矩阵 6

3 IRF-顶点关系及 11-顶点 R-矩阵的高秩推广 **8**

3.1 动力学与半动力学 R-矩阵.8 3.2 由 IRF-顶点变换得到的顶点 R-矩阵.9 3.3 有理 R-矩阵新旧形式的一致性.12

4 结合Yang-Baxter方程及其他 R-矩阵性质 **13**

4.1 斜对称性与幺正性.13 4.2 自变量对称性.14 4.3 结合与量子杨-巴克斯特方程.15

5 附录：GL_N 情形下的有理 R-矩阵 **16**

5.1 量子 R-矩阵.16 5.2 经典 r-矩阵.17 5.3 其他系数.18

参考文献 **20**

1 引言

R 矩阵。 Quantum R-矩阵是量子杨-巴克斯特方程 [24, 5, 20] 的一个解:

$$R^{\hbar}_{12}R^{\hbar}_{13}R^{\hbar}_{23} = R^{\hbar}_{23}R^{\hbar}_{13}R^{\hbar}_{12}\,, \qquad R^{\hbar}_{ab} = R^{\hbar}_{ab}(z_a - z_b)\,. \tag{1.1}$$

它是基于 RTT 关系和贝特拟设方法研究量子完全可解模型的基本对象。它也出现在数学、理论物理与数学物理的不同领域。本文讨论 GL($N,\mathbb{C}$) 李群基本表示中的 R 矩阵，即 R 矩阵 $R^{\hbar}_{12}(z)$ 是 Mat(N, $\mathbb{C}$) 中关于两个复变量的矩阵值函数[⊗2] （$\hbar$ 是普朗克常数， z 是谱参数）。它具有如下形式

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} R_{ij,kl}(\hbar, z)\, E_{ij} \otimes E_{kl}\,, \tag{1.2}$$

其中，矩阵集合 E_{ij} 是 Mat($N,\mathbb{C}$) 中的标准矩阵基：$(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$。下标 12 表示张量分量的编号，其中 R 矩阵作为线性算子非平凡地作用。方程 (1.1) 写在 Mat($N,\mathbb{C}$)[⊗3] 中。于是

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} R_{ij,kl}(\hbar, z)\, 1_N \otimes E_{ij} \otimes E_{kl}\,, \qquad R^{\hbar}_{13}(z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} R_{ij,kl}(\hbar, z)\, E_{ij} \otimes 1_N \otimes E_{kl}\,, \tag{1.3}$$

对于 $R^{\hbar}_{23}(z)$，情况也类似，其中 1_N 是 $N\times N$ 单位矩阵。下标 $12\to 21$ 的置换表示置换算子 P_{12} 的作用:

$$R^{\hbar}_{21}(z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} R_{ij,kl}(\hbar, z)\, E_{kl} \otimes E_{ij} = P_{12}R^{\hbar}_{12}(z)P_{12}\,, \qquad P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij} \otimes E_{ji}\,. \tag{1.4}$$

性质与归一化。量子杨-巴克斯特方程 (1.1) 为系数函数 $R_{ij,kl}(\hbar, z)$ 提供了一组方程。注意，(1.1) 将 R-矩阵定义到任意函数的乘法因子。这种不确定性可根据 R-矩阵的其他性质以不同方式消除。本文考虑同时满足幺正性

$$R^{\hbar}_{12}(z)R^{\hbar}_{21}(-z) = f(\hbar, z)\, 1_N \otimes 1_N \tag{1.5}$$

（其中 $f(\hbar, z)$ 是某个函数）和斜对称性

$$R^{\hbar}_{12}(z) = -R^{-\hbar}_{21}(-z)\,. \tag{1.6}$$

对于幺正 R-矩阵，通常会将函数 $f(\hbar, z)$ 取为 1，但我们采用另一种方式进行归一化[1]:

$$f(\hbar, z) = \frac{1}{\hbar^2} - \frac{1}{z^2} = \phi(\hbar, z)\phi(\hbar, -z)\,, \qquad \phi(\hbar, z) = \frac{1}{\hbar} + \frac{1}{z}\,. \tag{1.7}$$

因此，函数 $\phi(\hbar, z)$ 可视为 GL_1 R-矩阵；换言之，GL_N R-矩阵是函数 $\phi(\hbar, z)$ 的矩阵类比。

另一项重要 性质是经典极限。它是 R-矩阵在 $\hbar = 0$ 附近的展开 :

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \frac{1}{\hbar}\, 1_N \otimes 1_N + r_{12}(z) + \hbar\, m_{12}(z) + O(\hbar^2)\,, \tag{1.8}$$

[1]由 (1.5) 和 (1.7) 可得 $\tilde{R}^{\hbar}_{12}(z)\,\tilde{R}^{\hbar}_{21}(-z) = 1_N \otimes 1_N$ 对于 $\tilde{R}^{\hbar}_{12}(z) = R^{\hbar}_{12}(z)/\phi(\hbar, z)$。

展开式的第一个非平凡系数是经典 r-矩阵 $r_{12}(z)$。由 (1.1) 可轻易得到经典杨-巴克斯特方程:

$$[r_{12}(z_1-z_2),r_{13}(z_1-z_3)]+[r_{12}(z_1-z_2),r_{23}(z_2-z_3)]+[r_{13}(z_1-z_2),r_{23}(z_2-z_3)]=0\,. \tag{1.9}$$

$R^{\hbar}_{12}(z)$在 $z=0$ 附近的局部行为由以下条件定义:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} R^{\hbar}_{12}(z)=P_{12}\,. \tag{1.10}$$

Yang 的 R矩阵及其变形。满足上述所有性质的 R矩阵的最简单例子是有理 Yang R矩阵:

$$R^{\mathrm{Yang},\hbar}_{12}(z)=\frac{1_N\otimes 1_N}{\hbar}+\frac{P_{12}}{z}\,. \tag{1.11}$$

在 $N=2$ 情形下，它是众所周知的 6 顶点 XXX R矩阵，按（1.7）式进行归一化:

$$R^{6\mathrm{v},\hbar}_{12}(z)=\begin{pmatrix} 1/\hbar+1/z & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/\hbar & 1/z & 0\\ 0 & 1/z & 1/\hbar & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/\hbar+1/z \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

I. Cherednik 在 [8]中指出，GL_2 R矩阵（1.12）具有如下 11 顶点变形:

$$R^{11\mathrm{v},\hbar}_{12}(z)=\begin{pmatrix} 1/\hbar+1/z & 0 & 0 & 0\\ -z-\hbar & 1/\hbar & 1/z & 0\\ -z-\hbar & 1/z & 1/\hbar & 0\\ -z^3-\hbar^3-2z^2\hbar-2z\hbar^2 & z+\hbar & z+\hbar & 1/\hbar+1/z \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

后一个 R矩阵同样满足上述所有方程和性质。相应的量子可积自旋链在 [12, 15]中进行了讨论。 [21] 中表明，11 顶点 R矩阵可通过一个特殊的极限过程，由椭圆 Baxter 的 R矩阵得到。此外，还提出了一种计算（1.13）式高秩推广的算法，该算法基于对 GL_N 椭圆 Baxter-Belavin R矩阵应用极限过程。在 [13] 中，通过 IRF-顶点变换的经典类比，推导出了 GL_N 情形下 R矩阵的显式形式；该变换联系了有理 N体 Ruijsenaars-Schneider 模型与 GL_N 李群的相对论陀螺。类似地，在 [1] 中，利用有理 Calogero-Moser 模型与某个可积有理陀螺类模型之间的规范等价，求得了相应的经典 r矩阵。 [1, 13] 中得到的显式公式相当复杂。详情请见附录。

11 顶点 R-矩阵空间（以及其更高秩的推广）可在如下意义上视为 Yang 的 R-矩阵的变形:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon R^{11\mathrm{v},\hbar\epsilon}_{12}(z\epsilon)=R^{\mathrm{Yang},\hbar}_{12}(z)\,. \tag{1.14}$$

请注意，迄今为止我们讨论的是依赖于谱参数之差的 R-矩阵$R^{\hbar}_{ab}(z_a,z_b)=R^{\hbar}_{ab}(z_a-z_b)$。所有方程和条件都可以推广到 $R^{\hbar}_{ab}(z_a,z_b)\neq R^{\hbar}_{ab}(z_a-z_b)$的情形。在这种形式下，$\mathrm{GL}_N$ 有理 R-矩阵的答案，是在 [7] 中通过研究尖点三次曲线上的向量丛得到的。据推测， [7] 中的答案与 [21, 13]中的$R^{\hbar}_{ab}(z_a-z_b)$规范等价。

动力学 R-矩阵。上述所有 R-矩阵均为顶点型。另一大类 R-矩阵是 IRF 型 [6, 11]。相应的 R-矩阵被称为动力学矩阵（顶点型R-矩阵也称为非动力学矩阵），因为它们依赖于额外的（动力学）参数q_1、.....、q_N。它们满足量子动力学 Yang-Baxter 方程（或 Gervais-Neveu-Felder 方程） [10]:

$$R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2|\,q-\hbar^{(3)})R^{\hbar}_{13}(z_1-z_3|\,q)R^{\hbar}_{23}(z_2-z_3|\,q-\hbar^{(1)}) = \\ = R^{\hbar}_{23}(z_2-z_3|\,q)R^{\hbar}_{13}(z_1-z_3|\,q-\hbar^{(2)})R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2|\,q)\,, \tag{1.15}$$

其中，动力学参数的移位 q 按以下规则进行 e:

$$R^{\hbar}_{12}(z_1,z_2|\,q+\hbar^{(3)}) = P^{\hbar}_3\,R^{\hbar}_{12}(z_1,z_2|\,q)\,P^{-\hbar}_3\,,\quad P^{\hbar}_3=\sum_{k=1}^{N}1\otimes 1\otimes E_{kk}\exp(N\hbar\frac{\partial}{\partial q_k})\,. \tag{1.16}$$

移位算子中的因子 N 源于我们对变量归一化所作的特殊选择。

某些动力学和非动力学 R-矩阵通过所谓的 IRF-顶点变换 [6, 11]相互关联:

$$R^{\mathrm{Vertex},\hbar}_{12}(z_1-z_2) = \\ = g_2(z_2,q)\,g_1(z_1,q-\hbar^{(2)})\,R^{\mathrm{Dynam}}_{12}(\hbar,z_1-z_2|\,q)g_2^{-1}(z_2,q-\hbar^{(1)})g_1^{-1}(z_1,q)\,, \tag{1.17}$$

其中 $g(z,q)\in$ 矩阵空间 Mat($N,\mathbb{C}$)是实现 IRF-顶点变换的某个特殊矩阵，且 d

$$g_1(z_1,q)=g(z_1,q)\otimes 1_N\,,\qquad g_2(z_2,q)=1_N\otimes g(z_2,q)\,, \\ g_1(z_1,q-\hbar^{(2)})=P_2^{-\hbar}g_1(z_1,q)P_2^{\hbar}\,,\qquad g_2(z_2,q-\hbar^{(1)})=P_1^{-\hbar}g_2(z_2,q)P_1^{\hbar} \tag{1.18}$$

其中 $P_i^{\hbar}$在 (1.16) 中定义。关系 (1.17) 可视为量子规范变换。这一变换极其非平凡。右端与 q_1、...、q_N无关，而右端的所有矩阵因子都依赖于动力学变量。此外，规范变换矩阵依赖于 z_1 或 z_2，但结果仅依赖于谱参数之差 z_1-z_2。

半动力学 R-矩阵。G. Aru- tyunov、L. Chekhov 和 S. Frolov 在 [2], 中引入了另一类有趣的 R-矩阵，另见 [4, 19]。这些 R-矩阵（称为半动力学矩阵）也依赖于动力学参数 q_1,..., q_N，但 Yang-Baxter 方程有所不同:

$$R^{\hbar}_{12}(z_1,z_2|\,q)R^{\hbar}_{13}(z_1-\hbar,z_3-\hbar|\,q)R^{\hbar}_{23}(z_2,z_3|\,q) = \\ = R^{\hbar}_{23}(z_2-\hbar,z_3-\hbar|\,q)R^{\hbar}_{13}(z_1,z_3|\,q)R^{\hbar}_{12}(z_1-\hbar,z_2-\hbar|\,q)\,. \tag{1.19}$$

An 此处 IRF-顶点关系 (1.17) 的类似形式相当简单（见 [19]） :

$$R^{\mathrm{Vertex},\hbar}_{12}(z_1-z_2) = \\ = g_2(z_2,q)\,g_1(z_1+\hbar,q)\,R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)\,g_2^{-1}(z_2+\hbar,q)g_1^{-1}(z_1,q)\,. \tag{1.20}$$

请注意，与动力学 R-矩阵不同，半动力学矩阵不依赖于谱参数之差[2]。

比较 (1.17) 和 (1.20) 右端可得

$$R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2|\, q) = \\ = g_1^{-1}(z_1+\hbar, q)\, g_1(z_1, q-\hbar^{(2)})\, R_{12}^{\text{Dynam}}(\hbar, z_1-z_2|\, q)\, g_2^{-1}(z_2, q-\hbar^{(1)})\, g_2(z_2+\hbar, q)\,. \tag{1.21}$$

结合Yang-Baxter方程。某一类顶点型 R 矩阵满足一种称为结合Yang-Baxter方程 [9] 的二次关系：

$$R_{12}^{\hbar} R_{23}^{\eta} = R_{13}^{\eta} R_{12}^{\hbar-\eta} + R_{23}^{\eta-\hbar} R_{13}^{\hbar}\,, \qquad R_{ab}^{x} = R_{ab}^{x}(z_a - z_b)\,. \tag{1.22}$$

更准确地说，量子杨-巴克斯特方程的解并不总是满足 (1.22)。反过来，结合Yang-Baxter方程的解也并非都满足 (1.1)。然而，如果我们考虑具有附加性质 (1.5)-(1.6) 的 (1.22) 的解，那么这样的线性算子 $R_{12}^{\hbar}(z)$ 确实满足量子杨 - 巴克斯特方程 (1.1)，因此它确实是一个量子 R 矩阵。 [14] 中给出了这一事实的一个简单证明。总之，GL_N 李群基本表示中的 (1.22) 的斜对称且幺正解是一个量子 R 矩阵。

在 [7] 中发现的有理 R-矩阵（其中 $R_{ab}^{\hbar}(z_a, z_b) \neq R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b)$）按构造也满足式 (1.22) 的类似形式，该形式适用于不依赖于谱参数之差的 R-矩阵。还要指出，某一类有理 R-矩阵满足非齐次结合杨–巴克斯特方程 [18]。

据我们所知，动力学 R-矩阵的结合Yang-Baxter方程类似形式尚不为人知。不过，半动力学 R-矩阵已知满足该方程 [19]:

$$R_{12}^{\hbar}(z_1+\eta, z_2+\eta) R_{23}^{\eta}(z_2+\hbar, z_3+\hbar) = \\ = R_{13}^{\eta}(z_1+\hbar, z_3+\hbar) R_{12}^{\hbar-\eta}(z_1+\eta, z_2+\eta) + R_{23}^{\eta-\hbar}(z_2+\hbar, z_3+\hbar) R_{13}^{\hbar}(z_1+\eta, z_3+\eta)\,, \tag{1.23}$$

其中 $R_{ab}^{\hbar}(z_1, z_2) = R_{ab}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2|\, q)$。

本文目的。本文讨论 11 顶点 R-矩阵 (1.13) 及其高秩推广。第 2 节回顾矩阵 $g(z, q)$ 在有理情形下的性质，该矩阵出现在式 (1.17)、(1.20) 中，相关内容基于 [1] 的结果。椭圆情形和（三角情形的部分情况）下的 IRF-顶点关系 (1.17)、(1.20)、(1.21) 已为人所知，但有理情形下尚不清楚。第 3 节研究动力学和半动力学有理 R-矩阵，并证明关系 (1.21)。通过应用 IRF-顶点变换 (1.20)，我们以一种新形式导出有理 GL_N R-顶点型矩阵。这一新形式使得我们能够证明一系列重要性质。第 4 节证明有理顶点型 R-矩阵满足结合Yang-Baxter方程 (1.22)。此外，还证明了幺正性 (1.5)、斜对称性 (1.6) 和自变量对称性。

我们的研究受到此类 R矩阵在构造经典和量子可积系统 [22, 17] （包括 1+1 场论 [3]）中的各种应用的启发。

[2]当然，也可以通过施加某种规范变换，使动力学 R-矩阵不依赖于谱参数之差。这里我们的意思是，可以在某一规范下选择动力学 R-矩阵，使其依赖于谱参数之差。对于半动力学 R-矩阵，情况并非如此。

2 有理 IRF-顶点变换矩阵

设 q_1，...， q_N 为一组取值于 $\mathbb{C}$的变量，并且

$$\bar{q}_j = q_j - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} q_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{N}\bar{q}_k = 0\,. \tag{2.1}$$

根据 [1]，引入矩阵 $g(z) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$:

$$g(z) = g(z,q_1,...,q_N) = \Xi(z,q)D^{-1}(q)\,, \qquad \Xi(z,q)\,, D(q) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})\,, \tag{2.2}$$

其中

$$\Xi_{ij}(z,q) = (z+\bar{q}_j)^{\varrho(i)}\,, \qquad D_{ij}(q) = \delta_{ij}\prod_{k\neq i}^{N}(q_i - q_k) \tag{2.3}$$

with

$$\varrho(i) = \begin{cases} i-1 & \text{for} \quad 1 \le i \le N-1, \\ N & \text{for} \quad i = N\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

使得

$$\Xi(z,q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z+\bar{q}_1 & z+\bar{q}_2 & \dots & z+\bar{q}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (z+\bar{q}_1)^{N-2} & (z+\bar{q}_2)^{N-2} & \dots & (z+\bar{q}_N)^{N-2} \\ (z+\bar{q}_1)^{N} & (z+\bar{q}_2)^{N} & \dots & (z+\bar{q}_N)^{N} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

上述定义的矩阵 Ξ 具有以下性质:

1）行列式:

$$\det\Xi(z,q) = Nz\prod_{i>j}^{N}(q_i - q_j) \tag{2.6}$$

且对于 $\Xi_{ij}(x) = x_j^{\rho(i)}$，我们有

$$\det\Xi(x) = \Big(\sum_{k=1}^{N} x_k\Big)\prod_{i>j}^{N}(x_i - x_j)\,. \tag{2.7}$$

2) Ξ的逆矩阵 (z,q)。定义 N 个变量 $x_1,...,x_N$ 的初等对称函数集合 :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{N}(\zeta - x_k) &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\zeta^k\sigma_k(x_1,...,x_N)\,, \\ \sigma_{N-d}(x) &= (-1)^N\sum_{1\le i_1<i_2...<i_d\le N} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_d}\,, \quad d = 0,...,N\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

类似地，定义函数集 $N(x)$、 $k=1$、.....、 N:

$$-\prod_{m\neq k}^{N}(\zeta - x_m) = \partial_{x_k}\prod_{k=1}^{N}(\zeta - x_k) = \sum_{s=0}^{N-1}(-1)^s\zeta^s\,\overset{k}{\sigma}_s(x)\,. \tag{2.9}$$

后面这些函数自然会出现在范德蒙德矩阵 $V_{ij}(x) = x_j^{i-1}$ 的逆矩阵中，类似地，也会出现在 $\Xi_{ij}(x) = x_j^{\rho(i)}$ 的逆矩阵中:

$$V^{-1}_{kj}(x) = \frac{(-1)^j \overset{k}{\sigma}_{j-1}(x)}{\prod\limits_{s:s\neq k}^{N}(x_k - x_s)}, \qquad \Xi^{-1}_{kj}(x) = (-1)^{\varrho(j)} \frac{\overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)-1}(x) - (\sum\limits_{s:s\neq k}^{N} x_s)\,\overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)}(x)}{(\sum\limits_{s=1}^{N} x_s)\prod\limits_{s:s\neq k}^{N}(x_k - x_s)} \tag{2.10}$$

or

$$\Xi^{-1}_{kj}(x) = (-1)^{\varrho(j)} \frac{\sigma_{\varrho(j)}(x)}{(\sum\limits_{s=1}^{N} x_s)\prod\limits_{s\neq k}^{N}(x_k - x_s)} - (-1)^{\varrho(j)} \frac{\overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)}(x)}{\prod\limits_{s\neq k}^{N}(x_k - x_s)}. \tag{2.11}$$

最后，将 $x_j = z + \bar{q}_j$ 代入(2.10)，得到

$$g^{-1}_{kj}(z,q) = (-1)^{\varrho(j)}\Big(\frac{\sigma_{\varrho(j)}(x)}{Nz} - \overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)}(x)\Big), \qquad x_j = z + q_j - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} q_k\,. \tag{2.12}$$

也可以将 $g^{-1}(z,q)$的表达式按 z的幂进行分解:

$$\begin{aligned}\Xi^{-1}_{mj}(z,q) = \frac{(-1)^{\varrho(j)}}{Nz}\Bigg\{\sigma_{\varrho(j)}(\bar{q}) + \sum_{s=1}^{N-j} z^s \Bigg[\sigma_{s+j-1}(\bar{q})\begin{pmatrix} s+j-1 \\ j-1\end{pmatrix} \\ -N\,\overset{m}{\sigma}_{s+j-2}(\bar{q})\begin{pmatrix} s+j-2 \\ j-1\end{pmatrix}\Bigg] - (N-j)\,z^{N-j+1}\,\overset{m}{\sigma}_{N-1}(\bar{q})\begin{pmatrix} N \\ j-1\end{pmatrix}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

详细内容可参见 [1]的附录。

3) 在 $z = 0$处的退化。由(2.6)可知， $g(z,q)$在 $z = 0$处退化。因此，矩阵 $g(0,q)$应具有非平凡核。该核为一维。它由列向量 a 生成，其所有分量均等于1:

$$g(0,q)a = 0\,, \qquad a = (1,...,1)^T\,. \tag{2.14}$$

4) 因式分解。引入矩阵

$$\mathcal{L}^{\eta}_{ij}(z) = \eta\Big(\frac{1}{q_i - q_j + \eta} - \frac{1}{Nz}\Big)\prod_{k:k\neq j}^{N}\frac{q_j - q_k - \eta}{q_j - q_k}\,. \tag{2.15}$$

则它可以表示为如下因式分解形式:

$$\mathcal{L}^{\eta}(z) = g^{-1}(z,q)g(z-\eta,q)\,. \tag{2.16}$$

事实上，还存在一个更一般的关系，它类似于通过范德蒙德矩阵对柯西矩阵进行因式分解。考虑 $C(z) \in$ 矩阵空间$(N,\mathbb{C})$

$$C_{ij}(z) = \Big(\frac{1}{\bar{q}_i - \bar{u}_j + \eta} - \frac{1}{Nz}\Big)\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}(\bar{u}_j - \bar{q}_k - \eta)}{\prod\limits_{k:k\neq i}^{N}(\bar{q}_i - \bar{q}_k)}, \tag{2.17}$$

其中，变量集合 $\bar{u}_k$满足 $\bar{u}_1 + ... + \bar{u}_N = 0$，与 (2.1) 类似。于是

$$C(z) = -\Xi^{-1}(z,q)\Xi(z-\eta,u)\,. \tag{2.18}$$

关于 t 的讨论 因式分解性质及其几何意义可见于 [23] .

3 IRF-顶点关系与11顶点R矩阵的高秩推广

3.1 动力学与半动力学 R矩阵

动力学 GL_N 有理 R 矩阵如下:

$$R_{12}^{\mathrm{Dynam}}(\hbar, z_1 - z_2 | \, q) = \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{N}{q_j - q_i} \Big) E_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{\hbar} + \frac{N}{q_i - q_j} \Big) E_{ii} \otimes E_{jj} + \\ + \Big(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{\hbar} \Big) \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} \, . \tag{3.1}$$

经直接计算可知，它满足量子动力学 Yang-Baxter 方程（1.15）。该 R矩阵还满足斜对称性（1.6）和幺正性（1.5）性质。

下文将讨论半动力学 GL_N 有理 R矩阵:

$$R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) = \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{N}{q_j - q_i} \Big) E_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{\hbar} + \frac{N}{q_j - q_i} \Big) E_{ii} \otimes E_{jj} - \\ - \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{z_1 + \hbar} + \frac{N}{q_j - q_i} \Big) E_{ij} \otimes E_{jj} + \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{z_2} + \frac{N}{q_j - q_i} \Big) E_{jj} \otimes E_{ij} + \\ + \Big(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{\hbar} - \frac{1}{z_1 + \hbar} \Big) \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} \, . \tag{3.2}$$

同样可以通过直接计算验证，它满足量子半动力学杨-巴克斯特方程（1.19）。其斜对称性和幺正性性质如下:

$$R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) = -R_{21}^{\text{Semi-dynam}}(-\hbar, z_2 + \hbar, z_1 + \hbar | \, q) \, , \tag{3.3}$$

$$R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) R_{21}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_2, z_1 | \, q) = f(\hbar, z_1 - z_2) 1_N \otimes 1_N \, . \tag{3.4}$$

接下来，我们讨论动力学与半动力学 R矩阵（3.1）和（3.2）之间的关系。

定理 **1** R-矩阵（3.1）和（3.2）通过以下扭曲变换相关联:

$$R_{12}^{Semi\text{-}dynam}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) = F_{12}(\hbar, z_1 | \, q) \, R_{12}^{Dynam}(\hbar, z_1 - z_2 | \, q) \, F_{21}^{-1}(\hbar, z_2 | \, q) \, , \tag{3.5}$$

其中

$$F_{12}(\hbar, z_1 | \, q) = \\ = \hbar \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{1}{\hbar} - \frac{N}{q_i - q_j + N\hbar} \Big) E_{ii} \otimes E_{jj} + \hbar \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{N}{q_i - q_j + N\hbar} - \frac{1}{z + \hbar} \Big) E_{ij} \otimes E_{jj} \, , \tag{3.6}$$

$$F_{12}^{-1}(\hbar, z_1 | \, q) = \\ = \hbar \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{1}{z} - \frac{N}{q_i - q_j} \Big) E_{ij} \otimes E_{jj} + \hbar \sum_{i \neq j}^{N} \Big(\frac{N}{q_i - q_j} + \frac{1}{\hbar} \Big) E_{ii} \otimes E_{jj} + \hbar \Big(\frac{1}{\hbar} + \frac{1}{z} \Big) \sum_{i=1}^{N} E_{ii} \otimes E_{ii} \tag{3.7}$$

and

$$F_{12}(\hbar, z_1 | \, q) = g_1^{-1}(z_1 + \hbar, q)\, g_1(z_1, q - \hbar^{(2)})\,, \tag{3.8}$$

从而关系式（1.21）成立。

陈述的第一部分 (3.5)–(3.7) 是 [2]中类似但更一般的椭圆关系的有理形式。陈述的第二部分 (3.8) 由 (2.15)–(2.16) 推出。

3.2 由 IRF-顶点变换得到的顶点 R-矩阵

规范变换后的半动力学 R-矩阵的性质。我们将利用半动力学 R-矩阵 (3.2) 以及 IRF-顶点关系 (1.20) 的右端来计算顶点 R-矩阵。首先，我们需要证明表达式

$$g_2(z_2, q)\, g_1(z_1 + \hbar, q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q)\, g_2^{-1}(z_2 + \hbar, q) g_1^{-1}(z_1, q)\,. \tag{3.9}$$

与矩阵空间 $g(z,q)$ (2.2) 一起，与动力学参数 $q_1, ..., q$ 无关 $_N$.

命题 3.1 表达式 (3.9)（其中半动力学 R-矩阵为 (3.2)，扭曲矩阵为给定矩阵）与变量 $q_1, ..., q_N$ 无关。*(2.2)*

证明。固定某个指标 n: $1 \le n \le N$。引入矩阵

$$l^{(n)}(z, q) = g^{-1}(z, q)\partial_{q_n} g(z, q) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}) \tag{3.10}$$

and

$$l(z, q) = g^{-1}(z, q)\partial_z g(z, q) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})\,. \tag{3.11}$$

后一个矩阵可由 (2.15)-(2.16) 轻易计算得到，因为

$$\mathcal{L}^{\eta}(z, q) = 1_N - \eta\, l(z, q) + O(\eta^2)\,. \tag{3.12}$$

由此得到

$$l_{ij}(z, q) = \delta_{ij}\Big(\frac{1}{Nz} + \sum_{k:k\neq j}^{N} \frac{1}{q_i - q_k}\Big) + (1 - \delta_{ij})\Big(\frac{1}{Nz} - \frac{1}{q_i - q_j}\Big)\,. \tag{3.13}$$

考虑到矩阵 $g(z,q)$ 对其变量的依赖形式 (2.2)-(2.3)，我们还可以得到 $l^{(n)}(z,q)$ 的显式表达式:

$$\begin{gathered} l_{ij}^{(n)}(z, q) = \frac{N-1}{N}\,\delta_{jn}\, l_{ij}(z, q) - \frac{1}{N}\,(1 - \delta_{jn})\, l_{ij}(z, q) - \delta_{ij}\,\frac{\partial_{q_n} D_{ii}(q)}{D_{ii}(q)}\,, \\ \frac{\partial_{q_n} D_{ii}(q)}{D_{ii}(q)} = \frac{1 - \delta_{in}}{q_n - q_i} + \delta_{in} \sum_{k:k\neq i}^{N} \frac{1}{q_i - q_k}\,. \end{gathered} \tag{3.14}$$

让我们计算表达式 (3.9) 关于 q_n 的导数:

$$\begin{aligned} & g_2(z_2, q)\, g_1(z_1 + \hbar, q)\Big(\partial_{q_n} R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) + l_1^{(n)}(z_1 + \hbar, q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) + \\ & + l_2^{(n)}(z_2, q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q) - R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q)\, l_2^{(n)}(z_2 + \hbar, q) - \\ & - R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2 | \, q)\, l_1^{(n)}(z_1, q)\Big) g_2^{-1}(z_2 + \hbar, q)\, g_1^{-1}(z_1, q)\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

直接计算　计算表明，(3.15) 中括号内的表达式等于零。 ■

命题 3.2 采用半动力学 R-矩阵 (3.2) 和扭曲矩阵 (2.2) 的表达式 (3.9) 仅取决于谱参数之差 $z_1 - z_2$。

证明。该结论的证明与前一个结论类似。计算表达式 (3.9) 的导数 $\partial_{z_1} + \partial_{z_2}$：

$$\begin{aligned} g_2(z_2,q)\, g_1(z_1+\hbar,q)\Big((\partial_{z_1}+\partial_{z_2}) R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q) + l_1(z_1+\hbar,q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q) + \\ + l_2(z_2,q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q) - R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q)\, l_2(z_2+\hbar,q) - \\ - R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q)\, l_1(z_1,q)\Big) g_2^{-1}(z_2+\hbar,q)\, g_1^{-1}(z_1,q)\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $l(z,q)$ 是矩阵 (3.11)-(3.13)。直接验证可知，(3.16) 中方括号内的表达式为零。 ■

还要注意，表达式 (3.9) 是一个顶点型量子 R-矩阵。

命题 3.3 表达式 (3.9) 满足量子杨-巴克斯特方程 (1.1)。

证明。事实上，由命题 3.2 可知，表达式 (3.9) 等价地可写为

$$g_2(z_2-\hbar,q)\, g_1(z_1,q)\, R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1-\hbar,z_2-\hbar|\,q)\, g_2^{-1}(z_2,q) g_1^{-1}(z_1-\hbar,q)\,. \tag{3.17}$$

将 $R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b)$ 以 (3.9) 或 (3.17) 的形式代入 (1.1)，得到

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(z_1-z_2) R_{13}^{\hbar}(z_1-z_3) R_{23}^{\hbar}(z_2-z_3) = g_1(z_1+\hbar,q)\, g_2(z_2,q)\, g_3(z_3-\hbar,q)\times \\ \times \underline{R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q) R_{13}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1-\hbar,z_3-\hbar|\,q) R_{23}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_2,z_3|\,q)}\times \\ \times g_1^{-1}(z_1-\hbar,q)\, g_2^{-1}(z_2,q)\, g_3^{-1}(z_3+\hbar,q)\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

带下划线的表达式是 (1.19) 的左端。对 (1.1) 的右端也进行类似计算，并利用半动力学 Yang-Baxter 方程 (1.19)，我们得出 (1.1) 成立。 ■

总之，我们证明了

定理 2 表达式 (3.9) 是一个依赖于谱参数之差的顶点型量子 R-矩阵。

顶点型有理 R-矩阵的显式形式。我们稍微改写一下半动力学R-矩阵 (3.2)：

$$\begin{aligned} R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1,z_2|\,q) = \sum_{i,j=1}^{N} \Big(\frac{E_{ij}\otimes E_{ji}}{z_1-z_2} + \frac{E_{ii}\otimes E_{jj}}{\hbar} - \frac{E_{ij}\otimes E_{jj}}{z_1+\hbar} + \frac{E_{jj}\otimes E_{ij}}{z_2} \Big) + \\ + N \sum_{i\neq j}^{N} \Big(\frac{E_{ij}\otimes E_{ji}}{q_j-q_i} + \frac{E_{ii}\otimes E_{jj}}{q_j-q_i} - \frac{E_{ij}\otimes E_{jj}}{q_j-q_i} + \frac{E_{jj}\otimes E_{ij}}{q_j-q_i} \Big)\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

那么，表达式 (3.9) 的形式为：

$$R_{12}^{\hbar}(z_1-z_2) = \sum_{a,b,c,d=1}^{N} R_{ab,cd}^{\hbar}(z_1-z_2) E_{ab}\otimes E_{cd}\,, \tag{3.20}$$

其中

$$R^{\hbar}_{ab,cd}(z_1-z_2)=$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{id}(z_2+\hbar)}{z_1-z_2}+\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{ib}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{\hbar}\\
&\qquad-\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{z_1+\hbar}+\frac{g_{aj}(z_1+\hbar)g_{ci}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{z_2}\Big)+\\
&+N\sum_{i\neq j}^{N}\Big(\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{id}(z_2+\hbar)}{q_j-q_i}+\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{ib}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{q_j-q_i}\\
&\qquad-\frac{g_{ai}(z_1+\hbar)g_{cj}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{q_j-q_i}+\frac{g_{aj}(z_1+\hbar)g_{ci}(z_2)g^{-1}_{jb}(z_1)g^{-1}_{jd}(z_2+\hbar)}{q_j-q_i}\Big)\,.
\end{aligned}\tag{3.21}$$

矩阵 $g(z)$ 及其逆矩阵的表达式分别由 (2.2)-(2.3) 和 (2.12) 给出。

例 1. 由于 $R^{\hbar}_{ab,cd}(z_1-z_2)$ 与 $q_1,...,q_N$ 无关，我们可以任意选取这些变量的值。例如，令

$$q_i=i\,,\qquad \bar q_i=i-\frac{N+1}{2}\,.\tag{3.22}$$

此外，$R^{\hbar}_{ab,cd}(z_1-z_2)$ 仅取决于差值 z_1-z_2。我们可以用不同方式消除这一自由度。例如，

$$z_1=\frac{z}{2}\,,\quad z_2=-\frac{z}{2}\,.\tag{3.23}$$

引入以下函数集：

$$s_{kj}(z)=g^{-1}_{kj}(z_1,q)\Big|_{z_1=\frac{z}{2};\,q_i=i}\,,\qquad t^{\hbar}_{kj}(z)=g^{-1}_{kj}(z_2+\hbar,q)\Big|_{z_2=-\frac{z}{2};\,q_i=i}\tag{3.24}$$

以及以下数集：

$$d_i=D_{ii}\Big|_{q_i=i}=\prod_{k:k\neq i}^{N}(i-k)=(-1)^{N-i}(i-1)!(N-i)!\,.\tag{3.25}$$

根据 (2.12)，我们有：

$$\begin{aligned}
&s_{kj}(z)=(-1)^{\varrho(j)}\Big(\frac{2\sigma_{\varrho(j)}(y)}{Nz}-\overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)}(y)\Big)\,,\qquad y_j=\frac{z}{2}+j-\frac{N+1}{2}\,,\\
&t^{\hbar}_{kj}(z)=(-1)^{\varrho(j)}\Big(\frac{2\sigma_{\varrho(j)}(v)}{N(-z+2\hbar)}-\overset{k}{\sigma}_{\varrho(j)}(v)\Big)\,,\qquad v_j=-\frac{z}{2}+\hbar+j-\frac{N+1}{2}\,.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

那么，(3.21) 可写成如下形式：

$$R^{\hbar}_{ab,cd}(z)=$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\frac{(z/2+\hbar+\bar q_i)^{\rho(a)}(-z/2+\bar q_j)^{\rho(c)}}{d_id_j}\Big[\frac{s_{jb}(z)t^{\hbar}_{id}(z)}{z}+\frac{s_{ib}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)}{\hbar}-\frac{2s_{jb}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)}{z+2\hbar}\Big]-\\
&\qquad-\frac{(z/2+\hbar+\bar q_j)^{\rho(a)}(-z/2+\bar q_i)^{\rho(c)}}{d_id_j}\frac{2s_{jb}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)}{z}\Big)+
\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$+N\sum_{i\neq j}^{N}\Big(\frac{(z/2+\hbar+\bar q_i)^{\rho(a)}(-z/2+\bar q_j)^{\rho(c)}}{d_id_j(j-i)}\Big[s_{jb}(z)t^{\hbar}_{id}(z)+s_{ib}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)-s_{jb}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)\Big]+$$

$$+\frac{(z/2+\hbar+\bar q_j)^{\rho(a)}(-z/2+\bar q_i)^{\rho(c)}}{d_id_j}\frac{s_{jb}(z)t^{\hbar}_{jd}(z)}{j-i}\Big)\,.$$

例2。当然，变量 z_1, z_2（以及 $q_1, ..., q_N$）也可以用不同的方式固定。考虑以下选择： $z_1 = z$, $z_2 = 0$。由于 $R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2|\, q)$ 在 z_2 的 $z_2 = 0$ 处有一个简单极点，因此我们应仔细考察 $z_2 = 0$ 附近的表达式 (3.9)。半动力学 R-矩阵展开如下：

$$R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2|\, q) = \frac{1}{z_2}\,\mathcal{O}_{12} + \mathcal{B}_{12}(\hbar, z_1|q) + O(z_2)\,, \tag{3.28}$$

其中

$$\mathcal{O}_{12} = \operatorname*{Res}_{z_2=0} R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar, z_1, z_2|\, q) = \sum_{i,j=1}^{N} E_{jj}\otimes E_{ij}\,. \tag{3.29}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{12}(\hbar, z_1|q) = &\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\frac{E_{ij}\otimes E_{ji}}{z_1}+\frac{E_{ii}\otimes E_{jj}}{\hbar}-\frac{E_{ij}\otimes E_{jj}}{z_1+\hbar}\Big)+\\ &+N\sum_{i\neq j}^{N}\Big(\frac{E_{ij}\otimes E_{ji}}{q_j-q_i}+\frac{E_{ii}\otimes E_{jj}}{q_j-q_i}-\frac{E_{ij}\otimes E_{jj}}{q_j-q_i}+\frac{E_{jj}\otimes E_{ij}}{q_j-q_i}\Big)\,.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Also

$$g_2(z_2, q) = g_2(0, q) + z_2 g_2'(0, q) + O(z_2^2)\,, \qquad g_2'(z, q) = \partial_z g_2(z, q)\,. \tag{3.31}$$

将所有展开式代入 (3.9)，得到

$$R^{\hbar}_{12}(z) = g_1(z+\hbar, q)\Big(g_2'(0, q)\mathcal{O}_{12} + g_2(0, q)\mathcal{B}_{12}(\hbar, z|q)\Big)g_2^{-1}(\hbar, q)g_1^{-1}(z, q)\,, \tag{3.32}$$

其中我们用到了以下关系

$$g_2(0)\mathcal{O}_{12} = 0\,, \tag{3.33}$$

这由性质 (2.14) 可知成立。

三角型和椭圆型 R-矩阵也存在类似的表示。

3.3 有理 R-矩阵新旧形式的重合

这里我们解释为什么表达式 (3.21) 与 (A.1) 相同。直接证明比较复杂。对于有限的 N，可以通过计算机计算验证二者相同（我们对 $N = 2, ..., 6$ 做了验证）。对于任意的 N，我们将利用以下事实证明二者相同：(A.1) 是在 [13] 中通过 IRF-顶点关系的经典类比（经典 Lax 矩阵的规范等价）推导出来的。经典与量子 IRF-顶点关系之间的关系已在 [23] 中针对椭圆模型作了阐明。下面我们采用类似的方法。

为区分 (3.21) 和 (A.1)，我们将表达式 (A.1) 记作 $\tilde R^{\hbar}_{12}(z)$。下面简要回顾 (A.1) 的推导思路。因子分解性质 (2.16) 使得经典Ruijsenaars-Schneider模型的 Lax 矩阵可写为

$$L^{\text{RS}}(z) = g^{-1}(z, q)g(z+\eta, q)e^{P}\,, \tag{3.34}$$

其中 $P = \mathrm{diag}(p_1, ..., p_N) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ 是动量的对角矩阵。变量 $q_1, ..., q_N$ 表示粒子的位置。进行规范变换

$$L^{\mathrm{top}}(z) = g(z,q) L^{\mathrm{RS}}(z) g^{-1}(z,q) = g(z+\eta,q) e^P g^{-1}(z,q) \tag{3.35}$$

并计算所得表达式的留数:

$$S = S(\ p,q,\eta) = \operatorname*{Res}_{z=0} L^{\mathrm{top}}(z) = g(\eta,q) e^P \breve{g}(0,q) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})\,, \qquad \breve{g}(0,q) = \operatorname*{Res}_{z=0} g^{-1}(z)\,. \tag{3.36}$$

主要观察是, $L^{\mathrm{top}}(z)$ (3.35) 可表示为以下形式[3]:

$$L^{\mathrm{top}}(z) = \mathrm{tr}_2\Big(\tilde{R}^{\eta}_{12}(z) S_2\Big)\,, \qquad S_2 = 1_N \otimes S\,, \tag{3.37}$$

其中, tr_2 表示对第二个张量分量取迹, 而 $\tilde{R}^{\eta}_{12}(z)$与变量p_1、,、 ,.p_N以及 q_1、...、 q_N无关。表达式 (A.1) 正是以这种方式计算的, 即关系 (3.37) 可视为 $\tilde{R}^{\eta}_{12}(z)$的定义。

让我们证明, 对于 R-矩阵 $R^{\eta}_{12}(z)$ (3.21), 关系 (3.37) 成立。为此, 我们还需要用到文献 [19]中提到的 (3.21) 的另一条性质。回想一下, $R^{\eta}_{12}(z)$ 是按照 (1.20) 给出的形式推导出来的。将 (1.20) 两边左乘矩阵 $g_2^{-1}(z_2)$

$$g_2^{-1}(z_2,q)\, R^{\hbar}_{12}(z_1 - z_2) = g_1(z_1+\hbar,q)\, R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar, z_1, z_2 |\, q)\, g_2^{-1}(z_2+\hbar,q) g_1^{-1}(z_1,q) \tag{3.38}$$

并利用 (3.29) 计算两边关于变量 z_2 在 $z_2 = 0$ 处的留数, 同时采用 (3.36) 中的记号 $\breve{g}(0,q)$:

$$\breve{g}_2(0,q)\, R^{\hbar}_{12}(z) = g_1(z+\hbar,q)\, \mathcal{O}_{12}\, g_2^{-1}(\hbar,q) g_1^{-1}(z,q)\,. \tag{3.39}$$

命题3.4 有理顶点型 GL_N R-矩阵 (3.21) 满足关系 (3.37)。

证明。注意到

$$\mathrm{tr}_2\Big(\mathcal{O}_{12}\, e^{P_2}\Big) = e^P\,. \tag{3.40}$$

因此,

$$g(z+\eta,q) e^P g^{-1}(z,q) = \mathrm{tr}_2\Big(g_1(z+\eta,q)\mathcal{O}_{12}\, e^{P_2} g_1^{-1}(z,q)\Big) =$$

$$= \mathrm{tr}_2\Big(g_1(z+\eta,q)\mathcal{O}_{12} g_1^{-1}(z,q) g_2^{-1}(\eta,q) g_2(\eta,q) e^{P_2}\Big) \overset{(3.39)}{=} \mathrm{tr}_2\Big(\breve{g}_2(0,q)\, R^{\eta}_{12}(z) g_2(\eta,q) e^{P_2}\Big) = \tag{3.41}$$

$$= \mathrm{tr}_2\Big(R^{\eta}_{12}(z) S_2\Big)\,.$$

我们以此证　　明有理 R-矩阵的两个定义 (3.21) 和 (A.1) 一致。 ■

4 结合 Yang-Baxter 方程及其他 R-矩阵性质

4.1 斜对称性和幺正性

命题 4.1 有理顶点型 GL_N R-矩阵 (3.21) 或 (A.1) 满足幺正性 (1.5) 和斜对称性 (1.6)。

[3]形式为 (3.36) 的 Lax 矩阵描述了所谓的相对论可积陀螺模型 [13].

证明。将 (3.9) 代入 $R^{\hbar}_{12}(z)R^{\hbar}_{21}(-z)$，我们得到

$$\begin{aligned} &R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2)R^{\hbar}_{21}(z_2-z_1)= \\ &= g_2(z_2,q)\,g_1(z_1+\hbar,q)\,R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)\,g_2^{-1}(z_2+\hbar,q)g_1^{-1}(z_1,q)\times \\ &\times g_1(z_1,q)\,g_2(z_2+\hbar,q)\,R^{\text{Semi-dynam}}_{21}(\hbar,z_2,z_1|\,q)\,g_1^{-1}(z_1+\hbar,q)g_2^{-1}(z_2,q) \overset{(3.4)}{=} \\ &= f(\hbar,z_1-z_2)1_N\otimes 1_N\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

我们用顶点型矩阵来写出半动力学 R-矩阵：

$$R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)=g_2^{-1}(z_2,q)\,g_1^{-1}(z_1+\hbar,q)\,R^{\hbar}_{12}(z_1-z_2)\,g_2(z_2+\hbar,q)g_1(z_1,q)\,. \tag{4.2}$$

Then

$$R^{\text{Semi-dynam}}_{21}(-\hbar,z_2+\hbar,z_1+\hbar|\,q)=g_1^{-1}(z_1+\hbar,q)\,g_2^{-1}(z_2,q)\,R^{-\hbar}_{21}(z_2-z_1)g_1(z_1,q)\,g_2(z_2+\hbar,q) \tag{4.3}$$

比较（4.2）和（4.3），并根据（3.3），可得（1.6）。 ■

命题 4.2 有理顶点型 GL_N R-矩阵（3.21）或（A.1）具有如下局部行为：

$$\operatorname*{Res}_{\hbar=0}R^{\hbar}_{12}(z)=1_N\otimes 1_N\,,\qquad \operatorname*{Res}_{z=0}R^{\hbar}_{12}(z)=P_{12}\,. \tag{4.4}$$

证明可由将 $R^{\hbar}_{12}(z)$表示为（3.9）的形式，以及半动力学 R-矩阵的以下性质（也可轻易得到且容易验证）直接推出：

$$\operatorname*{Res}_{\hbar=0}R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)=1_N\otimes 1_N\,,\qquad \operatorname*{Res}_{z_1=z_2}R^{\text{Semi-dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)=P_{12}\,. \tag{4.5}$$

同样的结果也可由（3.21）的第二行得到。注意，顶点型 R-矩阵关于 $\hbar$没有高阶极点。因此，我们证明了该 R-矩阵在$\hbar=0$附近满足经典极限展开（1.8）。

4.2 自变量的对称性

椭圆 Baxter-Belavin R-矩阵（在 GL_N 李群的基本表示中）还满足参数的对称性：

$$R^{\hbar}_{12}(z)P_{12}=R^{z}_{12}(\hbar)\,. \tag{4.6}$$

它在各种计算中都非常有用。让我们针对有理情形（3.21）证明这一点。与前文所有论述一样，我们的策略是为半动力学 R-矩阵（3.19）寻找（4.6）的类似关系，然后利用 IRF-顶点关系（4.2）。（4.6）的半动力学类似关系如下。

引理 4.1 半动力学 R-矩阵 (3.19) 满足以下自变量对称性性质[4]：

$$R^{\mathit{Semi\text{-}dynam}}_{12}(\hbar,z_1,z_2|\,q)=R^{\mathit{Semi\text{-}dynam}}_{12}(z_1-z_2,\hbar+z_2,z_2|\,q)P_{12}\,. \tag{4.7}$$

[4]我们未能在文献中找到这一性质。

证明。直接验证即可。利用置换算子的作用性质

$$
\begin{aligned}
&E_{ij}\otimes E_{ji}P_{12}=E_{ii}\otimes E_{jj}\,,\qquad E_{ii}\otimes E_{jj}P_{12}=E_{ij}\otimes E_{ji}\,,\\
&E_{ij}\otimes E_{jj}P_{12}=E_{ij}\otimes E_{jj}\,,\qquad E_{jj}\otimes E_{ij}P_{12}=E_{jj}\otimes E_{ij}\,,\qquad E_{ii}\otimes E_{ii}P_{12}=E_{ii}\otimes E_{ii}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

由此得到 (4.7)。 ■

命题 4.3 有理顶点型 GL_N R-矩阵 (3.21) 或 (A.1) 满足自变量对称性性质 (4.6)。

证明。根据 (4.2)，对于 (4.7) 的右端，我们有

$$
\begin{aligned}
&R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(z_1-z_2,\hbar+z_2,z_2|\,q)P_{12}=\\
&=g_2^{-1}(z_2,q)\,g_1^{-1}(z_1+\hbar,q)\,R_{12}^{z_1-z_2}(\hbar)\,g_2(z_1,q)g_1(z_2+\hbar,q)\,P_{12}=\\
&=g_2^{-1}(z_2,q)\,g_1^{-1}(z_1+\hbar,q)\,R_{12}^{z_1-z_2}(\hbar)\,P_{12}\,g_1(z_1,q)g_2(z_2+\hbar,q)\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

(的左端　　4.7) 由 (4.2) 给出。比较 (4.2) 和 (4.9)，即可证明该结论。 ■

4.3 结合律方程与量子 Yang-Baxter 方程

在椭圆情形中，对顶点型 R-矩阵而言，结合Yang-Baxter方程 (1.22) 的证明相当简单（例如见 [14]）。在有理情形中，直接证明是一项技术上复杂的任务。因此，我们使用半动力学 R-矩阵的结合Yang-Baxter方程 (1.23)，并进行规范（IRF-Vertex）变换。事实上，(1.23) 最初正是以同样的方式由 (1.22) 推导出来的 [19]。

命题 4.4 有理顶点型 GL_N R-矩阵 (3.21) 或 (A.1) 满足结合Yang-Baxter方程 (1.22)。

证明。将 (4.2) 代入半动力学结合Yang-Baxter方程 (1.23) 中的各项，得到:

$$
R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1+\eta,z_2+\eta)R_{23}^{\text{Semi-dynam}}(\eta,z_2+\hbar,z_3+\hbar)= \tag{4.10}
$$

$$
g_1^{-1}(z_1+\hbar+\eta)g_2^{-1}(z_2+\eta)g_3^{-1}(z_3+\hbar)R_{12}^{\hbar}(z_1-z_2)R_{23}^{\eta}(z_2-z_3)g_1(z_1+\eta)g_2(z_2+\hbar)g_3(z_3+\hbar+\eta)\,,
$$

$$
R_{13}^{\text{Semi-dynam}}(\eta,z_1+\hbar,z_3+\hbar)R_{12}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar-\eta,z_1+\eta,z_2+\eta)= \tag{4.11}
$$

$$
g_1^{-1}(z_1+\hbar+\eta)g_2^{-1}(z_2+\eta)g_3^{-1}(z_3+\hbar)R_{13}^{\eta}(z_1-z_3)R_{12}^{\hbar-\eta}(z_1-z_2)g_1(z_1+\eta)g_2(z_2+\hbar)g_3(z_3+\hbar+\eta)\,,
$$

$$
R_{23}^{\text{Semi-dynam}}(\eta-\hbar,z_2+\hbar,z_3+\hbar)R_{13}^{\text{Semi-dynam}}(\hbar,z_1+\eta,z_3+\eta)= \tag{4.12}
$$

$$
g_1^{-1}(z_1+\hbar+\eta)g_2^{-1}(z)_2+\eta)g_3^{-1}(z_3+\hbar)R_{23}^{\eta-\hbar}(z_2-z_3)R_{13}^{\hbar}(z_1-z_3)g_1(z_1+\eta)g_2(z_2+\hbar)g_3(z_3+\hbar+\eta)\,。
$$

于是由 (1.23) 可得 (1.22)。 ■

结合 (1.5)–(1.8) 的性质，结合杨-巴克斯特方程提供了一组广泛的恒等式，可用于各种不同的应用。例如，经典 r-矩阵不仅满足经典杨-巴克斯特方程，还满足以下关系：

$$\begin{aligned}\Big(r_{12}(z_1-z_2)+r_{23}(z_2-z_3)+r_{31}(z_3-z_1)\Big)^2=\\ =1_N\otimes 1_N\otimes 1_N\Big(\frac{1}{(z_1-z_2)^2}+\frac{1}{(z_2-z_3)^2}+\frac{1}{(z_3-z_1)^2}\Big)\,.\end{aligned}\tag{4.13}$$

展开式 (1.8) 中的系数 $m_{12}(z)$ 可计算为

$$m_{12}(z)=\frac{1}{2}\Big(r_{12}^2(z)-\frac{1_N\otimes 1_N}{z^2}\Big)\,.\tag{4.14}$$

许多其他恒等式可见于 [3, 14, 16, 17, 22]。

最后，构造上，理性 GL_N 顶点型 R-矩阵满足量子杨-巴克斯特方程 (1.1)，见命题 3.3。或者，也可以根据结合Yang-Baxter方程 (1.22) 以及性质 (1.5)-(1.6) 推导出 (1.1)。一个简单的证明见 [14]。

5 附录：GL_N 情形中的理性 R-矩阵

这里我们写出 [13] 和 [1]中的理性 GL_N R-矩阵。

5.1 量子 R-矩阵

我们从量子 R-矩阵开始。下面给出的是对 [13] 中所得结果稍作修改并加以校正后的版本。下文所有求和都应带撇号（为节省篇幅，我们省略撇号），其求和指标遍历所有取值，使相应的表达式有定义。更准确地说，被求和项包含形如 $\rho^{-1}(m)$ 的表达式。由 (2.4) 可知，这类表达式在 $m=1,...,N-2$ 和 $m=N$ 时有定义，但在 $m=N-1$ 时无定义。下文求和中省略了相应的项。 R-矩阵的答案如下：

$$\begin{aligned}R_{12}^{\hbar}(z)=A(z,\hbar)\otimes B(\hbar)+\frac{1}{z}\sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}\otimes\Bigg\{\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}z^{\gamma}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}E_{j,\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}-\\ -\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}z^{\gamma+N-j+1}(-1)^{\varrho(j)+N}(N-j)\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\ j-1\end{pmatrix}E_{N,\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}+\\ +\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}\sum_{s=1}^{N-j}z^{s+\gamma}(-1)^{s+\delta_{j,N}}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+j-1\\ j-1\end{pmatrix}E_{\varrho^{-1}(s+j-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}-\\ -N\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}\sum_{s=1}^{N-j}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s}(z+\hbar)^{\gamma}\begin{pmatrix}s+j-2\\ j-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\times\\ \times\Bigg[\delta_{\varrho(i)+1\leq j+s+\gamma}\sum_{c=0}^{N-s-j+1}\sum_{p=0}^{\varrho(i)-\gamma+c}(-\hbar)^{p}\begin{pmatrix}\varrho(i)-\gamma+c\\ p\end{pmatrix}E_{\varrho^{-1}(s+j+c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma-p+c)}-\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$-\delta_{\varrho(i)+1>j+s+\gamma}\sum_{c=0}^{s+j-2}\sum_{p=0}^{\varrho(i)-\gamma-c-1}(-\hbar)^p\begin{pmatrix}\varrho(i)-\gamma-c-1\\ p\end{pmatrix}E_{\varrho^{-1}(s+j-c-2),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma-p-c-1)}\Bigg]\Bigg\}\,,$$

其中， $A(z,\hbar)$ 和 $B(\hbar)$ 是以下矩阵空间 ${}_N(\mathbb{C})$ 值函数：

$$A(z,\hbar)=E_{NN}-\sum_{j=1}^{N}(N-j)z^{N-j+1}(-1)^{\varrho(j)+N}\begin{pmatrix}N\\ j-1\end{pmatrix}E_{Nj}- \tag{A.2}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-j}\sum_{b=0}^{\varrho(i)}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s-1}(z+\hbar)^b\begin{pmatrix}s+j-2\\ j-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ b\end{pmatrix}\Big(\delta_{\varrho(i)-j,b+s-2}-N\hbar\delta_{\varrho(i)-j,b+s-1}\Big)E_{ij}\,,$$

$$B(\hbar)=\frac{1_N}{\hbar}-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\delta_{\varrho(j)\geq 1}\varrho(j)E_{j,\varrho^{-1}(\varrho(j)-1)}-(-1)^{\delta_{j,N}}jE_{\varrho^{-1}(j),j}+N\sum_{b=0}^{\varrho(j)}(-1)^{b+\delta_{j,N}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\varrho(j)\\ b\end{pmatrix}\sum_{c=0}^{N-j}\sum_{p=0}^{\varrho(j)-b+c}(-\hbar)^{p+b}\begin{pmatrix}\varrho(j)-b+c\\ p\end{pmatrix}E_{\varrho^{-1}(j+c),\varrho^{-1}(\varrho(j)-b-p+c)}\Bigg]\,. \tag{A.3}$$

5.2 经典 r-矩阵

经典的 r-矩阵

$$r_{12}(z)=\lim_{\hbar\to 0}\left(R_{12}(z)-1_N\otimes 1_N/\hbar\right) \tag{A.4}$$

已在 [1] 中计算得出。这里给出由 (A.1) 得到的一个略有不同的表达式。考虑矩阵 $A(z,\hbar)$ (A.2) 和 $B(\hbar)$ (A.3) 的展开：

$$\begin{aligned}A(z,\hbar)&=A^{[0]}(z)+\hbar A^{[1]}(z)+\hbar^2A^{[2]}(z)...\\ B(\hbar)&=\hbar^{-1}1_N+B^{[0]}+\hbar B^{[1]}+...\end{aligned} \tag{A.5}$$

经典 r 矩阵的答案如下：

$$r_{12}(z)=A^{[0]}(z)\otimes B^{[0]}+A^{[1]}(z)\otimes 1_N+\frac{1}{z}\sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}\otimes\Bigg\{\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}z^{\gamma}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}E_{j,\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}- \tag{A.6}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}z^{\gamma+N-j+1}(-1)^{\varrho(j)+N}(N-j)\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\ j-1\end{pmatrix}E_{N,\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}\sum_{s=1}^{N-j}z^{s+\gamma}(-1)^{s+\delta_{j,N}}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+j-1\\ j-1\end{pmatrix}E_{\varrho^{-1}(s+j-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)}-$$

$$-N\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}\sum_{s=1}^{N-j}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s+\gamma}\begin{pmatrix}s+j-2\\ j-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\Big[\delta_{\varrho(i)+1\leq j+s+\gamma}\times$$

$$\times\sum_{c=0}^{N-s-j+1}E_{\varrho^{-1}(s+j+c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma+c)}-\delta_{\varrho(i)+1>j+s+\gamma}\sum_{c=0}^{s+j-2}E_{\varrho^{-1}(s+j-c-2),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma-c-1)}\Big]\Bigg\}\,,$$

其中， $A^{[0]}(z)$、 $A^{[1]}(z)$ 和 $B^{[0]}$ 是以下取值于 $\mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ 的函数：

$$A^{[0]}(z) = E_{NN} - \sum_{j=1}^{N}(N-j)z^{N-j+1}(-1)^{\varrho(j)+N}\begin{pmatrix} N \\ j-1 \end{pmatrix}E_{Nj} - \\ - \sum_{i,j=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-j}\sum_{b=0}^{\varrho(i)}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s+b-1}\begin{pmatrix} s+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho(i) \\ b \end{pmatrix}\delta_{\varrho(i)-j,b+s-2}E_{ij}\,, \tag{A.7}$$

$$A^{[1]}(z) = -\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-j}\sum_{b=0}^{\varrho(i)}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s+b-2}\begin{pmatrix} s+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho(i) \\ b \end{pmatrix}\times \\ \times\Big(b\,\delta_{\varrho(i)-j,b+s-2} - Nz\,\delta_{\varrho(i)-j,b+s-1}\Big)E_{ij}\,, \tag{A.8}$$

$$B^{[0]} = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big[\delta_{\varrho(j)\geq 1}\varrho(j)E_{j,\varrho^{-1}(\varrho(j)-1)} - (-1)^{\delta_{j,N}}jE_{\varrho^{-1}(j),j} + \\ +N(-1)^{\delta_{j,N}}\sum_{c=0}^{N-j}E_{\varrho^{-1}(j+c),\varrho^{-1}(\varrho(j)+c)}\Big]\,. \tag{A.9}$$

5.3 其他系数

对于不同的应用（见.....），需要用到 R-矩阵展开中的一些其他系数。下面我们计算其中的一些。首先从进入（1.8）的 $m_{12}(z)$ 矩阵开始。

矩阵 $m_{12}(z)$：

$$m_{12}(z) = A^{[0]}(z)\otimes B^{[1]} + A^{[1]}(z)\otimes B^{[0]} + A^{[2]}(z)\otimes 1_N + \sum_{i,j=1}^{N}E_{ij}\otimes\Bigg\{N\sum_{s=1}^{N-j}\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s+\gamma-2}\times \\ \times\begin{pmatrix} s+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho(i) \\ \gamma \end{pmatrix}\Bigg[\delta_{\varrho(i)+1\leq j+s+\gamma}\sum_{c=0}^{N-s-j+1}\Big(z(\varrho(i)-\gamma+c)E_{\varrho^{-1}(s+j+c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma+c-1)} - \\ -\gamma E_{\varrho^{-1}(s+j+c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma+c)}\Big) + \delta_{\varrho(i)+1>j+s+\gamma}\sum_{c=0}^{s+j-2}\Big(\gamma E_{\varrho^{-1}(s+j-c-2),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma-c-1)} - \\ - z(\varrho(i)-\gamma-c-1)E_{\varrho^{-1}(s+j-c-2),\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma-c-2)}\Big)\Bigg]\Bigg\}\,, \tag{A.10}$$

其中， $A^{[2]}(z)$ 和 $B^{[1]}$ 是以下矩阵：

$$A^{[2]}(z) = -\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-j}\sum_{b=0}^{\varrho(i)}(-1)^{s+\delta_{j,N}}z^{s+b-3}\begin{pmatrix} s+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varrho(i) \\ b \end{pmatrix}\times\,, \\ \times\left(\frac{b\,(b-1)}{2}\delta_{\varrho(i)-j,b+s-2} - bNz\delta_{\varrho(i)-j,b+s-1}\right)E_{ij} \tag{A.11}$$

and

$$B^{[1]} = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{\delta_{j,N}} \sum_{c=0}^{N-j} c\; E_{\varrho^{-1}(j+c),\varrho^{-1}(\varrho(j)+c-1)}\,. \tag{A.12}$$

矩阵 $m_{12}(0)$:

将 $z=0$ 代入上面的表达式，得到:

$$m_{12}(0) = A^{[0]}(0)\otimes B^{[1]} + A^{[1]}(0)\otimes B^{[0]} + A^{[2]}(0)\otimes 1_N + \tag{A.13}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}\otimes\left\{-N(-1)^{\delta_{j,N}}\left[\sum_{c=0}^{N-j}\Big((\varrho(i)+c)\delta_{\varrho(i)\le j} - \varrho(i)\delta_{\varrho(i)\le j+1}\Big)E_{\varrho^{-1}(j+c),\varrho^{-1}(\varrho(i)+c-1)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\sum_{c=0}^{j-1}\Big(\varrho(i)\delta_{\varrho(i)>j+1} - (\varrho(i)-c-1)\delta_{\varrho(i)>j}\Big)E_{\varrho^{-1}(j-c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-c-2)}\right]\right\}\,,$$

其中， $A^{[0]}(0)$、 $A^{[1]}(0)$ 和 $A^{[2]}(0)$ 是以下矩阵:

$$A^{[0]}(0) = E_{NN} + \sum_{i,j=1}^{N} (-1)^{\delta_{j,N}}\delta_{\varrho(i),j-1}E_{ij}\,, \tag{A.14}$$

$$A^{[1]}(0) = \sum_{i,j=1}^{N} (-1)^{\delta_{j,N}}\,(\varrho(i)-N)\,\delta_{\varrho(i),j}E_{ij} \tag{A.15}$$

and

$$A^{[2]}(0) = \sum_{i,j=1}^{N} (-1)^{\delta_{j,N}}\left(\frac{\varrho(i)\,(\varrho(i)-1)}{2} - N\varrho(i)\right)\delta_{\varrho(i),1+j}E_{ij}\,, \tag{A.16}$$

矩阵 $r_{12}^{(0)}$:

矩阵 $r_{12}^{(0)}$ 是展开式中的系数

$$r_{12}(z) = \frac{P_{12}}{z} + r_{12}^{(0)} + O(z)\,. \tag{A.17}$$

如下:

$$r_{12}^{(0)} = A^{[0]}(0)\otimes B^{[0]} + A^{[1]}(0)\otimes 1_N + \sum_{i,j=1}^{N} E_{ij}\otimes\Big\{\varrho(i)E_{j,\varrho^{-1}(\varrho(i)-1)} - \tag{A.18}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\varrho(i)}(-1)^{\varrho(j)+N}\delta_{\gamma+N,j}(N-j)\begin{pmatrix}\varrho(i)\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\\ j-1\end{pmatrix}E_{N,\varrho^{-1}(\varrho(i)-\gamma)} - (-1)^{\delta_{j,N}}jE_{\varrho^{-1}(j),i} +$$

$$+N(-1)^{\delta_{j,N}}\Big[\delta_{\varrho(i)\le j}\sum_{c=0}^{N-j}E_{\varrho^{-1}(j+c),\varrho^{-1}(\varrho(i)+c)} - \delta_{\varrho(i)>j}\sum_{c=0}^{j-1}E_{\varrho^{-1}(j-c-1),\varrho^{-1}(\varrho(i)-c-1)}\Big]\Big\}\,.$$

致谢

本工作得到俄罗斯科学基金会第19-11-00062号项目的资助，项目网址:
https://rscf.ru/en/project/19-11-00062/。

参考文献

[1] G. Aminov、S. Arthamonov、A. Smirnov、A. Zotov, 《有理陀螺及其经典 R 矩阵》, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 305207；arXiv:1402.3189。 [hep-th]。[2] G.E. Arutyunov、L.O. Chekhov、S.A. Frolov, 《椭圆Ruijsenaars–Schneider模型的R矩阵量子化》, Commun. Math. Phys. 192:2 (1998) 405–432；arXiv:q-alg/9612032。[3] K. Atalikov、A. Zotov, 《结合Yang–Baxter方程导出的高秩 $1+1$ 可积Landau–Lifshitz场论》, JETP Letters, 115 (2022) 757–762；arXiv:2204.12576 [math-ph]。[4] J. Avan、G. Rollet, 《半动力学量子反射代数的参数化》, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 2709；arXiv:math/0611184 [math.QA]。[5] R.J. Baxter, 《八顶点格点模型的配分函数》, Ann. Phys. 70 (1972) 193–228。[6] R.J. Baxter, 《晶格统计中的八顶点模型与一维各向异性Heisenberg链。II. 与广义冰型格点模型的等价性》, Ann. Phys. 76 (1973) 25–47。V. Pasquier, 《IRF模型的起源》, Commun. Math. Phys., 118 (1988) 355–364。[7] I. Burban、B. Kreussler, 《椭圆曲线退化上的向量丛与Yang–Baxter方程》, arXiv:0708.1685 [math.AG]。I. Burban、T. Henrich, 《椭圆曲线上的半稳定向量丛与结合Yang–Baxter方程》, Journal of Geometry and Physics, 62:2 (2012) 312–329；arXiv:1011.4591 [math.AG]。[8] I.V. Cherednik, 《用初等函数构造因子化S矩阵的一种方法》, Theoret. and Math. Phys. 43:1 (1980) 356–358。[9] S. Fomin、A.N. Kirillov, 《二次代数、Dunkl元素与Schubert演算》, Advances in geometry；数学进展丛书，172 (1999) 147–182。A. Polishchuk, 《经典Yang–Baxter方程与 A^∞-约束》, Advances in Mathematics, 168:1 (2002) 56—95；arXiv:math/0008156 [math.AG]。[10] J.L. Gervais、A. Neveu, 《Liouville弦场论中的新型三角关系与快子的缺失》, Nucl. Phys. B 238 (1984) 125–141。G. Felder, 《与椭圆曲线相关的共形场论与可积系统》, Proc. of the ICM 94 (1994) 1247–1255；hep-th/9407154。O. Babelon、D. Bernard、E. Billey, 《量子3-j和6-j符号的准Hopf代数诠释及差分方程》, Physics Letters B, 375 (1996) 89—97；arXiv:q-alg/9511019。[11] M. Jimbo、T. Miwa、M. Okado, 《可解格点模型的局部状态概率： $A_n^{(1)}$族》, Nucl. Phys. B300 (1988) 74–108。M. Jimbo、A. Kuniba、T. Miwa、M. Okado, 《 $A_n^{(1)}$面模型》, Commun. Math. Phys. 119 (1988) 543-565。[12] P.P. Kulish、N. Manojlovi´c、Z. Nagy, 《开放XXX自旋链的Jordanian变形》, Theoret. and Math. Phys. 163:2 (2010) 644–652；arXiv:0911.5592 [nlin.SI]。[13] A. Levin、M. Olshanetsky、A. Zotov, 《相对论经典可积陀螺与量子R矩阵》, JHEP 07 (2014) 012；arXiv:1405.7523 [hep-th]。[14] A. Levin、M. Olshanetsky、A. Zotov, 《可积系统中的普朗克常数作为谱参数及KZB方程》, JHEP 10 (2014) 109；arXiv:1408.6246 [hep-th]。[15] A. Levin、M. Olshanetsky、A. Zotov, 《与十一顶点 R 矩阵相关的经典可积系统与孤子方程》, Nuclear Physics B, 887 (2014), 400–422；arXiv: 1406.2995。[16] A. Levin、M. Olshanetsky、A. Zotov, 《椭圆可积Euler-Arnold陀螺与Painlevé VI方程的非交换推广》, J. Phys. A: Math. Theor. 49:39 (2016) 395202；arXiv:1603.06101 [math-ph]。

[17] M. Matushko, A. Zotov, 《椭圆 Macdonald-Ruijsenaars 算子的各向异性自旋推广及 R 矩阵恒等式》, arXiv:2201.05944 [math.QA]。M. Matushko, A. Zotov, 《椭圆可积 q 变形各向异性 Haldane-Shastry 长程自旋链的椭圆推广》, Nonlinearity, 36:1（2023）, 319; arXiv:2202.01177 [math-ph]。M.G. Matushko, A.V. Zotov, 《关于与椭圆各向异性自旋 Ruijse- naars–Macdonald 算子相关的 R 矩阵恒等式》, Theoret. and Math. Phys., 213:2（2022）1543–1559; arXiv:2211.08529 [math- ph].[18] O. Ogievetsky, T. Popov, 《Rime 中的 R 矩阵》, Adv. Theor. Math. Phys. 14 (2010) 439–505; arXiv:0704.1947[math.QA].[19] I. Sechin, A. Zotov, 《量子（半）动力学 R 矩阵的结合Yang-Baxter方程》, J. Math. Phys. 57 (2016) 053505; arXiv:1511.08761 [math.QA].[20] E.K. Sklyanin, 《逆散射问题方法与非线性量子薛定谔方程》, Soviet Physics Doklady 24 (1979) 107; L.D. Faddeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan, 《量子逆问题方法。I》, Theor. Math. Phys., 40:2 (1979) 688—706; P.P. Kulish, N.Y. Reshetikhin, E.K. Sklya nin, 《Yang-Baxter 方程与表示论：I》, Lett. Math. Phys., 5 (1981) 393–403。[21] A. Smirnov, 《退化 Sklyanin 代数》, Cent. Eur. J. Phys. 8:4 (2010) 542–554。[22] E.S. Trunina, A.V. Zotov, 《相互作用可积陀螺椭圆模型的多极扩展》, Theoret. and Math. Phys., 209:1 (2021) 1331–1356; arXiv:2104.08982 [math-ph]。E. Trunina, A. Zotov, 《椭圆曲线上相对论性 GL(NM,C) Gaudin 模型的 Lax 方程》, J. Phys. A, 55:39 (2022), 395202; arXiv:2204.06137 [nlin.SI]。I.A. Sechin, A.V. Zotov, 《广义相对论性相互作用陀螺的可积系统》, Theoret. and Math. Phys., 205:1 (2020) 1292–1303; arXiv:2011.09599 [math-ph].[23] M. Vasilyev, A. Zotov, 《经典多体可积系统的因子化 Lax 对》, Reviews in Mathematical Physics, 31:6 (2019) 1930002; arXiv:1804.02777 [math-ph].[24] C.N. Yang, 《一维排斥性 δ 函数相互作用多体问题的一些精确结果》, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315。[25] A. Zotov, 《相对论性椭圆矩阵陀螺与有限傅里叶变换》, Modern Phys. Lett. A, 32:32 (2017), 1750169; arXiv:1706.05601 [math-ph]。