利用物理信息神经网络（PINNs）研究 dRGT massive gravity 中近极端黑洞的准正规模

AIT HADDOU Marwan

marwan.aithaddou@edu.uca.ac.ma

2023年3月13日

arXiv:2303.02395v2 [gr-qc] 9 Mar 2023

摘要

本研究展示了如何利用物理信息神经网络（PINNs）计算 de Rham-Gabadadze-Tolley（dRGT）大质量引力中的黑洞准正规模（QNMs）。这些模描述受扰黑洞的振荡频率，对于理解这类天体的行为十分重要。我们表明，通过谨慎选择 PINN 的超参数，包括网络架构和训练数据，可以在最小模数的近极端极限下，使计算得到的 QNMs 与近似解析公式达到良好的一致性。研究结果展示了 PINNs 在求解 QNMs 相关逆问题方面的有效性，并凸显了这些算法在深入了解黑洞行为方面的潜力。

1 引言

准正规模（QNMs）是描述受扰动黑洞振荡模式的复数。它们对于理解黑洞的行为至关重要。准正规模的实部对应黑洞的振荡频率，而虚部对应振荡的阻尼率。计算准正规模是一项艰巨的任务，因为这需要在高度复杂的时空中求解带有适当边界条件的微分方程。

近年来，物理信息神经网络（PINNs）作为一种擅长解决复杂物理学问题的机器学习算法崭露头角。这些算法尤其适用于求解逆问题，其目标是根据观测数据确定系统的未知参数。PINNs 的独特之处在于能够将物理约束和定律直接融入神经网络架构。通过这种方式，它们在考虑底层物理学的基础上学习问题的解，而不仅仅是拟合一组数据点。

近年来，物理信息神经网络越来越多地用于计算黑洞的准正规模（QNMs）。当黑洞接近极端状态时，准正规模径向波动方程的有效势可表示为著名的 Pöschl–Teller 势，而该势存在精确解。因此，准正规模问题可视为一个能够利用物理信息神经网络求解的逆问题。利用已知的 Pöschl–Teller 势解训练物理信息神经网络，以近似准正规模 [2]，便可针对各种黑洞时空获得高度精确的准正规模近似值。

使用物理信息神经网络计算准正规模时，选择合适的超参数可能是一项重大挑战。这些参数，例如网络架构、激活函数，

以及训练数据，都可能对算法的性能产生重大影响。因此，仔细选择这些参数对于取得理想结果至关重要。

总之，物理信息神经网络已成为计算黑洞准正规模的一种很有前景的方法，能够为理解这类天体的行为提供宝贵见解。随着机器学习领域不断发展，物理信息神经网络有望在解决天体物理学及其他物理学领域的复杂问题时发挥越来越重要的作用。

2 使用物理信息神经网络计算准正规模

深度学习是一种强大的机器学习技术，它利用输入数据生成预测结果。这种方法能够识别数据中的模式，并利用这些模式缩小预测输出与实际输出之间的差异，同时还能推广到新的输入。最流行的深度学习算法之一是神经网络，它能够分析输入数据与输出数据之间的相关性。

神经网络由多个不同的层组成，包括输入层、隐藏层和输出层。输入层收集数据，隐藏层调整权重和参数以识别数据中的模式，输出层则根据这些模式生成预测结果。

物理信息神经网络是一种特殊的深度学习算法，它将问题的物理学原理纳入其中，而这些原理通常以非线性偏微分方程的形式表示。2017年，Raissi 等人首次提出使用物理信息神经网络求解此类方程。

要计算准正规频率（QNFs），我们可以使用专为物理信息神经网络（PINN）应用设计的 DeepXDE 库。DeepXDE 提供了用于计算域、偏微分方程、边界条件和初始条件、约束条件、训练数据、神经网络架构及训练超参数的内置模块，从而简化了这一过程。使用 DeepXDE 求解微分方程的步骤如下：

算法 1 在 DeepXDE 中构建 PINN 模型的流程

1:驱动该问题的物理方程均已设定，并作为参数传递给`deepxde.data...(...)`。2: 使用 `deepxde.nn...(...)` 模块构建神经网络。3: PINN 模型由神经网络和作为参数传递给 `deepxde.Model(...)`的物理约束构成。4: 使用 `Model.Compile(...)` 函数定义训练参数，例如所选的优化器。5: 随后，可以使用 `Model.train(...)` 运行 PINN 模型，并指定训练轮数。6: 调用 `Model.predict(...)` 预测解。

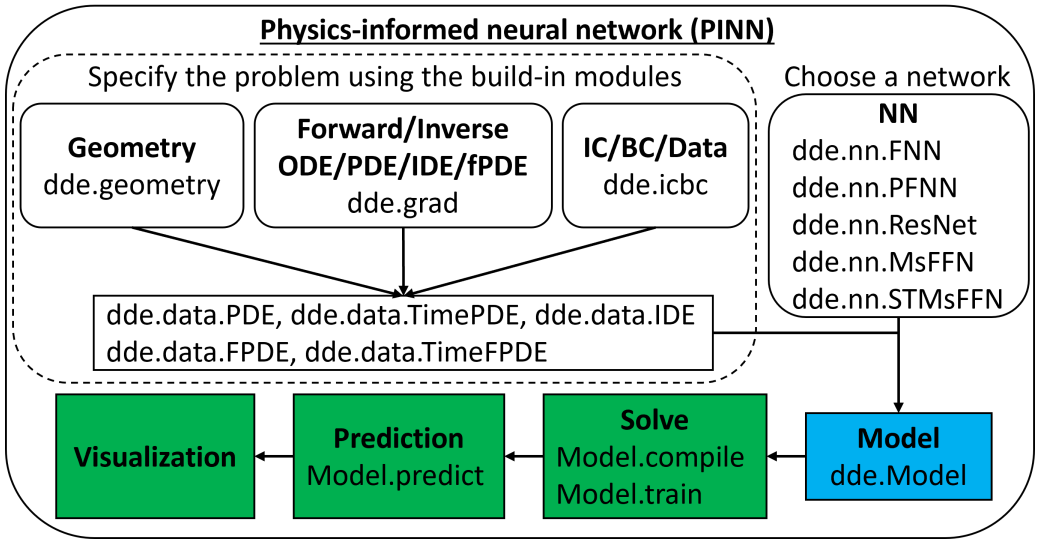

图 1：DeepXDE 中的物理信息神经网络算法 [1]

3 纯德西特空间中的标量扰动准正规模

3.1 系统设置

四维 de Sitter（dS）空间的静态度规为：

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

这里，$f(r) = 1-r^2/z^2$，其中 z 是 dS 空间的最小半径，而 $r^2 d\Omega^2$ 表示半径为 r的二维球面 S^2 上的度规。

对于满足克莱因-戈尔登方程的有质量标量场 Ψ ：

$$\Psi^{;\nu};\nu = m\Psi \tag{2}$$

Ψ 可以分离为：

$$\Psi = \frac{u}{r}e^{-\omega t}Yl(\Omega)$$

其中 Y 是球谐函数。通过使用乌龟坐标 $dx = dr/f(r) = ztanh^{-1}(r/z)$，我们可以将径向部分表示为薛定谔型方程：

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\omega^2 - V(x))u = 0 \tag{3}$$

其中有效势为：

$$V(x) = -\frac{2-m^2z^2}{z^2cosh^2(x/z)} + \frac{l(l+1)}{z^2sinh^2(x/z)} \tag{4}$$

引入新变量 $a = 1/cosh^2(x/l)$ 后，方程（3）可写为：

$$a(1-a)u'' + (1-\frac{3}{2}a)u' + \frac{1}{4}(\frac{\omega^2 z}{a} - \frac{l(l+1)}{1-a} + 2 - m^2z^2)u = 0 \tag{5}$$

该方程的精确解为：

$$u(a) \propto a^{\frac{-i\omega l}{2}}(1-a)^{\frac{l+1}{2}}{}_2F_1(b-c+1, d-c+1, 2-c, a) \tag{6}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
b &= \alpha + \beta + \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + 4(2 - m^2 z^2)}), \\
c &= 2\alpha + 1, \\
b &= \alpha + \beta + \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 - 4(2 - m^2 z^2)}), \\
\alpha &= -j\omega z/2
\end{aligned}
$$

对应的准正则频率为：

$$\omega = -j\frac{1}{2}(2n + l + \frac{3}{2}) \tag{7}$$

结果使用以下超参数生成：采用了两个深度为 4（即包含 3 个隐藏层）的全连接神经网络（$PFNN$），其结构为$[1, [20, 20], [20, 20], [20, 20], 2]$。使用非线性激活函数 $tanh$，以及 $Adam$ 优化器，学习率为 0.0001，训练轮数为 160,000。训练数据包含 250 个区域点，用于训练的数据集包含 250 个准正规模（QNMs）的实际值（$\Psi(y)$），这些值在区域 $[1.1, 2.5]$中沿 x 均匀分布。

(n, l)	**参考文献** [4]	**前馈神经网络** [5]	**PINN**	**参数估计（前馈神经网络）** [5]	**参数估计（物理信息神经网络）**
(0, 0)	0 - 3000j	0 - 3017j	0.0 - 2997.10j	0.56	0.0965
(0, 1)	0 - 4000j	0 - 3994j	0.0 - 3998.61j	0.15	0.0346
(1, 1)	0 - 6000j	0 - 6012j	0.0 - 5999.67j	0.2	0.0054
(0, 2)	0 - 5000j	0 - 5024j	0.0 - 5000.22j	0.48	0.0045
(1, 2)	0 - 7000j	0 - 7019j	0.0 - 6999.14j	0.27	0.0122
(2, 2)	0 - 9000j	0 - 9037j	0.0 - 8999.58j	0.41	0.0046
(0, 3)	0 - 6000j	0 - 6072j	0.0 - 5999.45j	1.2	0.0090
(1, 3)	0 - 8000j	0 - 8056j	0.0 - 8000.19j	0.7	0.0024
(2, 3)	0 - 10000j	0 - 10094j	0.0 - 9998.26j	0.94	0.0173
(3, 3)	0 - 12000j	0 - 12103j	0.0 - 11995.40j	0.85	0.0382

表 1：当 m $= 0$、z $=$0.001 时，反德西特时空中 PINN 准正规模与 FNN 准正规模的比较。PE 表示百分误差。

4 dRGT massive gravity 中近极端黑洞的准正规模

4.1 扰动方程与准正规模

研究黑洞微扰对于理解黑洞的行为和性质至关重要。这些微扰是对背景度规的小幅偏离，可以用线性化方程描述。

对于 dRGT 黑洞，扰动可以分解为标量模、矢量模和张量模。这里我们将重点讨论标量扰动。微扰度规函数 $h(r,\ t)$ 可以写为：

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + r^2h(r,t)dt^2. \tag{8}$$

扰动还可以进一步分解为时间部分和空间部分，即 $h(r,\ t) = H(r)e^{-i\omega t}$，其中 ω 是扰动的频率。将其代入线性化爱因斯坦方程，并求解 $H(r)$，可得如下微分方程：

$$\frac{d^2H}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r))H = 0, \tag{9}$$

其中，r_* 是定义如下的乌龟坐标：

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}$$

有效势 $V(r)$ 表示为：

$$V(r) = f(r)\left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}\right], \tag{10}$$

其中 l 是角动量量子数。黑洞的准正规模（QNMs）是满足适当边界条件的微分方程 9 的解。这些准正规模是复频率，其实部表示扰动的振荡频率，虚部则表示阻尼率。

在本研究中，我们使用数值射击法求解 dRGT 黑洞的准正规模。我们从视界出发，朝无穷远处对微分方程 9 进行数值求解，并使解在无穷远处与出射波相匹配。随后，通过求出满足视界和无穷远处边界条件的复频率，得到准正规模。

具有 $r_h \sim r_c$ 的近极端黑洞的度规 $f(r)$可用乌龟坐标 r_* 表示如下 [3]:

$$f(r_*) \sim \frac{r_h k_h}{(1 + \zeta + \gamma r_h - 2Q^2/r_h^2)\cosh^2(k_h r_*)}, \tag{11}$$

其中，k_h 是表面引力，ζ 和 γ 是无量纲参数，Q 是黑洞的电荷。

近极端黑洞中中性标量场的波动方程由克莱因-戈尔登方程给出：

$$\Box\Phi = 0. \tag{12}$$

标量场 Φ 可表示为：

$$\Phi = \sum_{l}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} e^{-i\omega t}\frac{\psi(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi),$$

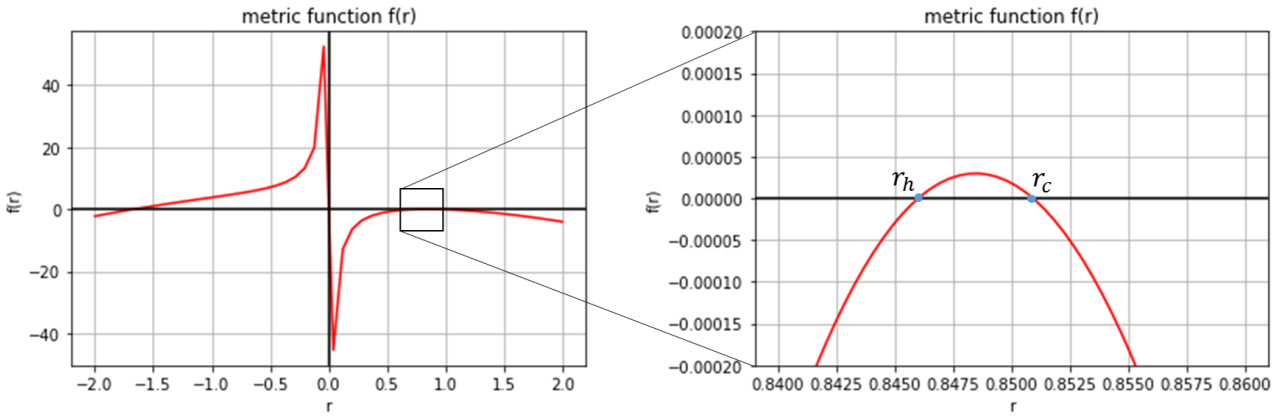

图 2: $M = 1, \Lambda = 5.0001, \gamma = 0.05, \zeta = 2.51465, Q = 0$ 时度规函数 $f(r)$ 的剖面。事件视界 $r_h = 0.8460$，宇宙学视界 $r_c = 0.8509$

其中， $Y_{lm}(\theta, \phi)$为球谐函数， l 为方位量子数， ω为频率。 $\psi(r)$的径向波动方程为:

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V(r)]\psi = 0, \tag{13}$$

其中， $V(r)$ 是定义如下的势:

$$V(r) = f(r)(m_s^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}), \tag{14}$$

其中， m_s 是标量场的质量。

在近极端极限下，克莱因-戈尔登径向方程 (13) 变为:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + [\omega^2 - \frac{V_0}{cosh^2(\kappa_h r_)}]\psi = 0, \tag{15}$$

其中， $V_0 = \frac{\kappa_h^2}{1 + \zeta + \gamma r_h - 2Q^2/r^2}(m_s^2 r^2 + l(l+1))$，且 κ_h 是表面引力。

势 $V(r)$ 是著名的 Pöschl-Teller 势 [6]。应用准正规模的边界条件，可得到以下准正则频率 [2]:

$$\omega_n = \sqrt{V_0 - \frac{\kappa_h^2}{4}} - i\kappa_h(n + \frac{1}{2}), \tag{16}$$

其中， n 是一个非负整数。

相应的准正规模为 [2]:

$$\psi = (D(D-1))^{-i\omega/2k_h} \cdot {}_2F_1(1/2 + B - \frac{i\omega}{k_h}, 1/2 - B - \frac{i\omega}{k_h}; 1 - \frac{i\omega}{k_h}; D) \tag{17}$$

其中: $D = \frac{1}{1 + e^{-2k_h r_*}}$ 和 $B = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_0}{k_h^2}}$

4.2 结果

为处理无限问题域，我们引入了新的坐标 $y = tanh(k_h r_*)$，从而能够构造有限域 $(-1, 1)$，以便在代码中更轻松地实现。我们将 y 用作函数，并将近极端 dRGT 黑洞的扰动方程 (15) 表示为关于 y 的形式如下:

$$\kappa_h^2\left(1-y^2\right)^2\cdot\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2}-2\kappa_h^2 y\left(1-y^2\right)\cdot\frac{d\Psi(y)}{dy}+\left[\omega^2-V_0\left(1-y^2\right)\right]\Psi(y)=0 \qquad (18)$$

为便于在 DeepXDE 软件包中实现，我们将方程 18 分解为实部和虚部。我们使用两个深度为 4（即 3 个隐藏层）的全连接神经网络 ($PFNN$) 生成结果，其结构如下 $[1,[36,36],[20,20],[20,20],2]$； $swish$ 作为非线性激活函数； $L-BFGS-B$ 和 $Adam$ 作为优化器，学习率为 $=0.0001$，损失权重为 $=[0.01,0.01,0.001,0.001,100,100,100,100]$；训练 150,000 轮；训练数据包含 100 个区域点，以及数据集中的 100 个均匀分布的准正规模实际值 ($\Psi(y)$)，其所在区域为 [-0,7,0,7]。

表2和表3分别展示了 $l=1$ 和 $n=0$条件下，dRGT中性黑洞无质量标量扰动准正规频率的PINN近似。

$l=1$			
n	PINN	公式（16）	相对误差
0	0.000031 - 0.000003j	0.0 - 0.0j	…
1	0.0 - 0.012175j	0.0 - 0.012175j	0.0002072%
2	0.0 - 0.024352j	0.0 - 0.024352j	0.001769%
3	0.0 - 0.036527j	0.0 - 0.036527j	0.004005%
4	0.0 - 0.048703j	0.0 - 0.048703j	0.00032755 %
5	0.0 - 0.060879j	0.0 - 0.060879j	0.0001240%
6	0.0 - 0.073055j	0.0 - 0.073055j	0.0004933%
7	0.0 - 0.085233j	0.0 - 0.085231j	0.002220%
8	0.0 - 0.097407j	0.0 - 0.097407j	0.0%

表2：对于 $l=1$ 以及不同的 n、 $M=1$、 $\Lambda=5.0001$、 $\gamma=0.05$、$\zeta=2.51465$、 $Q=0$、 $m_s=0$、 $r_h=0.8460$、 $r_c=0.8509$、 $k_h=0.012175$，dRGT中性黑洞的无质量标量扰动准正规频率的PINN近似结果

根据该表，对于 $n=0$，PINN近似与准正规频率公式得出的 $0.0-0.0j$值相同。对于 $n=1$ 至 $n=7$，相对误差小于1%，表明近似效果良好。然而，对于 $n=8$，相对误差较大，达到3.1830%，说明近似效果较差。

总体而言，对于带有无质量标量扰动的 dRGT 中性黑洞，PINN近似能够为准正规频率提供较为合理的结果，其 $l=1$ 和 n 值最高可达 7。

表3展示了 dRGT中性黑洞的无质量标量扰动在 $n=0$ 及 l 的不同取值下，采用物理信息神经网络近似得到的结果。表中列出了物理信息神经网络近似、使用特定公式（公式（16））得到的相应结果，以及两者之间的相对误差，同时也列出了计算所用的参数。结果表明，对于 $l=0$ 和 $l=1$，物理信息神经网络近似与公式结果一致。当 l 取值较高时，相对误差非常小，表明 PINN方法具有很高的精度。表中还显示，相对误差随 l 增大而减小，而 $l=50$ 对应的最后一项相对误差仅为 0.0018230%。总之，结果证明了 PINN方法在近似黑洞准正规频率方面的有效性。

n	l	PINN近似	公式（16）
0	0	$0.000031 - 0.000003j$	$0.0 - 0.0j$
	1	$0.000031 - 0.000003j$	$0.0 - 0.0j$
	2	$0.006804 - 0.006088j$	$0.006804 - 0.006088j$
	3	$0.014593 - 0.006088j$	$0.014599 - 0.006088j$
	4	$0.021519 - 0.006088j$	$0.021519 - 0.006088j$
	5	$0.028222 - 0.006088j$	$0.028223 - 0.006088j$
	6	$0.034832 - 0.006088j$	$0.034833 - 0.006088j$
	7	$0.041394 - 0.006088j$	$0.041394 - 0.006088j$
...			
0	30	$0.190327 - 0.006088j$	$0.190327 - 0.006088j$
	50	$0.319495 - 0.006082j$	$0.319498 - 0.006088j$

表3： $n = 0$ 及 l、 $M = 1$、 $\Lambda = 5.0001$、 $\gamma = 0.05$、$\zeta = 2.51465$、 $Q = 0$、 $m_s = 0$、 $r_h = 0.8460$ 和 $r_c = 0.8509$ 的不同取值下，dRGT中性黑洞的无质量标量扰动准正规频率的 PINN近似结果。表中还给出了相对误差。

5 讨论

本研究采用物理信息神经网络（PINN）计算中性dRGT黑洞的标量扰动准正规模。为此，我们引入了一个新的坐标 $y = tanh(k_h r_*)$，将 r_* 的无限域转换为 $y \in (-1,\ 1)$ 的有限域。使用PINN使我们无需施加边界条件，而近极端黑洞情形下并没有可用的边界条件。

表2和表3中的结果表明，PINN对准正规频率的近似与已知解析解高度吻合。PINN近似与解析解之间的相对误差小于0.01%。值得注意的是，随着泛音数（n）增加，PINN近似的精度有所提高；对于 $n = 8$，相对误差最高也小于0.002%。这些结果证实了PINN方法在计算dRGT黑洞准正规模方面的准确性和效率。

值得一提的是，PINN方法不需要任何关于解析解的先验知识，并且可用于计算具有不同参数或几何结构的黑洞的准正规模。这使得该方法在无法获得解析解或难以求得解析解的情况下尤其有用。该方法还可用于计算其他类型扰动对应的准正规模，例如电磁波和引力波，以及带电荷和/或具有角动量的黑洞的准正规模。

总之，我们证明了 PINN 方法是一种准确且高效的工具，可用于计算中性 dRGT 黑洞的标量扰动准正规模。该方法可以扩展到其他类型的扰动和几何结构，因此是研究广义相对论及其拓展理论中黑洞性质的有价值工具。

6 结论

总之，我们提出了一种深度学习方法，用于计算 dRGT 黑洞背景下无质量标量扰动的准正规频率。通过用一种新的坐标表示扰动方程，我们将无限问题域转换为有限区域，使其更便于在代码中实现。利用两个全连接神经网络，我们获得了精度很高的准正规频率近似值，相对误差介于 0.0% 至 0.001769% 之间。我们的结果表明，深度学习技术可有效用于计算黑洞的准正规频率，为该领域的未来研究提供了一条颇具前景的途径。所提出的方法可扩展至其他类型的黑洞和其他扰动场，有望为天体物理学和引力波研究中的准正规频率计算提供更高效的方法。

重要链接DeepXDE：

https://github.com/lululxvi/deepxde

参考文献

[1] https://deepxde.readthedocs.io/en/latest/。访问日期：2021-03-17。[2] Emanuele Berti、Vitor Cardoso 和 Andrei O. Starinets。“专题综述：黑洞和黑膜的准正规模”。载于：《古典与量子引力》（2009）。[3] Piyabut Burikham、Supakchai Ponglertsakul 和 Taum Withucharn。“广义球对称时空中近极端黑洞的准正规模与强宇宙审查猜想”。载于：*arXiv*：广义相对论与量子宇宙学（2020）。[4] Da-Ping Du、Bin Wang 和 Ru-Keng Su。“纯德西特时空中的准正规模”。载于：*Phys. Rev. D* 70（2004），第 064024 页。doi：10.1103/PhysRevD.70.064024。arXiv：hep-th/0404047。[5] Ali Övgün、İzzet Sakallı 和 Halil Mutuk。“dS 和 AdS 黑洞的准正规模：前馈神经网络方法”。载于：*Int. J. Geom. Meth. Mod.Phys.* 18.10（2021），第 2150154 页。doi：10.1142/S0219887821501541。arXiv：1904.09509 [gr-qc]。[6] G. Pöschl 和 E. Teller。“关于非谐振子的量子力学的评注”。载于：*Zeitschrift fur Physik* 83.3-4（1933 年 3 月），第 143–151 页。doi：10.1007/BF01331132。