arXiv:2303.02397v2 [math.AG] 8 May 2024

动机细胞谱 KO^{geo} 在 $Spec(\mathbb{Z})$上的构造

K. Arun Kumar

印度 IISER Tirupati 数学系

摘要

我们构造了一个定义在 $Spec(\mathbb{Z})$ 上的周期动机谱；将其拉回到任意满足$\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 的概形 S 上时，它就是 Panin 和 Walter 构造的 HP^1-谱。该谱 KO^{geo} 是利用格拉斯曼流形 $Gr(r,n)$ 的闭子概形构造的。利用这一点，我们证明 KO^{geo} 是细胞的。

1 引言

本文中，我们考虑的所有概形都是分离的且拟紧的。给定任意概形 S，记 Sch_S 为与有限型 S-概形范畴等价的一个小范畴。固定 Sch_S后，小范畴 Sch_S^{aff}、Sm_S 和 Sm_S^{aff} 分别是 Sch_S 的由（整体）仿射、光滑以及光滑仿射 S-概形生成的全子范畴。归纳概形是指范畴 Sm_S 上的任意预层，且该预层是可表预层的有向余极限。

Panin 和 Walter 在 [PW18] 中，在任意包含 $\frac{1}{2}$ 的正则诺特有限维概形 S 上构造了一个 HP^1-谱 BO，并证明它与 Hornbostel 的厄米 K-理论谱 KO 在稳定动机同伦范畴 $SH(S)$ 中同构。这里， $HP^1 \simeq S^{4,2}$ 是四元数射影直线。他们构造的主要优势在于，$\mathrm{BO}_{2i} = \mathbb{Z} \times RGr$和 $\mathrm{BO}_{2i+1} = \mathbb{Z} \times HGr$ 是归纳概形 $\mathbb{Z} \times RGr = \mathrm{colim}_n RGr(n, 2n)$ 以及 $\mathbb{Z} \times HGr = \mathrm{colim}_n HGr(2n, 4n)$。这里， $RGr(r,n)$ 和 $HGr(2r, 2n)$ 是适当次数的格拉斯曼概形的开子概形。这使得证明许多性质变得更加容易。例如，R¨ondigs 和 Østvær 在 [RØ16]中利用该模型计算了厄米 K 理论的切片谱序列。

本文去掉了 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 条件，并将 BO 的构造推广到任意概形。为使记号更符合标准用法，我们将此谱记为 KO^{geo}。首先，对于任意 S-概形 X，我们定义 $KSp^{\perp}(X)$ 为与 X 上幺模交替形式的对称幺半范畴相关联的 K 理论空间。这给出一个函子

$KSp^{\perp}: Sm_S^{op} \to$ sSet（参见定义 2.4）。利用预层 $KSp^{\perp}$，我们可以推广 [PW18，定理 8.2]，从而得到同构

$$\mathbb{Z} \times HGr \cong \mathbb{Z} \times BSp_{\infty} \cong R\Omega_s^1 B(\coprod_n BSp_n) \cong KSp^{\perp}$$

在任意概形 S 上的不稳定动机同伦范畴 $H_\bullet(S)$中。由于正交 K 理论和辛 K 理论的$\mathbb{A}^1$-不变性仅在 2 可逆时才已知，我们仍无法将厄米 K 理论的可表性[PW18, 定理 5.1] 推广到 Spec($\mathbb{Z}$)。不过，我们利用 [AHW18]的结果，在第 3 节中为 $KSp^{\perp}$ 证明了一个较弱的结果。

定理。设 S 在具有完美剩余域的戴德金环上归纳光滑。那么，对于任意仿射 Spec(R)$\cong X \in Sm_S^{aff}$，存在同构

$$[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times HGr]_{\mathbb{A}^1} \cong \pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp^{\perp}(X))$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。特别地，这在 Spec($\mathbb{Z}$) 上也成立。

在稳定情形下，我们能够将关于 BO 的若干结果推广到 Spec($\mathbb{Z}$)。汇总第 5 节和第 6 节的所有结果，可得以下定理。

定理。对于任意概形 S，存在一个动机细胞的 HP^1-谱

$$\mathbf{KO}_S^{geo} = (\mathbf{KO}_0^{geo}, \mathbf{KO}_1^{geo}, \ldots) \in SH(S)_{HP^1} \cong SH(S)$$

使得，

1. KO$_{2n}^{geo} \cong \mathbb{Z} \times RGr$ 和 KO$_{2n+1}^{geo} \cong \mathbb{Z} \times HGr \cong KSp^{\perp}$ 属于 $H_\bullet(S)$；2. $\Omega^2_{HP^1}$ KO^{geo} $\cong$KO^{geo}属于 $SH(S)_{HP^1}$，因此 Ω^4_TKO^{geo} $\cong$KO^{geo}是 $SH(S)$中的对象；3. 对于任意概形态射 $f: S_1 \to S_2$，存在一个典范同构 Lf^*KO$_{S_2}^{geo} \xrightarrow{\sim}$ KO$_{S_1}^{geo}$，属于 $SH(S_1)$；4. 若 $f: S \to$Spec($\mathbb{Z}$) 是任意满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 的概形，则 Lf^*KO^{geo} 同构于 *[PW18]* 中给出的动机谱 BO。

特别地，当 S 是有限维正则诺特概形且满足$\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 时，KO^{geo} 表示厄米 K 理论。

我们不知道上同调理论 KO^{geo} 在 Spec($\mathbb{Z}$) 上表示什么。我们希望它表示某种形式的厄米 K 理论。在 Schlichting [Sch19] 最近发表的一篇论文中，他引入了形式的 K 理论这一概念，将其推广为带对偶空间的 K 理论。在这一形式体系中，对于向量丛 $Vect(X)$上具有形式结构的范畴作适当选择后，Symp(X) 便成为二次空间范畴。如果该理论满足 Nisnevich 切除和 $\mathbb{A}^1$-不变性，那么 KSp 将在不稳定同伦范畴中表示它。目前尚不清楚这是否成立。然而，Bachmann 和 Wickelgren（[BW21]）最近发表的一篇论文表明，可以在任意概形上定义厄米 K 理论环谱的某个版本（尽管它可能不再表示厄米 K 理论）。目前尚不清楚当 2 不可逆时，该谱是否与我们的谱稳定等价。

致谢

本文基于我攻读博士期间完成的工作，因此是在我的论文 [AK20]基础上改编而成的。我要感谢 Universit¨at Osnabr¨uck 为我提供攻读博士的机会，并让我作为“DFG-GK1916 几何中的组合结构”研究生院的一员得到支持。特别感谢我的导师 Oliver R¨ondigs 教授在我攻读博士期间给予我的指导，以及此后继续帮助我撰写本文。

2 厄米 K 理论

厄米 K 理论源于对环上双线性型的研究，并进一步推广到概形上。给定一个概形 X 以及一个拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{E}$，回顾一下， $\mathcal{E}$ 上的双线性型是一个 $\mathcal{O}_X$-模态射 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\to\mathcal{O}_X$。若伴随映射 $\mathcal{E}\to\mathcal{E}^*$ 是同构，我们称该双线性型为幺模（有时也称为非退化）。当 $\mathcal{E}$ 同构于秩为 n的平凡向量丛时，每个双线性型都可以用 $GL_n(\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$ 的一个元素表示。我们特别关注两类双线性型。对称双线性型是满足 $\psi\tau=\psi$ 的双线性型 ψ，其中 $\tau\colon \mathcal{E}\otimes\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ 是交换映射； $\mathcal{E}$ 上的交错双线性型是满足 $\phi\circ\Delta=0$ 的双线性型 ϕ，其中 Δ 是层映射 $\Delta\colon \mathcal{E}_X\to\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$的对角映射。我们称配备幺模交错形式（分别为幺模对称形式）的向量丛为辛空间（分别为对称空间）。对于任意概形 X， $H_+=(\mathcal{O}_X^{\oplus 2},\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right))$ 和 $H_-=(\mathcal{O}_X^{\oplus 2},\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right))$ 分别是双曲对称空间和双曲辛空间。记 Symm(X) 和 Symp(X) 分别为概形 X 上的对称空间范畴和辛空间范畴，其中态射 $f\colon(V,\phi)\to(W,\psi)$ 是满足 $f^*\psi f=\phi$ 的向量丛态射 $f\colon V\to W$。正交和 $\perp$ 使 Symm(X) 和 Symp(X) 成为（本质上小的）对称幺半范畴。对于对象 $\mathcal{E}\in$ Symm(X) 和 $\mathcal{F}\in$ Symp(X)，我们分别用 $O(\mathcal{E})$ 和 $Sp(\mathcal{F})$ 表示它们对应的同构群胚。

定义 2.1. 设 R 为一个交换环。

1. 辛 K-理论空间 $KSp^{\perp}(R)$ 是空间 $K^{\perp}(i\text{Symp}(\text{Spec}(R)))$，而 $KSp_n(R)=\pi_nKSp^{\perp}(R)$ 是辛 K-群。2. 正交 K-理论空间 $KO^{\perp}(R)$是空间 $K^{\perp}(i\text{Symm}(\text{Spec}(R)))$，而 $KO_n^{\perp}(R)=\pi_nKO^{\perp}(R)$ 是正交 K-群。

这里， $K^{\perp}(-)$ 是对称幺半范畴 [Wei13, Def. 4.3]的 K 理论空间。对于 2 可逆的环，这些对象在 [Kar73] 中分别定义为 ${}_1K^h(R)$ 和 ${}_{-1}K^h(R)$。零次正交 K-群 $KO_0^{\perp}(R)$ 等于经典的格罗滕迪克-维特群 $GW(R)$（在 [Lam05, Def. 1.1] 中称为维特-格罗滕迪克群）。

存在幺半函子

$$\coprod_n O(H_+^n)(R)\to\mathbf{Symm}(\mathrm{Spec}(R))\ \text{ and }\ \coprod_n Sp(H_-^n)(R)\to\mathbf{Symp}(\mathrm{Spec}(R))$$

分别在对象上映射为 $n \mapsto H^n_+$ 和 $n \mapsto H^n_-$。由此诱导出映射

$$\Omega_s B(\coprod_n BO(H^n_+))(R) \to KO^\perp(R)$$

$$\Omega_s B(\coprod_n BSp(H^n_-))(R) \to KSp^\perp(R)$$

群完备化。当 $\frac{1}{2} \in R$ [Lam06$5$] 时，$\coprod_n O(H^n_+)$ 是 iSymm(Spec(R)) 的余终幺半子范畴。下面我们将证明关于辛空间的类似结果。

引理 2.2。设 R 为任意环。每个 R 上的辛空间都与某个 n的子空间 H^n_- 等距同构。

证明。首先注意到 H^n_- 与 $(R^{2n}, \begin{pmatrix} 0 & -I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{pmatrix})$ 等距同构。设 (P, ϕ) 是 R上的辛空间。由于 P是射影的，存在 Q，使得对于某个 m有 $P \oplus Q \cong R^m$。于是，辛空间 $P \perp P \perp H_-(Q)$（其中 $H_-(Q) = (Q \oplus Q^*, \begin{pmatrix} 0 & I_Q \\ -I_Q & 0 \end{pmatrix})$）的底层空间与 R^{2m}同构。因此，我们已将问题归结为底层模为自由模的情形。设 (R^{2m}, S) 是一个辛空间。由于 S是可逆交错矩阵，因此对于某个严格下三角矩阵 L，有 $S^{-1} = L - L^T$。我们将证明 $(R^{4m}, \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix})$ 与 $(R^{4m}, \begin{pmatrix} 0 & -I_{2m} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix})$ 等距同构。考虑矩阵 $\begin{pmatrix} L & I_{2m} \\ L^T & I_{2m} \end{pmatrix}$。其转置为 $\begin{pmatrix} L^T & L \\ I_{2m} & I_{2m} \end{pmatrix}$，因此有

$$\begin{pmatrix} L^T & L \\ I_{2m} & I_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & I_{2m} \\ L^T & I_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^T & L \\ I_{2m} & I_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} SL & S \\ -SL^T & -S \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} L^T SL - LSL^T & -I_{2m} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

由于 $L^T - L$ 是 S 的双侧逆，我们有

$$L^T SL - LSL^T = L^T(I_{2m} - SL^T) - LSL^T = L^T - L^T SL^T - LSL^T = L^T - L^T = 0$$

这就证明了 $(R^{4m}, \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}) \cong (R^{4m}, \begin{pmatrix} 0 & -I_{2m} \\ I_{2m} & 0 \end{pmatrix})$。

□

由此可得以下定理。

定理 2.3。态射 $\Omega_s B(\coprod_n BSp(H^n_-))(R) \to KSp^\perp(R)$ 对所有 $n \geq 2$ 都诱导出同构 $\pi_n \Omega_s B(\coprod_n BSp(H^n_-))(R) \xrightarrow{\sim} \pi_n KSp^\perp(R)$。

证明。这由余终定理 [Gra76] 以及上面的引理 2.2 推出。

□

将 $KO^{\perp}(R)$ 和 $KSp^{\perp}(R)$ 的构造扩展到任意概形有几种方式。首先，我们注意到，对于任意概形 S， $KO^{\perp}$ 和 $KSp^{\perp}$ 定义了从仿射 S-概形到单纯集合的松弛函子 $(Sch_S^{aff})^{op} \to$sSet。将其扩展到任意概形的朴素方法是，对非仿射概形也使用 Symp(X)。对于任意 $X \in Sm_S$，我们分别定义大对称空间和大辛空间的范畴 Symp$^{Sm_S}(X)$ 和 Symm$^{Sm_S}(X)$，其方式与大向量丛范畴相同（即，我们为每个形式固定一种拉回的选择）[Wei13，第 10 节。它们分别作为对称幺半范畴与 Symp(X) 和 Symm(X) 等价。于是我们可以定义单纯预层

$$KO^{\perp} : Sm_S^{op} \to \mathbf{sSet}$$

$$KSp^{\perp} : Sm_S^{op} \to \mathbf{sSet}$$

分别扩张 $KO^{\perp}(R)$和 $KSp(R)^{\perp}$ 。

定义 2.4. 设 S 为任意概形。

1. $KO^{\perp}$: $Sm_S^{op} \to$ sSet 是由 $KO^{\perp}(X) = K^{\perp}(i\text{Symm}^{Sm_S}(X))$ 给出的单纯预层。
2. $KSp^{\perp}$: $Sm_S^{op} \to$ sSet 是由 $KSp^{\perp}(X)$ $K^{\perp}$ i X = (Symp^{Sm_S} ( )) 给出的单纯预层。

为简便起见，从现在起我们将 $Sp(H^n_-)$记作 Sp_{2n} 。

定理 2.5. 范畴 $Fun(Sm_S^{op}, \text{Cat})$中的态射 $\coprod_n Sp_{2n}(-) \to i\text{Symp}^{Sm_S^{op}}(-)$由 $n \mapsto H^n_-$ 给出，并诱导出单纯预层之间的局部弱等价

$$\coprod_n BSp_{2n} \to B(i\mathbf{Symp}_{Sm_S^{op}})$$

关于 Sm_S上的 Zariski 拓扑。特别地，它们作为 $H_\bullet(S)$中的对象是同构的。

证明。在局部环 R 上，每个辛空间都等距同构于某个 H^n[Lam06，第 5.8] 定理。这意味着 $\coprod Sp_{2n}(R) \to i\text{Symp}(R)$ 是群胚的一个等价，并因此诱导出单纯集合的弱等价

$$\coprod_n BSp_{2n}(R) \to Bi\mathbf{Symp}(R).$$

由于 BSp_{2n} 是逐次可表示的单纯层，其茎就是 $\coprod_n BSp_{2n}(\mathcal{O}_{U,\,u})$，即在 Spec$(\mathcal{O}_{U,\,u})$ 处的取值。单纯集合的同构 colim$_{x\in U}$ BiSymp$(U) \xrightarrow{\sim} Bi$Symp$(\mathcal{O}_{U,\,u})$ 随后诱导出 Zariski 拓扑中茎的弱等价 $\coprod_n BSp_{2n}(\mathcal{O}_{U,\,u}) \to Bi$Symp$(\mathcal{O}_{U,\,u})$，因此证明完毕。 □

这一结果意味着，逐对象群完备化所诱导的映射也是弱等价。

推论 2.6. 对任意概形 S，都有同构

$$\Omega^1_s B(\coprod_n BSp_{2n}) \xrightarrow{\sim} K^{\perp}(\coprod_n Sp_n) \xrightarrow{\sim} KSp^{\perp}$$

在 $H_\bullet(S)$ 中。

证明。定理 2.5 表明，对于任意点 (U,u)，$KSp^{\perp}(\coprod_n Sp_n(\mathcal{O}_{U,\ u})) \xrightarrow{\sim} KSp^{\perp}(\mathcal{O}_{U.u})$。因此，只需证明这些空间与相应的茎弱等价。这可由分类空间的类似结果以及 [Gra76] 中给出的群完备化构造推出。

□

备注 2.7。目前，对于任意概形上的辛 K 理论的正确定义，仍存在一些歧义。一般而言，带对偶的范畴的厄米 K 理论为任意概形 X 给出 Grothendieck-Witt 空间 $GW(X)$ 和 $GW^{-}(X)$ ([Sch10a])。对于满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ 的正则诺特方案，这些空间具备所有所需的性质。在一般情形下，近期的一篇论文 [CDH+23] 构造了 Grothendieck-Witt 空间的多个模型（实际上是 Ω-谱）；当 2 可逆时，这些模型是等价的。

设 X 是一个概形，$i\colon U \hookrightarrow X$ 是一个开嵌入，且 $n \in \mathbb{N}$。我们将 $KO^{[n]}(X)$、$KSp^{[n]}(X)$、$KO^{[n]}(X,U)$ 和 $KSp^{[n]}(X,U)$ 记作 [Sch10b] 中的 Grothendieck-Witt 空间。由 [Sch10b，第 8 节推论 1]，我们有同伦等价

$$KSp^{[n]}(X) \xrightarrow{\sim} KO^{[n+4k+2]}(X) \quad \text{and} \quad KSp^{[n]}(X,U) \xrightarrow{\sim} KO^{[n+4k+2]}(X,U) \tag{2.2}$$

对所有 n、$k \in \mathbb{Z}$，以及任意开嵌入 $i\colon U \hookrightarrow X$，均成立。

定理 2.8（[PW18，定理 5.1]）。设 S 是任意有限克鲁尔维数的正则诺特分离概形，且 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S,\mathcal{O}_S)$。对于任意 $X \in Sm_S$ 和任意 $n \geq 0$，存在群同构

$$KO_i^{[n]}(X) = \pi_i(KO^{[n]}(X)) \cong [S^i \wedge X_+, KO^{[n]}]_{\mathbb{A}^1} \tag{2.3}$$

在二可逆的仿射概形情形下，我们得到 $KSp^{\perp}$ 和 $KO^{\perp}$。

定理 2.9。设 $X \cong \mathrm{Spec}(R)$ 且 $\frac{1}{2} \in R$，则我们有同伦等价

$$KO^{\perp}(X) \xrightarrow{\sim} KO^{[0]}(X) \tag{2.4}$$

$$KSp^{\perp}(X) \xrightarrow{\sim} KSp^{[0]}(X). \tag{2.5}$$

证明。当 $\frac{1}{2} \in R$ 时，每个斜对称形式都是交错的，因此 $KO^{\perp}(X)$ 和 $KSp^{\perp}(X)$ 分别等于 [Kar73] 的 ${}_1K^h(R)$ 和 ${}_{-1}K^h(R)$。结果 [Sch04, Cor. 4.6] 和 [Sch10b, Prop. 6] 给出了所需的同伦等价。

□

3 不稳定可表性

本节的主要参考文献是 [PW18, Sec. 8]。我们固定一个有限克鲁尔维数的诺特概形 S。函子 $X \mapsto Sp_{2n}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ 可由一个群方案表示；事实上，它是 GL_{2n} 的一个闭子群方案，我们也将其记为 Sp_{2n}。存在方案态射 $Sp_{2n} \to Sp_{2n+2}$，由 $A \mapsto A \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 给出，对每个 n 都成立。令 $Sp_\infty = \mathrm{colim}_n\, Sp_{2n}$ 表示余极限，它是动机空间范畴中的一个群对象。令 $HGr(2r, 2n)$ 表示四元数 Grassmannian方案，它分类 H^{2n}_- 的秩为 $2r$ 的子丛，而 HGr 是归纳概形 $\mathrm{colim}_n\, HGr(2n, 4n)$。

定理 3.1. 对任意有限克鲁尔维数的诺特方案 S，我们有一列同构

$$\mathbb{Z} \times HGr \cong \mathbb{Z} \times BSp_\infty \cong R\Omega^1_s B(\coprod_n BSp_{2n}) \cong KSp^\perp$$

作为 $H_\bullet(S)$ 中的对象。

当 2 可逆时，这等价于 [PW18，定理 8.2]。我们需要以下引理，它本质上是 [MV99，定理 4.1]，但经过调整以修正 [ST15] 最初指出的一个错误。回忆一下，带基点的分次单纯形幺半群层是一个四元组 $(M, +, \alpha, f)$，其中 $(M, +)$ 是一个单纯形幺半群层，并且 $\alpha : \mathbb{N} \to M$, $f : M \to \mathbb{N}$ 是幺半群层的态射，满足$f\alpha = Id$。在下文的引理中，层指的是关于 Nisnevich拓扑的 Sm_S 上的层。

引理3.2. 设 $(M, +, \alpha, f)$ 是 $M_\infty = colim_n f^{-1}(n)$ 上的带基点的分次单纯形幺半群层。假设以下三个条件成立。

1. 映射 $\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(f) : \underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(M) \to \mathbb{N}$是常值层的一个同构。

2. 在诱导幺半群结构下，幺半群 $(M, +)$ 在 $H_\bullet(S)$ 中是交换的。

3. 图表

$$\begin{array}{ccc} M_n \times M_n & \xrightarrow{+} & M_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(2)+} \\ M_{n+1} \times M_{n+1} & \longrightarrow & M_{2n+2} \end{array}$$

在 $H_\bullet(S)$ 中交换。

于是典范态射 $M_\infty \times \mathbb{Z} \to R\Omega^1_s BM$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价。

这里的 $\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ 只是集合预层的层化

$$U \mapsto [U, \mathcal{X}]_{\mathbb{A}^1}.$$

证明。根据 [MV99，引理 4.1。1], 我们可以用一个逐项自由的单纯幺半群替换 M，因此可假设 $M^+ \cong R\Omega^1_s BM$。根据 [MV99，引理 4.1。7], 存在一个 $\mathbb{A}^1$-纤维化替换函子 $M \to Ex_{\mathbb{A}^1}(M)$，它将幺半群对象映到幺半群对象。由于 $\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(f)$: $\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(M) \to \mathbb{N}$ 是一个同构，$Ex_{\mathbb{A}^1}(M)$ 也具有如下分次:

$$\underline{\pi}_0^{\mathbb{A}^1}(Ex_{\mathbb{A}^1}(M))(U) \cong \pi_0(Ex_{\mathbb{A}^1}(M))(U).$$

态射 $M \to Ex_{\mathbb{A}^1}(M)$ 在每个分次分量上都诱导一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价，因为这些分量互不相交，因此也诱导 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $R\Omega^1_s BM \xrightarrow{\sim} R\Omega^1_s BEx_{\mathbb{A}^1}M$以及 $M_\infty \xrightarrow{\sim} Ex_{\mathbb{A}^1}(M)_\infty$之间的同伦余极限映射。因此，我们可以分别用 $Ex_{\mathbb{A}^1}(M)$ 和 $(Ex_{\mathbb{A}^1}(M))_\infty$ 替换 M 和 M_∞，从而归约到 M 是 $\mathbb{A}^1$-纤维化的情形。因此，我们可以假设 $(M, +, 0)$ 在单纯同伦范畴 $H^s(Sm_S)$ 中是可交换的，并且 (3) 中的图表在单纯同伦意义下交换。现在我们需要证明 $M_\infty \times \mathbb{Z} \to M^+$ 是单纯层之间的 Nisnevich 局部弱等价。由于 Nisnevich 位点有足够多的点，我们使用茎函子，将问题归约到所有对象都是 Kan 复形的情形。前两个条件于是推出映射 $M_\infty \times \mathbb{Z} \to M^+$ 是同调同构，其中 M^+ 是单纯幺半群 M 的群完备化。条件 (3) 推出 M_∞ 是一个 H-空间，因此 $\pi_1(M_\infty)$ 是阿贝尔群，并且在所有高阶同伦群上的作用都是平凡的。由怀特海德定理，该映射于是是一个弱等价。

□

注 3.3. 条件 3 并非 MV99, 定理 4.1. 的一部分。ST15, 注 8. 中的反例表明，这个附加条件是必要的。

定理 3.1 的证明。首先，由推论 2.6，我们有 $R\Omega^1_s B(\coprod_n BSp_{2n}) \xrightarrow{\sim} KSp^\perp$ in $H_\bullet(S)$。我们将证明分次幺半群层 $\coprod_n BSp_{2n}$满足引理3.2 的条件。条件 (1) 显然。对于 (2)，我们需要$\coprod_n BSp_{2n}$ 在 $H_\bullet(S)$ 中是交换的。设 ΔR 是一个单纯环，其$\Delta R_n = R[t_0, \ldots, t_n]/(t_0 + \ldots + t_n - 1)$ 和结构映射与拓扑单纯形相同。取茎后，我们可以将问题归结为证明：对于任意环 R，单纯幺半群 $\coprod_n Sing^{\mathbb{A}^1}(BSp_{2n})(R) = \coprod_n BSp_{2n}(\Delta R)$ 是同伦交换的。固定 $n, m \in \mathbb{N}$，存在一个置换矩阵 $P_{n,\ m} \in GL_{2n+2m}(R)$，使得，

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = P_{n,m} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} P_{n,m}^{-1}$$

在 $Sp_{2n+2m}(R)$ 中，对于任意 $A \in Sp_{2n}(R)$ 和 $B \in Sp_{2m}(R)$。由 [Wei13, III. 1.2.1] 可知，$P_{n,\ m}$ 是初等矩阵 $P_{n,\ m} = E_1 \ldots E_k$ 的乘积。由于这些分块矩阵的秩为偶数，我们可以选取 $E_i \in Sp_{2n+2m}(R)$。这些 E_i 中的每一个都可以写成单位矩阵与一个幂零矩阵之和$E_i = I + N_i$。于是矩阵 $F = I + tN_i$ 是 $Sp_{2n+2m}(R[t])$ 的一个元素，并在 $Sp_{2n+2m}(\Delta R)$ 中给出 E_i 与 I 之间的一条路径。因此，作为函子 $Sp_{2n}(\Delta R) \times Sp_{2m}(\Delta R) \to Sp_{2n+2m}(\Delta R)$，映射 $(A, B) \mapsto A \oplus B$ 与 $(A, B) \mapsto B \oplus A$ 之间存在单纯同伦。对于 (3)，取茎

同样，我们需要证明，对于任意环 R 和任意 n，映射 $Sp_{2n}(\Delta R) \times Sp_{2n}(\Delta R) \to Sp_{4n+4}(\Delta R)$ 由下式给出

$$(A, B) \mapsto A \oplus B \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$(A, B) \mapsto A \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus B \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是同伦的。与 (2) 类似，这些映射在置换矩阵共轭下相等，并且是单纯同伦的。因此，我们得到 $H_\bullet(S)$ 中的同构$\mathbb{Z} \times BSp_\infty \xrightarrow{\sim} R\Omega^1_s B(\coprod_n BSp_{2n})$。最后，根据 [PW18, Sec 8.]，我们有 $HGr(2n, \infty) \xrightarrow{\sim} BSp_{2n}$，它在 $H_\bullet(S)$ 中诱导出 $\mathbb{Z} \times HGr \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times BSp_\infty$。注意，Panin 和 Walter 假设底层概形是正则的且 2 可逆，但证明对任意概形都成立。 □

上述证明还表明，$\mathbb{Z} \times HGr$ 是 $H_\bullet(S)$ 中的含幺交换幺半群对象。利用 [AHW18] 的结果，我们可以在仿射概形的情形下得出更多结论。

定理 3.4. 设 S 在具有完美剩余域的戴德金环上归纳光滑。那么，对于任意 $X \in Sm_S^{aff}$，存在一个同构，

$$[X_+, \mathbb{Z} \times HGr]_{\mathbb{A}^1} \cong KSp_0^\perp(X)$$

群。

证明。由 [AHW18, Ex. 2.3.4], 对每个 n，都有集合之间的双射

$$[X_+, BSp_{2n}]_{\mathbb{A}^1} \cong \pi_0(B_{Nis} Sp_{2n})(X) \cong Symp_n(X)$$

其中 $Symp_n(X)$是 X 上秩为 $2n$ 的辛空间的等距类集合，而 $B_{Nis}Sp_{2n}$ 是 BSp_{2n} 的 Nisnevich 纤维化替换。由于滤过余极限 $BSp_\infty = \text{colim}_n BSp_{2n}$ 也是同伦余极限，层$\underline{\mathbb{Z}} \times \text{colim}_n B_{Nis}Sp_{2n}$ 是 $\mathbb{Z} \times BSp_\infty$ 的 Nisnevich 纤维化替换，从而有，

$$[X_+, \mathbb{Z} \times BSp_\infty]_{\mathbb{A}^1} \cong \underline{\mathbb{Z}}(X) \times \text{余极限}\, \pi_0(B_{Nis}Sp_{2n}(X)) \cong \underline{\mathbb{Z}}(X) \times \text{余极限}\, Symp_n(X)_n$$

作为集合。存在一个映射 $\underline{\mathbb{Z}}(X) \times \text{colim}_n Symp_n(X) \to KSp_0^\perp(X)$，其定义为

$$(i, [A]) \mapsto [A] - (\frac{rank(A)}{2} - i)[H_-]$$

在 X 的每个连通开子概形上。由于 $\mathbb{Z} \times BSp_\infty$ 上的幺半群结构由 $\perp$ 诱导，因此这是一个幺半群同态。我们将证明此映射是双射。首先注意，由于所有概形都是局部连通的，只需证明 X 连通时的情形。给定任意 $[A] - [B] \in KSp_0^\perp(X)$，根据定理 2.3，存在一个辛空间 C，使得对于某个 k，有 $B \perp C \cong H_-^k$。于是，$[A] - [B] = [A] + [C] - (k[H_-]) = [A \perp C] - k[H_-]$，因此该映射是满射。现在假设 $[A] - k[H_-] = [B] - j[H_-]$ 属于 $KSp^\perp(X)$。那么，对于某个 p，有 $A \perp H_-^{j+p} \cong B \perp H_-^{k+p}$。因此，它们在 $\mathbb{Z} \times \text{colim}_n Symp_n(X)$ 中有相同的原像，且这是一个群同构。 □

定理 3.5。设 S 是在具有完美剩余域的戴德金环上归纳光滑的。那么，对于任意仿射 Spec(R)$\cong X \in Sm_S^{aff}$，存在同构

$$[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times HGr]_{\mathbb{A}^1} \cong \pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp^{\perp}(X))$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立。特别地，这对 Spec($\mathbb{Z}$) 也成立。

证明。根据 [AHW18, 定理 4.1.2], $B_{Nis}Sp_{2k}$ 是 $\mathbb{A}^1$-naive 的；根据 [MV99, 命题 4.1.16]，映射 $BSp_{2k} \to B_{Nis}Sp_{2k}$ 对所有 $U \in Sm_S$ 和所有 $n \geq 1$ 都诱导群同构 $\pi_n BSp_{2k}(U) \xrightarrow{\sim} \pi_k B_{Nis}Sp_{2k}(U)$。因此，colimtis 的态射 $BSp_\infty \to$ colim $_k B_{Nis}Sp_{2k}$ 也在所有高阶同伦群上诱导同构。由定理 3.4，对于每个 $X \in Sm_S^{aff}$，我们有群同构 $\pi_0\underline{\mathbb{Z}} \times$ colim$_k B_{Nis}Sp_{2k}(X) \cong KSp_0(X)$。由于 $\pi_0 BG = *$ 对任意群成立，因此存在弱等价 $KSp_0^{\perp}(X) \times BSp_\infty(X) \to \underline{\mathbb{Z}}(X) \times$colim$_k B_{Nis}Sp_{2k}(X)$。于是我们得到双射，

$$\begin{aligned}[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times BSp_\infty]_{\mathbb{A}^1} &\cong [S^n \wedge X_+, \underline{\mathbb{Z}} \times \operatorname*{colim}_k B_{Nis}Sp_{2k}]_{\mathbb{A}^1} \\ &\cong \pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(\underline{\mathbb{Z}}(X) \times \operatorname*{colim}_k B_{Nis}Sp_{2k}(X))\end{aligned}$$

对所有 $n \geq 0$ 都成立。根据定理 2.3，当 X 是仿射的时，空间映射 $KSp_0^{\perp}($ $X) \times BSp_\infty(X) \to KSp^{\perp}(X)$ 是拓扑群完备化。此外，由定理 3.1 的证明可知，$Sing^{\mathbb{A}^1}BSp_\infty(X)$ 是群状 H 空间。综合以上结果可得，映射 $Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp_0^{\perp}(X)$ $\times BSp_\infty(X)) \to Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp^{\perp}(X))$ 是逐层弱等价。因此，

$$\pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(\underline{\mathbb{Z}} \times \operatorname*{colim}_k B_{Nis}Sp_{2k}) \cong \pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp^{\perp}(X))$$

由此我们得到

$$[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times BSp_\infty]_{\mathbb{A}^1} \cong \pi_n Sing^{\mathbb{A}^1}(KSp^{\perp}(X))$$

从而完成证明。 □

当 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 时，我们有一个更强的结果。

定理 3.6. 设 S 是一个有限克鲁尔维数的正则诺特概形，且满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。对于任意 $X \in Sm_S$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$[S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times HGr]_{\mathbb{A}^1} \cong KSp_n^{[0]}(X).$$

证明。该陈述由定理 2.8 和定理 3.1 得出。 □

4 厄米 K 理论谱

回顾第 2 节，对于任意概形 S，我们都有单纯预层$KO^{[n]}: Sm_S^{op} \to$sSet。当 S 是有限克鲁尔维数的正则诺特概形

且满足$\frac{1}{2} \in \Gamma(\mathcal{O}_S, S)$ 时，Panin 和 Walter 证明存在一个动机T-谱 KO $=(KO^{[0]}, KO^{[1]}, KO^{[2]}, \ldots)$，其中 $T = \mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - 0$ [PW18，第 7] 节。下面我们将回顾这一构造。首先，我们需要注意，对于任意带有严格对偶的精确范畴 $(\mathcal{E}, *, \eta)$，我们可以在有界链复形范畴 $Ch^b(\mathcal{E})$ 上定义一族带有弱等价和对偶结构的精确范畴。

定义 4.1（移位对偶）。对于 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义函子 $\eta^n : Ch^b(\mathcal{E}) \to Ch^b(\mathcal{E})^{op}$，其定义为 $E. \mapsto (E.)^*[n]$。其中 $(E.)^*$ 是链复形 $(E.)^*_i = E^*_{-i}$。也就是说，

$$(E^*, d^*): \quad \ldots E^*_{-i+1} \xrightarrow{d^*_{-i}} E^*_{-i} \xrightarrow{d^*_{-i-1}} E^*_{-i-1} \to \ldots$$

$[n]$ 是通常的移位函子 $E[n]_i = E_{i-n}$。特别地，$(d^{*^n})_i = (d_{-i-1-n})^*$。令 $\eta^n : (-) \Rightarrow (-)^{*^n *^n}$ 为如下给出的自然变换：

$$(\eta^n_E)_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \eta_{E_i} \quad E. \in Ch^b(\mathcal{E})$$

这些对 $(*^n, \eta^n)$ 给出了带有弱等价和对偶性的正合范畴

$$(Ch^b(\mathcal{E}), *^n, \eta^n, q)$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。我们将把这一构造应用于由 $\vee^n : E \mapsto E^\vee[n]$ 给出的 $\mathcal{E} = Vect(X)$ 和 $*^n = \vee^n$。

定义 4.2（Koszul 复形）。设 p: $E \to X$ 是秩为n的向量丛。拉回 $p^*E = E \times_X E \to E$ 作为概形是 E 上的一个向量丛，并具有由对角映射给出的截面 $s : E \to E \times_X E$。Koszul 复形 $\kappa(E)$ 是由下式给出的 E 上的向量丛链复形：

$$\kappa(E) : (0 \to \Lambda^n p^*E^\vee \to \Lambda^{n-1} p^*E^\vee \to \ldots \to \Lambda^2 p^*E^\vee \to p^*E^\vee \to \mathcal{O}_E \to 0)$$

其分次为 $\kappa(E)_i = \Lambda^{n-i} E^\vee$，微分 $d : \Lambda^{k+1} p^*E^\vee \to \Lambda^k p^*E^\vee$ 由下式给出：

$$d(x_0 \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s^*(x_i) x_0 \wedge \ldots \wedge \hat{x}_i \wedge \ldots \wedge x_k$$

其中 s^* 是截面 $s : \mathcal{O}_E \to p^*E$的对偶。

典范同构 $\Lambda^r p^*E \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{n-r} p^*E)^\vee \otimes \Lambda^n p^*E$ 诱导出链复形的同构 $\theta(E) : \kappa(E) \xrightarrow{\sim} \kappa(E)^\vee \otimes \Lambda^n p^*E[n]$。给定一个同构 $\lambda : detE = \Lambda^n E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$，这为我们提供了一个位于 $Ch^b(Vect(E) \vee^n, \eta^n, q)$中的非退化对称形式，

$$\kappa(E, \lambda) : \kappa(E) \xrightarrow{\sim} \kappa(E)^\vee \otimes \Lambda^n p^*E[n] \xrightarrow{\sim} \kappa(E)^\vee[n]$$

其中我们选择同构 $\Lambda^r p^*E \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{n-r} p^*E)^\vee \otimes \Lambda^n p^*E$ 的符号，使其与自然变换 η^n 相容。令 $Vect(E)^{q_{E-X}}$ 为

$Vect(E)$ 的全子范畴，由限制到开子概形 $E-X$ 后为无环复形的复形生成。由此可知， $\kappa(E,\lambda)$ 是 $Vect(E)^{q_{E-X}}$ 的一个对象。给定一对 (E,λ)，其中 $p\colon E\to X$ 是秩为 n 的向量丛，且 $\lambda\colon detE=\Lambda^nE\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_X$ 是行列式线丛与平凡向量丛之间的一个同构，Thom 类 $th(E,\lambda)=[(\kappa(E,\lambda)]$ 是 $KO_0^{[n]}(E,E-X)$ 中相应的元素。由此可见，对于每一对 (E,λ)，其中 E 是一个向量丛且 $\lambda\colon\Lambda^nE\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_X$，我们有一个函子

$$Ch^b(Vect(X),\vee^m,\eta^n,q)\to Ch^b(Vect(E)^{q_{E-X}},\vee^{m+n},\eta^n,q)$$

其在对象上的作用由与 $\kappa(E)$ 张量给出，

$$C.\mapsto p^*C.\otimes\kappa(E).$$

这诱导出一个空间映射 $KO^{[m]}(X)\to KO^{[m+n]}(E,E-X)$，记作 $\otimes th(E,\lambda)$。

定理 4.3. 设 $X\in Sm_S$ 满足 S 为有限克鲁尔维数的正则诺特概形，且具有 $\frac{1}{2}\in\Gamma(S,\mathcal{O}_S)$。对于上述任意一对 (E,λ)，映射 $\otimes th(E,\lambda)\colon KO^{[m]}(X)\to KO^{[m+n]}(E,E-X)$ 是空间的弱等价。

证明. 这是 [PW18，定理 5.1], 的一个推论，其中包含了关于正则性和 2 的可逆性的假设。 □

对于任意概形 X，令 $E=\mathcal{O}_X$ 为平凡向量丛，具有 $\lambda=id$， $\kappa(E,\lambda)$ 则由下式给出，

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_X} & \xrightarrow{t} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_X} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle -1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_X} & \xrightarrow{-t} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_X} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 t 是 $\mathbb{A}^1_{\mathrm{Spec}(R)}\cong\mathrm{Spec}(R[t])$ 中的变量。于是我们得到一个单纯集合的等价，

$$\otimes th(\mathcal{O},id):KO^{[n]}(X)\xrightarrow{\sim}KO^{[n+1]}(\mathbb{A}^1\times X,(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\times X)$$

它在 X 上具有函子性。因此，存在单纯预层之间的逐层弱等价 $KO^{[n]}(-)\xrightarrow{\sim}KO^{[n+1]}(\mathbb{A}^1\times-,(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\times-)$。若 $KO_f^{[n]}$ 是 $KO^{[n]}$ 的 $\mathbb{A}^1$-纤维化替代，则我们有一串 $\mathbb{A}^1$-弱等价

$$\begin{aligned}\mathbf{Hom}_{sPSh_\bullet(S)}(-\wedge T,KO_f^{[n]})\xleftarrow{\sim}&\mathbf{Hom}_{sPSh_\bullet(S)}(-\wedge T,KO^{[n]})\\&\xrightarrow{\sim}KO^{[n]}(\mathbb{A}^1\times-,(\mathbb{A}^1\setminus\{0\})\times-)\end{aligned}$$

对每个 n。由于 $\mathbf{Hom}_{sPSh_\bullet(S)}(-\wedge T,KO_f^{[n]})$ 是纤维化的，该锯齿图提升为单纯预层之间的弱等价

$$KO_f^{[n]}(-)\xrightarrow{\sim}\mathbf{Hom}_{sPSh_\bullet(S)}(-\wedge T,KO_f^{[n+1]}).$$

取伴随后，我们得到动机空间之间的等价

$$T \wedge KO_f^{[n]}(-) \xrightarrow{\sim} KO_f^{[n+1]}(-) \tag{4.1}$$

对每个 n。序列 $(KO_f^{[n]})_{n\geq 0}$ 以及结构映射 4.1 定义了一个 T-谱 KO $\in \mathrm{Spt}(S)_T$。由于我们必须为纤维化替代$KO_f^{[n]}$ 和结构映射作出选择， T-谱 KO 并不唯一。不过，由定理 A.5 可知，在 $SH(S)$ 中，我们得到一个在同构意义下唯一的对象（同构不一定唯一）。

定义 4.4。我们将 KO 定义为由序列 KO $= (KO^{[n]})_{n\geq 0}$ 以及由弱等价 4.1 诱导的 $H_\bullet(S)$ 中的结构映射 $T \wedge_{\mathbf{L}} KO^{[n]} \to KO^{[n+1]}$ 所给出的朴素 T-谱。由定理 A.5，KO 在 $SH(S)$ 中定义了一个在同构意义下唯一的对象。为行文方便，我们也将这个对象称为 KO。

由定理 2.8 和定理 4.3，我们得到以下推论。

推论 4.5. 设 S 是有限克鲁尔维数的正则诺特概形，且满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。对于所有 $X \in Sm_S$，存在群同构

$$[\Sigma^\infty X_+, S^{p,q} \wedge \mathbf{KO}] \cong KO^{[q]}_{2q-p}(X)$$

其中 $2q \geq p \geq q \geq 0$ 和 $[-,-]$ 表示 $Hom_{SH(S)}(-,-)$。

证明. 由于 $S^{p,\,q} = S^{p-q} \wedge \mathbb{G}_m^q$ 和 $T \cong S^{2,\,1}$ 在 $H_\bullet(S)$ 中，我们得到一系列双射

$$\begin{aligned}[\Sigma^\infty X_+, S^{p,q} \wedge \mathbf{KO}] &\cong [S^{2q-p} \wedge \Sigma^\infty X_+, T^q \wedge \mathbf{KO}] \\ &\cong [S^{2q-p} \wedge \Sigma^\infty X_+, \mathbf{KO}[-q]] \cong [S^{2q-p} \wedge X_+, KO^{[q]}]_{\mathbb{A}^1} \cong KO^{[q]}_{2q-p}(X)\end{aligned}$$

对于所有 $2q \geq p \geq q \geq 0$。 □

上述结果启发了对 $KO_i^{[n]}(X)$ 的定义，其中 $i < 0$。事实上，Schlichting 在 [Sch17] 中为任意具有充足线丛族的概形 X 构造了一个 Ω-谱 $\mathbb{GW}^n(X)$，它满足

$$\pi_i \mathbb{GW}^n(X) = \begin{cases} KO_i^{[n]}(X) & i \geq 0 \\ W^{n-i}(X) & i < 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

对于所有 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。这里 $W^n(X)$ 是 Balmer 的三角 Witt 群[Bal00]。令 $KO_i^{[n]}(X) = \pi_i \mathbb{GW}^n(X)$，对所有 i 均成立，并利用 [PW18，引理 5.2]，我们得到以下推广。

定理 4.6. 设 S 是有限克鲁尔维数的正则诺特概形，并满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。对于所有 $X \in Sm_S$，存在一个群同构

$$[\Sigma^\infty X_+,\ S^{p,q} \wedge \mathbf{KO}] \cong KO^{[q]}_{2q-p}(X)$$

其中 $p \geq q \geq 0$。

5 几何 HP^1-谱 $\mathrm{KO}^{\mathrm{geo}}$

与之前一样，稳定同伦范畴 $SH(S)$ 是关于函子 $(X, x_0) \mapsto T \wedge (X, x_0)$ 的 $H_\bullet(S)$ 的稳定化，其中 $T = \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - 0)$。范畴 $\mathrm{Spt}(S)_T$ 和 $\mathrm{Spt}(S)_{T^{\wedge 2}}$ 之间存在 Quillen 等价；前者和后者分别是 T-谱与 $T^{\wedge 2}$-谱的范畴，该等价由伴随对 $(X_n) \mapsto (X_{2n})$ 和 $(X_n) \mapsto (X_0, T \wedge X_0, X_1, T \wedge X_1, \ldots)$ 给出，并诱导出稳定同伦范畴 $SH(S)_T \cong SH(S)_{T^{\wedge 2}}$ [的同构（见 Jar00，命题 2.13]）。为了构造所需的谱，我们需要稳定同伦范畴的另一种模型，该模型利用四元数射影空间 $HP^1 = HGr(2, 4)$。从这里开始，我们将基概形 S 记为 pt，以简化记号。

定理 5.1. 令 $x_0 : pt \to HP^1$ 为对应于子丛 $[H_- \oplus 0]$的指定点。存在一个同构 $\eta : (HP^1, x_0) \cong T^{\wedge 2} \text{in} H_\bullet(S)$。

证明。此结果见 [PW18，定理 9.8]。为了引入记号并展示讨论高阶 Grassmann 流形时所涉及的几何，我们在下文详细阐述其中一些论证。考虑对投影到 $0 \oplus 0 \oplus \mathcal{O}^2$ 上为同构的秩 2 子丛 $U \rightarrowtail \mathcal{O}^4$ 进行分类的开子概形 $\mathbb{A}^4 \cong N \hookrightarrow Gr(2, 4)$。我们有 $N = N^+ \oplus N^-$，其中 $N^+ = HP^1 \cap Gr(2, 0 \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^2)$ 和 $N^- = HP^1 \cap Gr(2, \mathcal{O} \oplus 0 \oplus \mathcal{O}^2)$ 是 HP^1 的闭子概形，且与 $\mathbb{A}^2$同构。根据 [PW21，定理 3.4]， $HP^1 - N^+$ 是 $\mathbb{A}^5 = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$ 在自由 $\mathbb{G}_a$-作用下的商，

$$t \cdot (a, b, r) = (a, b + ta, r + t(1 - a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b)).$$

由 $t \mapsto (0, 0, 0, 0, t)$ 给出的嵌入 $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^5$ 因而是 $\mathbb{G}_a$-等变的，并且是一个 $\mathbb{A}^1$-等价。因此，我们得到商 x_0 的一个诱导 $\mathbb{A}^1$-等价： $pt \to HP^1 - N^+$，它由子空间 $0 \oplus 0 \oplus H_-$ 给出。交换方块，

$$\begin{array}{ccc} pt & \longrightarrow & HP^1 \\ \downarrow \sim & & \downarrow = \\ HP^1 - N^+ & \hookrightarrow & HP^1 \end{array}$$

给出了带基点空间 $(HP^1, x_0) \xrightarrow{\sim} HP^1/(HP^1 - N^+)$ 之间的一个等价。由 $\mathbb{A}^1$-等价 $N^- \xrightarrow{\sim} N$ 诱导的类似方块为：

$$\begin{array}{ccc} N^- - 0 & \longrightarrow & N^- \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ N - N^+ & \hookrightarrow & N \end{array}$$

其中左侧是一个等价，因为 $N - N^+ = \mathbb{A}^4 - \mathbb{A}^2$ 是 $N^- - 0$ 上的秩2向量丛。因此我们在 中有 $N^-/(N^- - 0) \cong N/(N - N^+)$

$H_\bullet(S)$，并且存在一串 $\mathbb{A}^1$-等价

$$\begin{array}{ccccccc} T^2 \cong \mathbb{A}^2/(\mathbb{A}^2-0) & \cong & N^-/N^- - 0 & \longrightarrow & HP^1/(HP^1 - N^+) & \xleftarrow{\sim} & (HP^1, x_0) \\ & & \downarrow \sim & \searrow & \uparrow \text{切除} & & \\ & & N/N - N^+ & \xleftarrow[\text{切除}]{} & N \cap HP^1/((N \cap HP^1) - N^+) & & \end{array}$$

两次使用三取二性质，可得一个 $\mathbb{A}^1$-等价 $T^{\wedge 2} \xrightarrow{\sim} HP^1/(HP^1 - N^+)$，因此我们在 $H_\bullet(S)$ 中有 $T^{\wedge 2} \cong (HP^1, x_0)$。 □

定理 5.1 给出了稳定同伦范畴 $SH(S) \cong SH(S)_{T^{\wedge 2}} \cong SH(S)_{HP^1}$ 之间的等价。现在我们得到了所需的 $SH(S)$ 模型。我们将按照附录 A 的定义，将 KO ^{geo} 构造为一个朴素的 HP^1-谱。对于任意$n \in \mathbb{Z}$，我们有一个关于 $RGr(n, 2n)$ 的典范分解 $V_n \perp V_n^\perp \cong H_+^n$，它对应于恒等映射 $RGr(n, 2n) \to RGr(n, 2n)$。类似地，我们有典范分解 $U_{2n} \perp U_{2n}^\perp \cong H_-^{2n}$，它关于 $HGr(2n, 4n)$。设 $\mathbb{Z} \times HGr := \operatorname{colim}_n [-n, n] \times HGr(2n, 4n)$，其中 $[-n, n] \times X$ 表示 X 的 $2n+1$ 个不交并。态射 $HGr(2n, 4n) \to HGr(2n+2, 4n+4)$ 由子丛给出

$$U_{2n} \perp H_- \rightarrowtail (H_-^n \perp H_-) \perp (H_-^n \perp 0) \rightarrowtail (H_-^n \perp H_-) \perp (H_-^n \perp H_-)$$

其中，将 $HGr(2n, 4n)$ 认定为 $HGr(2n, H_-^n \perp H_-^n)$。定义 $[-n, n]'$如下:

$$[-n, n]' = \{i \in \mathbb{Z} | -n \le i \le n \, and \, i \equiv n \bmod 2\}$$

无限实格拉斯曼簇,

$$\mathbb{Z} \times RGr := \operatorname*{colim}_n [-2n, 2n]' \times RGr(2n, 4n) \cup [-2n+1, 2n-1]' \times RGr(2n-1, 4n-2)$$

以类似的方式定义。对于每个 n，指定点 $h_0 : pt \to \mathbb{Z} \times HGr$ 和 $r_0 : pt \to \mathbb{Z} \times RGr$ 分别对应于 $\{0\} \times HGr(2n, 4n) \subset [-n, n] \times HGr(2n, 4n)$ 和 $\{0\} \times RGr(2n, 4n) \subset [-2n, 2n]' \times RGr(2n, 4n)$ 上的子丛 $H_-^n \perp 0 \rightarrowtail H_-^n \perp H_-^n$ 和 $H_+^n \perp 0 \rightarrowtail H_+^n \perp H_+^n$。

引理 5.2。对于所有 $n \ge 0$，存在带基点光滑概形之间的态射

$$f_{2n} : ([-n, n] \times HGr(2n, 4n)) \times HP^1 \to RGr(16n, 32n)$$

使得以下条件成立。

1. 限制 $f_{2n|(0, H_-^n \perp 0) \times HP^1}$ 由子丛 $H_+^{8n} \perp 0$给出。2. 限制 $f_{2n|[-n,n] \times HGr(2n,4n) \times (H_- \perp 0}$ $H_+^{8n} \rightarrowtail)$ 由一个 H_+^{16n} $\mathbb{A}^1$ $H_+^{8n} \perp 0$ 嵌入给出，该嵌入与由 给出的嵌入 -同伦。3. 这些态射和 $\mathbb{A}^1$-同伦与概形的包含 $HGr(2n, 4n) \to HGr(2(n+1), 4(n+1))$ 和 $RGr(16n, 32n) \to RGr(16(n+1), 32(n+1))$相容。

证明。为简单起见，给定两个不同概形 X 和 Y上的两个向量丛 U 和 V，我们将 $U \boxtimes V$记作概形 $X \times Y$上的向量丛 $p_1^* U \otimes p_2^* V$，其中 p_i是投影。对所有 n，我们有分解 $U_{2n} \perp U_{2n}^{\perp} \cong H_-^{2n}$。请记住，两个辛空间的张量积是一个对称空间，特别是 $H_-^n \boxtimes H_-^m \cong H_+^{2mn}$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和$i \in [-n, n]$, 我们有定义在 $HGr(2n, 4n) \times HP^1$上的对称空间嵌入,

$$\begin{aligned} U_{2n} \boxtimes U_2 &\rightarrowtail H_-^{2n} \boxtimes U_2, \\ H_-^{n-i} \boxtimes U_2^{\perp} &\rightarrowtail H_-^{2n} \boxtimes U_2^{\perp}, \\ U_{2n}^{\perp} \boxtimes H_- &\rightarrowtail H_-^{2n} \boxtimes H_-, \\ H_-^{n+i} \boxtimes H_- &\rightarrowtail H_-^{2n} \boxtimes H_-. \end{aligned} \tag{5.1}$$

将这些结合起来，我们得到

$$(U_{2n} \boxtimes U_2) \perp (H_-^{n-i} \boxtimes U_2^{\perp}) \perp (U_{2n}^{\perp} \boxtimes H_-) \perp (H_-^{n+i} \boxtimes H_-) \tag{5.2}$$

它是秩为 $16n$ 的对称子空间，属于秩为 $32n$ 的对称空间

$$(H_-^{2n} \boxtimes U_2) \perp (H_-^{2n} \boxtimes U_2^{\perp}) \perp (H_-^{2n} \boxtimes H_-) \perp (H_-^{2n} \boxtimes H_-). \tag{5.3}$$

该空间与 H_+^{16n} 等距同构，而选择一个等距同构便可得到 H_+^{16n} 的 $2n+1$ 个子空间（每个 i 对应一个），其中每个子空间的秩均为 $16n$。因此我们有一个态射

$$f_{2n} : ([-n, n] \times HGr(2n, 4n)) \times HP^1 \to RGr(16n, 32n). \tag{5.4}$$

复合

$$HGr(2n, 4n) \times HP^1 \to HGr(2n+2, 4n+4) \times HP^1 \to RGr(16n+16, 32n+32),$$

对于固定的 i，其由子空间给出

$$((U_{2n} \perp H_-) \boxtimes U_2) \perp ((U_{2n}^{\perp} \perp H_-) \boxtimes H_-) \perp ((H_-^{n-i} \perp H_-) \boxtimes U_2^{\perp}) \perp H_+^{2n+2+2i}.$$

为了使其等于复合

$$HGr(2n, 4n) \times HP^1 \to RGr(16n, 32n) \to RGr(16n + 16, 32n + 32)$$

我们需要谨慎选择用于定义 f_{2n} 的等距同构。首先，我们将 H_-^{2n} 编号为 $\perp_{i=1}^{2n} H_-^{(i)}$。由此得到等距同构

$$(H_-^{(i)} \boxtimes U_2) \perp (H_-^{(i)} \boxtimes U_2^{\perp}) \perp (H_-^{(i)} \boxtimes H_-) \perp (H_-^{(i)} \boxtimes H_-) \cong H_+^8 \tag{5.5}$$

对每个 $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ 都如此。将这些等距同构合在一起，我们得到:

$$(H_-^{2n} \boxtimes U_2) \perp (H_-^n \boxtimes U_2^{\perp}) \perp (H_-^n \boxtimes H_-) \perp (H_-^n \boxtimes H_-) \cong H_+^{16n} \tag{5.6}$$

这就是所需的等距同构。沿嵌入 $(0, H_-^n \perp 0) \times HP^1 \hookrightarrow [-n, n] \times HGr(2n, 4n)) \times HP^1$拉回此等距同构，将辛

子空间 5.3 拉回到 $H_+^{8n} \perp 0$ 中，并沿 $[-n,n] \times HGr(2n,4n) \times (H_- \perp 0)$ 拉回该等距同构后，可将其变为

$$(U_{2n} \boxtimes (H_- \perp 0)) \perp (H_-^{n-i} \boxtimes (0 \perp H_-)) \perp (U_{2n}^{\perp} \boxtimes (H_- \perp 0)) \perp (H_-^{n+i} \boxtimes (0 \perp H_-))$$

这是一个与 H_+^{8n} 等距同构的子丛。通过置换 H_+^{16n} 的直和项，我们可以将上述子丛映射到 $H_+^{8n} \perp 0 \rightarrowtail H_+^{8n} \perp H_+^{8n}$。正如定理 3.1 的证明中所述，这些置换与恒等映射 $\mathbb{A}^1$-同伦。 □

下一个引理可以类似地证明,

引理 5.3。对于所有 $n \geq 0$，存在带基点光滑概形之间的态射

$$g_n : ([-n,n]' \times RGr(n,2n)) \times HP^1 \to HGr(8n,16n)$$

使得以下结论成立：

1. 当 n 为偶数时，限制 $g_{n|(0,H_+^{2n} \perp 0) \times HP^1}$ 由子丛 $H_-^{8n} \perp 0$ 给出。2. 限制 $g_{n|[-n,n] \times RGr(2n,4n) \times (H_+ \perp 0}$ $H_-^{8n} \rightarrowtail)$ H_-^{16n} $\mathbb{A}^1$ $H_-^{8n} \perp 0$

由一个与给定嵌入 -同伦的嵌入给出。3. 这些态射以及 $\mathbb{A}^1$-同伦与概形的包含 $RGr(n,2n) \to RGr(n+1,2(n+1))$ 和 $HGr(8n,16n) \to HGr(8(n+1),16(n+1))$ 相容。

证明。证明与引理 5.2 相同，只是指标有所变化。态射 g_n 定义在分支 i^{th} 上，其中 $i \in [-n,n]'$，由子空间给出

$$(V_n \boxtimes V_1) \perp (H_+^{\frac{n-i}{2}} \boxtimes V_1^{\perp}) \perp (V_n^{\perp} \boxtimes H_+) \perp (H^{n+1}) \tag{5.7}$$

□

利用方案态射 f_n 和 g_n，我们可以构造一个朴素的 HP^1-谱。

定理 5.4. 对于任意概形 S，存在一个朴素的 HP^1-谱 KO_S^{geo}，使得对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{KO}_{2i+1}^{geo} = \mathbb{Z} \times HGr$和 $\mathrm{KO}_{2i}^{geo} = \mathbb{Z} \times RGr$作为动机空间，并且 $\Omega_{HP^1}^2 \mathrm{KO}^{geo} \cong \mathrm{KO}^{geo}$ 属于 $SH(S)_{HP^1}$。

这里我们滥用了记号，用 KO_S^{geo} 同时表示朴素的HP^1-谱及其在 $SH(S)$中的相应对象。

证明。由引理 5.2 和引理 5.3，我们得到归纳概形的态射,

$$f : HP^1 \times \mathbb{Z} \times HGr \to RGr \quad g : HP^1 \times \mathbb{Z} \times RGr \to HGr \tag{5.8}$$

使得 $f_{|HP^1 \vee HGr}$和 $g_{|HP^1 \vee RGr}$与常零态射 $\mathbb{A}^1$-同伦。这些诱导出结构映射 f: $HP^1 \wedge_{\mathbf{L}} (\mathbb{Z} \times HGr) \to \mathbb{Z} \times RGr$和 g: $HP^1 \wedge_{\mathbf{L}} (\mathbb{Z} \times RGr) \to \mathbb{Z} \times HGr$，它们属于 $H_\bullet(S)$，其中 $\wedge_{\mathbf{L}}$ 是楔积的左导出函子。周期性由构造得出。 □

上述周期性意味着动机谱的标准双分次具有 (8, 4) 周期性。

注 5.5. 我们构造 KO^{geo} 的方法与 [PW18] 中构造 BO 的方法大致相同。不过，我们证明了不需要满足 2 可逆这一条件。我们还使用了附录 A 中阐述的朴素谱理论，这简化了 KO^{geo} 结构映射的构造，并表明只需考虑 $H_\bullet(S)$ 中结构映射的同伦类。

6 $\mathrm{KO}^{\mathrm{geo}}$ 的性质

构造出 KO^{geo} 后，我们将考察它的一些性质。第一个值得注意的性质是，它在以下意义下是绝对的。

定理 6.1. 对于任意概形态射 $f\colon S \to T$，存在典范同构 $Lf^*\mathrm{KO}_T^{geo} \xrightarrow{\sim} \mathrm{KO}_S^{geo}$，其位于 $SH(S)$ 中。特别地，对于任意概形S，KO_S^{geo} 同构于 $\mathrm{KO}_{\mathbb{Z}}^{geo} = \mathrm{KO}^{geo}{}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ 沿结构映射 $S \to$Spec(ℤ) 的拉回。

证明。设 $f\colon S \to T$ 为概形态射。拉回诱导出典范同构 $f^*(HGr(2r,2n)_T) \cong HGr(2r,2n)_S$ 以及 $f^*(\mathbb{Z} \times HGr_T) \cong \mathbb{Z} \times HGr_S$。由于形式的张量积在拉回下保持不变，该拉回同构也与 KO^{geo} 的结构映射相容。利用 [中给出的闭模型结构，PPR09] f^* 是一个左 Quillen 函子，从而完成证明。

□

下一个有趣的性质是，Spec($\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$) 上的 KO^{geo} 恢复了 [PW18] 中构造的动机谱 BO。这意味着厄米 K 理论具有相应的可表性结果。为了陈述这一结果，我们需要将 BO 作为朴素 HP^1-谱的一个模型。对于概形 X 上的任意秩 2 辛向量丛 (E,ϕ)，结构映射 $\phi\colon E \otimes E \to \mathcal{O}_X$ 诱导出一个同构$\Lambda^2 E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$。$HP^1$ 上的典范态射 $U_2 \rightarrowtail H^2_-$ 限制为四个映射的集合$U_2 \rightarrowtail \mathcal{O}_{HP^1}$。经过 $U_2 \rightarrowtail H_-$ 的那一对除相差一个符号外在同构意义下唯一。因此，分别将这些对记为 $(x_0, -x_0)$ 和 $(x_\infty, -x_\infty)$（这一记号与以下事实一致：沿着点 x_0 和 x_∞ 拉回时，它们是同构）。考虑对称形式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{HP^1} & \longrightarrow & U_2 & \xrightarrow{x_0} & \mathcal{O}_{HP^1} \\ \downarrow{\scriptstyle -1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{2,4}} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathcal{O}_{HP^1} & \xrightarrow{(-x_\infty)^\vee} & U_2^\vee & \longrightarrow & \mathcal{O}_{HP^1} \end{array}$$

在 $Ch^b(Vect(HP^1 \times X), -\eta, q)$ 中，按次数 0 至 2 编号。根据构造，这个形式等于 $[U_2] - [H_-]$ 在 $KSp(HP^1 \times X)$ 中的形式，沿着

$$KO^{[2]}(HP^1 \times X) \xrightarrow{\sim} KSp^{[0]}(HP^1 \times X) \xrightarrow{\sim} KSp(HP^1 \times X)$$

并且是沿零截面 $z\colon HP^1 \to U_2$ 对 $\kappa(U_2, \phi)$ 的拉回。我们将 $KO_0^{[2]}(HP^1 \times X)$ 中的这个元素称为博雷尔类 $-b_1(U_2)$。博雷尔类将给出所需的结构映射。记 BO_{HP^1} 为 BO 在 $SH(S)_{HP^1}$ 中的像。

定理 6.2. 设 S 是一个有限克鲁尔维数的正则诺特概形，且 $\frac{1}{2} \in \Gamma(\mathcal{O}_S, S)$。$\mathrm{BO}_{HP^1}$ 的结构态射由以下映射表示

$$KO^{[n]}(-) \to KO^{[n+2]}(- \times HP^1), \quad C. \mapsto C. \boxtimes (-b_1(\mathrm{U}_2))$$

对所有 n均成立。

证明. 只需证明，在 HP^1 与 $T^{\wedge 2}$ 之间的弱等价 zigzag 下，博雷尔类的像为 $th(\mathcal{O}, id) \boxtimes th(\mathcal{O}, id)$。首先，序列 $\mathcal{O}_{HP^1} \to U_2 \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}_{HP^1}$ 限制到 $HP^1 - N^+$ 后是正合的。因此，$-b_1(U_2)$ 是 $KO_0^{[n+2]}(HP^1, HP^1 - N^+)$ 的一个元素。向量丛态射 $U_2 \xrightarrow{x_0} \mathcal{O}_{HP^1}$ 沿 $\mathbb{A}^2 \cong N^- \to HP^1$ 的拉回为 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}^{\oplus 2} \xrightarrow{(t_0,\ t_1)} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$，其中 t_0 和 t_1 是 $\mathbb{A}^2_{\mathrm{Spec}(R)} \cong \mathrm{Spec}(R[t_0, t_1])$ 中的变量。因此 $-b_1(U_2)$ 变为

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}^{\oplus 2} & \xrightarrow{(t_0,t_1)} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \\ \downarrow{\scriptstyle -1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} & \xrightarrow{(-t_1,-t_0)} & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \end{array}$$

按要求，其为 $th(\mathcal{O}, id) \boxtimes th(\mathcal{O}, id)$。 □

现在可以陈述所需的结果。

定理 6.3. 存在一个同构 $\mathrm{KO}^{geo} \cong \mathrm{BO}_{HP^1}$，使它们成为 $SH(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]))$ 中的对象。因此，KO^{geo} 在带有 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 的有限克鲁尔维数正则诺特概形上表示厄米 K 理论。

证明. 同构 $\tau\colon \mathbb{Z} \times HGr \xrightarrow{\sim} KSp$ in $H_\bullet(S)$ 可由定理 3.1 得出。为了证明图表

$$\begin{array}{ccc} HP^1 \wedge_{\mathbf{L}} HP^1 \wedge (\mathbb{Z} \times HGr) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times HGr \\ \downarrow{\scriptstyle 1\wedge 1\wedge \tau_{4n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau 4n+2} \\ HP^1 \wedge_{\mathbf{L}} HP^1 \wedge_{\mathbf{L}} KO^{[4n-2]} & \longrightarrow & KO^{[4n+2]} \end{array}$$

在 $H_\bullet(S)$ 中可交换。我们利用 $\mathbb{Z} \times HGr$ 是归纳概形这一事实，因此限制 $\{i\} \times HGr(2r, 2n) \hookrightarrow \mathbb{Z} \times HGr \xrightarrow{\sim} KSp$ 由 $KSp_0(HGr(2r, 2n))$ 中的一个元素分类。映射 $BSp_{2n} \to B i\mathrm{Symp}$ 在 $H_\bullet(S)$ 中由概形层面上将主 Sp_{2n}-丛送到相应的辛丛给出。因此，映射 $HGr(2r, 2n) \to BSp_{2n} \to B i\mathrm{Symp}$ 对应于典范辛丛 $U_{2r,\ 2n} \to HGr(2r, 2n)$。由此以及

映射 $\mathbb{Z} \times M_\infty \to R\Omega^1 BM$ 的定义可得，同构τ：$\mathbb{Z} \times HGr \to KSp$ 满足

$$\tau_{|\{i\}\times HGr(2r,2n)} = [U_{2r,2n}] + (i-r)[H_-] \\ \in KSp_0(HGr(2r,2n)) \to Hom_{H_\bullet(S)}(HGr(2r,2n), KSp).$$

最后一个映射在正则诺特概形 S 上是同构，其中 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$。我们将 τ_{4k+2} 记为复合

$$\mathbb{Z} \times HGr \xrightarrow{\tau} KSp \xrightarrow{\sim} KO^{[4k+2]}$$

其中 $KSp \xrightarrow{\sim} KO^{[4k+2]}$ 是 $n=0$ 的同构 2.2。于是我们有

$$\tau_{4k+2|\{i\}\times HGr(2n,4n)} = ([U_{2n,4n}] + (i-2n[H_-]))[2k+1]$$

类似地，映射 $HP^1 \wedge HP^1 \wedge (\mathbb{Z} \times HGr) \to \mathbb{Z} \times HGr \to KSp$ 限制到 $HP^1 \times HP^1 \times \{i\} \times HGr(2n, 4n)$ 后由下式给出

$$([U_2] - [H_-]) \boxtimes ([U_2] - [H_-]) \boxtimes ([U_{2n,4n}] + (i-2n)[H_-]).$$

为此，注意到 $[U_{2n,4n}^\perp] = 2n[H] - [U_{2n,4n}]$。但是，两次张量乘以 $([U_2]-[H_-])$ 恰好是 BO_{HP^1} (6.2) 的结构映射，因此该图表限制到有限格拉斯曼流形时交换。由于 $\mathbb{Z} \times HGr$ 是 $\{i\} \times HGr(2n, 4n)$ 的余极限，我们有一个映射

$$Hom_{H_\bullet(S)}(\operatorname{colim}_n HGr(2n,4n), X) \to \lim_n Hom_{H_\bullet(S)}(HGr(2n,4n), X)$$

对于任意 $X \in \mathrm{Spc}_\bullet(S)$。如果

$$Hom_{H_\bullet(S)}(S_s^1 \wedge HGr(2n+2, 4n+4), X) \to Hom_{H_\bullet(S)}(S_s^1 \wedge HGr(2n,4n), X)$$

是满射。为此，对 X 取一个纤维化替代，以得到单纯同伦类的集合。因此，满射性意味着我们可以将一组同伦类提升到余极限中，且该提升在同伦意义下唯一。这对 $X = KO^{[k]}$ 成立，因为此时我们有

$$Hom_{H_\bullet(S)}(S_s^1 \wedge HGr(2n,4n), KO^{[k]}) \cong KO_1^{[k]}(HGr(2n,4n))$$

并且映射 $KO_i^{[k]}(HGr(2n+2, 4n+4)) \to KO_i^{[k]}(HGr(2n,4n))$ 是满射，这是由 [PW21，定理 11.4] 应用于 $KO_*^{[*]}$得出的； $KO_*^{[*]}$是一个具有 -1-交换环结构的上同调理论 [PW18，定理 1.4]。 □

备注 6.4。注意，我们需要 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ 才能得到同构$KSp \xrightarrow{\sim} KO^{[2k+1]}$，因为只有此时我们才能将斜对称形式与交替形式对应起来。

我们也可以将 [RSØ18] 中的细胞性结果推广到任意概形。我们将使用 [DI05] 中对细胞谱的定义。

定义 6.5. 对于任意概形 S，令 $\mathrm{Spt}_{cell}(S)$ 为 $\mathrm{Spt}(S)$ 的最小满子范畴，满足以下条件：

1. 对所有 $p,q\in\mathbb{Z}$，都有 $S^{p,\,q}\in\mathrm{Spt}_{cell}(S)$。

2. 若 F 与某个 $\mathrm{E}\in\mathrm{Spt}_{cell}(S)$ 稳定等价，则 $\mathrm{F}\in\mathrm{Spt}_{cell}(S)$。

3. 对于任意图表 $D\to\mathrm{Spt}_{cell}(S)$，$\operatorname{hocolim}D$ 属于 $\mathrm{Spt}_{cell}(S)$。

由于 $\mathrm{Spt}_{cell}(S)$ 对稳定等价封闭，它定义了 $SH(S)$ 的一个子范畴 $SH(S)_{cell}$。我们称 $\mathrm{Spt}_{cell}(S)$ 的元素为胞腔谱。给定一个态射$f:\ S_1\to S_2$，我们有如下结论。

引理 6.6. 对任意概形态射 $f:\ S_1\to S_2$, $Lf^*:\ SH(S_2)\to SH(S_1)$ 限制为胞腔对象的态射 $Lf^*:\ SH(S_2)_{cell}\to SH(S_1)_{cell}$。
证明。这由 Lf^* 保持所有动机球和同伦余极限这一事实得出。

□

我们希望证明以下结论。
定理 6.7。设 S 为任意概形。动机谱 KO_S^{geo} 是细胞的。

为证明这一点，我们首先将证明悬挂谱 $\Sigma^\infty HG(2r,2n)_+$ 是细胞的。它们构成以下陈述中 $m=0$ 的情形。
引理 6.8。设 $m\geq 0$。$U_{2r}^{\oplus m}$ 托姆空间的悬挂谱，$_{2n}$在 $HGr(2r,2n)$ 上是有限胞腔谱。

证明。根据引理 6.6，只需证明在 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上的情形即可。证明对 r 和 n 使用归纳法。由于 $HGr(0,2n)\cong pt$，该陈述对 $r=0$ 成立。扩展定理 5.1 中的定义，我们将 $N^+=HGr(2r,2n)\cap Gr(2r,0\oplus\mathcal{O}^{2r}\oplus\mathcal{O}^{2n})$ 和 $N^-=HGr(2r,2n)\cap Gr(2r,\mathcal{O}^{2r}\oplus 0\oplus\mathcal{O}^{2n})$ 定义为 $HGr(2r,2n)$ 的闭子概形。这些丛的直和 $N=N^+\oplus N^-$ 是嵌入 $HGr(2r,2n-2)\to HGr(2r,2n)$ [PW21，定理 4.1] 的法丛。设 Y 为开子概形 $HGr(2r,2n)\setminus N^+$，则根据 [Spi10，引理 3.5]，映射的余纤维

$$Th(U_{2r,2n_{|Y}}^{\oplus m})\to Th(U_{2r,2n}^{\oplus m}),$$

同构于 $Th(U_{2r}^{\oplus m,\ 2n_{|N^+}}\oplus\mathcal{N})$，其中 $\mathcal{N}$是闭嵌入 $N^+\to HGr(2r,2n)$ 的法丛。根据 [PW21]，我们有 $U_{2r,\ 2n_{|N^+}}\cong\pi_+^*U_{2r,\ 2n-2}$；事实上，证明表明 $\pi_+^*U_{2r,\ 2n-2}\cong\mathcal{N}$。因此，我们有一个余纤维序列

$$Th(U_{2r,2n_{|Y}}^{\oplus m})\to Th(U_{2r,2n}^{\oplus m})\to Th(\pi_+^*U_{2r,2n-2}^{\oplus m+1}).$$

其中 π_+ 是向量丛的结构映射。因此，诱导态射 $Th(\pi_+^*U_{2r}^{\oplus m+1,\ 2n-2})\to Th(U_{2r}^{\oplus m+1,\ 2n-2})$ 是不稳定弱等价。

通过对 n 使用归纳法，我们已将问题归结为证明 $\Sigma^\infty Th(U_{2r}^{\oplus m},\ {}_{2n|Y})$ 是细胞的。根据 [PW21, 定理 5.1]，我们有一条锯齿链

$$Y \leftarrow Y_1 \leftarrow Y_2 \rightarrow HG(2r-2, 2n-2)$$

其中每个映射都是仿射丛，而且辛丛之间存在一个同构

$$U_{2r,2n|Y_2} \cong \mathcal{O}_{Y_2}^{\oplus 2} \oplus U_{2r-2,2n|Y_2}$$

并且根据 [PW21, 定理 5.2], 的证明，映射 $Y_2 \rightarrow HG(2r-2, 2n-2)$ 有一个截面，因此序列中的每个概形都有一个点。由定理 B.1，我们便得到等价

$$Th(U_{2r,2n|Y}) \simeq Th(U_{2r,2n|Y_2}) \cong Th(\mathcal{O}_{Y_2}^{2m} \oplus U_{2r-2,2n|Y_2}^{\oplus m}) \simeq S^{4m,2m} \wedge Th(U_{2r-2,2n}^{\oplus m}).$$

归纳法完成证明。 □

这足以证明所需的结果。

定理 6.7 的证明。证明的主要思路见 [RSØ18]。与之前一样，我们有 $\mathrm{KO}^{geo} =$ 同伦余极限$_n\, \Sigma^{-4n,\ -2n}\Sigma^\infty \mathbb{Z} \times HGr$。因此，根据 [DI05，引理 3.4] 和定义 6.5 (3)，只需证明对于每个 n，$\Sigma^\infty HGr(2n, 4n)_+$ 都是细胞的。 □

附录 A 朴素谱

在本节中，$\mathcal{C}$ 是一个带基点的余纤维生成模型范畴，具有纤维且余纤维替换函子 R 和 Q。我们用 $H(\mathcal{C})$表示相应的同伦范畴。给定一个 Quillen 伴随

$$(T, U, \eta) : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C},$$

T-谱范畴 $Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T)$的对象是 $\mathcal{C}$ 中的对象序列 $\{E_i\}_{i\geq 0}$ 以及组装映射

$$e_i : T(E_i) \rightarrow E_{i+1}.$$

范畴 $Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T)$从 $\mathcal{C}$继承了若干模型结构。这里我们将考虑 [Hov01]中给出的逐级射影模型结构和稳定射影模型结构。我们分别用 $H^l(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T))$和 $SH(\mathcal{C}, T)$表示相关的同伦范畴。

定义 A.1（朴素谱）。朴素 T-谱（$E_\cdot, e_\cdot$）是由 $H(\mathcal{C})$中的对象组成的序列$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，并配备组装态射

$$e_n \in Hom_{H(\mathcal{C})}(\mathbf{L}T(E_n), E_{n+1}).$$

naive T-谱之间的态射 $\phi : (E_\cdot, e_\cdot) \rightarrow (F_\cdot, f_\cdot)$ 是一组态射$\phi_n : E_n \rightarrow F_n$，其中 $H(\mathcal{C})$ 中相关的图表在 $H(\mathcal{C})$ 中交换。我们将此范畴记为 $Sp^{\mathrm{naive}}(\mathcal{C}, T)$。

任意 T-谱 E 都典范地定义一个 naive T-谱 Naive(E)，其底层序列为 E_n，组装态射则是以下对象的像

$$\mathbf{L}T(\mathbf{E}_n) = T(Q\mathbf{E}_n) \to T(\mathbf{E}_n) \xrightarrow{e_n} \mathbf{E}_{n+1}$$

对每个 n，在 $H(\mathcal{C})$ 中。这给出了一个函子 Naive : $Sp(\mathcal{C},T) \to Sp^{\mathrm{naive}}(\mathcal{C},T)$。

注 A.2。此处给出的朴素谱概念是 [Rio] 中所定义概念的推广。

引理 A.3。函子 Naive : $Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C},T) \to Sp^{\mathrm{naive}}(\mathcal{C},T)$ 是本质满的。

证明。给定任意朴素 T-谱 $(E_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，选取其双纤维模型 $E'_n \in \mathcal{C}$ E_n。于是我们有同构

$$Hom_{H(\mathcal{C})}(\mathbf{L}T(E_n), E_{n+1}) \cong Hom_{\mathcal{C}}(T(E'_n), E'_{n+1})/\simeq$$

这使我们能够为每个 n 选择一个提升 $e'_n : T(E'_n) \to E'_{n+1}$ e_n。于是我们有一个 T-谱 E′，其在 Naive 下的像与 $(E_n,e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 同构。 □

引理 A.4。设 $\mathrm{E} = (E_0, E_1 \ldots)$、$\mathrm{F} = (F_0, F_1, \ldots) \in Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C},T)$，其组装映射分别为 $e_n : T(E_n) \to E_{n+1}$ 和 $f_n : T(F_n) \to F_{n+1}$。若在 $Sp^{\mathrm{naive}}(\mathcal{C},T)$ 中存在同构 ϕ: Naive(E) $\xrightarrow{\sim}$ Naive(F)，则 E 和 F 在 $H^l(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C},T))$ 中同构。

证明。我们有同构 $\phi_n : E_n \xrightarrow{\sim} F_n$ 属于 $H(\mathcal{C})$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}T(E_n) & \longrightarrow & E_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{L}T(\phi_n)} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{n+1}} \\ \mathbf{L}T(F_n) & \longrightarrow & F_{n+1} \end{array}$$

对所有 n 都成立。由于 $\mathcal{C}$ 是余纤维生成的，因此 $H^l(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C},T))$ 也是余纤维生成的，从而它有一个纤维且余纤维替换函子 [Hov01]。利用谱 E 和 F 的余纤维-纤维替换，我们可以将问题化约到谱逐层余纤维-纤维的情形。在这种情况下，每个 ϕ_n 都可提升为 $\mathcal{C}$ 中的一个弱等价，而图表的交换性意味着映射 $\phi_{n+1}e_n$ 和 $f_nT(\phi_n)$ 在 [Hov99, 命题 1.2.5] 意义下同伦。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $E_n \times I$ 为 E_n 的函子性柱对象。由于 $T(E_n)$ 是余纤维的且 F_{n+1} 是纤维的，$T(E_n \times I)$ 是 $T(E_n)$ 的一个柱对象，并且存在一个左同伦

$$\begin{array}{ccc} T(E_n) & \xrightarrow{e_n} & E_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle i_0} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{n+1}} \\ T(E_n \times I) & \xrightarrow{H_n} & F_{n+1} \\ {\scriptstyle i_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f_n} \\ T(E_n) & \xrightarrow{T(\phi_n)} & T(F_n), \end{array}$$

介于 $\phi_{n+1}e_n$ 和 $f_nT(\phi_n)$ 之间。映射柱 M_{ϕ_n} 是图表的推出

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{\phi_n} & F_n \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow \\ E_n \times I & \longrightarrow & M_{\phi_n} \end{array}$$

因此，态射 $F_n \to M_{\phi_n}$ 是一个无圈余纤维化，其左逆由 $id_{F_n}\colon F_n \to F_n$ 和 $E_n \times I \to E_n \xrightarrow{\phi_n} F_n$诱导。由于 T 是左伴随，它保持推出，因此 $(T(\phi_n)\ H_n)$ 诱导一个映射

$$T(M_{\phi_n}) \to F_{n+1} \to M_{\phi_{n+1}}.$$

这给出了一个谱 $Cyl(\phi) = (M_{\phi_0}, M_{\phi_1}, \ldots)$，以及逐级弱等价 $\mathrm{E} \to Cyl(\phi)$ 和 $\mathrm{F} \to Cyl(\phi)$，它们由下式给出

$$E_n \xrightarrow{i_0} E_n \times I \to M_{\phi_n} \quad \text{and} \quad F_n \to M_{\phi_n},$$

其中，由三取二性质可知 $E_n \times I \to M_{\phi_n}$ 是一个弱等价。因此，E 和 F 在 $H(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T))$ 中同构。 □

这两个引理表明，一个朴素的 T-谱在同构意义下唯一确定 $H^{l}(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T))$ 中的一个对象。

定理 A.5. 对任意朴素的 T-谱 $(E_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个 T-谱 $\mathrm{E} \in Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T)$，以及组装映射 $f'_n\colon T(\mathrm{E}_n) \to \mathrm{E}_{n+1}$，使得

1. 在 $SH(\mathcal{C}, T)$ 中，朴素$(\mathrm{E}) \xrightarrow{\sim} (E_n, e_n)_{n\in\mathbb{N}}$；2. 任何满足上述条件的其他 $\mathrm{E}' \in Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T)$，都在 $H^{l}(Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T))$ 中与 E 同构。

特别地，每个朴素 T-谱在 $SH(\mathcal{C}, T)$ 中定义一个在同构意义下唯一的对象。

证明。陈述 (2) 由陈述 (1) 和引理 A.4 得出。陈述 (1) 只是引理 A.3 的另一种表述。最后一句是因为每个逐层弱等价都是稳定等价。 □

注 A.6。并非必须使用射影模型结构；我们只需要在 $Sp^{\mathbb{N}}(\mathcal{C}, T)$ 上有一个模型结构，使得弱等价恰好是逐层弱等价，并且每个双纤维对象也都是逐层双纤维的。因此，内射模型结构同样适用。

附录 B 托姆空间

对于性质足够良好的概形，托姆空间构造保留 $\mathbb{A}^1$-弱等价。设 S 是一个在具有完美剩余域的戴德金环 k 上归纳光滑的概形。

定理 B.1. 设 $X \in Sm_S$ 是一个带有有理点 x:$S \to X$的光滑 S-概形。对于任意带基点光滑概形之间的 $\mathbb{A}^1$-等价 $f : (Y, y) \to (X, x)$，以及任意秩为常秩 n的向量丛 $E \to X$，诱导的托姆空间映射 $Th(f^*E) \to Th(E)$ 是一个 $\mathbb{A}^1$-等价。

为证明这一点，我们使用以下引理。

引理 B.2. 设 $E \to B$ 是 S 上的主 GL_n-丛。给定一个点 b: $S \to B$，图表

$$GL_n \to E \to B$$

来自拉回

$$\begin{array}{ccc} GL_n & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列。此外，对于任意带有 GL_n-作用 $\sigma : GL_n \times F \to F$ 的概形 F，相应的图表

$$F \to E \times_\sigma F \to B$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列。

证明. 注意，对于任意纤维为 F 的局部平凡丛 $P \to X$，以及其中的任意点 $x \in X$，拉回图表

$$F \to P \to X$$

是一个单纯纤维序列（取茎可得到一个单纯集合的纤维序列）。对于任意光滑的 S-概形 B，存在一系列双射

$$Vect_n(B) \cong P_{Nis}(B, GL_n) \cong P_{Nis}(B, GL_n) \cong Hom_{H^s(S)}(B, BGL_n)$$

其中， $P_\tau(B, GL_n)$ 是 τ-局部平凡的 GL_n丛的集合，根据 [AHW18, Ex.2.3.4] 和 [MV99, Prop.4.1.15]。这意味着映射 $E \to B$ 是 GL_n丛 $E_{Nis}GL_n \to B_{Nis}GL_n$ 的拉回，其中 $B_{Nis}GL_n$ 是 Nisnevich 纤维化替换。由于每个向量丛（因而每个 GL_n-挠子）都是 Zariski 局部平凡的， BGL_n 满足 Nisnevich 下降，因此我们有一个双射

$$\pi_0(B_{Nis}GL_n(X)) \cong \pi_0(BGL_n(X))$$

对于任意 $X \in Sm_S$，根据 [AHW18, Thm. 5.2.3], ，秩为 n 的向量丛$Vect_n$(–) 关于 S 上的仿射概形是 $\mathbb{A}^1$-不变的，因此我们有

$$Vect_n(X) \cong \pi_0(B_{Nis}GL_n(X)) \cong \pi_0(BGL_n(X))$$

对于 X 仿射。根据 [AHW18，定理 2.2.5]

$$G \to E_{Nis}G \to B_{Nis}G$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列，因此根据 [Wen11，命题 2.3]

$$GL_n \to E \to B$$

是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列。对于任意带有 GL_n作用的概形 F，我们可以证明

$$F \to E_{Nis}(GL_n) \times_\sigma F \to B_{Nis}(GL_n)$$

按照 [Wen11，命题 5.1]的思路，这是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列。单纯纤维序列

$$F \to E \times_\sigma F \to B$$

是泛序列的拉回，因此也是 $\mathbb{A}^1$-局部的。 □

定理 B.1 的证明。给定任意秩为 n的向量丛 $E \to X$，三取二性质表明，一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $f\colon Y \to X$ 会诱导一个 $\mathbb{A}^1$-弱等价 $f^*E \to E$。零截面 $E - X \to X$ 的补集是一个纤维为 $\mathbb{A}^n - 0$的局部平凡丛。纤维序列

$$\mathbb{A}^n - 0 \to E - X \to X$$

这是通过将与向量丛 $E \to X$相关联的 GL_n-挠子沿 $\mathbb{A}^n - 0$ 上的标准 GL_n作用扭曲得到的，因此根据引理 B.2，它是一个 $\mathbb{A}^1$-局部纤维序列。于是，沿着一个 $\mathbb{A}^1$-等价 $f\colon Y \to X$对 $E-X$进行拉回，会诱导一个 $\mathbb{A}^1$-等价 $f^*E-Y \to E-X$。因此，我们得到余纤维化序列的一个等价

$$\begin{array}{ccccc} f^*E - Y & \longrightarrow & f^*E & \longrightarrow & Th(f^*E) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ E - X & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Th(E) \end{array}$$

从而得到所需的托姆空间的 $\mathbb{A}^1$-等价。 □

参考文献

[AHW18] A. Asok、M. Hoyois 和 M. Wendt。 $\mathbb{A}^1$同伦理论中的仿射可表示性结果 II：主丛与齐性空间。Geom. Topol.，22(2):1181–1225，2018年。doi:10.2140/gt.2018.22.1181。[AK20] K. Arun Kumar。关于动机谱 BO 与厄米 K理论。博士论文，Universit¨at Osnabr¨uck，2020年。URL: https://osnadocs.ub.uni-osnabrueck.de/handle/urn:nbn:de:gbv:700-202011243776。[Bal00] P. Balmer。三角 Witt 群 I。12项局部化正合序列。K《K-理论》，19(4):311–363，2000年。doi:10.1023/A:1007844609552。

[BW21] T. Bachmann 和 K. Wickelgren。欧拉类：完全交的六函子形式、对偶性、整性与线性子空间。Jussieu数学研究所期刊，第1–66页，2021年。doi:10.1017/S147474802100027X。[CDH+23] B. Calm`es、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land、K. Moi、D. Nardin、T. Nikolaus 和 W. Steimle。稳定 ∞范畴的厄米 K 理论 I：基础。Sel. Math., New Ser.，29(1):269，2023年。编号10。doi:10.1007/s00029-022-00758-2。[DI05] D. Dugger 和 D.C. Isaksen。动机胞腔结构。Algebr. Geom. Topol.，5:615–652，2005年。doi:10.2140/agt.2005.5.615。[Gra76] D. Grayson。高阶代数 K理论 II（继 Daniel Quillen 之后）。载于《代数 K拓扑》（会议论文集，西北大学，埃文斯顿，伊利诺伊州，1976年），第217–240页。数学讲义，第551卷，1976年。[Hov99] M. Hovey。模型范畴，数学综述与专著第63卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。[Hov01] M. Hovey。一般模型范畴中的谱与对称谱。J. Pure Appl. Algebra，165(1):63–127，2001年。doi:10.1016/S0022-4049(00)00172-9。[Jar00] J.F. Jardine。动机对称谱。Doc. Math.，5:445–552，2000年。[Kar73] M. Karoubi。厄米 K 理论的周期性。载于 H. Bass（编），《厄米 K 理论与几何应用》，第301–411页，柏林、海德堡，1973年。Springer Berlin Heidelberg。Ź[Lam05] T. Y. Lam。域上的二次型导论，Graduate Studies in Mathematics 第67卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2005年。doi:10.1090/gsm/067。[Lam06] T.Y. Lam。Serre问题与射影模。数学专著系列。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，2006年。doi:https//doi.org/10.1007/978-3-540-34575-6。[MV99] F. Morel 和 V. Voevodsky。概形的 ^{1} 同伦理论。Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.，(90):45–143（2001），1999年。URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__90__45_0。[PPR09] I. Panin、K. Pimenov 和 O. R¨ondigs。关于 Voevodsky 的代数 K理论谱。载于《代数拓扑》，Abel Symp. 第4卷，第279–330页。Springer，柏林，2009年。URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-01200-6_10, doi:10.1007/978-3-642-01200-6_10。

[PW18] I. Panin 和 C. Walter. 关于动机交换环谱 BO. Algebra i Analiz, 30(6):43–96, 2018年. doi:10.1090/spmj/1578.[PW21] I. Panin 和 C. Walter. 代数几何中的四元数格拉斯曼流形与博雷尔类. Algebra i Analiz, 33(1):136–193, 2021. doi:10.1090/spmj/1692.[Rio] J. Riou. 通过概形同伦理论研究代数 K-理论的运算与调节子. 预印本，2006年7月18日，K-理论预印本档案，http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0793/.[RØ16] O. Røndigs 和 P. A. Østvær. 厄米 K-理论的切片与关于二次型的 Milnor猜想. Geom. Topol., 20(2):1157– 1212, 2016年. doi:10.2140/gt.2016.20.1157.[RSØ18] O. Røndigs、M. Spitzweck 和 P.A. Østvær. 厄米 K-理论与 Witt理论的胞腔性. 载于《K-理论——国际研讨会论文集》，孟买，2016年，第 35–40 页。Hindustan Book Agency，新德里，2018年.[Sch04] M. Schlichting. 关于 Giffen定理的厄米 K-理论. 《K-理论》，32(3):253–267, 2004. doi:10.1007/s10977-004-0929-5.[Sch10a] M. Schlichting. 正合范畴的厄米 K-理论. J. K- Theory, 5(1):105–165, 2010. doi:10.1017/is009010017jkt075.[Sch10b] M. Schlichting. 概形的格罗滕迪克-维特群的 Mayer-Vietoris原理. Invent. Math., 179(2):349–433, 2010. doi:10.1007/s00222-009-0219-1.[Sch17] M. Schlichting. 厄米 K-理论、导出等价与 Karoubi基本定理. J. Pure Appl. Algebra, 221(7):1729– 1844, 2017. doi:10.1016/j.jpaa.2016.12.026.[Sch19] M. Schlichting. 形式的高阶 K-理论 I：从环到正合范畴. J. Inst. Math. Jussieu, 即将出版，2019. doi:10.1017/s1474748019000410.[Spi10] M. Spitzweck. 代数配边谱的切片与商之间的关系. Homology Homotopy Appl., 12(2):335– 351, 2010. URL: https://projecteuclid.org:443/euclid.hha/ 1296223886.[ST15] M. Schlichting 和 G.S. Tripathi. 同伦理论中高阶格罗滕迪克-维特群的几何模型. Math. Ann., 362(3-4):1143–1167, 2015. doi:10.1007/s00208-014-1154-z.[Wei13] C.A. Weibel. 《K-理论之书》，数学研究生教材第 145 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2013。代数 K-理论导论。

[Wen11] M. Wendt. 有理平凡扭子在 $\mathbb{A}^1$-同伦论中的应用。《J. K-Theory》, 7(3):541–572,2011. doi:10.1017/is011004020jkt157.