利用合成的两束相互垂直传播的激光场调控磁性和电性非偶极效应

Yankun Dou[1], Yiqi Fang[1], Peipei Ge[1] 和 Yunquan Liu[1,2,3*]

[1]北京大学物理学院介观物理国家重点实验室与纳米光电子学前沿科学中心，北京 *100871*，中国[2]量子物质协同创新中心，北京 *100871*，中国[3]极端光学协同创新中心，山西大学，山西太原 *030006*，中国

摘要：非偶极效应在光与物质相互作用中无处不在且至关重要。然而，它们过于微弱，难以直接观测。在强场物理中，电子的运动主要局限于光场的横向平面内，这抑制了非偶极效应的重要性。本文提出了一项理论研究，利用合成的两束相互垂直传播的激光场来增强和控制非偶极效应。我们采用经典轨道蒙特卡罗模型，计算了氢原子强场隧穿电离的三维光电子动量分布，并表明，由于这类激光场对亚周期光电子动力学具有显著影响，非偶极效应得到了明显增强。特别是，我们揭示了通过调节驱动激光场的椭圆率和振幅，可以分别控制非偶极效应的磁性分量和电性分量的大小。这一新颖方案有望应用于未来的超快结构光场研究。

偶极近似广泛应用于强光-物质相互作用中，其核心思想是忽略驱动电场的空间依赖性以及磁场分量的作用 [1,2]。该近似成功解释了许多众所周知的强场现象，例如阈上电离 [3,4], 高次谐波产生 [5-8] 以及光电子全息术 [9-11]。随着强激光技术的发展，激光脉冲的波长逐渐与从原子和分子中释放出来的电子的有质动力运动相当 [12]。与此同时，当光强达到相对论效应显著的范围时，中红外波段超强激光脉冲的磁场分量变得十分重要 [13]。在这些情况下，偶极近似失效，因此应考虑非偶极效应 [14,15]。近年来，非偶极效应已可通过实验观测 [16] ，并在光与物质相互作用中引起了广泛关注，尤其是在高度非微扰和相对论性体系中 [17-19]。在光电离过程中，这类效应会轻微破坏光电子动量分布（光电子动量分布）的前后对称性 [20-23]。

最低阶非偶极效应包括磁偶极和电四极。磁偶极效应与光压效应有关，即光子线动量通过磁场施加的洛伦兹力推动电子向前运动 [24]。这引发了关于电离电子与离子之间如何分配光子线动量的研究。强场电离的潜在机制在理论和实验上一直存在激烈争论 [25-32]。至于电四极效应，它由电场的空间依赖性引起 [33]。这一效应已在单光子区间得到讨论，并会导致光电子发射的前后不对称性 [34-36]。最近，实验揭示了强场区间中电性非偶极效应对强场电离的影响 [37], ，这一效应可以类比于广为人知的多普勒效应来理解。在大多数强场研究中，驱动光场被近似为傍轴激光束 [38], ，纵向电磁分量可以忽略。因此，光场通常被视为二维光场，激光诱导的电子运动被限制在驱动场的偏振平面内。纵向动量较弱，使电子难以感受到电场的空间振荡，从而产生微弱且难以通过实验观测的非偶极效应。如何增强和调控非偶极效应

是强场领域一个非常重要的问题，但迄今为止尚未得到探索。

本文提出一种稳健方案，以增强和控制强场隧穿电离中的非偶极效应。如图1(a)所示，我们合成了两个垂直传播的光场（光束1和光束2）。在这种构型中，光束1会沿光束2的纵向引入一个强电场分量，反之亦然。这会显著改变电子在三维实空间和动量空间中的运动。在这种由三维光场驱动的相互作用几何构型中，电子沿两束光纵向的动量分量将得到增强。这会导致强烈的多普勒效应和磁场作用。此类多普勒效应会增强非偶极现象。我们还研究了隧穿电子在非共线合成光场中的内禀动力学，并展示电和磁非偶极效应如何改变强场电离产生的电子分布。此外，我们还表明，通过改变两束光的场参数，可以调控电子的纵向动量。因此，电和磁非偶极效应均可分别加以控制。

我们从强光场中氢原子的哈密顿量出发 [39,40], ，其表达式为:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{2}[\mathbf{p}+\mathbf{A}(\mathbf{r},t)]^2-V(\mathbf{r}), \tag{1}$$

其中，$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ 是光场的矢势，$V(\mathbf{r})$ 是电子与原子核之间的库仑势。由于空间相关矢势的定义与特定的光传播方向密切相关，因此这里将所用的两个垂直传播光场的合成矢势定义为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{A}_0(t)+\alpha[(\mathbf{e}_{k1}\cdot\mathbf{r})\mathbf{E}_{01}+(\mathbf{e}_{k2}\cdot\mathbf{r})\mathbf{E}_{02}]+O(\alpha^2), \tag{2}$$

其中，单位矢量 $\mathbf{e}_{k1}$ 和 $\mathbf{e}_{k2}$ 分别表示两束激光的传播方向，而 α 为精细结构常数。矢量 $\mathbf{e}_{k1}\cdot\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{e}_{k2}\cdot\mathbf{r}$ 分别是空间矢量 $\mathbf{r}$在两个方向上的投影。 $\mathbf{A}_0(t)$、$\mathbf{E}_{01}(t)$ 和 $\mathbf{E}_{02}(t)$ 分别表示两束光在 $|\mathbf{r}| = 0$处的矢势和电场值。忽略二阶项 $O(\alpha^2)$。根据式（2），电场和磁场可表示为 $\mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}-\nabla\phi$, $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$。

我们采用经典轨迹蒙特卡洛（CTMC）模型研究强场电离的非偶极效应[41,42]。这里，电离概率由绝热隧穿 Ammosov-Delone-Krainov（ADK）理论给出 [43], ，其中假设隧穿电子的初始纵向速度为零；初始横向动量垂直于电离时刻的瞬时电场，并由以零动量为中心的旋转对称高斯动量分布描述。隧穿出口由有效势理论给出 [44]。隧穿后，电子在外部激光场和库仑场共同作用下传播，其运动由牛顿方程$^{3}/r = - \quad - \quad \times \quad - \mathbf{r}\ \mathbf{E}\ \mathbf{v}\ \mathbf{B}\ \mathbf{r}^{\cdot\cdot}$ 控制。这里我们将运动方程展开为

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{E}_0(t) - \nabla V(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2}. \tag{3}$$

式（3）中的最后两项表示两束光的低阶非偶极修正项,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n1} &= \alpha\left((\mathbf{e}_{k1}\cdot\mathbf{r})\partial_t \mathbf{E}_{01}(t) - \mathbf{v}\times\{\nabla\times[(\mathbf{e}_{k1}\cdot\mathbf{r})\mathbf{E}_{01}(t)]\}\right) \\ \mathbf{F}_{n2} &= \alpha\left((\mathbf{e}_{k2}\cdot\mathbf{r})\partial_t \mathbf{E}_{02}(t) - \mathbf{v}\times\{\nabla\times[(\mathbf{e}_{k2}\cdot\mathbf{r})\mathbf{E}_{02}(t)]\}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

此时，动力学方程可重新写为$_{0} \quad _{n} \quad _{n} \quad ^{3}/_{E} \quad _{E} \quad _{B} \quad r = \quad + \quad + \quad - \quad \mathbf{r}$ $\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{r}^{\cdot\cdot} \quad \ddot{} \quad \ddot{} \quad \ddot{} \quad \ddot{}$ ，其中$_{0}{}_{0}( )\ _{E} t^{\cdot\cdot} = - \quad \mathbf{E}r$是电偶极项，$_{n}{}_{n}{}_{0}((,$ $) ( ))\ _{E\,i\,t\,i} t t^{\cdot\cdot} = - \quad = \alpha \sum \quad \cdot \ \partial_{\mathbf{k}}\mathbf{r}\ \mathbf{E}\ \mathbf{E}\mathbf{r}\ \mathbf{e}\ \mathbf{r}_{i}$ 是电非偶极项，而$_{n}{}_{0}\{ ($ $= - \quad \times \quad = - \sum_{\alpha} \times \nabla\times[\quad \cdot ( )]) \}, ( )\ _{B\,i\,i} t\ t_{\mathbf{k}}\ \mathbf{r}\ \mathbf{v}\ \mathbf{B}\ \mathbf{e}\ \mathbf{r}\ \mathbf{E}\ \mathbf{r}\ \mathbf{v}$ $\ddot{}$ 是$_{i}$来自光束i = 1，2 的磁非偶极项。与偶极项相比，低阶非偶极项的振幅与精细结构常数 α（即光速的倒数 α=1/c）有关，这意味着非偶极信号比偶极信号小几个数量级 [45, 46]。

如图1(a)所示，我们计算了角频率为ω的两束垂直传播的光束中的光电子动量分布。这两束光在相交区域内的电场可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_1 E_1 \cos(\omega t + ky)\cdot\mathbf{e}_x + E_1 \sin(\omega t + ky)\cdot\mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r},t) &= E_2 \sin(\omega t + kx)\cdot\mathbf{e}_y + \varepsilon_2 E_2 \cos(\omega t + kx)\cdot\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{5}$$

其中，E_i、 ε_i 和k分别为光束i = 1、2的振幅、椭圆率和波数。光束1沿y轴传播，光束2沿x轴传播。磁场表示为$\mathbf{B}_i = \alpha\mathbf{e}_{ki}\times\mathbf{E}_i$。对于真实光场，波数$k$为= ω/c（ω 为角频率，c为光速

在真空中），而偶极近似中的 k设为0。在模拟中，为避免电子与其母离子再碰撞带来的额外复杂性，两束光均为圆偏振，且椭圆率相反，即$\varepsilon_1 = 1$、 $\varepsilon_2 = -1$和$\omega = 0$为0.057原子单位（波长为800 nm），$E_1 = E_2 = 0$为0.06原子单位（激光脉冲强度为~2.8×10^{14} W/cm^2）。除非另有说明，均采用原子单位（a.u.）。两束光具有相同的梯形包络，其中平台段持续八个周期，随后以两个周期逐渐减弱。可以看到，模拟得到的三维光电子动量分布呈倾斜的椭圆环形（图1(a)中的蓝色形状）。

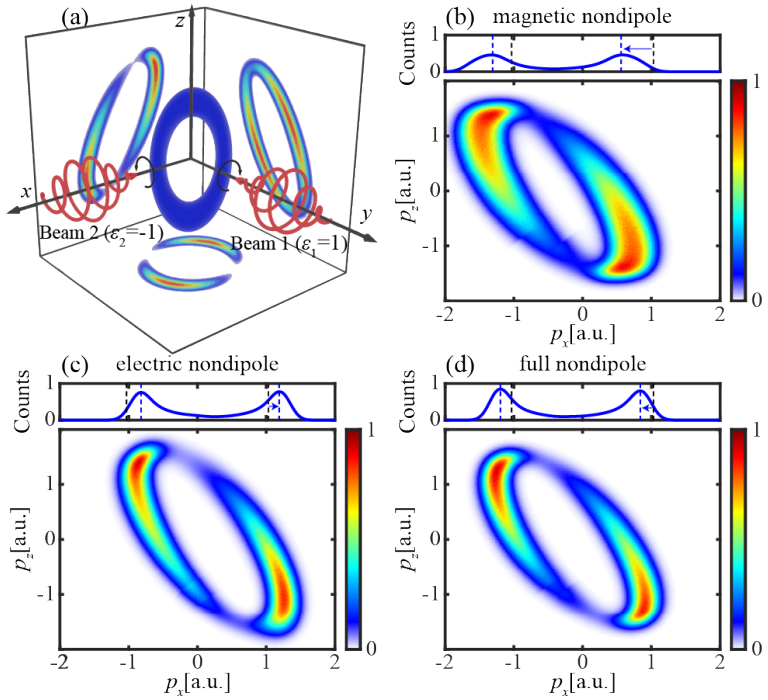


图1。(a) 使用两束传播方向相互垂直的激光脉冲控制非偶极效应的几何示意图。蓝色椭圆环形表示在合成光场中，采用两束椭圆率相反的圆偏振光束（ε_1=1, ε_2= −1）进行强场电离所得到的光电子动量分布；光束波长为 800 nm，强度为 2.8×10^{14} W/cm^2。三个侧面上的光电子动量分布是偶极近似下三维光电子动量分布的投影。(b)–(d) 不同情况下 x-z 平面内的光电子动量分布：仅考虑磁性非偶极效应 (b)、仅考虑电性非偶极效应 (c)，以及同时考虑两种非偶极效应 (d)。 图中还绘出了沿 p_x 方向的相应一维动量分布。虚线表示考虑非偶极效应前（黑色）和考虑后（蓝色）一维分布峰值位置的变化。

为全面理解非偶极效应对强场电离的影响，我们将非偶极效应拆分开来，并模拟了以下三种情况：（i）仅考虑磁性非偶极效应；（ii）仅考虑电性非偶极效应；（iii）同时考虑磁性和电性非偶极效应。为清晰展示非偶极效应，我们聚焦于上述三种情况下 x-z 平面内的光电子动量分布，如图 1(b)–(d) 所示。图中还给出了沿 p_x 方向的动量一维分布。虚线表示考虑非偶极效应前（黑色）和考虑后（蓝色）一维分布峰值位置的变化。值得注意的是，非偶极效应会同时改变逸出电子沿 x 和 y 方向的动量分量。这两个分量是等价的。为不失一般性，我们因此着重考察非偶极效应对沿 x 方向的光电子动量的影响，亦即 x-z 平面内的影响。此外，由于合成光场抑制了再碰撞，库仑场对结果的影响可以忽略不计。

如图1(d)所示，纳入完整的非偶极效应后，光电子动量分布沿 $-p_x$ 方向偏移。平均偏移量约为 -0.195 a.u.，与此前研究的非偶极现象相比，这一数值相当显著。为探究非偶极效应，我们分别单独考察了磁性或电性非偶极效应。我们发现，磁性非偶极效应造成的偏移远大于电性非偶极效应造成的偏移，且二者方向相反，如图1(b)和图1(c)所示。它们的数值分别为 -0.379 a.u. 和 0.183 a.u.。因此，包含完整非偶极效应的动量偏移表现为这两种非偶极效应的叠加。

为了解释这一有趣的结果，我们通过追踪相应的电子轨迹，分析了考虑偶极效应和非偶极效应时隧穿电子的亚周期动力学。如图 2(a) 所示，与偶极近似下的轨迹相比，不同情况下的电子轨迹在x方向上呈现出不同的偏移。

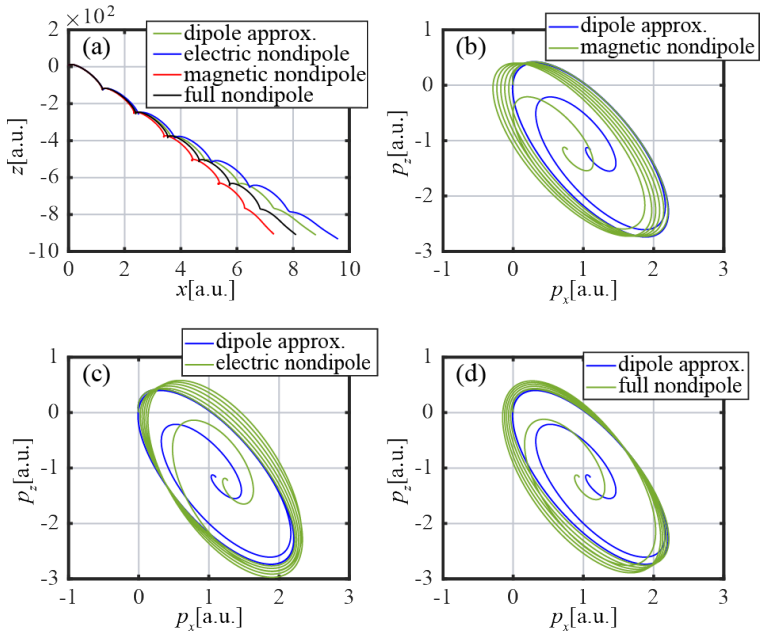


图 2. (a) 不同情形下投影到*x*-*z*平面的隧穿电子轨迹。(b)-(d) 偶极近似（蓝线）与不同非偶极情形（绿线）下投影到*x*-*z*平面的电子动量演化对比。请注意，偏振平面在三维动量空间中倾斜。

在偶极近似下，电子动量演化局限于一个与合成光场的偏振平面平行的平面内。电子的纵向动量在动量演化过程中保持不变。需要注意的是，此处偏振平面是倾斜的。如图 2(b) 和 2(c) 所示，考虑单独的磁非偶极效应或电非偶极效应时，电子会移出该平面，沿螺旋轨迹运动。此外，电子动量的变化在传播过程中不断累积，导致脉冲结束时电子的最终纵向动量发生显著偏移。磁非偶极效应的影响更强，因此导致更大的电子最终动量偏移量。在两种非偶极效应同时作用时，动量演化的偏移表现为两种非偶极效应的叠加，且磁非偶极效应占主导。这与图 1(b)–(d) 所示的现象一致。

可以认为，存在一个指向偏振平面外的恒力，而磁性和电性非偶极效应所诱导的此类恒力方向相反。为探究这些恒力的起源，我们随后通过求解电子在

合成光场中的动力学方程进行定性分析。将式（5）中的电场表达式代入式（3），得到电子在合成光场中的非偶极修正动力学方程，其中非偶极项写作

$$\ddot{\mathbf{r}}_{E_n}+\ddot{\mathbf{r}}_{B_n}=\begin{cases}\left(C_E\left[\cos(2\omega t)-1\right]+C_B\left[\cos(2\omega t)+1\right]+O_2\right)\cdot\mathbf{e}_x\\ \left(C_E\left[\cos(2\omega t)+1\right]+C_B\left[\cos(2\omega t)-1\right]+O_1\right)\cdot\mathbf{e}_y\\ \alpha(E_1E_2/\omega)(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\sin(2\omega t)\cdot\mathbf{e}_z\end{cases} \tag{6}$$

常数项 $C_E=(\alpha/2)\varepsilon_1(E_1E_2/\omega)$ 和 $C_B=(\alpha/2)(E_1E_2/\omega)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ 分别来源于电和磁非偶极效应，而 $O_i=(\alpha/2)(E^2\ i/\omega)(\varepsilon^2\ i-1)\sin(2\omega t)$ 是磁非偶极效应产生的振荡项。振荡部分 $C_E\cdot\cos(2\omega t)+C_B\cdot\cos(2\omega t)+O_i$ 对动量偏移的贡献很小，这是由于精细结构常数 α 的缘故。然而，如前文所述，常数部分 C_E 和 C_B 会使动量偏移在电子演化过程中沿 p_x 和 p_y 方向不断累积。当两束光均为圆偏振，且它们的椭圆率相反，即 $\varepsilon_1=1$ 和 $\varepsilon_2=-1$ 时，常数项满足 $C_B=-2C_E=-2(\alpha/2)(E_1E_2/\omega)$。因此，情况 i 所导致的光电子动量分布偏移是情况 ii 的两倍，且二者方向相反。对于情况 iii，两个常数项相加，导致偏移发生变化，具体如前文所述。通过动力学方程解进行的定性分析与模拟结果吻合良好。特别是，对于由单束光驱动的强场电离，沿 x 方向传播的光束2的振幅满足 $E_2=0$。此时，导致光电子动量分布持续偏移的常数项 C_B 和 C_E 均为零。光场对电子产生的非偶极效应仅来源于沿 y 方向的振荡项 O_1。这表明，之前观察到的前向动量偏移是由光束1的磁非偶极效应（或光子的线动量）造成的，而其微弱特征也很直观。

由 C_E 和 C_B可知，影响非偶极现象的主要因素是两束光的椭圆率 ε_i、振幅 E_i 和频率 ω。这意味着，可以通过调节这些激光参数来控制非偶极效应的大小。考察两个常数项可发现，电性非偶极效应对应的常数项 $C_E=(\alpha/2)\varepsilon_1(E_1E_2/\omega)$ 仅与光束1的椭圆率有关，而 $C_B=(\alpha/2)(E_1E_2/\omega)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$则受两束光的椭圆率共同影响。

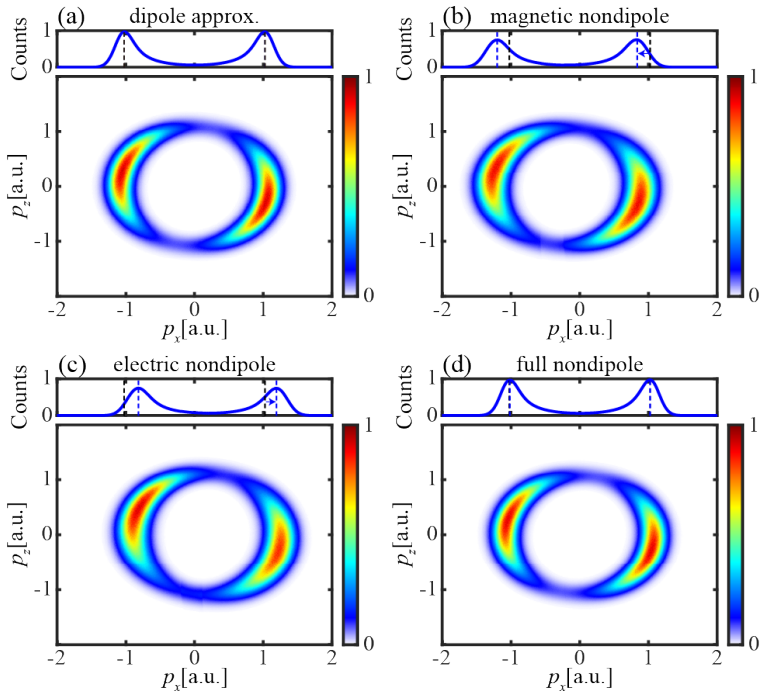


图3. 当光束2为水平偏振（ε_2=0）时，展示了不同情况下 x-z 平面内的光电子动量分布：偶极近似下（a）、仅考虑磁性非偶极效应（b）、仅考虑电性非偶极效应（c），以及同时考虑两种非偶极效应（d）。每个面板上方显示了沿 p_x 方向的相应一维分布。虚线表示考虑非偶极效应前（黑色）和后（蓝色）一维分布的峰值位置。

这里，我们研究 $E_1 = E_2 = 0.06$, $\varepsilon_1 = 1$和 $\varepsilon_2 = 0$ （光束2为水平偏振）这一特殊情形。在这种情况下，两个常数项满足 $C_B = -C_E$。三维光电子动量分布呈现环状形状，并沿y轴倾斜。如图3(b)和(c)所示，单独的磁非偶极效应或电非偶极效应都会使光电子动量分布向相反方向偏移，且动量偏移量相近。因此，同时考虑这两种非偶极效应时，动量偏移会相互抵消，光电子动量分布几乎与偶极近似下的情形相同，如图3(a)和(d)所示。这也表明，两个常数C_B 和C_E 可用于表征任意三维合成光场中的非偶极效应。这里，我们展示了电和磁非偶极效应的影响相当，这打破了电性非偶极效应远小于磁非偶极效应的固有印象。

为区分非偶极效应带来的偏移贡献，我们定义平均动量〈p_x〉。计算时，对每个动量p_x，均将一维动量分布的电离概率纳入考虑。由此可以量化非偶极效应的大小。调节光束2的场椭圆率（ε_2）时，可以清楚地看到平均动量〈p_x〉随非偶极效应的变化，如图4(a)所示。当ε_2 从-1变为1时，在偶极近似下，〈p_x〉始终为零。考虑电性非偶极效应时，对于不同的椭圆率，〈p_x〉始终约为0.17。然而，考虑磁性非偶极效应时，平均值〈p_x〉则从-0.38单调增加至0。显然，通过监测场螺旋度，可以灵敏地调控磁性非偶极效应。

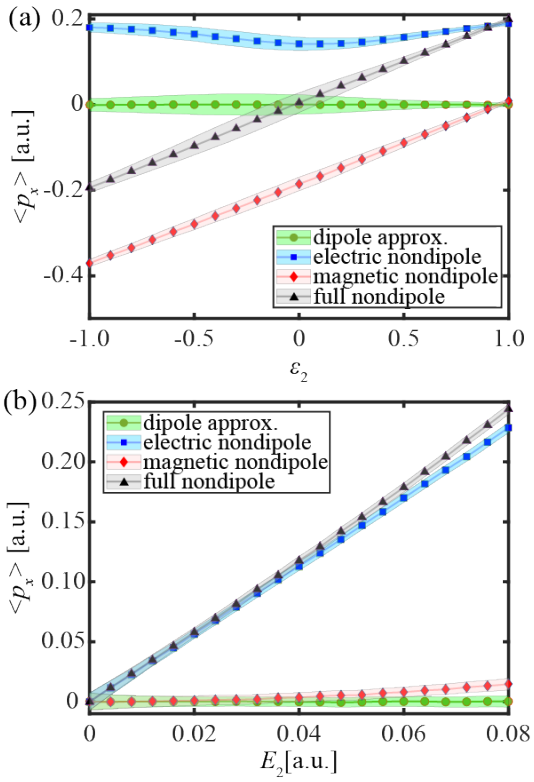


图4. 沿p_x 方向的动量一维分布的计算平均动量〈p_x〉，可用于表征非偶极效应带来的偏移贡献并量化非偶极效应的大小。(a) 展示了偶极近似下（绿色）、仅考虑磁非偶极项时（红色）、仅考虑电非偶极项时（蓝色）以及同时考虑两种非偶极项时（黑色），平均动量〈p_x〉随光束2椭圆率的变化。(b) 展示了上述四种情况下，平均动量〈p_x〉随光束2振幅的变化。

总非偶极效应可表示为两种非偶极效应的叠加：$C_F = C_E - C_B = (\alpha/2)\varepsilon_2(E_1E_2/\omega)$。这与以下情况相对应：随着$\varepsilon_2$ 从−1 增至1，〈p_x〉从负值增至正值。特别是在$\varepsilon_2 = -1$的情况下，磁性非偶极效应的影响超过电性非偶极效应。因此，前后不对称性主要由磁性非偶极效应引起。在$\varepsilon_2 = 0$的情况下，可以看到，磁性和电性非偶极效应对〈p_x〉产生相反的调制。将两种非偶极项的贡献同时纳入考虑时，这两种效应相互抵消，使〈p_x〉呈现前后对称性。椭圆率相关的结果表明，通过改变光束2的椭圆率，可以单独调控磁性非偶极效应。

此外，激光脉冲的振幅E_i 也是控制非偶极效应的关键因素。接下来，我们研究光束2的场振幅对非偶极效应的影响。此处，两束光仍均为右旋圆偏振（即，ε_1=ε_2=1）。在这种情况下，如图4(a)所示，磁性非偶极效应几乎受到抑制。总非偶极效应主要源于电性非偶极效应。同样，我们计算了随振幅E_2, 变化的平均动量〈p_x〉，如图4(b)所示。由于磁性非偶极效应很弱，其对应曲线与偶极近似的结果重合。此外，当光强较高时，式(5)中的振荡项也会对光电子动量分布的偏移产生微小贡献。随着激光振幅E_2, 增大，可以看到，受电性非偶极效应影响的〈p_x〉单调增大，并逐渐偏离偶极近似的结果。因此，通过改变非共线三维合成光场的场振幅，可以单独控制电性非偶极效应，进而控制总非偶极效应。

总之，我们利用合成的两束垂直传播光束，研究了强场电离中非偶极效应的增强与调控。研究表明，非偶极效应会导致强场电离中光电子动量分布发生显著偏移。我们推导了非共线合成光场中电子的非偶极修正动力学方程。随后，我们展示了通过调节激光场的振幅和椭圆率，可以分别调控并增强电和磁非偶极效应。需要注意的是，电非偶极项通常比磁非偶极项弱一个数量级

[47]。令人惊讶的是，电非偶极效应在这里得到了显著增强。它可能与磁性非偶极效应相当，甚至更强。值得强调的是，两束激光脉冲之间的空间相位涨落会对实验结果产生或多或少的影响。通过减小焦斑体积，或选择适当的激光条件和可观测量，可以尽可能避免这种影响。我们希望在不久的将来通过实验实现这项工作。这种调控方案应当会引起超快和强场物理领域的广泛关注，并有望利用双圆偏振场调控更多分子中的非偶极效应 [48,49]。

致谢。 本工作得到了中国重点研发计划（项目编号：2022YFA1604301）和国家自然科学基金（项目编号：92050201、92250306和12204018）的资助。

参考文献：

[1] Keldysh L V 1965年 《苏联物理学-实验与理论物理学杂志》20 1307.[2] Klaiber M, Hatsagortsyan K Z and Keitel C H 2005年 《物理评论A》71 033408.[3] Agostini P, Fabre F, Mainfray G et al. 1979年 《物理评论快报》42 1127.[4] Paulus G G, Nicklich W, Xu H, Lambropoulos P, and Walther H 1994年 《物理评论快报》72 2851.[5] Ferray M, L'Huillier A, Li X F et al. 1988年 《物理学杂志B》21 L31.[6] Krause J L, Schafer K J and Kulander K C 1992年 《物理评论快报》68 3535.[7] L'Huillier A and Balcou Ph 1993年 《物理评论快报》70 774.[8] Fang Y, Lu S and Liu Y 2021年 《物理评论快报》127 273901.[9] Barton J J 1988年 《物理评论快报》61 1356.[10] Huismans Y, Rouze´e A, Gijsbertsen A et al. 2011年 《科学》, 331 61.[11] Huismans Y, Gijsbertsen A, Smolkowska A S et al. 2012年 《物理评论快报》109 013002.[12] Young L, Ueda K, Guhr M et al. 2018年 《物理学杂志B》51 032003.[13] Reiss H R 2014年 《物理学杂志B》47 204006.[14] Wang M X, Chen S G, Liang H and Peng L Y 2020年 《中国物理B》29 013302.[15] Maurer J and Keller U 2021年 《物理学杂志B》54 094001.[16] Smeenk C T L, Arissian L and Zhou B 2011年 《物理评论快报》106 193002.[17] Piazza A Di, Muller C, Hatsagortsyan K Z and Keitel C H 2012年 《现代物理评论》84 1177.[18] Lin K, Brennecke S, Ni H et al. 2022年 《物理评论快报》128 023201.[19] Willenberg B, Maurer J, Mayer B W and Keller U 2019年 《自然·通讯》10 5548.[20] Cooper J W and Manson S T 1969年 《物理评论》177 157.[21] Krassig B, Bilheux J C, Dunford R W et al. 2003年 《物理评论A》67 022707.[22] Seaton M J 1996年 《物理学杂志B》29 2373.[23] Chelkowski S, Bandrauk A D and Corkum P B 2014年 《物理评论快报》113 263005.[24] Katsouleas T and Mori W B 1993年 《物理评论快报》70 1561.[25] Titi A S and Drake G W F 2012年 《物理评论A》85 041404(R).[26] Klaiber M, Yakaboylu E, Bauke H et al. 2013年 《物理评论快报》110 153004.[27] Chelkowski S, Bandrauk A D and Corkum P B 2015年 《物理评论A》92 051401(R).[28] Hartung A, Eckart S, Brennecke S et al. 2019年 《自然·物理》15 1222.[29] Lin K, Chen X, Eckart S et al. 2022年 《物理评论快报》128 113201.[30] Ludwig A, Maurer J, Mayer B W et al. 2014年 《物理评论快报》113, 243001.

[31] He P-L、Lao D 和 He F，2017年，《物理评论快报》118，163203[32] Ni H、Brennecke S、Gao X 等，2020年，《物理评论快报》125，073202。[33] Cooper J W，1993年，《物理评论A》47，1841。[34] Seaton M J，1995年，《物理学杂志B》28，3185。[35] Førre M 和 Simonsen A S，2014年，《物理评论A》90，053411。[36] Grundmann S、Kircher M、Vela-Perez I 等，2020年，《物理评论快报》124，233201。[37] Hartung A、Brennecke S、Lin K 等，2021年，《物理评论快报》126，053202。[38] Fang Y、Guo Z、Ge P 等，2022年，《光：科学与应用》11，34。[39] Liar 里评论A》98，063413。[40] [illegible] 63105。[41] [illegible] 336，533。[42] Li M、Liu Y、Liu H 等，2013年，《物理评论快报》111，023006。[43] Ammoso M V、Delone N B 和 Kainov V B．1986年．《苏联物理学-实验与理论物理学杂志》64，2008[44] Landau L D 和 Lifschitz E M，1958年，《量子力学（非相对论理论）》（纽约：牛津大学出版社）。[45] Brennecke S 和 Lein M，2019年，《物理评论A》100，023413。[46] Madsen L B，2022年，《物理评论A》105，043107。[47] Lambropoulos P、Doolen G 和 Rountree S P，1975年，《物理评论快报》34，636。[48] Guo Z、Ge P、Fang Y 等，2021年，《物理评论A》104，L051101。[49] Guo Z、Ge P、Fang Y 等，2022年，《超快科学》2022，9802917。