arXiv:2303.02409v1 [math.AG] 4 Mar 2023

# 群的结构代数、Hopf 代数胚与定向上同调

MARTI NA LANINI、Rui Xiong 和 Kirill Zainou LLINE

ABSTRACT. 我们证明，有限实根系的 Bruhat 矩图的结构代数相对于 Hecke 作用和 Weyl 作用构成一个 Hopf 代数胚。我们引入了新的方法（重构、乘积的推前公式、扭曲余乘法以及双模的双商），并将这些方法与主要结果结合，应用于线性代数群、广义舒伯特演算以及考克斯特群和有限实根系的组合学。对于群而言，这意味着分裂半单线性代数群 $G$ 的 Levine-Morel 代数定向上同调 $\mathfrak{h}(G)$ 上的自然 Hopf 代数结构，可以提升为完全旗簇的 $T$-等变代数定向上同调上的"bi-Hopf"结构。对于舒伯特演算，我们证明了若干涉及（双）广义等变舒伯特类的新恒等式。对于有限实根系，我们计算了二面体群$I_2(p)$的"虚上同调"的 Hopf 代数结构，其中 $p$ 是一个奇素数。

## CONTENTS

1. 引言 2 2. 预备知识 4 2.1. 根系、根格与权格 5 2.2. 形式群律 5 2.3. 形式群环 6 2.4. 推拉元素 7 2.5. 约化词 7 2.6. 结构代数 8 2.7. Hecke 作用与 Weyl 作用 9 3. 扭曲舒伯特类的交叉重数 10 3.1. 不动点类与扭曲舒伯特类 10 3.2. 推前元素 12 3.3. 对偶基与交叉重数 12 4. 乘积的推前 14 4.1. 推前公式 15 4.2. 双舒伯特元素 16 4.3. 重构公式 17 5. 扭曲余乘法 18 5.1. 双舒伯特类上的余积 18 5.2. 扭曲余乘映射 19

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14F43，14M15，14L30，18M50，16T05。
*Key words and phrases.* 等变定向上同调、结构代数、群的上同调、双幺范畴。

6. 双幺半范畴与结构代数 20 6.1. 双幺半范畴与双幺半群 21 6.2. 双模 22 6.3. 结构代数 22 6.4. 基变换与双商 23 6.5. 双 antipode 与 Hopf 代数胚 23 7. 二面体情形 24 参考文献 26

## 1. Introduction

分裂半单线性代数群 $G$ 的周环 CH($G$)（或整数系数的奇异上同调）是线性代数群理论中最著名的几何不变量。自 Grothendieck 和 Borel 的开创性工作以来，这一主题已得到数十年的研究，并且所有单群的情形都已计算出来（综述参见例如 Kac [Ka85], Duan-Zhao [DZ14]）。这里的主要难点在于理解 CH($G$) 的挠部分。涉及 Grothendieck 挠指标 [Gr58] 的经典论证表明，对于所有 $A$ 型和 $C$ 型的单连通群，都不存在挠，即 CH($SL_n$) $\simeq$ CH($Sp_{2n}$) $\simeq \mathbb{Z}$。如果 $G$ 只有一个挠（坏）素数 $p$，计算就相对容易。例如，CH($PGL_p$) $\simeq \mathbb{Z}[x]/(px, x^p)$，其中 $x$ 是一个次数为 1 的生成元。然而，在混合挠素数情形，答案的复杂性会大幅增加（例外群的计算示例参见 [DZ14] ）。

如果我们考虑另一种上同调型函子 h——即 Levine-Morel 意义下所谓的定向（广义）代数上同调理论 [LM07], , 例如连通型 $K$-理论、 [LZZ], 的双曲上同调、各种 Morava $K$-理论，或 Levine-Morel 的代数配边 Ω（此类理论中的普遍理论）——那么关于 h($G$) 的答案仍在很大程度上悬而未决。（唯一得到充分理解的情形是 $K$-理论。）即使对于秩2群，也只知道代数配边的部分计算结果（例如见 [Ya05]）。注意，Ω 的系数环甚至不是 $\mathbb{Z}$ ，而是 Lazard环（一个含无穷多个变量的多项式环）。

这类 h($G$) 的一个重要特征是，它具有由几何乘法 $G \times G \to G$ 及逆元 $G \to G$ 所诱导的自然余乘积结构，这使 h($G$) 成为一个 Hopf 代数。这大大简化了计算，因为可以使用 Hopf-Borel定理或其他关于霍普夫代数的结构定理。例如，挠素数处的周环分解为

$$\mathrm{CH}(G;\mathbb{F}_p) \simeq \bigotimes_i \mathbb{F}_p[x_i]/(x_i^{p^{k_i}}),$$

这将问题归结为确定由 $p$-例外次数给出的指数 $k_i$ ，参见 Kac [Ka85]。值得注意的是，数值不变量 $k_i$s 在研究各种泛旗簇的动机分解类型中发挥着重要作用[PSZ], ; 它们也用于二次型的几何理论、线性代数群的典范维数理论 [Za08] 及其他领域。

计算 CH($G$)（以及一般情形下的 h($G$)）的标准方法可追溯至 Grothendieck，并依赖于拓扑纤维化 $G \to G/B \to \mathcal{B}B$

（这里， $B$ 是 $G$的 Borel 子群， $\mathcal{B}B$ 是其分类空间，而 $G/B$ 是完全旗簇）以及由此诱导的同构

$$\mathrm{CH}(G) \simeq \mathrm{CH}(G/B)/(im_{>0}c),$$

其中， $c$: CH($\mathcal{B}B$) $\to$ CH($G/B$) 是特征映射，而 ($im_{>0}c$) 是特征理想（这一事实对任意 h 的推广可见 [GZ12]）。然而，采用这种方法很难确定生成元和关系（例如用舒伯特类来表示），也难以利用 Hopf 结构，因为 h($G/B$) 甚至不是 Hopf 代数。

本文通过将这一方法推广到有限实根系与形式群律的结构代数这一背景中，克服了这一困难。我们的主要研究对象是一个 $S$-双模 $\mathcal{Z}$，它由根系 $\Phi$、等源格 $\Lambda$ 和形式群环 $S$ 以纯代数方式定义。双模 $\mathcal{Z}$ 最早由 [DLZ] 引入并加以研究，作为 Bruhat 矩图上结构层全局截面环的一种（广义）定向类比。若 $\Phi$ 是晶体学的， $\Lambda$ 是等源格， $G$ 是相应的群，且 $T$ 是其分裂极大环面，则

$$S \simeq \mathrm{h}_T(pt) \quad \text{and} \quad \mathcal{Z} \simeq \mathrm{h}_T(G/B)$$

分别是等变系数环和定向上同调 [KK86、KK90、CZZ]。然而，对于非晶体学的 $\Phi$，环 $\mathcal{Z}$ 虽然定义良好，却没有任何几何对应物，因此可以将其视为虚拟的等变上同调。

我们的主要结果（定理 6.1）表明，结构代数 $\mathcal{Z}$ 具有一些 Hopf 结构的痕迹，这种结构在 2-幺单（双幺）范畴的语言中被称为 Hopf 代数胚结构（或“bi-Hopf”结构）。粗略地说，它由涉及两种不同张量积的、类似 Hopf 的图示关系给出：在由 $S$-双模构成的双幺范畴中，不再只有一种张量积，而是有 $\otimes$ 和 $\hat{\otimes}$；第一种张量积由平凡张量积 $s_1xs_2 \otimes y = x \otimes s_1ys_2$ 给出，第二种则是标准的双模张量积 $xs\hat{\otimes}y = x\hat{\otimes}sy$。

由于在取双商 $\hat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/(I\mathcal{Z}+\mathcal{Z}I)$ 后（此处 $I$ 是 $S$ 的增广理想）， $\otimes$ 与 $\hat{\otimes}$ 重合，我们立即得到 $\hat{\mathcal{Z}}$ 具有自然的 Hopf 代数结构（推论 6.3 ）。换言之，“ 双 Hopf”结构归约为通常的 Hopf 结构。注意，在晶体学情形下，我们有 $\hat{\hat{\mathcal{Z}}} = \mathrm{h}(G)$；而对于非晶体学的 $\Phi$，Hopf 代数 $\mathcal{Z}$ 产生了 $\Phi$ 的一个有趣不变量，可以将其视为虚群“$G(\Phi)$”的虚上同调“CH($G(\Phi)$)”，其中该虚群属于 $\Phi$。

探讨我们的结果是否能够推广到 Kac–Moody 根系和 Kac–Moody 群，或推广到几何表示论中出现的双模范畴的其他例子，将会很有意义。

论文结构。为了强调在我们的证明和构造中仅依赖纯粹的代数、组合与范畴论论证，我们特意将所有几何事实、参考文献及动机（如有需要）置于每节开头，而其余部分则保持“没有任何几何内容”。

我们在第 2 节介绍预备知识，包括根系、根格与权格、形式群律、形式群环、推拉元素、结构代数 $\mathcal{Z}$、Hecke 以及其上的 Weyl 作用。本节最后介绍特征映射和 Borel 映射，并讨论它们的基本性质。在

接下来的第 3 节中，我们定义“扭曲舒伯特类”和“到点的推前”元素。随后引入对偶基，并讨论各种交叉重数。在第 4 节中，我们证明第一个主要结果——特征类乘积的推前公式（定理 4.4）。作为推论，我们得到双舒伯特元素的重构公式（推论 4.9）。接下来，在第 5 节中，我们构造结构代数 $\mathcal{Z}$ 关于双模张量积 $\hat{\otimes}$的余乘法。这是证明主要结果时所用的关键技术步骤，也是最具挑战性的一步。在第 6 节中，我们证明主要结果（定理 6.1）。我们还证明结构代数的双商具有自然的双代数结构（推论 6.2）和 Hopf 代数结构（推论 6.3）。最后一节中，我们讨论二面体非晶体根系 $I_2(p)$的一个例子，其中 $p$ 是奇素数，并展示如何 $\hat{}$ 计算其虚上同调 $\mathcal{Z}$ 及余乘法。

致谢。R.X. 和 K.Z. 部分获得了加拿大自然科学与工程研究委员会 Discovery 资助项目 RGPIN-2022-03060 的支持。M.L 感谢 PRIN2017 CUP E8419000480006 、 Fondi di Ricerca Scientifica d’Ateneo 2021 CUP E83C22001680005，以及授予罗马第二大学数学系的 MUR Excellence Department Project MatMod@TOV 项目。

## 2. Preliminaries

本文以两个纯代数性质的要素作为输入：一个有限实根系 $\Phi$ ，以及与之相伴的“等ogeny”根格 $\Lambda$；还有其系数环 $R$上的一维交换形式群律 $F$ 。第一个要素（在晶体学情形下）产生半单分裂线性代数群 $G$、与之相关的完全旗簇 $G/B$、它们通常的以及 $T$-等变上同调（其中 $T$ 是 $G$的一个分裂极大环面），更一般地（在非晶体学情形下也如此）产生矩图 $\mathcal{G}$的结构代数$\mathcal{Z}$ 理论。第二个要素使我们能够将所有这些构造自然地（或者更确切地说，通过变形）推广到任意（广义）定向上同调理论 $\mathrm{h}(\text{-})$及其 $T$-等变类似物 $\mathrm{h}_T(\text{-})$的语境中。我们将在 2.1 和 2.2 中简要回顾这两个输入，同时引入并确定所需的记号。

将根格与形式群律结合起来，便得到形式群环这一概念 $S$ （见 2.3）。它最初在 [CPZ，第2], 节中被引入，并且在射影齐性簇的（广义）定向上同调计算中发挥着核心作用。事实上，正如 [CZZ，第3] 节所示，它与等变系数环 $\mathrm{h}_T(pt)$（一点的完备等变上同调）一致。

接下来（见 2.4），我们从形式群环 $S$ 出发，引入若干关键构造（扭群代数 $S_W$ 及其局部化 $Q_W$、推拉元素 $Y_i$，以及 Demazure代数 $\mathbb{D}$ ），它们是局部化理论中的主要技术工具。本文的一个关键对象——结构代数 $\mathcal{Z}$ 的概念——将在 2.6 中引入。这里我们采用 [DLZ, §6] 中的扩展定义。注意，在晶体学（几何）情形下， $\mathcal{Z}$ 可与等变定向上同调 $\mathrm{h}_T(G/B)$ 等同。最后，我们回顾结构代数上的 Hecke ’$\bullet$-’ 作用和 Weyl ’$\odot$-’ 作用、相应的特征 $c$ ，以及 Borel 映射 $\rho$ 的基本性质。这里我们主要遵循 [LZZ, §3]。

2.1. 根系、根格与权格。设 $\Phi$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的有限实根系，配有一组单根 $\Pi$，并具有正根与负根的分解 $\Phi = \Phi_+ \amalg \Phi_-$，如 [Hu90, I,§1] 所述。我们用 $\mathcal{O}$ 表示其系数环（即包含所有将根表示为单根线性组合时所用系数的最小子环）。注意，在晶体学情形下 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$，而在非晶体学情形下则为 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[2\cos(\frac{\pi}{m})]$, $m = 5$ 或 $m \geq 7$。

我们用 $\Lambda_r$ 表示 $\Phi$ 对应的根格（即 $\Pi$的 $\mathcal{O}$-线性张成）。令 $K$ 为 $\mathcal{O}$ 的分式域（它是 $\mathbb{R}$的子域）。我们将 $\Phi$ 的权格定义为如下 $\mathcal{O}$-模

$$\Lambda_w = \{\lambda \in \Lambda_r \otimes_{\mathcal{O}} K \mid \alpha^\vee(\lambda) \in \mathcal{O} \text{ for all } \alpha \in \Phi_+\},$$

其中 $\alpha^\vee$ 表示 $(\mathbb{R}^N)^*$中的相应余根，即 $\alpha^\vee(\lambda) = 2\,\frac{(\alpha,\ \lambda)}{(\alpha,\ \alpha)}$。如果根系 $\Phi$ 经过归一化，即所有单根的长度均为 1（例如所有非晶体学情形），那么我们有

$$\alpha^\vee(\lambda) \in \mathcal{O} \text{ for all } \alpha \in \Phi_+ \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_j^\vee(\lambda) \in \mathcal{O} \text{ for all } \alpha_j \in \Pi.$$

因此，在归一化情形下，$\Lambda_w = M^{-1}\Lambda_r$是有限生成自由 $\mathcal{O}$-模，其中 $M = (\alpha_j^\vee(\alpha_i))_{ij}$ 是 Cartan（Schläfli）矩阵。注意，根据定义$\Lambda_r \otimes_{\mathcal{O}} K = \Lambda_w \otimes_{\mathcal{O}} K$，且 $\Lambda_w/\Lambda_r$ 是有限阿贝尔群。

例 2.1. 考虑一个类型为 $I_2(p)$ 的二面体根系 $\Phi$，其中 $p$ 是奇素数，对应于正 $2p$ 边形的对称群。（注意，当 $p = 3$ 时，它给出一个类型为 $A_2$ 的晶体学的根系。）在复平面 $\Phi = \{1, \xi, \ldots, \xi^{2p-1}\}$ 上，其中 $\xi$ 是一个本原 $2p$ 次单位根，其正根为 $\Phi_+ = \{1, \ldots, \xi^{p-1}\}$，单根为 $\Pi = \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \xi^{p-1}\}$。其系数环 $\mathcal{O}$ 是形式实分圆域 $\mathbb{Q}(\gamma)$ 中的代数整数环 $\mathbb{Z}[\gamma]$，其中 $\gamma = \xi + \xi^{-1}$。其 Cartan/Schläfli 矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2-\gamma^2 \\ 2-\gamma^2 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|\Lambda_w/\Lambda_r| = p$。

例 2.2. 考虑类型为 $B_2$ 的根系。由于它是晶体学的，其系数环为 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$。其根格是由单根 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 张成的 $\mathbb{Z}$-模。相应的 Cartan 矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $|\Lambda_w/\Lambda_r| = 2$。注意，类型为 $B_2$ 的规范化根系给出二面体系统 $I_2(4)$。

2.2. 形式群律。设 $F$ 是交换含幺环 $R$ 上的交换一维形式群律（形式群律）（$F$ 的系数环）。根据定义（见 [LM07, §1.1]），$F$ 是关于两个变量 $F(x, y) \in R[[x, y]]$ 的形式幂级数，它满足交换性 $F(x, y) = F(y, x)$、结合性 $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$，且单位元为 $F(x, 0) = x$。利用这些性质，可以将 $F$ 表示为

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i,j>0} a_{ij} x^i y^j, \quad \text{for some coefficients } a_{ij} \in R.$$

将 $a_{ij}$ 个变量上的多项式环对由交换律（$a_{ij} = a_{ji}$）和结合律所施加的关系取商，得到 Lazard环 $\mathbb{L}$。在 $\mathbb{L}$ 上存在一个记作 $F_{\mathbb{L}}$ 的普适形式群律，使得对于 $R$ 上的任意形式群律 $F$，都存在唯一的映射 $\mathbb{L} \to R$，其由对 $F_{\mathbb{L}}$ 的系数 $a_{ij}$ 求值给出。

例 2.3。所有有限的（多项式）形式群律都可以通过从以下情形进行基变换（扩张系数环）得到（参见 [La55] 和 [LM07]）：

加法型形式群律 $F(x,y) = x+y$ 定义在 $R=\mathbb{Z}$ 上，其中 $F_{\mathbb{L}} \to F$ 由 $a_{ij} \mapsto 0$ 给出，对所有 $i,j>0$ 均成立。

连通型形式群律 $F(x,y) = x+y-\beta xy$ 定义在 $R=\mathbb{Z}[\beta]$, $\beta \neq 0$ 上，其中 $F_{\mathbb{L}} \to F$ 由 $a_{11} \mapsto -\beta$, $a_{ij} \mapsto 0$ 给出，对所有 $i+j>2$ 均成立。

若 $\beta$ 可逆且 $R=\mathbb{Z}[\beta^{\pm 1}]$，则相应的 $F$ 称为分次多重乘法型。若 $\beta=1$，则定义在 $R=\mathbb{Z}$ 上的形式群律 $F$ 称为乘法型。

2.3. 形式群环。给定一个结晶根系 $\Phi$，我们固定

- 一个自由的中间 $\mathbb{Z}$-模（格） $\Lambda$，使得 $\Lambda_r \subset \Lambda \subset \Lambda_w$，并且
- 环 $R$ 上的形式群律（FGL） $F$。

按照 [CPZ，第2] 节，我们如下定义形式群环（FGR）：

我们首先考虑以对应于 $\Lambda$ 中元素的变量为元的多项式环 $R[x_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$。然后，我们取其关于增广映射 $\epsilon\colon x_\lambda \mapsto 0$ 的核 $I$ 的完备化 $R[[x_\lambda]]_{\lambda\in\Lambda}$。最后，我们令

$$R[[\Lambda]]_F := R[[x_\lambda]]_{\lambda\in\Lambda}/\overline{J},$$

其中 $\overline{J}$ 表示关系理想 $x_0=0$ 和 $x_{\lambda+\mu}=F(x_\lambda,x_\mu)$ 在 $I$-进拓扑中的闭包，$\forall \lambda,\mu\in\Lambda$。

若 $F$ 是有限的（见 2.3），则省略完备化步骤，并将 FGR 定义为

$$R[\Lambda]_F := R[x_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}/J.$$

从此以后，我们用 $S$ 表示有限 $F$ 对应的 FGR $R[\Lambda]_F$，或无限 $F$ 对应的 FGR $R[[\Lambda]]_F$。

例 2.4. 根据所选择的有限形式群律（见 2.3），我们得到以下形式群环的例子：

加法型：$S=Sym_{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ 是 $R=\mathbb{Z}$ 上的对称代数。固定 $\Lambda$ 的一组基 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 后，我们可以将 $S$ 认作多项式环 $S=\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$（这里 $x_\lambda$ 对应于 $\lambda$）。

连通型：$S = R[x_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}/(x_0, x_{\lambda+\mu}-x_\lambda-x_\mu+\beta x_\lambda x_\mu)$，其中 $R=\mathbb{Z}[\beta]$。通过令 $\deg x_\lambda = 1$ 和 $\deg\beta=-1$，环 $S$ 可成为 $\mathbb{Z}$ 上的分次环。令 $I=\langle(1-e^\lambda)\rangle_\lambda$ 为整数群环 $\mathbb{Z}[\Lambda]$ 的增广理想。那么，$S$ 的 0 次分量可通过 $1-e^\lambda \mapsto \beta x_{-\lambda}$ 与 Rees环$\mathbb{Z}[\Lambda][I]$ 等同。

（分次）乘法型：$S=\mathbb{Z}[\Lambda]\otimes_{\mathbb{Z}} R$ 是 Laurent 多项式 $R=\mathbb{Z}[\beta^{\pm 1}]$ 上的群环（此处 $e^\lambda \mapsto 1-\beta x_{-\lambda}$）。这是一个分次环，与连通情形相同。如果 $\beta=1$，我们便得到通常的整数群环 $S=\mathbb{Z}[\Lambda]$。

对于加法型形式群律，我们将 FGR $S$ 的定义扩展到任意非晶体学的根系 $\Phi$，如下所示：

考虑系数环 $R$ 上的加法型形式群律：$=\mathcal{O}$ 属于 $\Phi$，并令 $S$ 为相应自由 $\mathcal{O}$-子模 $\Lambda$ 在 $\mathcal{O}$ 上的对称代数，即

$$S = Sym_{\mathcal{O}}(\Lambda) = \mathcal{O}[x_1,\dots,x_n],$$

其中 $\Lambda_r\subset\Lambda\subset\Lambda_w$ 和 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 是 $\Lambda$ 的 $\mathcal{O}$基。

2.4. 推拉元素。现在我们回顾 [CZZ1]中的基本记号。令 $W$ 为由反射生成的相应（有限）Coxeter/Weyl 群

$$s_\alpha \colon \lambda \mapsto \lambda - \alpha^\vee(\lambda)\alpha, \qquad \alpha \in \Phi_+,\ \lambda \in \Lambda.$$

它通过反射作用于 FGR $S$ 至 $\Lambda$ 。我们用 $S_W$ 表示扭群代数，它是左自由 $S$-模 $S \otimes_R R[W]$ ，基为 $\{\delta_w\}_{w\in W}$ ，乘法由以下关系导出

$$\delta_w f = w(f)\delta_w, \quad f \in S.$$

要进行下一步，我们需要假设每个 $x_\alpha$, $\alpha \in \Phi_+$ 在$S$中都是正则的，也就是说，它们是非零且不是零因子的元素。注意，模去$W$作用后，这等价于假设 $x_\alpha$ 是正则的，其中 $\alpha \in \Pi$。

注 2.5. 根据 [CZZ1，引理 2.2] $x_\alpha$ 总是正则的，除非$\alpha$ 是单连通 C 型不可约根系中的长根。在后一种情况下，当且仅当 $2 \cdot_F x$ 在 $R[[x]]$ 中正则时，它才是正则的；而若 2 在 $R$中正则，这一条件总是成立。

令 $Q$ 为将 $S$ 在所有 $x_\alpha$处局部化得到的局部化 $S[\frac{1}{x_\alpha}]_{\alpha\in\Phi^+}$ ，并令 $Q_W$ 表示相应的扭群代数。对于每个根 $\alpha$ ，我们在 $Q_W$ 中定义推拉元素如下：

$$Y_\alpha := \tfrac{1}{x_{-\alpha}} + \tfrac{1}{x_\alpha}\delta_{s_\alpha}.$$

扭群代数 $Q_W$通过 $q\delta_w(f) = qw(f), \quad q, \ f \in Q$作用于 $Q$。在此作用下，推拉元素对应于经典的推拉算子

$$Y_\alpha(f) = \tfrac{f}{x_{-\alpha}} + \tfrac{s_\alpha(f)}{x_\alpha}, \quad f \in S$$

它们满足二次关系：

$$Y_\alpha^2 = \kappa_\alpha Y_\alpha, \quad \text{where } \kappa_\alpha = \tfrac{1}{x_\alpha} + \tfrac{1}{x_{-\alpha}} \in S.$$

我们还可以考虑差商元素 $X_\alpha := \frac{1}{x_\alpha} - \frac{1}{x_\alpha}\delta_{s_\alpha}$。这些元素对应于通常的差商算子 $X_\alpha(f) = \frac{f - s_\alpha(f)}{x_\alpha}$, $f \in S$，其行为与 $Y_i$s 类似。注意，在加法情形下 $X_\alpha = -Y_\alpha$。

例 2.6。在有限情形下，我们有

$$x_{-\alpha} = \begin{cases} -x_\alpha, \text{ in the additive case, and} \\ \frac{-x_\alpha}{1-\beta x_\alpha}, \text{ in the connective case,} \end{cases}$$

因此我们得到

$$\kappa_\alpha = \begin{cases} 0, \text{ in the additive case, and} \\ \beta, \text{ in the connective case.} \end{cases}$$

2.5. 约化词。给定一个简单根 $\alpha_i$ ，我们记 $s_i = s_{\alpha_i}$、 $\delta_i = \delta_{s_i}$、 $x_i = x_{\alpha_i}$、 $x_{-i} = x_{-\alpha_i}$、 $\kappa_i = \kappa_{\alpha_i}$ 和 $Y_i = Y_{\alpha_i}$、 $Y_{-i} = Y_{-\alpha_i}$。Bressler-Evens 的著名结果 [BE90] 表明，推拉元素满足 $W$ 中通常的辫关系，当且仅当 $F$ 有限（或者等价地，$\kappa_i \in R$ 是一个常数）。因此，在有限情形下，对于任意长度为 $l = \ell(w)$ 的约化表达式 $w = s_{i_1} \dots s_{i_l} \in W$，我们可以令 $Y_w := Y_{i_1} \dots Y_{i_l}$。在无限情形下，对于每个 $w \in W$ 及其约化表达式 $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$，我们将相应的推拉元素乘积记为 $Y_{I_w}$，其中 $I_w = (i_1, \dots\dots, i_l)$ 。

根据定义，对于推拉元素，我们有

$$\delta_w Y_\alpha \delta_{w^{-1}} = Y_{w(\alpha)}, \quad \alpha \in \Phi,\ w \in W,$$

对于相应的推拉算子，我们有

$${}^w Y_\alpha(f) = wY_\alpha w^{-1}(f) = Y_{w(\alpha)}(f), \quad w \in W.$$

令 $w_0$ 为 $W$ 中长度最大的元素。注意， $-w_0$ 通过一个自同构（可能是恒等自同构）作用于单根集合 $\Pi$。借助此自同构， $w$ 的一个约化字被映射为 $w_0 w w_0$ 的一个约化字。因此，对于 $I_w = (i_1, \ldots, i_l)$，我们有

$${}^{w_0} Y_{I_w} = Y_{w_0(\alpha_{i_1})} \ldots Y_{w_0(\alpha_{i_l})} = Y_{w_0(I_w)}.$$

注意，在有限情形下， $Y_{w_0(I_w)} = Y_{-I_{w_0 w w_0}}$，其中 $-I_w = (-i_1, \ldots, -i_l)$。

例 2.7。在加法情形下，我们有 $Y_{-i} = -Y_i = X_i = \frac{1-\delta_i}{\alpha_i}$。

在连通情形下，我们有

$$Y_{-i} = \tfrac{1}{x_i} + \tfrac{1}{x_{-i}}\delta_i = \tfrac{1}{x_i} + \tfrac{1-\beta x_i}{-x_i}\delta_i = X_i + \beta\delta_i.$$

2.6. 结构代数。我们将布鲁哈特偏序集 $(W, \trianglelefteq)$ 的一个结构代数 $\mathcal{Z}$ 称为由下式定义的自由模 $\oplus_{v\in W} S$ 的一个 $S$-子模：

$$\mathcal{Z} = \left\{ (z_v)_v \in \bigoplus_{v\in W} S \mid z_{s_\alpha w} - z_w \in x_\alpha S,\ \forall\ w \trianglelefteq s_\alpha w,\ \alpha \in \Phi_+ \right\}$$

其中采用逐坐标乘法。

结构代数 $\mathcal{Z}$ 在矩图层理论中发挥着重要作用。具体而言，考虑 [Hu90, II.5.9] 的布鲁哈特偏序集 $(W, \trianglelefteq)$。以下数据

$$\text{Vertices } V := W, \quad \text{Labelled Edges } E := \left\{ w \xrightarrow{\alpha} s_\alpha w \mid w \trianglelefteq s_\alpha w,\ \alpha \in \Phi_+,\ w \in W \right\}$$

定义了一个称为布鲁哈特矩图、记作 $\mathcal{G}$ 的标记有向图。根据定义，这种图没有重边、自环和有向环。代数 $\mathcal{Z}$ 因而给出了 $\mathcal{G}$ 上结构层的全局截面环，即

$$\Gamma(\mathcal{G}; S) = \{ (z_v)_{v\in V} \mid z_y - z_x \in x_\alpha S,\ x \xrightarrow{\alpha} y \in E \}.$$

例 2.8. 在二面体情形 $I_2(p)$ 中，考克斯特群 $W$（正 $2p$ 边形的对称群）由简单反射 $s_1, s_2$ 生成，它们对应于单根 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \xi^{p-1}$。相应的布鲁哈特矩图 $\mathcal{G}$ 是一个正 $2p$ 边形，其两个对顶点 $e$ 和 $w_0$ （最大长度的元素）之间的边从 $e$ 指向 $w_0$；每条 $(2i+1)$ 对角线 $i = 0 \ldots \frac{p-1}{2}$ 根据方向分别标记为 $\xi^i$ 或 $\xi^{p-1-i}$。相应的全局截面代数 $\mathcal{Z}$ 是秩为 $2p$ 的自由 $S$-模的一个子模。

另一方面，结构代数与 [HMSZ] 和 [CZZ1] 的仿射 Demazure 代数及 Hecke 型环密切相关。事实上，按照 [CZZ1]，考虑由所有推拉元素 $Y_i$'s 以及 $S$ 中的元素在扭群代数 $Q_W$ 中生成的 $R$-子代数 $\mathbb{D}$。它被称为仿射 Demazure 代数。注意，推拉元素 $\{Y_{I_w}\}_{w\in W}$ 的乘积构成了 $\mathbb{D}$ 的一个 $S$-基（作为左 $S$-模）。

例 2.9。在加法情形 $\mathbb{D}$ 是 [KK86] 的幂零（仿射）Hecke 环，而在乘法情形 $\mathbb{D}$ 分别与 [KK90] 的零仿射海克环重合。

根据 [CZZ2] 的一项主要结果（见同上，第 9.2 定理），如果 $S$ 满足 [CZZ2 引理 2.7], 的结论，即

**(*)** 对任意两个不同的正根 $\alpha$ 和 $\alpha'$ 以及 $f \in S$、 $x_\alpha \mid x_{\alpha'} f \Longrightarrow x_\alpha \mid f$,

那么结构代数 $\mathcal{Z}$ 同构于 $\mathbb{D}$ 的 $S$-线性对偶。也就是说， $\mathcal{Z}$与包含映射（矩映射）的像重合

$$Hom_S(\mathbb{D}, S) \longrightarrow Hom_S(S_W, S) = \oplus_{v\in W} S$$

由 $S_W \hookrightarrow \mathbb{D}$, $\delta_i \mapsto (x_i Y_i - \frac{x_i}{x_{-i}})$ 诱导。下文将广泛使用这一事实，因此假设 $S$ 满足 **(*)**。

注 2.10. 注意，在晶体学情形中， $S$ 上的假设 **(*)** 可由 $R$ 中某些形式整数的正则性推出，这些形式整数见 [CZZ2，表 1])。此外，这一假设立即蕴含每个 $x_\alpha$ 在 $S$ 中都是正则的。在非晶体学情形 $I_2(p)$ 中，即加法情形下，这可由素数 $p \in \mathcal{O}$ 的正则性推出。

2.7. Hecke 作用与 Weyl 作用。扭群代数 $Q_W$ 在结构代数 $\mathcal{Z}$ 上有一个 $S$-线性作用，定义如下:

$$q\delta_w \bullet (z_v)_v = (z'_v)_v, \quad z'_v = v(q) z_{vw}.$$

这称为 Hecke 作用。它满足 $X \bullet Y \bullet z = (XY) \bullet z$, $X, Y \in Q_W$, $z \in \mathcal{Z}$。在此作用下，推拉元素的作用为

$$Y_i \bullet (z_v)_v = (\tfrac{1}{x_{-i}} + \tfrac{1}{x_i}\delta_i) \bullet (z_v)_v = (\tfrac{z_v}{x_{vs_i(\alpha_i)}} + \tfrac{z_{vs_i}}{x_{v(\alpha_i)}})_v.$$

注意，在 $(z'_v)_v = Y_i \bullet (z_v)_v$ 坐标 $z'_w$ 与 $z'_v$ 在 $w = vs_i$时重合。

例 2.11。例如，我们有

$$Y_i \bullet (z_v)_v = \begin{cases} (\frac{(z_{vs_i} - z_v)}{v(\alpha_i)})_v, \text{ in the additive case,} \\ (\frac{(z_{vs_i} - z_v)}{x_{v(\alpha_i)}} + \beta z_v)_v, \text{ in the connective case.} \end{cases}.$$

扭群代数 $Q_W$ 还通过 Weyl 作用在 $\mathcal{Z}$ 上作用，定义为

$$q\delta_w \odot (z_v)_v = (z'_v)_v, \text{ where } z'_v = qw(z_{w^{-1}v}).$$

根据定义，我们有 $s \odot z = sz$、 $z \in \mathcal{Z}$、 $s \in S$。此外，它与 Hecke作用可交换，即

$$X \bullet Y \odot z = Y \odot X \bullet z, \quad X, Y \in Q_W,\ z \in \mathcal{Z}.$$

至于推拉元素，我们有

$$Y_i \odot (z_v)_v = (\tfrac{1}{x_{-i}} + \tfrac{1}{x_i}\delta_i) \odot (z_v)_v = (\tfrac{z_v}{x_{-i}} + \tfrac{s_i(z_{s_i v})}{x_i})_v.$$

例 2.12。例如，我们有

$$Y_i \odot (z_v)_v = \begin{cases} (\frac{(s_i(z_{s_i v}) - z_v)}{\alpha_i})_v, \text{ in the additive case,} \\ (\frac{(s_i(z_{s_i v}) - z_v)}{x_i} + \beta z_v)_v, \text{ in the connective case.} \end{cases}.$$

我们定义特征映射 $c\colon\ S \to \mathcal{Z}$ 如下

$$c(f) = f \bullet \mathbf{1} = (w(f))_w, \quad \text{where } \mathbf{1} = (1)_w.$$

我们还定义了 Borel 映射 $\rho\colon\ S \otimes_{S^W} S \to \mathcal{Z}$ 通过

$$\rho(f_1 \otimes f_2) = f_1 \odot f_2 \bullet \mathbf{1} = f_2 \bullet f_1 \odot \mathbf{1} = f_1 c(f_2) = (f_1 w(f_2))_w.$$

于是，对于每个 $X \in Q_W$，我们都有两个交换图

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_{S^W} S & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{Z} \\ {\scriptstyle (X\cdot-)\otimes \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X\odot -} \\ S \otimes_{S^W} S & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S \otimes_{S^W} S & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{Z} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes(X\cdot-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X\bullet -} \\ S \otimes_{S^W} S & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{Z} \end{array}$$

特别地，我们有

$$c(Y_{I_w}(f)) = Y_{I_w} \bullet c(f).$$

## 3. Intersection multiplicities of twisted Schubert classes

众所周知（例如参见 [CZZ1]），结构代数 $\mathcal{Z}$ （相应的上同调 $\mathrm{h}_T(G/B)$）具有由舒伯特类构成的自然基。在 3.1 节中，我们回顾这类舒伯特类的定义、基本性质和示例。从几何角度看，这些类是将推拉算子 $Y_i$ 应用于$T$-不动点的类 $[v]$而得到的。注意，自然的 $W$-作用（ $\odot$-作用）会置换这些$[v]$，从而产生所谓的扭曲舒伯特类。

作为第 3.2 节的下一步，我们研究推前元素 $\pi \bullet$- 的作用；它是经典等变推前映射 $\mathrm{h}_T(G/B) \to \mathrm{h}_T(pt)$ 的代数对应物。注意，在有限情形下，这个作用与算子 $Y_{w_0}$ 的作用一致（该算子是与最大长度元素对应的推拉算子的复合）。

对舒伯特类取 Poincar´e 对偶，便得到所谓的对偶基。在最后一个小节 3.3 中，我们研究这两个基之间的过渡矩阵 $C$ 和 $D$，以及它们关于 $u \in W$ 的 $u$-扭曲版本。从几何角度来看，这些矩阵的元素由（等变）交叉重数给出。这些交叉重数在加法情形和乘法情形中已得到深入研究。

在加法情形（即通常上同调的情形）中，这些矩阵可以看作是从 Littlewood-Richardson 系数（情形 $u = e$）到互补对角矩阵（情形 $u = w_0$）的形变，这反映了舒伯特类的 Poincar´e 对偶仍是舒伯特类这一事实。在连通情形中，情形 $u = w_0$ 给出了 $K$-理论 [Br02] 中舒伯特基与理想层 Brion 基之间的过渡矩阵。在例 3.10 中，我们将展示如何计算这样的矩阵 $C_{w_0}$。

对于一般的形式群律，这类矩阵（交叉重数）的定义及基本性质从未被直接讨论或研究过，不过可以很容易地从 [CZZ2]的结果中推导出来。

3.1. 不动点类与扭曲舒伯特类。考虑元素 $x_\Pi = \prod_{\alpha\in\Phi^-} x_\alpha \in S$ （所有负根的乘积）。令 $[e] = (z_v)_v \in \mathcal{Z}$，其中 $z_e = x_\Pi$，且其他所有坐标 $z_v$ 均为零。我们将 $[e]$ 称为位于 $e$ 的不动点类。接着令 $[w] = \delta_w \odot [e]$，并将其称为位于$w$的不动点类。它满足 $z_w = w(x_\Pi)$，且其他所有坐标均为零。

定义 3.1. 我们通过以下方式定义位于 $e$ 的舒伯特类（我们称之为通常舒伯特类）：

$$\zeta_{I_w} := Y_{I_w^{-1}} \bullet [e], \quad w \in W.$$

类似地，我们将 $w_0$ 处的舒伯特类（称为特殊/对偶舒伯特类）定义为

$$\sigma_{I_w} := Y_{I_w^{-1}} \bullet [w_0], \quad w \in W.$$

注 3.2. 假设我们处于加法情形，因此 $S$ 是一个多项式环。给定 $w \in W$，若某个元素 $\theta^w = (z_v)_v \in \mathcal{Z}$ 存在某个固定的 $d$，使得每个 $z_v$ 都是次数为 $d$ 的齐次多项式，并且 $\theta^w$ 满足以下支集条件，则称其为特殊元素：

$$z_v \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w \leq v.$$

众所周知，对于任意特殊元素 $\theta^w$，其坐标 $z_w$ 可被 $w(x_\Pi)$ 整除。此外，存在唯一的特殊元素，使得该坐标恰为 $w(x_\Pi)$。这些元素恰好由特殊舒伯特类 $\sigma_w$ 给出。

更一般地，我们在任意 $v \in W$ 处定义舒伯特类（并称之为扭曲舒伯特类），定义如下：

$$\zeta(v)_{I_w} := Y_{I_w^{-1}} \bullet [v], \quad w \in W.$$

根据定义，我们有 $\zeta(e)_{I_w} = \zeta_{I_w}$ 和 $\zeta(w_0)_{I_w} = \sigma_{I_w}$。在所有有限形式群律的情形下，我们将简单地写作 $\zeta(v)_w$，而不写 $\zeta(v)_{I_w}$。

注意，$\mathbb{D}$ 上存在一个反自同构，其定义如下（见 [LZZ, §3.1.(6)]）：

$$\imath\colon q\delta_w \mapsto \delta_{w^{-1}} q^{\frac{w(x_\Pi)}{x_\Pi}}$$

若将其作用于类 $[e]$，它会交换 $\odot$ 和 $\bullet$，且满足 $\imath(Y_{I_w}) = Y_{I_w^{-1}}$。应用该反自同构，我们得到

$$\zeta(e)_{I_w} = Y_{I_w^{-1}} \bullet [e] = \imath(Y_{I_w^{-1}}) \odot [e] = Y_{I_w} \odot [e],$$

并且，更一般地，

$$\zeta(v)_{I_w} = Y_{I_w^{-1}} \bullet [v] = Y_{I_w^{-1}} \bullet \delta_v \odot [e] = \delta_v \odot \zeta_{I_w}.$$

例 3.3。在 $SL_2$ 情形下，我们有 $\Pi = \{\alpha_1\}$、$W = \{e, s_1 = w_0\}$、$x_\Pi = x_{-1}$。唯一的推拉算子 $Y_1 = \frac{1}{x_{-1}} + \frac{1}{x_1}\delta_1$ 的作用如下：

$$Y_1 \bullet (z_e, z_1) = (\tfrac{z_e}{x_{-1}} + \tfrac{z_1}{x_1}, \tfrac{z_e}{x_{-1}} + \tfrac{z_1}{x_1}).$$

特别地，我们得到

$$Y_1 \bullet [e] = Y_1 \bullet (x_{-1}, 0) = \mathbf{1}, \text{ and } Y_1 \bullet [w_0] = Y_1 \bullet (0, x_1) = \mathbf{1}.$$

例 3.4。在 $SL_3$ 情形下，我们有 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$、$x_\Pi = x_{-\alpha_1} x_{-\alpha_2} x_{-\alpha_1-\alpha_2}$ 和 $W = \{e, s_1, s_2, s_2s_1, s_1s_2, s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2 = w_0\}$。有两个推拉算子 $Y_i = \frac{1}{x_{-i}} + \frac{1}{x_i}\delta_i$、$i = 1, 2$ 它们的作用如下（$i \neq j$）：

$$Y_i \bullet (z_e, z_i, z_j, z_{ji}, z_{ij}, z_{w_0}) = (z'_e, z'_i = z'_e, z'_j, z'_{ji} = z'_j, z'_{ij}, z'_{w_0} = z'_{ij}),$$

其中有 $z'_e = \frac{z_e}{x_{-i}} + \frac{z_i}{x_i}$、$z'_j = \frac{z_j}{x_{-i-j}} + \frac{z_{ji}}{x_{i+j}}$ 和 $z'_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_{-j}} + \frac{z_{w_0}}{x_j}$。反复应用此公式，我们得到

$$\begin{aligned} Y_i \bullet [e] &= (x_{-j}x_{-i-j}, x_{-j}x_{-i-j}, 0, 0, 0, 0), \\ Y_jY_i \bullet [e] &= (x_{-i-j}, x_{-j}, x_{-i-j}, x_{-j}, 0, 0), \\ Y_iY_jY_i \bullet [e] &= (\tfrac{x_{-i-j}}{x_{-i}} + \tfrac{x_{-j}}{x_i}, \tfrac{x_{-i-j}}{x_{-i}} + \tfrac{x_{-j}}{x_i}, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

应用 $\delta_{w_0}\odot -$，我们得到

$$\begin{aligned} Y_i\bullet[w_0] &= (0,0,0,0,x_ix_{i+j},x_ix_{i+j}),\\ Y_jY_i\bullet[w_0] &= (0,0,x_i,x_{i+j},x_i,x_{i+j}),\\ Y_iY_jY_i\bullet[w_0] &= (1,1,1,1,\tfrac{x_i}{x_{-j}}+\tfrac{x_{i+j}}{x_j},\tfrac{x_i}{x_{-j}}+\tfrac{x_{i+j}}{x_j}). \end{aligned}$$

注意，$\frac{x_i}{x_{-j}}+\frac{x_{i+j}}{x_j}=1\iff$ 当 $Y_i$s $\iff F$为有限时， $A$ 型的辫关系成立（见 [HMSZ]）。因此，在加法型和连通型情形下，我们得到

$$Y_{w_0}\bullet[e]=Y_{w_0}\bullet[w_0]=\mathbf{1}.$$

3.2. 推前元素。参照 [CZZ2，定义 5.3]，我们将推前元素 $\pi\in Q_W$ 定义为

$$\pi=(\sum_{w\in W}\delta_w)\tfrac{1}{x_\Pi}=\sum_{w\in W}\tfrac{1}{w(x_\Pi)}\delta_w.$$

它对应于推前算子 $\pi(f)=\sum_{w\ w(f)\,(x_\Pi)}^{w}$， $f\in S$。注意，它与特征映射可交换

$$\pi\bullet c(f)=c(\pi(f)),\quad f\in S.$$

推前元素 $\pi$ 在结构代数 $\mathcal{Z}$ 上的作用为

$$\pi\bullet(z_v)_v=(\sum_w\tfrac{z_{ww}}{vw(x_\Pi)})_v,\ \text{ and }\ \pi\odot(z_v)_v=(\sum_w w(\tfrac{z_{w^{-1}u}}{x_\Pi}))_v.$$

对于基本类，我们得到

$$\pi\bullet\mathbf{1}=(\sum_w\tfrac{1}{w(x_\Pi)})\cdot\mathbf{1},\quad \text{a multiple of }\mathbf{1}.$$

对于点类 $[v]=\delta_v\odot[e]$，我们得到

$$\pi\bullet(\delta_v\odot[e])=\delta_v\odot\pi\bullet[e]=\delta_v\odot\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

根据 [CZZ2，引理 7.1]，我们有

$$\pi\bullet\Big(\big(Y_i\bullet z\big)\cdot z'\Big)=\pi\bullet\Big(z\cdot\big(Y_i\bullet z'\big)\Big),\qquad z,z'\in\mathcal{Z}.$$

将其与公式 $\pi\bullet([v]\cdot(z_w)w)=z_v\mathbf{1}$结合，我们得到如下结果

引理 3.5. 对于任意 $z\in\mathcal{Z}$ 和 $v$， $w\in W$ 我们有

$$\pi\bullet(\zeta(v)_{I_w}\cdot z)=\pi\bullet\big([v]\cdot(Y_{I_w}\bullet z)\big)=(Y_{I_w}\bullet z)_v\mathbf{1}.$$

3.3. 对偶基与交叉重数。根据 [CZZ2，第 §15] 节，存在一个完美配对 $\mathcal{Z}\otimes_S\mathcal{Z}\mapsto S\mathbf{1}$，$(z,z')\mapsto\pi\bullet(z\cdot z')$，使得

$$\pi\bullet(\zeta_{I_w}\cdot\zeta^\vee_{I_u})=\delta^{Kr}_{w,u}\mathbf{1},$$

其中

$$\zeta^\vee_{I_w}=Y^*_{I_w}\in\mathcal{Z}=Hom_S(\mathbb{D},S),$$

是由 $Y^*_{I_w}(Y_{I_u})=\delta^{Kr}_{w,\ u}$ 定义的 $Y_{I_w}$ 的 $S$-线性对偶。我们称这些类 $\zeta^\vee_{I_w}$ 为 $\zeta_{I_w}$ 的庞加莱对偶。

引理 3.6. 对于扭曲舒伯特类，我们有

$$\zeta(v)^\vee_{I_w}=\delta_v\odot\zeta^\vee_{I_w}.$$

特别地，类 $\{\zeta(v)^\vee_{I_w}\}$ 构成 $\mathcal{Z}$ 的一个 $S$-基。

证明。事实上，由于 $\bullet$ 与 $\odot$ 作用可交换，我们得到

$$\pi \bullet (\zeta(v)_{I_w} \cdot (\delta_v \odot \zeta^\vee_{I_w})) = \pi \bullet (\delta_v \odot (\zeta_{I_w} \cdot \zeta^\vee_{I_w})) = \delta_v \odot \pi \bullet (\zeta_{I_w} \cdot \zeta^\vee_{I_w}) = \delta^{Kr}_{w,u}\mathbf{1}. \quad \square$$

定义 3.7。我们定义（等变）交叉重数 $c^u_{w,v} \in S$和 $d^u_{w,v} \in S$, $w, v, u \in W$如下:

$$\pi \bullet (\zeta_{I_w} \cdot \zeta(u)_{I_v}) = c^u_{w,v}\mathbf{1}, \text{ and } \pi \bullet (\zeta^\vee_{I_w} \cdot \zeta(u)^\vee_{I_v}) = d^u_{w,v}\mathbf{1}.$$

将 $\delta_{u^{-1}} \odot -$ 作用于等式两边，得到

$$u(c^{u^{-1}}_{w,v}) = c^u_{v,w} \text{ and } u(d^{u^{-1}}_{w,v}) = d^u_{v,w}.$$

因此，若 $C_u = (c^u_{w,v})_{w,v}$ 和 $D_u = (d^u_{w,v})_{w,v}$ 分别表示系数矩阵，则

$$u(C_{u^{-1}}) = C^t_u, \text{ and } u(D_{u^{-1}}) = D^t_u.$$

还需注意，由对偶性可得

$$\zeta(u)_{I_v} = \sum_w c^u_{w,v}\zeta^\vee_{I_w}, \text{ and } \zeta(u)^\vee_{I_v} = \sum_w d^u_{w,v}\zeta_{I_w}.$$

因此,

$$\zeta^\vee_{I_v} = \delta_u \odot \zeta(u^{-1})^\vee_{I_v} = \delta_u \odot \sum_w d^{u^{-1}}_{w,v}\zeta_{I_w} = \sum_w u(d^{u^{-1}}_{w,v})\zeta(u)_{I_w}$$

这意味着 $C^{-1}_u = D^t_u$。

回顾一下，我们有

$$\pi \bullet (\zeta_{I_w} \cdot \zeta(u)_{I_v}) = \pi \bullet ([e] \cdot Y_{I_w}Y_{I_v^{-1}} \bullet [u]) = (Y_{I_w}Y_{I_v^{-1}} \bullet [u])_e,$$

从而立即得到（考察 $Y_{I_w}Y_{I_v^{-1}} \bullet [u]$ 的 $e$-坐标即可）

$$c^u_{w,v} = 0 \text{ if } l(w) + l(v) < l(u).$$

类似地，我们得到

$$d^u_{w,v} = 0 \text{ if } l(w_0w) + l(w_0v) < l(u).$$

例 3.8。在 $SL_2$ 情形下，我们有 $\pi = Y_1$。对于舒伯特类 $\zeta_e = [e]$和 $\zeta_{w_0} = \mathbf{1}$，我们计算它们的对偶元如下。设 $(z_e, z_1) = [e]^\vee$。则有

$$Y_1 \bullet ([e] \cdot (z_e, z_1)) = Y_1 \bullet (x_{-1}z_e, 0) = (z_e, z_e) = (1, 1),$$

这意味着 $z_e = 1$。同时

$$Y_1 \bullet (\mathbf{1} \cdot (1, z_1)) = Y_1 \bullet (1, z_1) = (\tfrac{1}{x_{-1}} + \tfrac{z_1}{x_1}, \tfrac{1}{x_{-1}} + \tfrac{z_1}{x_1}) = (0, 0),$$

这意味着 $z_1 = \frac{-x_1}{x_{-1}}$。因此，$[e]^\vee = (1, \frac{-x_1}{x_{-1}})$，从而，

$$[e]^\vee = \kappa_1\tfrac{x_1}{x_{-1}}(x_{-1}, 0) + \tfrac{-x_1}{x_{-1}}(1, 1) = \kappa_1\tfrac{x_1}{x_{-1}}[e] + \tfrac{-x_1}{x_{-1}}\mathbf{1}.$$

同理，我们得到 $\mathbf{1}^\vee = (0, x_1)$，因此，

$$\mathbf{1}^\vee = \tfrac{-x_1}{x_{-1}}(x_{-1}, 0) + x_1(1, 1) = \tfrac{-x_1}{x_{-1}}[e] + x_1\mathbf{1}.$$

These give $D_e = \begin{pmatrix} \kappa_1\frac{x_1}{x_{-1}} & \frac{-x_1}{x_{-1}} \\ \frac{-x_1}{x_{-1}} & x_1 \end{pmatrix}$ and $C_e = \begin{pmatrix} x_{-1} & 1 \\ 1 & \kappa_1 \end{pmatrix}$ where $\kappa_1 = \frac{1}{x_{-1}} + \frac{1}{x_1}$.

Similarly, we get $D_{w_0} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $C_{w_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \kappa_1 \end{pmatrix}$.

例 3.9。在加法情形下，由于 $Y_i$ 生成幂零-Hecke环（$Y_i^2 = 0$），$Y_{I_w} Y_{I_v^{-1}} = 0$ 因此 $c^u_{w,v} = 0$ 若 $l(w) + l(v) > l(wv^{-1})$。在情形$l(w) + l(v) = l(wv^{-1})$（或者等价地，当连接 $I_w I_v^{-1}$ 是约化的时），我们有 $Y_{I_w} Y_{I_v^{-1}} = Y_{wv^{-1}}$ 并且

$$c^u_{w,v} = (\zeta(u)_{vw^{-1}})_e = (\delta_u \odot \zeta_{vw^{-1}})_e = u^{-1}(\zeta_{vw^{-1}})_u.$$

特别地，对于 $u = w_0$，这意味着

$$c^{w_0}_{w,v} = d^{w_0}_{w,v} = \delta^{Kr}_{w_0 w,v} \text{ for all } w, v \in W.$$

换言之，特殊舒伯特类与通常舒伯特类互为 Poincar´é 对偶:

$$\zeta^\vee_w = \sigma_{w_0 w} = \delta_{w_0} \odot \zeta_{w_0 w}.$$

例 3.10. 在连通情形下，$Y_i^2 = \beta Y_i$ 属于 $\mathbb{D}$（注意，对于 $\beta = 1$，$\mathbb{D}$ 是仿射0-Hecke代数）。令 $\overline{I}$ 表示 0-Hecke代数中的约化字。那么，对于任意字 $I$，$Y_I = \beta^{|I|-|\bar{I}|} Y_{\bar{I}}$ 属于 $\mathbb{D}$。因此，

$$c^u_{w,v} = \begin{cases} \beta^{|I_w I_v^{-1}| - |\overline{I_w I_{v^{-1}}}|} (Y_{\overline{I_w I_v^{-1}}} \bullet [u])_e, & \text{if } |\overline{I_w I_{v^{-1}}}| \geq \ell(u), \text{ and} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，$c^{w_0}_{w,\ v} = \beta^{|I_w I_v^{-1}| - |\overline{I_w I_{v^{-1}}}|} \delta^{Kr}_{|\overline{I_w I_{v^{-1}}}|,\ l(w_0)}$。若 $r = |\Phi_+|$，则

$$c^{w_0}_{w,v} = \begin{cases} \beta^{l(w)+l(v)-r} & \text{if } \overline{I_w I_{v^{-1}}} = w_0, \text{ and} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，要完全确定 $u = w_0$ 的矩阵，只需给出判定 $\overline{I_w I_{v^{-1}}} = w_0$ 的准则。这正是 [Fa05，引理 4.3]，的内容，其表述如下：若约化表达式$I = (i_1, \ldots, i_r)$ 的子表达式 $I' = (i_{j_1}, \ldots, i_{j_t})$ 满足 $I'$ 是约化的，且对于任意 $u$、$k$，只要 $j_{k-1} < u < j_k$，就有 $l(s_{i_{j_1}} \cdots s_{i_{j_{k-1}}} s_u) > l(s_{i_{j_1}} \cdots s_{i_{j_{k-1}}})$，则称该子表达式为良好子表达式；那么，$\overline{I_w I_{v^{-1}}} = w_0$ 当且仅当$v = w_0 s_{i_{j_1}} \cdots s_{i_{j_t}}$ 对于某个约化表达式 $(i_1 \ldots i_r)$ 中的良好子表达式 $(i_{j_1}, \ldots i_{j_t})$ 成立，该约化表达式表示 $w_0$。

例如，在 $SL_2$ 和 $SL_3$ 的情形下，我们分别得到以下矩阵

$$C_{w_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C_{w_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \beta & \beta & \beta^2 \\ 0 & 1 & 0 & \beta & \beta & \beta^2 \\ 1 & \beta & \beta & \beta^2 & \beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}$$

（这里，$A_2$ 矩阵中的行/列分别对应于（$e$、$s_1$、$s_2$、$s_2 s_1$、$s_1 s_2$、$w_0$）。）

## 4. The push-forward of a product

本节中，我们证明并讨论结构代数乘积公式的推前的不同变体及其应用。

首先，我们将经典的 Demazure 公式 [De73] 推广到定向等变情形（引理 4.1）。注意，该公式在定向非等变情形下已在 [CPZ] 中得到证明。作为直接推论，我们得到了基本类的公式（推论 4.2）。

然后，我们证明了一个关键结果——任意结构代数中乘积的推前公式（定理 4.4）。后者在一定限制条件下的普通上同调情形已在 [Xi21] 中得到确立。在其他所有情形下，该结果似乎都是新的。

接下来，在 4.2 节中我们引入双舒伯特元素。在加法型和乘法情形下，它们分别给出著名的双舒伯特多项式和格罗滕迪克多项式。利用这些双元素和 Borel 映射，我们证明重构公式（推论 4.9），并建立 Demazure 公式的反演（推论 4.10）。后者导出若干涉及双舒伯特元素和舒伯特类的有趣组合恒等式。它还将在后文用于构造扭曲余乘法。

4.1. 推前公式。我们从以下 Demazure 公式的等变推广开始。

引理 4.1. 特征映射关于 $s \in S$ 有如下表达式

$$c(u^{-1}s) = \sum_w {}^u Y_{I_w}(s)\zeta(u)^\vee_{I_w}, \quad where\ {}^u Y_{I_w} = uY_{I_w}u^{-1}.$$

证明。事实上，由于 $\{\zeta(u)^\vee_{I_w}\}_{w\in W}$ 是一个基，我们可以将 $c(s) = \sum_w p_w\zeta(u)^\vee_{I_w}$ 写成某个 $p_w \in S$。对等式两边应用 $\pi \bullet (- \cdot \zeta(u)_{I_v})$，得到

$$\pi \bullet (c(s) \cdot \zeta(u)_{I_v}) = \sum_w p_w \pi \bullet (\zeta(u)^\vee_{I_w} \cdot \zeta(u)_{I_v}) = p_v \mathbf{1}.$$

对于左边，我们得到

$$\pi \bullet (c(s) \cdot \zeta(u)_{I_v}) = \pi \bullet ([u] \cdot (Y_{I_v} \bullet c(s))) = \pi \bullet ([u] \cdot c(Y_{I_v}(s))) = uY_{I_v}(s)\mathbf{1}.$$

比较左右两边，得到所需的公式。 □

还需注意，右边的每一项都依赖于约化表达式的选择，但左边不依赖。

推论 4.2。基本类可表示为以下形式：

$$\mathbf{1} = [u]^\vee + \sum_{w\neq e} {}^u Y_{I_w}(1)\zeta(u)^\vee_{I_w} = \zeta_{I_{w_0}} + \sum_{v\neq w_0} (\sum_w d^u_{v,w}\, {}^u Y_{I_w}(1))\zeta_{I_v}.$$

证明。代入 $s = 1$，得到第一个等式。至于第二个等式，将对偶 $\zeta(u)^\vee_{I_w}$ 用舒伯特类表示，可得 $\mathbf{1} = \sum_{w,\ v} d^u_{v,\ w}\, {}^u Y_{I_w}(1)\zeta_{I_v}$。表达式 $\sum_w d^u_{v,\ w}\, {}^u Y_{I_w}(1)$ 给出 $\zeta_{I_v}$ 处的系数，因此不依赖于 $u$ 的选择。例如，对于 $v = w_0$，取 $u = w_0$，可得 $\zeta_{I_{w_0}}$ 处的系数为 $1$。□

例 4.3. 在加法情形下，我们有 ${}^u Y_w(1) = \delta^{Kr}_{w,\ e}$ 并且 $\mathbf{1} = \zeta_{w_0}$，这意味着 $d^u_{v,\ e} = \delta^{Kr}_{v,\ w_0}$。在连通情形下，我们有 ${}^u Y_w(1) = \beta^{\ell(w)}$，并且 $\mathbf{1} = \zeta_{w_0}$，由此得到方程组

$$\sum_w d^u_{v,w}\beta^{\ell(w)} = \delta^{Kr}_{v,w_0}.$$

现在我们可以证明第一个主要结果了

定理 4.4（乘积的推前公式）。以下恒等式在结构代数 $\mathcal{Z}$ 中成立：

$$\pi \bullet (c(f) \cdot c(g)) = \sum_{w,v} Y_{I_w}(f) \cdot {}^{u}Y_{I_v}(g) \cdot (\pi \bullet (\zeta_{I_w}^{\vee} \cdot \zeta(u)_{I_v}^{\vee})), \quad f, g \in S,\ u \in W.$$

证明。在结构代数 $\mathcal{Z}$ 中，我们有

$$\begin{aligned}
\pi \bullet (c(f) \cdot c(g)) &= \pi \bullet (\sum_{w} Y_{I_w}(f) \zeta_{I_w}^{\vee} \cdot c(g)) \\
&= \sum_{w} Y_{I_w}(f) \cdot \pi \bullet (\delta_u \odot \zeta(u^{-1})_{I_w}^{\vee} \cdot c(g)) \\
&= \sum_{w} Y_{I_w}(f) \cdot \pi \bullet (\sum_{v} u(d_{v,w}^{u^{-1}}) \zeta(u)_{I_v} \cdot c(g)) \\
&= \sum_{w,v} u(d_{v,w}^{u^{-1}}) Y_{I_w}(f) \cdot \pi \bullet \big([u] \cdot Y_{I_v}(c(g))\big) \\
&= \sum_{w,v} d_{w,v}^{u} Y_{I_w}(f) \cdot \pi \bullet \big([u] \cdot c(Y_{I_v}(g))\big) \\
&= \big(\sum_{w,v} d_{w,v}^{u} Y_{I_w}(f) u(Y_{I_v}(g))\big) \cdot \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

代入 $d_{w,v}^{u}$ 的表达式，我们得到所需的公式。 □

推论 4.5（点处的推前公式）。以下恒等式在环 $S$中成立：

$$\pi(f \cdot u^{-1} g) = \sum_{w,v} d_{w,v}^{u} \cdot Y_{I_w}(f) \cdot {}^{u}Y_{I_v}(g), \quad f, g \in S,\ u \in W$$

等式两边都是 $W$-不变的。

证明。定理中恒等式的左边可以写为

$$\pi \bullet (c(f) \cdot c(u^{-1} g)) = c(\pi(f \cdot u^{-1} g)) = (y(\pi(f \cdot u^{-1} g)))_y.$$

该公式随后由以下恒等式得出

$$y(\pi(f \cdot u^{-1} g)) = \sum_{w,v} d_{w,v}^{u} Y_{I_w}(f) u Y_{I_v} u^{-1}(g), \text{ for each } y \in W. \qquad \square$$

例 4.6. 对于 $u = w_0$，根据例 3.9 的加法情形，我们得到

$$\pi(f \cdot w_0 g) = \sum_{w,v} d_{w,v}^{w_0} Y_w(f)^{w_0} Y_v(g) = \sum_{w} Y_w(f) X_{w w_0}(g) = \sum_{w} (-1)^{\ell(w)} X_w X_{w w_0}(g).$$

这给出了 [Xi21] 的最高次莱布尼茨法则。

4.2. 双舒伯特元素。考虑通常的（非等变）特征映射

$$\epsilon c \colon S \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}/I\mathcal{Z}.$$

令 $[pt] = \epsilon([e])$ 表示一个（非等变）点的类。根据 [CPZ]，存在一个元素 $s \in I^{|\Phi_+|}$，使得 $\epsilon c(s) = \tau[pt]$，其中 $\tau \in R$ 是相应根数据的挠指标。注意到，$\tau$ 总是可被相应根系的挠指标以及阶 $|\Lambda_w/\Lambda|$ 整除。关于 [，参见 ]CPZ

以及 [CZZ1] 中关于 $\tau$ 可能取值的讨论。我们仅提及以下内容

例 4.7。对于权格和结晶根系，我们可以选取$s$ 和 $\tau$，使得 $\tau \in \mathbb{Z}$ 在加法情形下与 $\Phi$ 的挠指标一致，在乘法情形下与 $\tau = 1$ 一致。

从此处起，我们假设 $\tau$ 在 $R$ 中是正则的，且 $R$ 没有 2-挠。由 [CZZ1]，Borel 映射 $\rho$ 在求逆 $\tau$后成为同构。令$z$ 为 $[e]$ 在 $\rho$ 下的一个原像（求逆 $\tau$后）。清除分母后，我们可以假设

$$z_{[e]} := \mu z \in S \otimes_{S_W} S,$$

其中，对某个 $r > 1$有 $\mu = \tau^r$。注意，根据定义，$\rho(z_{[e]}) = \mu[e]$且 $\rho(u^{(1)} z_{[e]}) = \mu[u]$。我们记 $z_{[u]} = u^{(1)} z_{[e]}$。

定义 4.8。定义 $\mathfrak{S}_{I_w} := Y_{(2)\, I_w^{-1}}(z_{[e]}) \in S \otimes_{S^W} S$（这里 $Y^{(2)}_{I_w^{-1}}$表示作用于第二个因子的 $Y_{I_w^{-1}}$）。因此 $\mathfrak{S}_e = z_{[e]}$ 和

$$\rho(\mathfrak{S}_{I_w}) = \rho(Y^{(2)}_{I_w^{-1}}(z_{[e]})) = \mu Y_{I_w^{-1}} \bullet [e] = \mu \zeta_{I_w}.$$

我们称 $\mathfrak{S}_{I_w}$ 为双舒伯特元素。

根据定义，我们有 $\rho(u^{(1)}(\mathfrak{S}_{I_w})) = \mu\zeta(u)_{I_w}$。因此，$u^{(1)}(\mathfrak{S}_{I_w})$（也记作 $\mathfrak{S}(u)_{I_w}$）对应于扭曲 Schubert 类，称为扭曲双 Schubert 元素。

4.3. 重构公式。将推前公式应用于 $z_{[v]} = \mathfrak{S}(v)_e$ 和 $1 \otimes u^{-1} g$, $g \in S$ 的第二个分量在点处的情形，我们得到

$$\begin{aligned}
\pi^{(2)}(z_{[v]} \cdot (1 \otimes u^{-1} g)) &= \sum_{w,v} d^u_{w,v} Y^{(2)}_{I_w}(z_{[v]}) \cdot (1 \otimes {}^u Y_{I_v}(g)) \\
&= \sum_{w} \mathfrak{S}(v)_{I_w^{-1}} \cdot (1 \otimes \sum_{v} d^u_{w,v}\, {}^u Y_{I_v}(g)) \\
&= \sum_{w} \mathfrak{S}(v)_{I_w^{-1}} \cdot (1 \otimes {}^u \tilde{Y}_{I_w}(g)),
\end{aligned}$$

其中 ${}^u Y_{I_w} = \sum_v d^u_{w,v}\, {}^u Y_{I_v}$ 属于 $\mathbb{D}$。另一方面

$$\rho\pi^{(2)}(z_{[v]} \cdot (1 \otimes u^{-1} g)) = \pi \bullet (\mu[v] \cdot c(u^{-1} g)) = \mu v u^{-1} g \mathbf{1}.$$

由于 $\rho(vu^{-1} g \otimes 1) = vu^{-1} g \mathbf{1}$, $\tau$是正则的，且 $\rho$ 在将$\tau$ 求逆后是同构，我们得到

推论 4.9（重构公式）。对于任意 $g \in S$ 和 $u$、$v \in W$，我们在$S \otimes_{S^W} S$中有

$$\mu(vu^{-1} g \otimes 1) = \sum_{w} \mathfrak{S}(v)_{I_w^{-1}} \cdot (1 \otimes {}^u \tilde{Y}_{I_w}(g)).$$

将 Borel 映射 $\rho$ 应用于重构公式的两边，我们得到 Demazure 公式的以下“反演”:

推论 4.10。在结构代数 $\mathcal{Z}$ 中，对于任意 $g \in S$ 和 $u$，$v \in W$ 我们有

$$vu^{-1} g \mathbf{1} = \sum_{w} c({}^u \tilde{Y}_{I_w}(g)) \zeta(v)_{I_w^{-1}}.$$

˜例 4.11。在 $u = v = w_0$ 的加法情形下，我们得到 ${}^{w_0}Y_w = {}^{w_0}Y_{w_0w} = X_{ww_0}$。因此有

$$g\mathbf{1} = \sum_w c(X_{ww_0}(g))\sigma_{w^{-1}}.$$

例 4.12. 结合 Demazure 公式及其反粒子类似公式，对于$u = v$ 我们得到

$$\begin{aligned} g\mathbf{1} &= \sum_{w,x} Y_{I_x}{}^u\tilde{Y}_{I_w}(g)\zeta^\vee_{I_x}\zeta(u)_{I_w^{-1}} \\ &= \sum_{w,x} Y_{I_x}(\sum_y d^u_{w,y}{}^uY_{I_y})(g)(\sum_z u(d^{u^{-1}}_{z,x})\zeta(u)_{I_z})\zeta(u)_{I_w^{-1}} \\ &= \sum_{w,z}(\sum_{x,y} u(d^{u^{-1}}_{z,x})Y_{I_x}d^u_{w,y}{}^uY_{I_y})(g))\cdot\zeta(u)_{I_z}\zeta(u)_{I_w^{-1}}. \end{aligned}$$

在 $u = v = w_0$ 的加法情形下，我们得到以下涉及舒伯特类乘积的组合恒等式

$$\begin{aligned} g\mathbf{1} &= \sum_{w,x} Y_x{}^{w_0}Y_{w_0w}(g)\cdot\sigma_{w_0x}\sigma_{w^{-1}} \\ &= \sum_{x,y}(-1)^{l(w_0x)}X_{w_0x}X_{y^{-1}w_0}(g)\cdot\sigma_x\sigma_y \\ &= \sum_{\substack{x,y \\ l(x)+l(y)=l(xy^{-1})}} (-1)^{l(w_0x)}X_{w_0xy^{-1}w_0}(g)\cdot\sigma_x\sigma_y. \end{aligned}$$

其中 $X_w$ 是差商算子的通常复合。

## 5. The twisted coproduct

本节将证明，结构代数关于某个余乘法构成一个余代数。这个余乘法称为扭曲余乘法，其定义是通过迭代上一节的重构公式得到的。

5.1. 双舒伯特类上的余积。考虑乘积 $S \otimes_{S^W} S \otimes_{S^W} S$ ，并将第 $i$ 个位置上的相应元素 $g$ 记作 $g^{(i)}$ ，例如 $g^{(2)} = 1 \otimes g \otimes 1$。于是， $u = v$ 的重构公式可改写如下

$$\mu g^{(i)} = \sum_w \mathfrak{S}(u)^{(ij)}_{I_w^{-1}} \cdot {}^u\tilde{Y}^{(j)}_{I_w}(g^{(j)}), \qquad i < j.$$

特别地，我们有

$$\mu({}^u\tilde{Y}^{(2)}_{I_w}(g^{(2)})) = \sum_x \mathfrak{S}(u)^{(23)}_{I_x^{-1}} \cdot {}^u\tilde{Y}^{(3)}_{I_x}{}^u\tilde{Y}^{(3)}_{I_w}(g^{(3)}).$$

合并可得

$$\mu^2 g^{(1)} = \sum_w \mathfrak{S}(u)^{(12)}_{I_w^{-1}} \cdot \mu({}^u\tilde{Y}^{(2)}_{I_w}(g^{(2)})) = \sum_{w,x} \mathfrak{S}(u)^{(12)}_{I_w^{-1}}\mathfrak{S}(u)^{(23)}_{I_x^{-1}} \cdot {}^u\tilde{Y}^{(3)}_{I_x}{}^u\tilde{Y}^{(3)}_{I_w}(g^{(3)}).$$

另一方面，我们还有

$$\mu g^{(1)} = \sum_w \mathfrak{S}(u)^{(13)}_{I_w^{-1}} \cdot {}^u\tilde{Y}^{(3)}_{I_w}(g^{(3)}).$$

因此，对于任意的 $g \in S$，我们有

$$\mu \sum_{w} \mathfrak{S}(u)^{(13)}_{I_w^{-1}} \cdot ({}^u\tilde{Y}_{I_w}(g))^{(3)} = \sum_{x,y} \mathfrak{S}(u)^{(12)}_{I_x^{-1}} \mathfrak{S}(u)^{(23)}_{I_y^{-1}} \cdot ({}^u\tilde{Y}_{I_y}\, {}^u\tilde{Y}_{I_x}(g))^{(3)}. \tag{1}$$

~ ~回想一下，${}^uY_{I_w} = \sum_v d^u_{w,\ v}\, {}^uY_{I_v}$ 在 $\mathbb{D}$ 中。由于 $\{{}^uY_{I_w}\}_w$ 是 $\mathbb{D}$ 的一组基，我们可以写成

$${}^u\tilde{Y}_{I_y}\, {}^u\tilde{Y}_{I_x} = \sum_z \nu(u)^{I_z^{-1}}_{I_x^{-1}, I_y^{-1}}\, {}^u\tilde{Y}_{I_z}, \qquad \text{where } \nu(u)^{I_z}_{I_x, I_y} \in S. \tag{2}$$

~例 5.1. 对于 $u = w_0$ 的加法情形，我们得到 ${}^{w_0}Y_w = {}^{w_0}Y_{w_0 w} = X_{ww_0}$。因此

$$X_{yw_0} X_{xw_0} = \sum_z \nu(w_0)^{z^{-1}}_{x^{-1}, y^{-1}} X_{zw_0}$$

这意味着

$$\nu(w_0)^z_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } xw_0y = z \text{ and } l(x) + l(w_0y) = l(z) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

结合 (1) 和 (2)，我们便得到 $S \otimes_{S^W} S \otimes_{S^W} S$ 中的下述恒等式：

$$\mu \mathfrak{S}(u)^{(13)}_{I_z} = \sum_{x,y} \mathfrak{S}(u)^{(12)}_{I_x} \mathfrak{S}(u)^{(23)}_{I_y} \nu(u)^{I_z}_{I_x, I_y}. \tag{3}$$

5.2. 扭曲余乘映射。现在考虑扭曲张量积$\mathcal{Z}\hat{\otimes}\mathcal{Z}$，其中

$$(z_v)_v \mathbin{\widehat{\otimes}} (z'_u)_u = (z_v \mathbin{\widehat{\otimes}} z'_u)_{v,u}$$

$$v(s) z_v \mathbin{\widehat{\otimes}} z'_u = z_v \mathbin{\widehat{\otimes}} s z'_u, \quad s \in S.$$

特别地，我们有

$$(s \bullet \mathbf{1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{1} = c(s) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbin{\widehat{\otimes}} s\mathbf{1} = \mathbf{1} \mathbin{\widehat{\otimes}} (s \odot \mathbf{1}).$$

我们也可以将此乘积视为双模的乘积，其中 $S$ 通过通常乘法和特征映射作用于 $\mathcal{Z}$。

引理 5.2. 存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} S \otimes_{S^W} S & \xrightarrow{\varepsilon^{(14)}} & (S \otimes_{S^W} S) \otimes_S (S \otimes_{S^W} S) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho \otimes \rho} \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{\quad \Delta \quad} & \mathcal{Z} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{Z}, \end{array}$$

其中 $\varepsilon^{(14)}(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b$，映射 $\Delta\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Z} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{Z}$ 在扭曲舒伯特类上定义为

$$\Delta(\zeta(u)_{I_z}) = \sum_{x,y} \zeta(u)_{I_x} \mathbin{\widehat{\otimes}} \zeta(u)_{I_y} c(\nu(u)^{I_z}_{I_x, I_y}).$$

证明。考虑由 $a\otimes b\otimes c\mapsto (a\otimes b)\otimes(1\otimes c)=(a\otimes 1)\otimes(b\otimes c)$ 定义的映射 $\phi$: $S\otimes_{S^W}S\otimes_{S^W}S\to (S\otimes_{S^W}S)\otimes_S(S\otimes_{S^W}S)$。由（3）可得

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(14)}\mu\mathfrak{S}(u)_{I_z}&=\phi(\mu\mathfrak{S}(u)^{(13)}_{I_z})\\&=\sum_{x,y}\phi(\mathfrak{S}(u)^{(12)}_{I_x})\phi(\mathfrak{S}(u)^{(23)}_{I_y}\nu(u)^{I_z}_{I_x,I_y}{}^{(3)})\\&=\sum_{x,y}\mathfrak{S}(u)_{I_x}\otimes_S(\mathfrak{S}(u)_{I_y}(1\otimes_{S^W}\nu(u)^{I_z}_{I_x,I_y})).\end{aligned}$$

应用 $\rho\otimes\rho$，我们得到:

$$(\rho\otimes\rho)(\varepsilon^{(14)}\mathfrak{S}(u)_{I_z})=\mu\sum_{x,y}\zeta(u)_{I_x}\hat{\otimes}\zeta(u)_{I_y}c(\nu(u)^{I_z}_{I_x,I_y}).$$

随后图表成立，因为 $\mathfrak{S}(u)_{I_z}$ 是 $S\otimes_{S_W}S$ 的一个基，在将 $\mu$ 取逆后亦然。 □

定义 5.3。引理中的 $\Delta$ 将称为扭曲余乘映射。

注意，由图表可知,

$$\Delta(s_1c(s_2))=\Delta(\rho(s_1\otimes s_2))=(\rho\otimes\rho)((s_1\otimes 1)\otimes(1\otimes s_2))=s_1\mathbf{1}\mathbin{\widehat{\otimes}}c(s_2).$$

因此，关于左因子上的通常 $S$-作用和右因子上的 $c$-扭曲 $S$-作用， $\Delta$ 是一个双模同态。此外，由于 $\varepsilon^{(14)}$ 是余结合的（即，我们有 $(\varepsilon^{(14)}\otimes\mathrm{id})\circ\varepsilon^{(14)}=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon^{(14)})\circ\varepsilon^{(14)})$ ，所以 $\Delta$ 也是余结合的。

考虑由 $s_1\otimes s_2\mapsto s_1s_2$ 给出的乘法映射 $S\otimes_{S^W}S\to S$。它定义了环同态 $\varepsilon\colon\mathcal{Z}\to S$，其将 $\rho(s_1\otimes s_2)=s_1c(s_2)$ 映射为 $s_1s_2$。我们称$\varepsilon$ 为余单位。交换映射 $S\otimes_{S^W}S\to S\otimes_{S^W}S$ 定义了映射 $\Upsilon\colon\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$，其满足$\rho(s_1\otimes s_2)\mapsto\rho(s_2\otimes s_1)$。注意，根据定义，我们有 $\varepsilon\circ\Upsilon=\varepsilon$。

于是我们得到

$$(\varepsilon\hat{\otimes}\mathrm{id})\circ\Delta(s_1c(s_2))=(\varepsilon\hat{\otimes}\mathrm{id})(\Upsilon(s_1\mathbf{1})\mathbin{\widehat{\otimes}}c(s_2))=(\varepsilon\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{id})(c(s_1)\mathbin{\widehat{\otimes}}c(s_2))=s_1c(s_2)$$

类似地,

$$(\mathrm{id}\hat{\otimes}\varepsilon)\circ\Delta(s_1c(s_2))=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\varepsilon)(s_1\mathbf{1}\mathbin{\widehat{\otimes}}\Upsilon(c(s_2)))=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\varepsilon)(s_1\mathbin{\widehat{\otimes}}s_2)=s_1c(s_2).$$

因此有余单位图:

$$(\varepsilon\hat{\otimes}\mathrm{id})\circ\Delta=(\mathrm{id}\hat{\otimes}\varepsilon)\circ\Delta=\mathrm{id}.$$

因此，$(\Delta,\varepsilon)$ 使 $\mathcal{Z}$ 成为一个余代数。我们称它为扭曲余代数。

## 6. Duoidal categories and structure algebras

本节旨在证明我们的主要结果：结构代数是 $S$-双模的双幺半范畴中的一个自然双幺半群（定理 6.1）。由此可直接推出，结构代数的双商具有自然的双代数结构（推论 6.2）和 Hopf-代数胚结构（推论 6.3）。

6.1. 双幺半范畴与双幺半群。设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，带有两种幺半结构 $(\otimes, \mathbb{1})$ 和 $(\widehat{\otimes}, \hat{\mathbb{1}})$。按照 [AM10, §6] 和 [BCZ, §1.2] $\mathcal{C}$，若存在三个态射，则称其为双幺半范畴

$$\iota\colon \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}} \longrightarrow \hat{\mathbb{1}}, \qquad \hat{\iota}\colon \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{1}, \qquad \upsilon\colon \mathbb{1} \longrightarrow \hat{\mathbb{1}} \tag{4}$$

因此，$(\hat{\mathbb{1}}, \iota, \upsilon)$ 关于 $\otimes$ 构成一个幺半群，而 $(\mathbb{1}, \hat{\iota}, \upsilon)$ 关于 $\widehat{\otimes}$ 构成一个余幺半群，并且存在一个自然变换

$$\vartheta\colon (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \otimes (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \longrightarrow (A \otimes C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \otimes D) \tag{5}$$

称为交换律，它满足以下图示公理：

结合律

$$\begin{array}{ccc}
\big((A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_1) \otimes (A_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_2)\big) \otimes (A_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3) & \xrightarrow{\alpha} & (A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_1) \otimes \big((A_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_2) \otimes (A_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3)\big) \\
\downarrow{\scriptstyle \vartheta \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \vartheta} \\
\big((A_1 \otimes A_2) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B_1 \otimes B_2)\big) \otimes (A_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3) & & (A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_1) \otimes \big((A_2 \otimes A_3) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B_2 \otimes B_3)\big) \\
\downarrow{\scriptstyle \vartheta} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} \\
\big((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3\big) \mathbin{\widehat{\otimes}} \big((B_1 \otimes B_2) \otimes B_3\big) & \xrightarrow{\alpha \mathbin{\widehat{\otimes}} \alpha} & \big(A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)\big) \mathbin{\widehat{\otimes}} \big(B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3)\big)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\big((A_1 \otimes B_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_2 \otimes B_2)\big) \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_3 \otimes B_3) & \xrightarrow{\alpha} & (A_1 \otimes B_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \big((A_2 \otimes B_2) \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_3 \otimes B_3)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle \vartheta \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \vartheta} \\
\big((A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} A_2) \otimes (B_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_2)\big) \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_3 \otimes B_3) & & (A_1 \otimes B_1) \mathbin{\widehat{\otimes}} \big((A_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} A_3) \otimes (B_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3)\big) \\
\uparrow{\scriptstyle \vartheta} & & \uparrow{\scriptstyle \vartheta} \\
\big((A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} A_2) \mathbin{\widehat{\otimes}} A_3\big) \otimes \big((B_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_2) \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3\big) & \xrightarrow{\alpha \otimes \alpha} & \big(A_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} A_3)\big) \otimes \big(B_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} (B_2 \mathbin{\widehat{\otimes}} B_3)\big)
\end{array},$$

其中 $\alpha\colon (A \star B) \star C \to A \star (B \star C)$ 且 $\star = \otimes, \widehat{\otimes}$。

单位性

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{1} \otimes (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) & \xrightarrow{\hat{\iota} \otimes \mathrm{id}} & (\mathbb{1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{1}) \otimes (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \\
\uparrow{\scriptstyle \wr} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} \\
A \mathbin{\widehat{\otimes}} B & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{1} \otimes A) \mathbin{\widehat{\otimes}} (\mathbb{1} \otimes B)
\end{array} \qquad
\begin{array}{ccc}
(A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \hat{\iota}} & (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \otimes (\mathbb{1} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{1}) \\
\uparrow{\scriptstyle \wr} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta} \\
A \mathbin{\widehat{\otimes}} B & \xrightarrow{\sim} & (A \otimes \mathbb{1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \otimes \mathbb{1})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\hat{\mathbb{1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} (A \otimes B) & \xleftarrow{\iota \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{id}} & (\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}) \mathbin{\widehat{\otimes}} (A \otimes B) \\
\downarrow{\scriptstyle \wr} & & \uparrow{\scriptstyle \vartheta} \\
A \otimes B & \xleftarrow{\sim} & (\hat{\mathbb{1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} A) \otimes (\hat{\mathbb{1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} B)
\end{array} \qquad
\begin{array}{ccc}
(A \otimes B) \mathbin{\widehat{\otimes}} \hat{\mathbb{1}} & \xleftarrow{\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \iota} & (A \otimes B) \mathbin{\widehat{\otimes}} (\hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbb{1}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \wr} & & \uparrow{\scriptstyle \vartheta} \\
A \otimes B & \xleftarrow{\sim} & (A \mathbin{\widehat{\otimes}} \hat{\mathbb{1}}) \otimes (B \mathbin{\widehat{\otimes}} \hat{\mathbb{1}})
\end{array}.$$

双幺范畴 $\mathcal{C}$ 上的双幺半群是一个对象 $Z$，并配备态射

$$\nabla\colon Z \otimes Z \longrightarrow Z, \qquad \rho\colon \mathbb{1} \longrightarrow Z,$$

$$\Delta\colon Z \longrightarrow Z \mathbin{\widehat{\otimes}} Z, \qquad \varepsilon\colon Z \longrightarrow \hat{\mathbb{1}},$$

使得 $Z$ 关于 $(\nabla, \rho)$ 构成幺半群， $Z$ 关于 $(\Delta, \varepsilon)$ 构成余幺半群，并且以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc} Z\otimes Z & \xrightarrow{\nabla} & Z & \xrightarrow{\Delta} & Z\mathbin{\widehat{\otimes}} Z \\ {\scriptstyle \Delta\otimes\Delta}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \nabla\mathbin{\widehat{\otimes}}\nabla} \\ (Z\mathbin{\widehat{\otimes}} Z)\otimes(Z\mathbin{\widehat{\otimes}} Z) & & \xrightarrow[\vartheta]{\text{interchange}} & & (Z\otimes Z)\mathbin{\widehat{\otimes}}(Z\otimes Z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z\otimes Z & \xrightarrow{\varepsilon\otimes\varepsilon} & \hat{\mathbb{1}}\otimes\hat{\mathbb{1}} \\ {\scriptstyle \nabla}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ Z & \xrightarrow{\varepsilon} & \hat{\mathbb{1}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z\mathbin{\widehat{\otimes}} Z & \xleftarrow{\rho\mathbin{\widehat{\otimes}}\rho} & \mathbb{1}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathbb{1} \\ {\scriptstyle \Delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \hat{\iota}} \\ Z & \xleftarrow{\rho} & \mathbb{1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & Z & \\ {\scriptstyle \rho}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{\upsilon} & \hat{\mathbb{1}} \end{array}$$

6.2. 双模。设 $R$ 是一个交换环， $S$ 是一个交换 $R$-代数。我们将 $S$-BMod$_R$ 记为由 $S$-双模构成的范畴，这些双模是 $R$-模，即 $rx = xr$、 $r \in R$、 $x \in M$。考虑 $S$-BMod$_R$ 中的以下两种张量结构：

- 通常的双模张量积

$$M \otimes N := M \otimes_R N \big/ \big\langle s_1 x s_2 \otimes y = x \otimes s_1 y s_2 \mid s_1, s_2 \in S, x \in M, y \in N \big\rangle$$

- 有序（扭曲）张量积

$$M \mathbin{\widehat{\otimes}} N := M \otimes_R N \big/ \big\langle xs \otimes y = x \otimes sy \mid s \in S, x \in M, y \in N \big\rangle$$

注意， $\widehat{\otimes}$ 的单位 $\hat{}1$ 是双模 $S$ 本身，而 $\otimes$ 的单位 1 是双模 $S \otimes_R S$。存在一个自然映射

$$\vartheta \colon (A \mathbin{\widehat{\otimes}} B) \otimes (C \mathbin{\widehat{\otimes}} D) \longrightarrow (A \otimes C) \mathbin{\widehat{\otimes}} (B \otimes D).$$

我们还有 $\iota \colon S \otimes S = S \xrightarrow{\mathrm{id}} S$， $S$ 中的通常乘法给出 $\upsilon \colon S \otimes_R S \to S$，并且存在一个映射

$$\hat{\iota} \colon S \otimes_R S \longrightarrow \big(S \otimes_R S\big) \mathbin{\widehat{\otimes}} \big(S \otimes_R S\big)$$

由 $x \otimes y \mapsto (x \otimes 1) \otimes (1 \otimes y)$ 给出。根据 [AM10, Example 6.18]（另见 [BCZ, §4.3]），这使 $S$-BMod$_R$ 成为一个双幺范畴，其

$$(\otimes, \mathbb{1}) = (\otimes, S \otimes_R S) \quad \text{and} \quad (\widehat{\otimes}, \hat{\mathbb{1}}) = (\widehat{\otimes}, S).$$

此外， $Z = \mathbb{1}$ 是 $S$-BMod$_R$ 中的一个双幺半群，具有 $\rho = \mathrm{id}$ 和 $\varepsilon = \upsilon$。

6.3. 结构代数。现在考虑 $R$-代数 $S$，其中 $S$ 是 FGR，相应的结构代数为 $\mathcal{Z}$。

一方面，前面引入的扭曲余乘法 $\Delta \colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Z} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{Z}$和映射 $\varepsilon \colon \mathcal{Z} \to S = \hat{}1$，使 $\mathcal{Z}$ 成为 $S$-BMod$_R$ 中的一个余幺半群，其所依据的是 $\widehat{\otimes}$ （$\mathcal{Z}$ 是扭曲余代数）。另一方面， $\mathcal{Z}$上的通常乘法

$$\nabla \colon \mathcal{Z} \otimes \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

与 Borel 映射 $\rho \colon \mathbb{1} = S \otimes_R S \to \mathcal{Z}$ 一起，使结构代数 $\mathcal{Z}$ 成为 $S$-BMod$_R$ 中的一个幺半群，其所依据的是 $\otimes$，也就是说，成为通常的 $S \otimes_R S$-代数。

由于 1 是一个双幺半群，且 $\rho$ 满足 $\Delta$，我们得到了第二个主要结果：

定理 6.1。结构代数（$\mathcal{Z}$、 $\rho$、 $\varepsilon$）是双幺范畴$S$-BMod$_R$ 中的双幺半群，其张量结构为 $\otimes$ 和 $\widehat{\otimes}$。

6.4. 基变换与双商。回顾一下，两个双幺范畴之间的函子称为双幺函子，是指它关于两种幺半结构是一个（强）幺半群，并且与（4）和（5）交换（见 [AM10，第 6] 节）。两个双幺函子之间的自然变换称为双幺自然变换，是指它关于两种幺半结构都是幺半的。 $R$-代数的同态 $S \to T$ 通过基变换 $S$-BMod$_R \to T$-BMod$_R$诱导出一个双幺函子。根据定义，该函子将双幺半群映射为双幺半群。

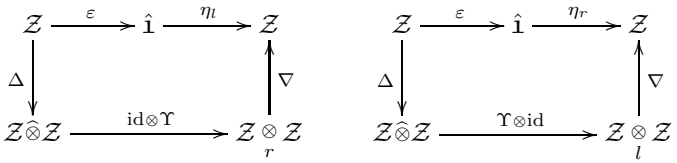
假设存在一个增广映射 $\epsilon\colon S \to R$。令 $I$ 表示其核。函子 $S$-BMod$_R \to R$-BMod$_R$ 于是将一个双模 $M$ 映为双商$\frown M = M/(IM + MI)$。但在 $R$-BMod$_R$ 中，两种幺半结构重合，因此双幺半群变为双代数。特别地，对于结构代数，我们得到：

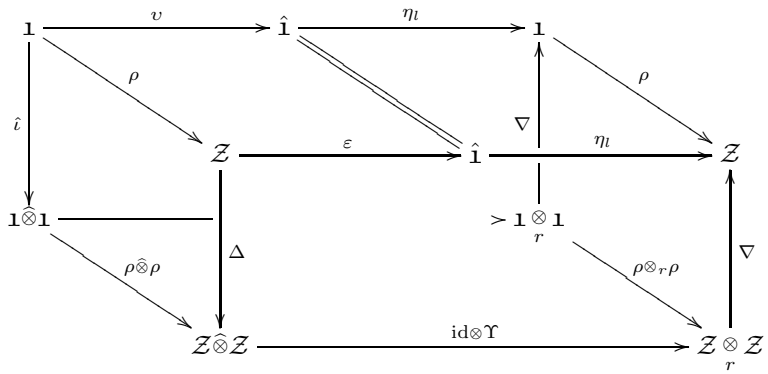
$\widehat{\ }$推论 6.2。结构代数 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}/(I\mathcal{Z} + \mathcal{Z}I)$ 的双商是 $R$ 上的双代数。

6.5. 双 antipode 与 Hopf 代数胚。由于 $\mathcal{Z}$ 在双模的双幺半范畴中具有自然的双幺半群结构，一个自然的问题是， $\mathcal{Z}$ 是否具有 Hopf 双幺半体结构。双幺半范畴中定义 Hopf 双幺半体有多种方式。若我们将范围限定在双模的双幺半范畴 $S$-BMod$_R$，则双幺半群 $\mathcal{Z}$ 在以下意义下是 Hopf 双幺半体（见 [BCZ]）：

存在一个 $R$-线性映射 $\Upsilon\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$，我们称其为双 antipode，使得

- $\Upsilon \circ \Upsilon = \mathrm{id}$,
- $\Upsilon \circ \eta_l = \eta_r$ 其中 $\eta_l\colon \hat{\mathbf{1}} \to \mathcal{Z}$（分别地， $\eta_r\colon \hat{\mathbf{1}} \to \mathcal{Z}$）是定义双模 $\mathcal{Z}$的左（分别地，右） $S$-模结构的 $R$-线性态射，
- 存在交换图：




以及对于 $\eta_r$、 $\otimes_l$ 和 $\Upsilon\otimes$id 的类似图。

注意，如果两个幺半结构重合（$\widehat{\otimes} = \otimes$），那么上述定义就给出了通常反演的图示定义，进而也给出了 Hopf 代数的图示定义。因此，前一个推论可以加强为：

^推论 6.3. 结构代数 $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}/(I\mathcal{Z} + \mathcal{Z}I)$ 的双商是 $R$ 上的 Hopf 代数。

## 7. The dihedral case

参照例 2.1 和 2.8，考虑类型为 $I_2(p)$ 的二面体根系，其中 $p$ 是奇素数。本节旨在计算加法情形下相应结构代数的双^商 $\mathcal{Z}$，或者通俗地说，计算虚 Hopf 环 $\mathrm{CH}(I_2(p); \mathbb{F}_p)$。

回顾一下，$I_2(p)$ 的系数环 $\mathcal{O}$ 是形式实分圆域 $\mathbb{Q}(\gamma)$ 中的整数环 $\mathbb{Z}[\gamma]$，其中 $\gamma = \xi + \xi^{-1}$，且 $\xi$ 是本原 $2p$ 次单位根。考虑主理想 $\mathfrak{p} = (\gamma + 2) = (\xi^{-1}(1 + \xi)^2)$。对于 $0 < k < p$，记

$$u_k := \xi^k + \xi^{-k} + (-1)^k 2 \quad \text{and} \quad v_k := \xi^k + \xi^{-k} - (-1)^k 2.$$

注意到 $v_1 = \gamma + 2$。我们将使用以下事实

引理 7.1。理想 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}$ 中的素理想，其剩余域为 $\mathbb{F}_p$，$u_k$ 是单位，并且 $(v_k) = \mathfrak{p}$。

证明。由于 $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}(\gamma)$ 是二次域扩张，对于任意 $x \in \mathbb{Q}(\gamma)$，由相应的范数可得$N_\gamma(x)^2 = N_\xi(x)$。我们有 $N_\xi(\xi) = N_\xi(1 + (-\xi)^k) = 1$以及 $N_\xi(1 - (-\xi)^k) = p$。因此，我们得到

$$N_\gamma(u_k)^2 = N_\xi(\xi^{-k}(1 + (-\xi)^k)^2) = 1 \quad \text{and} \quad N_\gamma(v_k) = p^2.$$

因此，$N_\gamma(u_k) = \pm 1$且 $N_\gamma(v_k) = \pm p$。由于 $v_k/v_1 \in \mathbb{Z}[\gamma]$，结论得证。 □

我们可以将 $I_2(p)$ 的正单根选为

$$\Phi_+ = \{\alpha_1 = 1,\ \xi,\ \ldots,\ \xi^{p-2},\ \alpha_2 = \xi^{p-1}\}$$

（所有根的长度均为 2），因此相应的余根为

$$\{\alpha_1^\vee = 2,\ 2\xi,\ \ldots,\ \alpha_2^\vee = 2\xi^{p-1}\}.$$

相应的考克斯特群 $W$ 由简单反射 $s_1$ 和 $s_2$生成，并且对于每个 $0 < k < p$， $W$中恰有两个长度为 $k$ 的元素。令$\sigma_{k1} = \sigma_{\ldots s_2 s_1}$ 和 $\sigma_{k2} = \sigma_{\ldots s_1 s_2}$ 表示相应的特殊舒伯特类。

由 Pieri 公式 [Hi82，第 IV 章 (3.5) 节], 可知，对每个 $0 < k < p$ 都有

$$c(\lambda) \cdot \sigma_{k-1,2} = \langle \lambda, \xi^0 \rangle \sigma_{k1} + \langle \lambda, \xi^{p-k} \rangle \sigma_{k2} \in \mathfrak{I}$$
$$c(\lambda) \cdot \sigma_{k-1,1} \in = \langle \lambda, \xi^{k-1} \rangle \sigma_{k1} + \langle \lambda, \xi^{p-1} \rangle \sigma_{k2} \in \mathfrak{I},$$

其中，$\mathfrak{I}$ 表示增广结构代数 $\overline{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/I\mathcal{Z}$中的特征理想，即由特征映射的像中的增广元素生成的理想。

代入 $\lambda = 2\xi^0$ 和 $\lambda = 2\xi^{p-1}$，我们得到

$$2\sigma_{k1} + (\xi^{p-k} + \xi^{-(p-k)})\sigma_{k2} \in \mathfrak{I}, \tag{6}$$

$$(\xi^{p-k} + \xi^{-(p-k)})\sigma_{k1} + 2\sigma_{k2} \in \mathfrak{I}. \tag{7}$$

注意，特殊舒伯特类 (6) 和 (7) 的线性组合生成了 $\mathfrak{I}$ 的次数 $k$ 分量，作为一个阿贝尔群。

若 $k < p$ 为奇数，将 (6) 和 (7) 相加可得

$$(\xi^{p-k} + \xi^{-(p-k)} + 2)(\sigma_{k1} + \sigma_{k2}) \in \mathfrak{I}.$$

由引理 7.1， $\xi^{p-k}+\xi^{-(p-k)}+2$ 是 $\mathcal{O}$ 中的单位，因此我们有

$$\sigma_{k1}+\sigma_{k2}\in\mathfrak{I}. \tag{8}$$

将其代入（7），我们得到

$$(\xi^{p-k}+\xi^{-(p-k)}-2)\sigma_{k1}\in\mathfrak{I}. \tag{9}$$

注意，结构代数中的元素（8）和（9）生成了 $\mathfrak{I}$ 的 degree$k$ 分量作为阿贝尔群。这表明，对于奇数 $k$，我们有

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(k)}=\overline{\mathcal{Z}}/\mathfrak{I}^{(k)}\simeq\mathcal{O}/\mathfrak{p}=\mathbb{F}_p.$$

$\widehat{\ }$，其中 $pr$ 表示商映射 $\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$，且 $pr(\sigma_{k1})=-pr(\sigma_{k2})$。

类似地，若 $k<p$ 为偶数，取（6）与（7）之差，我们得到

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(k)}\simeq\mathcal{O}/\mathfrak{p}=\mathbb{F}_p,$$

其中 $pr(\sigma_{k1})=pr(\sigma_{k2})$。

在 $k=p$ 的情形下，由 Pieri 公式可得

$$c(\lambda)\cdot\sigma_{p-1,2}=\left\langle\lambda,\xi^0\right\rangle\sigma_{w_0},\quad\text{and}$$
$$c(\lambda)\cdot\sigma_{p-1,1}=\left\langle\lambda,\xi^{p-1}\right\rangle\sigma_{w_0}.$$

通过类似的论证，代入 $\lambda=2\xi^0$ 和 $\lambda=2\xi^{p-1}$，我们得出 $\widehat{Z}^{(p)}$ 是平凡的。总结以上讨论，可得：

$\widehat{\ }$命题 7.2. 二面体根系 $I_2(p)$ 的结构代数 $\mathcal{Z}$ 的双商 $\mathcal{Z}$，其中 $p$ 是奇素数，作为分次阿贝尔群同构于

$$\widehat{\mathcal{Z}}\simeq\overset{0}{\mathcal{O}}\oplus\overset{1}{\mathbb{F}_p}\oplus\overset{2}{\mathbb{F}_p}\oplus\cdots\oplus\overset{p-1}{\mathbb{F}_p}\ .$$

$\widehat{\ }$根据我们的一个主要结果（推论 6.3），双商 $\mathcal{Z}$ 是 Hopf 代数。由 Hopf–Borel 定理可得（在有限域上）：

$$\widehat{\mathcal{Z}}\otimes\mathbb{F}_p\simeq\mathbb{F}_p[x]/\left\langle x^p\right\rangle,$$

$\widehat{\ }$对某个生成元 $x$。我们取 $x:=pr(\sigma_{s_1})=-pr(\sigma_{s_2})$。注意，由于 $\mathcal{Z}$ 是由一个元素生成的分次霍普夫代数，其余乘法和反演（在有限域上）由下式给出

$$\Delta(x)=x\otimes1+1\otimes x,\qquad\Upsilon(x)=-x.$$

另一方面，扭曲余乘法也可以用我们的公式来描述：

$$\Delta(pr(\sigma_w))=\sum_{\substack{uv=w,\\ \ell(u)+\ell(v)=\ell(w)}}pr(\sigma_u)\otimes pr(\sigma_u),\qquad\Upsilon(pr(\sigma_w))=(-1)^{\ell(w)}pr(\sigma_{w^{-1}}).$$

假设 $pr(\sigma_{k1})=a_kx^k$。注意到

$$\Delta(x^k)=x^k\otimes1+kx^{k-1}\otimes x+\cdots.$$

另一方面，

$$\Delta(\sigma_{k1})=\sigma_{k1}\otimes1+\sigma_{k-1,2}\otimes\sigma_{s_1}+\cdots$$

这表明

$$a_k k \equiv (-1)^{k-1} a_{k-1} \mod p.$$

因此，

$$a_k \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} a_{k-1} \equiv \cdots \equiv \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!} \mod p.$$

综合以上各项，我们得到

$$pr(\sigma_{k1}) = \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!} x^k,$$

并且，由于 $pr(\sigma_{k1}) = (-1)^k pr(\sigma_{k2})$，

$$pr(\sigma_{k2}) = \frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{k!} x^k.$$

## References


[AM10] M. Aguiar、S. Mahajan，《幺半群函子、物种与霍普夫代数》。*CRM Monograph Series* **29** 2010，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[AJS] H. Andersen、J. Jantzen、W. Soergel，《量子群在 $p$次单位根处的表示以及特征 $p$下半单群的表示： $p$的独立性》。*Astérisque* **220**（1994年），321页。[Bi99] S. Billey，《 $G/B$ 的 Kostant 多项式与上同调环》。*Duke Math. J.* **96**（1999年），第1期，205–224。[BCZ] G. B¨ohm、Y. Chen、L. Zhang，《双幺半范畴中的霍普夫幺半群》。*Journal of Algebra* **394** 2013 139 172。（），–。[BM01] T. Braden、R. MacPherson，《从矩图到交叉上同调》。*Math. Ann.* **321**（2001年），533–551。[BE92] P. Bressler、S. Evens，《复配边中的舒伯特演算》。*Trans. Amer. Math. Soc.* **331** 1992 2, 799 813。（），第–期。[BE90] ———，《舒伯特演算、辫关系与广义上同调》。*Trans. Amer. Math. Soc.* **317** 1990 2, 799 811。（），第–期。[Br02] M. Brion，《复旗簇的格罗滕迪克群中的正性》。*J. Algebra* **258**（2002年），137–159。[Br97] ———，《环面作用的等变 Chow 群》。*Transform. Groups* **2**（1997年3月，225–267），第–期。[Bu02] A. Buch，《格拉斯曼流形的 K理论中的 Littlewood–Richardson 规则》。*Acta Math.* **189** 2002 37 78。（），–。[CPZ] B. Calm`es、V. Petrov、K. Zainoulline，《完全旗的不变量、挠指标与上同调》，*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **46**（2013年），第3期，405–448。[CZZ] B. Calm`es、K. Zainoulline、C. Zhong，《旗簇的等变定向上同调》。*Documenta Math.*《Alexander S. Merkurjev 六十寿辰特别卷》（2015年），113–144。[CZZ1] ———，《形式仿射 Demazure 代数上的余乘积结构》。*Math. Zeitschrift*（），第3期，**282** 2016 1218 1191-。[CZZ2] ———，《形式仿射 Demazure 代数及其对偶上的推拉算子》，*Manuscripta Math.* **160**（2019年），第1–2期，9–50。[De73] M. Demazure，《Weyl 群的不变对称整数与挠元》。*Invent. Math.* **21** 1973 287 301。（），–。[DLZ] R. Devyatov、M. Lanini、K. Zainoulline，《双矩图上的定向上同调层》。*Documenta Math.* **24**（2019年），563–608。[DZ14] H. Duan、X. Zhao，《例外李群的舒伯特演算与霍普夫代数结构》。载于 *Forum Mathematicum* **26**（2014年），113–139。[EG98] D. Edidin、W. Graham，《等变交叉理论》。*Invent. Math.* **131**（1998年3月，595–634），第–期。[Fa05] M. Fayers，《有限 Coxeter 群的 0-Hecke代数》。*J. Pure Appl. Algebra* **199**（2005年），第1–3期，27–41。[Fi08] P. Fiebig，《Coxeter 范畴组合学》。*Trans. Amer. Math. Soc.* **360**（2008年），第8期，4211–4233。

[Fi16] ———,《表示论与几何中的矩图》。载于 *Schubert calculus (Osaka 2012)* **71** 2016 75 96 ,《纯数学与应用数学高级研究》（），–。[GZ12] S. Gille、K. Zainoulline,《等变预理论与扭子不变量》。 *Transf.*（），第–期。[ *Groups* **17** 2012 2, 471 498
GKM] M. Goresky、R. Kottwitz、R. MacPherson,《等变上同调、Koszul对偶与局部化定理》。 *Invent. Math.* **131**（1998年），25–83。[Gr58] A. Grothendieck,《同调拓元与有理截面》。 *Seminaire Claude Chevalley* **3** 1958 5, 29 （），第期，页。[
GHZ] V. Guillemin、T. Holm、C. Zara,《齐性空间等变上同调环的 GKM描述》。 *J. Algebraic Combin.* **23**（2006年），第1期，21–41。[Hi82] H. Hiller,《Coxeter 群的几何》。 *Research Notes in Math.* **54**。Pitman（Advanced Publishing Program），波士顿，马萨诸塞州–伦敦，1982年。iv+213页。[HMSZ] A. Hoffnung、J. Malagon-Lopez、A. Savage、K. Zainoulline,《形式赫克代数与代数定向上同调理论》。 *Selecta Math.* **20**（2014年），第4期，1213–1245。[Hu90] J. Humphreys,《反射群与 Coxeter 群》。 *Cambridge studies in Advanced Math.* **29** 1990 ，剑桥大学出版社。
[Ka85] V. Kac,《紧李群上同调与约化代数群周环中的挠元》。 *Invent. Math.* **80**（1985年），第1期，69–79。[KK90] B. Kostant、S. Kumar,《广义旗簇的 $T$ $K$ *J. Differential* 等变 K理论》。（），–。 *Geom.* **32** 1990 549 603
[KK86] ———,《Kac–Moody 群的 $G/P$ $G^*$ *Advances* 的幂零赫克环与上同调》。（），–。[LZ19] M. Lanini、K. Zainoulline,《根系的扭曲二次折叠》。 *St.Petersburg*（），第1期，65–。 *Math. J.* **33** 2022 84
[La55] M. Lazard,《关于 `一参数形式李群》。`。 *Bull. Soc. Math. France* **83**（1955年），251–274。[LZZ] C. Lenart、K. Zainoulline、C. Zhong,《抛物卡兹丹–卢斯蒂格基、舒伯特类与等变定向上同调》。 *J. Inst. Math. Jussieu* **19**（2020年），第6期，1889–1929。[LM07] M. Levine、F. Morel,《代数配边》。 *Springer Monographs in Math.*，Springer，柏林，2007年，xii+244页。[PSZ] V. Petrov、N. Semenov、K. Zainoulline,《线性代数群的 $J$ *Ann. Sci.* 不变量》。（）， *Ecole Norm. Sup. (4)* **41** 2008 6, 1023 1053
第–期。[Ro03] I. Rosu,《等变K理论与等变上同调》，附录由 I. Rosu 与 A. Knutson 撰写。 *Math. Zeitschrift* **243**（2003年），423–448。[To99] B. Totaro,《分类空间的周环》。代数 $K$K理论（西雅图，华盛顿州，1997年），249–281， *Proc. Sympos. Pure Math.* **67**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999年。[Ty08] J. Tymoczko,《舒伯特簇上的置换表示》。 *Amer. J. of Math.* **130**（2008年），第5期，1171–1194。[Xi21] R. Xiong,《旗簇周环的余模结构计算》，arXiv:2102.06672。[Ya05] N. Yagita,《单连通李群的代数配边》。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **139** 2005 2, 243 260（），
第–期。[Za08] K. Zainoulline,《代数群的典范p维数与基本多项式不变量的次数》。 *London Math. Bull.* **39**（2007年），301–304。

（Martina Lanini） Dipartimento di Matematica, University of Rome Tor Vergata, Via della Ricerca Scientifica 1, 00133, Rome, Italy
*Email address*: lanini@mat.uniroma2.it
*URL*: https://sites.google.com/site/martinalanini5/home

（Rui Xiong） Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 150 Louis-Pasteur, Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada
*Email address*: rxiong@uottawa.ca
*URL*: https://arxiv.org/a/0000-0001-8025-0795.html

（Kirill Zainoulline） Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, 150 Louis-Pasteur, Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada
*Email address*: kirill@uottawa.ca
*URL*: http://mysite.science.uottawa.ca/kzaynull/