arXiv:2303.02414v1 [physics.flu-dyn] 4 Mar 2023

第1章
螺旋流体湍流中的输运[1]

Nobumitsu Yokoi[1*]

[1] *Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 153-8505, Tokyo, Meguro, Komaba, Japan*

*通讯作者：Nobumitsu Yokoi；nobyokoi@iis.u-tokyo.ac.jp

动能螺度（以下简称螺旋度）定义为速度与沿流向涡量之间的关联。螺旋度和能量一样，都是流体动力学方程的无黏不变量。与作为湍流强度度量的能量不同，湍流螺旋度代表脉动运动所伴随的右手和左手扭转，可用于衡量脉动的结构或拓扑性质。通过在多尺度重整化微扰展开理论框架中纳入最低阶（均匀且各向同性）速度关联的非镜面对称部分，可以解析地求得螺旋度对湍流输运的影响。文中阐释了与螺旋度相关的贡献对动量输运的物理意义。利用雷诺应力的解析表达式，构建了纳入螺旋度效应的湍流模型（螺度模型），

[1]北欧理论物理研究所（NORDITA）访问研究员。

并将该螺度模型应用于旋流，以展示其描述流动显著特性的有效性。除输运抑制外，非均匀螺旋度与旋转耦合还可诱导大尺度流。文中还将回顾直接数值模拟（DNS）证实螺旋度能够生成整体流动的研究结果，随后介绍其在地球物理和天体物理流动现象中的若干潜在应用。

关键词：湍流、螺旋度、输运抑制、全局场生成

1.1. 引言

动能螺度是镜像对称性破缺的一种度量，体现了流体湍流的几何和拓扑性质。螺旋度的存在会改变湍流的动力学和统计性质。除流体动力学外，螺旋度还在多个研究领域发挥作用，包括 DNA 和生物化学、腹侧节点流在左右不对称生成中的作用、量子流体中的涡旋纠缠、宇宙中与中微子左右偏斜不对称性相关的手性，以及聚变等离子体装置中的纬向流生成等。

关于螺旋度重要性的早期讨论，可能是在磁场生成（即发电机）的背景下引发的。如果流体运动具有螺旋性，冻结在流体中的磁场也会发生扭曲。由此可以生成平均电流密度构型，其方向平行或反平行于原始平均磁通管。假设小尺度上存在气旋式流体运动，这与大气中观测到的气旋和反气旋有关，Parker [1955] 提出了一种机制：方位角向或环向磁场会变形为偶极或极向磁场，反之亦然。

这就是 α 发电机，被认为是恒星迁移发电机循环中最重要的过程之一。在这种发电机中，湍流中的螺旋度是一个关键要素。沿大尺度磁场 B 的非均匀速度脉动 u′ 会诱发磁场涨落 b′。当湍流中存在动能螺度时，$\langle \mathsf{u}' \cdot (\nabla \times \mathsf{u}') \rangle$，便会产生一个电动势分量 $\langle \mathsf{u}' \times \mathsf{b}' \rangle$；根据湍流螺旋度（$\langle \cdots \rangle$：系综平均）的符号，该分量的方向平行或反平行于大尺度磁场。与此形成鲜明对比的是，湍流能量总会产生一个反平行于大尺度电流密度的电动势，从而增强湍流导致的磁扩散率。在湍流中存在电流螺度时，$\langle \mathsf{b}' \cdot (\nabla \times \mathsf{b}') \rangle$，通过涨落洛伦兹力的一部分（$\nabla \times \mathsf{b}'$）$\times$ B介导，也会产生方向平行或反平行于大尺度磁场 B 的电动势。关于发电机中的动能螺度效应及其他螺旋度效应，读者可参阅发电机相关教材和综述论文：[Moffatt, 1978年、Parker, 1979年、Krause & R¨ adler, 1980、Brandenburg & Subramanian, 2005年、Yokoi, 2013年、Moffatt & Dormy, 2019年、Tobias, 2021]。

由于螺旋度是镜像对称性破缺的一种度量，因此非零螺旋度的前提是存在某种打破镜像对称性的因素。旋转就是造成镜像对称性破缺的因素之一。正如我们将在湍流螺旋度的输运方程（§ 4.2）中看到的，旋转与非均匀性相结合，通过边界上的通量使湍流具有有限的螺旋度。在地球物理流和天体物理流中，旋转和密度分层是系统的基本要素。强分层（低弗劳德数 $Fr = U/(N_{\mathrm{BV}} h)$. 1，其中 U 为水平速度尺度，h 为

垂直长度尺度， N_{BV} 为布伦特–V¨ais¨al¨a 频率）会使流体几乎完全偏转至水平方向，从而使流动变为二维。即使大尺度流的结构呈现这种二维性，小尺度湍流运动通常仍更为复杂，且具有三维特征。例如，旋转和分层导致螺旋度生成这一概念，可追溯至 Steenbeck、Krause 与 R¨adler [1966] ，以及证明了这种现象如何发生的 Hide [1989] 。在沿旋转轴存在非均匀性的情况下，分层流体中的湍流可以是螺旋性的 [Marino、Rosenberg 与 Pouquet，2013年，Marino 等人， 2013]。

与湍流的维度有关，另一个有趣的问题是二维三分量（2D3C）构型中的螺旋度效应。在强旋转作用下，流动会根据边界条件演变为准 2D3C 状态，此时螺旋度不变量仍然存在。从我们在 § 1.3.3 中介绍的螺旋度效应来看，螺旋度在空间中的非均匀性至关重要。在 2D3C 构型中，垂直于二维平面或水平面的第三个方向上不会存在螺旋度非均匀性。另一方面，螺旋度在水平面内可以呈现非均匀性。这种水平方向非均匀的螺旋度，与垂直方向的平均绝对涡量（与旋转及非均匀的水平流动相关）相耦合，可能会通过雷诺应力促进水平动量传递。未来值得进一步研究 2D3C 构型的这些特征，以及在涉及能量以外不变量的约束下，能量和螺旋度的级联方向与标度关系。

在湍流基础理论研究中，人们常常利用均匀各向同性湍流，探讨螺旋度如何以及在多大程度上影响能量级联与耗散

。通过为截断的湍流方程组构建统计力学，Kraichnan [1973] 提出螺旋度会向小尺度级联。自 Andr´e & Lesieure [1977], 的经典研究以来，螺旋度对湍流谱演化的影响一直受到考察。此外，Rogers & Moin [1987] 在若干湍流流动几何构型中研究了湍流高螺旋度区域与低耗散区域之间的关系。近年来，人们通过多种途径加深了对流体湍流中螺旋过程的认识。Waleffe[1993] 引入速度的螺旋分解，并指出湍流的能量级联和螺旋度级联涉及两类三元相互作用，其区别取决于三元组中最长的两条边对应的螺旋模态符号是相同还是相反。通过对均匀各向同性湍流中的三维湍流进行直接数值模拟，Chen, Chen, & Eyink [2003] 发现，在高波数处，正、负螺旋模态的强通量彼此抵消，使系统在小尺度上恢复完全各向同性。通过考察非线性相互作用的子类别，研究发现，不同的相互作用子集分别守恒湍流能量和螺旋度演化的不同组合，因此螺旋湍流的能量可能发生部分逆级联 [Biferale, Musacchio & Toschi, 2012年, Alex-axis & Biferale, 2018]。通过对均匀各向同性湍流中的 Taylor–Green 流进行直接数值模拟，并开展镜像对称均匀各向同性湍流及手性 von K´arm´an流的实验，人们确立了示踪粒子轨迹的链接数与螺旋度之间的关系。这为在坚实的数学基础上通过实验测量螺旋度铺平了道路 [Angriman, et al., 2021]。Pouquet & Yokoi [2022]简要回顾了均匀湍流研究的发展概况。

本章不讨论螺旋均匀湍流中的级联与耗散问题，而是将重点放在螺旋非均匀湍流中的输运上。湍流动能螺度在大尺度或平均速度与涡量的动力学中起什么作用？我们将介绍如何从理论上处理非均匀湍流中的这一问题。

从输运的角度来看，湍流的主要作用是大幅增强有效输运。涡黏度、涡扩散率、湍流电阻率等，都是输运增强的典型效应，它们取决于湍流的强度和时间尺度。与此同时，在湍流对称性被破坏的某些情况下，湍流也可能抑制有效输运。在这一抑制过程中，与对称性破缺相关的量在抵消输运增强方面发挥关键作用。正如后文将要说明的，螺旋度有望在非镜面对称流体湍流的输运抑制中发挥至关重要的作用。

与均匀湍流中必须通过外部强迫注入能量才能维持湍流不同，在非均匀湍流中，湍流能量和螺旋度由系统自身自然提供，其来源是大尺度非均匀场（如平均速度剪切、涡量、温度梯度等）所引发的这些量的产生机制，以及来自边界的通量。平均场由湍流通过湍流输运系数决定，而湍流场则由与大尺度非均匀性直接相关的产生率和输运率决定。为了以一致的方式处理这种非线性的平均场–湍流相互作用，我们必须同时考虑并

求解平均场和湍流场。对于具有复杂几何形状和边界、涉及地球物理与天体物理现象的真实非均匀湍流，要在现实参数下进行直接数值模拟（DNS），是不可能的。在这种情况下，湍流建模方法为分析真实湍流提供了非常有力的工具。我们研究如何将螺旋度的此类抑制效应纳入湍流建模。

本章的组织如下。首先，在 § 1.2 中，我们介绍动能螺度的定义和基本性质。在 § 1.3 中，将说明如何从理论上处理极高雷诺数下非均匀湍流中的螺旋度效应。螺旋湍流理论建模的关键步骤之一，是在脉动场的均匀各向同性双模态双时间相关函数中，采用非镜像对称部分以及能量相关的镜像对称部分。在 § 1.4 中，利用理论建模获得的相关湍流通量解析结果，构建螺旋湍流的湍流模型。在该模型中，除了有助于大尺度结构耗散的涡黏性之外，还会出现与螺旋度相关的输运系数。预计这种螺旋度效应将有助于维持和生成大尺度流结构。在 § 1.5 中，将螺旋度湍流模型应用于一种具有物理意义且在实际中十分重要的流动构型：湍流旋流。届时将说明，螺度模型能够成功再现标准涡黏性湍流模型无法再现的湍流旋流显著特征。在 § 1.6 中，通过理论和数值分析讨论由非均匀湍流螺旋度引起的整体流动生成。在 § 1.7 中，我们总结论述并给出结论。

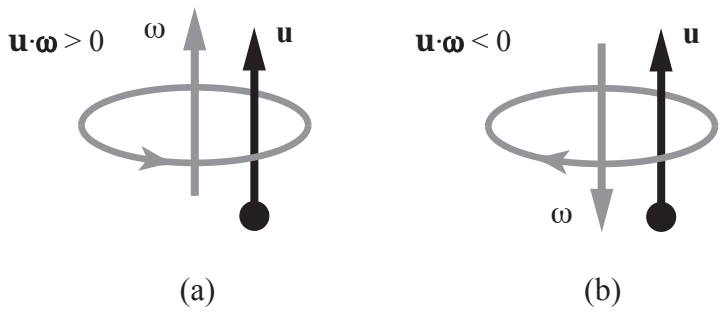

图1.1：螺旋度即速度–涡量相关性。(a) 正螺旋度，(b) 负螺旋度。

1.2. 螺旋度：定义与性质

螺旋度具有若干独特的数学性质和有趣的物理性质。在介绍螺旋度的定义之后，将介绍螺旋度的这些特征性质，包括螺旋度作为赝标量和守恒量的性质、螺旋度的几何与拓扑解释，以及螺旋度在级联抑制中的作用。

（A）定义。螺旋度定义为速度与其旋度（涡量）的内积的体积分，即

$$\mathcal{H} = \int_V \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})\, dV. \tag{1.1}$$

螺旋度密度（下文简称螺旋度）定义为速度 u 与涡量 $\boldsymbol{\omega}(= \nabla \times \mathbf{u})$ 的内积，即 $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$。正螺旋度（$\mathrm{u} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$）表示流体微元沿其运动方向 u 呈右手扭转或螺旋。另一方面，负螺旋度（$\mathrm{u} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$）表示左手扭转或螺旋（图1.1）。

值得注意的是，图1.1所示的完全螺旋（贝尔特拉米）状态

是不稳定的。它们具有完全螺旋性，但最终会变得不稳定，并在小尺度上恢复各向同性。这意味着在小尺度上，对螺旋度的约束应当宽松一些。与这一点相关，雷诺应力中螺旋度效应相对重要性的尺度依赖性将在§ 1.3末尾讨论。

（B）赝标量。根据宇称性质，矢量量分为两类。一类是极矢量或纯矢量，在坐标系反演下其符号改变；另一类是轴矢量或赝矢量，在反演下其符号不变。为避免复杂讨论左右手坐标系之间的变换，我们在此仅采用“反演”这一表述。[2]按照这种分类，速度 u 是极矢量，而涡量$\boldsymbol{\omega}(=\nabla\times\mathrm{u})$ 是轴矢量。因此，由极矢量和轴矢量的内积定义的螺旋度 $\mathrm{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 是一种标量，在坐标系反演下其符号会改变。这种标量称为赝标量，而

[2]矢量 $\mathrm{f}=\{f_i\}$ 的变换写作 $f_i'=|\mathcal{A}|\mathcal{A}_{ij}f_j$，其中 $\mathcal{A}_{ij}$ 是变换矩阵，$|\mathcal{A}|$ 是其行列式。对于赝矢量，$|\mathcal{A}|=-1$。反射可以表示为反演 $\mathcal{I}$ 与旋转 $\mathcal{C}$的组合。例如，xy 平面上的反射或镜像可表示为 $\Sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，它可以由反演（表示为反演 $\mathcal{I}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$）与绕 z 轴旋转 π角 $\mathcal{C}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 组合构成，即 $\Sigma=\mathcal{I}\mathcal{C}$。由于对于所有旋转，行列式$|\mathcal{C}|$ 始终为 $+1$ （$|\mathcal{C}|=+1$），因此反射的行列式 $|\Sigma|$可由反演的行列式 $|\mathcal{I}|$表示。从这个意义上说，我们可以用反演来论述非镜像对称性。

在反演下符号不变的标量称为纯标量。镜面对称系统中，赝标量的统计平均值为零。证明如下。根据镜面对称系统的定义，在坐标系反演下，任意统计量 $f(\mathbf{x})$ 均满足 $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$：$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$。与此同时，根据定义，赝标量在反演下符号改变：$f(\mathbf{x}) = -f(-\mathbf{x})$。因此，赝标量统计量 $f(\mathbf{x})$ 满足 $f(\mathbf{x}) = -f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$，从而得到 $f(\mathbf{x}) = 0$：赝标量统计量在镜面对称系统中为零。反之，存在有限或非零的赝标量意味着系统的镜像对称性或反射对称性遭到破坏。由于螺旋度是赝标量，因此螺旋度本身可作为镜面对称性破缺的度量。

（C）守恒量。螺旋度的一个显著特征是，它与能量一样，是流体动力学系统的无黏不变量。也就是说，在黏度趋于零的极限下，螺旋度是一个守恒量。

不可压缩流体中的速度 $\mathbf{u}$ 所满足的方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{1.2}$$

或等价地,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(p + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{1.3}$$

以及 $\mathbf{u}$ 的无散条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1.4}$$

其中， p 是以常密度 ρ归一化的压力， ν 是运动黏度。与这些方程相应，涡量 $\boldsymbol{\omega}(=\nabla\times\mathbf{u})$ 满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \tag{1.5}$$

或等价地，采用旋转形式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega})+\nu\nabla^2\boldsymbol{\omega}, \tag{1.6}$$

以及 $\boldsymbol{\omega}$ 的无散条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0. \tag{1.7}$$

由方程（1.2）—（1.7）可得，螺旋度的控制方程为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\;&\equiv\;\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\\&=\;\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2-p\right)\boldsymbol{\omega}+\nu\nabla(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega})\right]-2\nu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

对体积 V 上的方程（1.8）积分，并令 $\nu=0$、[3]，可得

$$\frac{d}{dt}\int_V\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\;dV=\int_S\left[\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2-p\right)\boldsymbol{\omega}\right]\cdot\mathbf{n}\;dS. \tag{1.9}$$

这意味着，若无通量流入或流出积分曲面

[3]当然，在讨论湍流时不能令 $\nu=0$，因为黏度在湍流耗散中起着关键作用。例如，无论驱动的性质和雷诺数 [如何，动能螺度都会在一个湍流时间尺度内衰减（Brandenburg& Petrosyan, 2012]）。

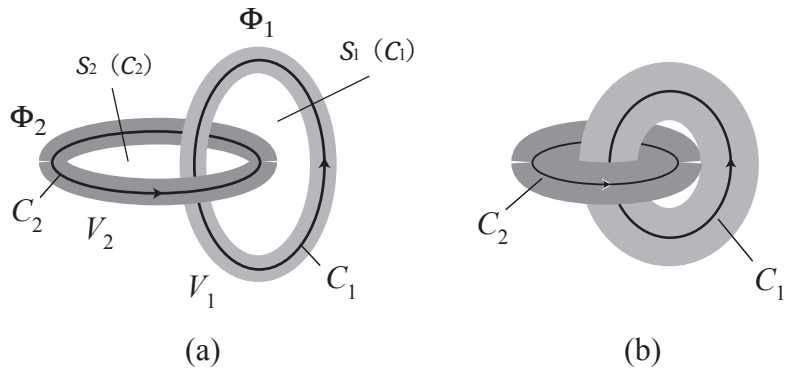

图 1.2：螺旋度的拓扑解释。(a) 相互链接的涡管（霍普夫链环）；(b) 螺度不变性对弛豫的约束。

S，则（总）螺旋度 $\int_V \mathrm{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV$ 沿流体运动 u 不发生变化。也就是说，螺旋度是流体运动的无黏不变量，这与能量（单位质量） $\int_V \mathrm{u}^2/2\ dV$ 一样。这一事实有力地表明，螺旋度与能量一样，都是流体动力学中至关重要的物理量。

(D) 几何与拓扑解释。螺旋度及其性质可以从拓扑学角度加以解释和说明 [Moffatt，1978年，1992年，Moffatt & Dormy， 2019]。螺旋度对应于流动的拓扑性质，体现为涡管的纽结、链环、扭转和盘绕数。对于链环这一最简单的情形，我们考虑由两根涡管构成的霍普夫链环， Φ_1 和Φ_2分别沿着闭合曲线 C_1 和 C_2延伸。它们彼此相互链接，如图 1.2(a) 所示。由闭合曲线C_1 和 C_2 张成的表面积分别为 S_1(C_1)和 S_2(C_2)。涡管区域的体积分别记为 V_1 和 V_2。

如果涡量仅局限于 V_1 和 V_2区域，则整个空间体积 V 上的螺旋度积分可表示为

V_1 和 V_2 上体积分的总和，即

$$\int_V \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV = \int_{V_1} \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV_1 + \int_{V_2} \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV_2. \tag{1.10}$$

假设涡管区域 V_1的横截面上涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小均匀，则有

$$\begin{aligned}\int_{V_1} \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV_1 &= \Phi_1 \oint_{C_1} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{s} = \Phi_1 \int_{S_1(C_1)} (\nabla\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}_1\ dS_1 \\ &= \Phi_1 \int_{S_1(C_1)} \boldsymbol{\omega}_2\cdot\mathbf{n}_1\ dS_1 = \Phi_1\Phi_2. \end{aligned}\tag{1.11}$$

这里用到了如下假设：涡量局域化，因此穿过表面 S_1（C_1）的涡量仅为 $\boldsymbol{\omega}_2$。对区域 V_2进行类似计算，可得总螺旋度

$$\int_V \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV = 2\Phi_1\Phi_2. \tag{1.12}$$

一般情况下，若链环数为 N （N：缠绕数），则总螺旋度表示为

$$\int_V \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\ dV = 2N\Phi_1\Phi_2. \tag{1.13}$$

这表明螺旋度表示涡管的链接关系。

无黏情形下的螺旋度守恒，对应于涡管永不消亡（既不会产生，也不会消失），且在黏度趋于零（$\nu = 0$）时，涡管的链接数保持不变这一事实。

由于涡量方程 (1.5) 中的 $(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 项，涡管的拉伸（或收缩）会使涡量增强（或减弱）。正如我们

在 (1.13) 中所见，螺旋度守恒等价于链接数的不变性。由于链接数的不变性，涡旋收缩受到限制，如图1.2(b)所示。这种拓扑约束与螺旋度守恒对能量级联的抑制有关。

（E）级联抑制。速度矢量 u 和涡量矢量$\boldsymbol{\omega}$之间满足勾股恒等式：

$$\frac{(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}{|\mathbf{u}|^2|\boldsymbol{\omega}|^2}+\frac{(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega})^2}{|\mathbf{u}|^2|\boldsymbol{\omega}|^2}=1. \tag{1.14}$$

这一关系意味着，在具有较大 $|\mathrm{u}\cdot\boldsymbol{\omega}|$ 的流动中，$|\mathrm{u}\times\boldsymbol{\omega}|$ 相对较小。由于 $\mathrm{u}\times\boldsymbol{\omega}$ 表示式 (1.3) 和 (1.6) 中非线性相互作用的一部分，因此在 $|\mathrm{u}\cdot\boldsymbol{\omega}|$ 较大的流动中，非线性相互作用导致的能量级联可能会受到抑制。基于这一预期，螺旋度在湍流级联中的作用长期以来一直受到研究。通过这些经典研究，人们发现，在螺旋度相对较强的流动区域，能量耗散可能会局部受到抑制，但这一结论存在若干保留意见 [Rogers & Moin, 1987]。研究还指出，螺旋湍流中的能量级联可能受到抑制。然而，这种螺旋度对能量级联抑制的影响无法持续。一旦螺旋度本身开始向更小尺度级联，这种效应就会消失 [Andr´e & Lesieure, 1977]。要使螺旋度效应在湍流中持续存在，就必须通过某些机制为湍流提供螺旋度。考虑到这些螺旋度生成机制，我们便能理解，在非均匀湍流中研究螺旋度效应的重要性，例如旋转湍流，或向湍流中外部注入螺旋度等情形。

1.3. 非均匀湍流中螺旋度效应的理论分析

上一节中，我们简要回顾了螺旋度的定义及其性质。本节将介绍如何处理非均匀湍流中的螺旋度效应问题，并讨论螺旋度的存在可能如何改变湍流输运。为此，我们将借助对非均匀湍流进行的统计理论分析。

1.3.1. 平均场与脉动场方程

我们考虑一个以恒定角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$旋转的系统。我们对场 f 采用雷诺分解，写作

$$f = F + f', \quad F = \langle f \rangle \tag{1.15}$$

with

$$f = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p), \tag{1.16a}$$

$$F = (\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega}, P), \tag{1.16b}$$

$$f = (\mathbf{u}', \boldsymbol{\omega}', p'), \tag{1.16c}$$

其中，$\mathbf{u}$ 表示速度，$\boldsymbol{\omega}(= \nabla \times \mathbf{u})$ 表示涡量，p 表示压力（按参考密度缩放），$\langle \cdots \rangle$ 表示系综平均。按照这种分解，不可压缩

流体是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)\mathbf{U}=\mathbf{U}\times 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}-\nabla P-\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{R}}+\nu\nabla^{2}\mathbf{U} \tag{1.17}$$

以及无散条件

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=0, \tag{1.18}$$

其中， P 是按密度归一化的平均压力。平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}(=\nabla\times\mathbf{U})$ 满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}=\nabla\times[\mathbf{U}\times(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})-\nu\nabla\times\boldsymbol{\Omega}]+\nabla\times\mathbf{V}_{\mathrm{M}}, \tag{1.19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0. \tag{1.20}$$

在（1.17）和（1.19）中，雷诺应力 $\mathrm{R}=\{\mathcal{R}_{ij}\}$ 以及惯性力或涡旋驱动力 V_{M} 分别定义为

$$\mathcal{R}_{ij}=\langle u_i'u_j'\rangle, \tag{1.21}$$

$$\mathbf{V}_{\mathrm{M}}=\langle\mathbf{u}'\times\boldsymbol{\omega}'\rangle, \tag{1.22}$$

它们分别表示涨落对平均场产生的唯一直接影响。

角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 的旋转所对应的速度为 $\mathrm{u}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\times\mathrm{x}$。进行旋度运算可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla\times\mathbf{u}\\ &= \nabla\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\times\mathbf{x})=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}(\nabla\cdot\mathbf{x})-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}=2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

这表明，角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 的系统旋转在局部等价于 $2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 的涡量。我们利用这一关系。得益于旋转与涡量之间的这种局部等价性，通过考虑旋转参考系中的湍流关联内的螺旋度效应，我们利用低阶计算选择性地提取与螺旋度耦合的平均涡量 $\boldsymbol{\Omega}(=\nabla\times\mathbf{U})$ 的效应。

1.3.2. 非均匀湍流的统计解析理论

在湍流输运的背景下，湍流统计解析理论的主要目标之一，是求得平均场方程中湍流关联的表达式。雷诺应力（1.21）和涡旋驱动力（1.22）等湍流关联，决定了脉动运动所导致的有效输运。双尺度或多尺度直接相互作用近似（TS-DIA 或 MS-DIA）是一种用于强非线性湍流的重整化微扰展开理论，并结合了多尺度分析；这一理论框架使我们能够通过导数展开处理非均匀湍流。DIA 是最早的现代湍流理论之一，由针对雷诺数极大的均匀各向同性湍流的重整化微扰理论构成 [Kraichnan, 1959]。[4] 关于多尺度

[4]在直接相互作用近似（DIA）的表述中，通过引入响应函数或格林函数以及速度关联，便完成了传播子（关联函数和响应函数）方程组的统计闭合。借助传播子的重整化过程，对展开项进行部分求和，但直至

DIA 的概念和细节，读者可参阅 Yoshizawa [1984] 和 Yokoi [2020]。本节仅指出一些要点，以便在借助多尺度直接相互作用近似分析研究螺旋湍流时牢记。

（A）多尺度分析。双尺度或多尺度直接相互作用近似（DIA）是直接相互作用近似与多尺度分析的结合。我们将慢变量和快变量定义为

$$\mathbf{X} = \delta_x \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}; \quad T = \delta_t t, \quad \tau = t, \tag{1.24}$$

其中， δ_x 和 δ_t 分别是空间变量和时间变量的尺度参数。如果 δ_x 和 δ_t 较小，那么只有当原始变量 x 和 t 发生显著变化时，X 和 T 才会显著变化。从这个意义上说，X 和 T 适合描述大尺度和缓慢演化，因而称为慢变量。如果尺度参数 δ_x 和 δ_t 较小，则慢变量与快变量之间存在显著的尺度分离。

利用这两个尺度变量 X、 $\boldsymbol{\xi}$、 T和 τ，场量 f(x; t)可分解为缓慢变化的分量和快速变化的分量，如下所示：

$$f(\mathbf{x}; t) = F(\mathbf{X}; T) + f'(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}; T, \tau). \tag{1.25}$$

在双尺度表述中，空间导数和时间导数表示为 -

无穷阶展开。从场论的角度看，直接相互作用近似是一种线（传播子）重整化理论，其顶点部分在最低阶被截断。对于弱非线性湍流，无须采用这种复杂的闭合方案；但数值模拟表明，直接相互作用近似在低雷诺数下对能谱、能量传递谱、微尺度长度、速度导数偏度等的总体描述相当准确 [Kraichnan, 1964]。关于直接相互作用近似的详细论证，请参阅经典教材 [Leslie，1973，McComb, 1990]。

为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \delta_x \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \delta_t \frac{\partial}{\partial T}. \tag{1.26}$$

这意味着，大尺度非均匀性伴随着尺度参数 δ_x 和 δ_t 出现。从这个意义上说，双尺度分析是针对慢变量非均匀性的导数展开。在这一阶段，尺度分离会影响导数展开的有效性。例如，如果梯度扩散型表达式（如涡黏性表示）本身并不适合作为起始阶近似，那么在导数展开中仅取低阶展开项，就不应得到最佳近似。

我们将这一双尺度公式应用于流体力学的基本方程。为简化分析，以下假设空间和时间的尺度参数相同，并令 $\delta_x = \delta_t = \delta$。对于不可压缩流体，速度脉动的控制方程写为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i'}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial u_i'}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_j' u_i' + \frac{\partial p'}{\partial \xi_i} - \nu \nabla_\xi^2 u_i' - 2\epsilon_{ij\ell}\omega_{\mathrm{F}j} u_\ell' \\ &\quad = \delta \left(-u_j' \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{D u_i'}{DT} - \frac{\partial p'}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j}\left(u_j' u_i' - \langle u_j' u_i' \rangle \right) - 2\nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial X_j \partial \xi_j} \right) \\ &\quad + \delta^2 \left(\nu \nabla_X^2 u_i' \right), \end{aligned} \tag{1.27}$$

以及无散条件：

$$\frac{\partial u_j'}{\partial \xi_j} + \delta \frac{\partial u_j'}{\partial X_j} = 0, \tag{1.28}$$

其中，平均流对流导数 D/DT 定义为

$$\frac{D}{DT} = \frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{U} \cdot \nabla_X . \tag{1.29}$$

（B）关于快变量的傅里叶表示。我们假设脉动场关于快空间变量 $\boldsymbol{\xi}$ 是均匀的。于是，脉动场经过傅里叶变换后可表示为

$$f'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}; \tau, T) = \int f'(\mathbf{k}, \mathbf{X}; \tau, T) \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{U}\tau)] \, d\mathbf{k}. \tag{1.30}$$

这里，因子 $\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{U}\tau)$ 表示傅里叶变换是在随平均流 U 运动的参考系中进行的。

利用这种傅里叶表示，波数空间中的速度脉动方程可写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i'(\mathbf{k};\tau)}{\partial \tau} + \nu k^2 u_i'(\mathbf{k};\tau) + 2\epsilon_{ij\ell}\omega_{\mathrm{F}j} u_\ell'(\mathbf{k};\tau) \\
&- \; ik_j \iint \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) u_i'(\mathbf{p};\tau) u_j'(\mathbf{q};\tau) \, d\mathbf{p} d\mathbf{q} \\
&= \; \delta \left(-u_j'(\mathbf{k};\tau) \frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{D u_i'(\mathbf{k};\tau)}{\partial T_{\mathrm{I}}} - \frac{\partial p'}{\partial X_{\mathrm{I}i}} \right. \\
&\quad \left. - \iint \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}j}} u_i'(\mathbf{p};\tau) u_j'(\mathbf{q};\tau) \, d\mathbf{p} d\mathbf{q} + \delta(\mathbf{k}) \frac{\partial R_{ji}}{\partial X_j} \right),
\end{aligned} \tag{1.31}$$

以及无散条件：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{k};\tau) = \delta \left(-i \frac{\partial u_j'(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}j}} \right), \tag{1.32}$$

其中

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_{\mathrm{I}}}, \nabla_{X\mathrm{I}} \right) = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}\tau) \left(\frac{\partial}{\partial T}, \nabla_X \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}\tau). \tag{1.33}$$

脉动场取决于慢变量 X 和 T，也取决于快变量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 τ。不过，为了简化记号，我们省略 X 和 T 的标记，在波数空间中仅记为 $\mathrm{u}'(\mathrm{k};\,\tau)$。

（C）尺度参数展开。我们将场量 f 按尺度参数 δ 展开为

$$f' = f_0 + \delta f_1' + \delta^2 f_2' + \cdots = \sum_n \delta^n f_n'. \tag{1.34}$$

将（1.34）代入速度脉动方程（1.31），消去压力 p'后，最低阶或零阶速度方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_{0i}'(\mathbf{k};\tau)}{\partial \tau} + \nu k^2 u_{0i}'(\mathbf{k};\tau) + 2\epsilon_{ij\ell}\omega_{\mathrm{F}j} u_{0\ell}'(\mathbf{k};\tau)\\ &\quad -iM_{ij\ell}(\mathbf{k}) \iint \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q}) u_{0j}'(\mathbf{p};\tau) u_{0\ell}'(\mathbf{q};\tau)\, d\mathbf{p}d\mathbf{q} = 0.\end{aligned} \tag{1.35}$$

(D) 外场展开。 如 § 2 所述，螺旋度是反射对称性的度量。为了深入探究螺旋度的影响，本文考虑一个存在旋转的系统中的流体动力学湍流，而旋转会破坏反射对称性。旋转轴给出了一个特定方向，因此存在旋转的系统不再是各向同性的。为了利用各向同性湍流的某些性质，我们按照旋转的角速度 $\omega_{\mathrm{F}} = |\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}|$对湍流场进行展开。尺度参数 δ 展开中 n阶的湍流速度场 u_n' 按 ω_{F} 展开为

$$\mathbf{u}_n' = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{\mathrm{F}}^m \mathbf{u}_{nm}'. \tag{1.36}$$

具体而言，最低阶场 $\mathfrak{u}_{00}$ 称为基本场，记为 $\mathfrak{u}'_{\mathrm{B}\circ}$。$\mathfrak{u}'_{\mathrm{B}}$ 的方程写为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u'_{\mathrm{B}i}(\mathbf{k};\tau)}{\partial\tau}+\nu k^2 u'_{\mathrm{B}i}(\mathbf{k};\tau)\\&\quad -iM_{ij\ell}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})u'_{\mathrm{B}j}(\mathbf{p};\tau)u'_{\mathrm{B}\ell}(\mathbf{q};\tau)\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}=0,\end{aligned}\tag{1.37}$$

这与均匀各向同性湍流的情况完全相同。

我们引入与基本场方程相关的格林函数，$G'_{ij}(\mathbf{k};\,\tau,\tau')$。$G'_{ij}(\mathbf{k};\,\tau,\tau')$的方程定义为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial G'_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau')}{\partial\tau}+\nu k^2 G'_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau')\\&\quad -2iM_{i\ell m}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})u'_{\mathrm{B}\ell}(\mathbf{p};\tau)G'_{mj}(\mathbf{q};\tau,\tau')\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}\\&\quad =D_{ij}(\mathbf{k})\delta(\tau-\tau').\end{aligned}\tag{1.38}$$

反映基本场方程（1.37）的性质，格林函数方程（1.38）与均匀各向同性湍流的对应方程相同。

一阶方程表示为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u'_{1i}(\mathbf{k};\tau)}{\partial\tau}+\nu k^2 u'_{1i}(\mathbf{k};\tau)\\&\quad -2iM_{ij\ell}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})u'_{\mathrm{B}j}(\mathbf{p};\tau)u'_{\mathrm{S}1\ell}(\mathbf{q};\tau)\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}+2\epsilon_{ij\ell}\omega_{\mathrm{F}j}u'_{\mathrm{B}\ell}(\mathbf{k};\tau)\\=\;&-D_{im}(\mathbf{k})u'_{\mathrm{B}\ell}\frac{\partial U_m}{\partial X_\ell}-D_{i\ell}(\mathbf{k})\frac{Du'_{\mathrm{B}\ell}(\mathbf{k};\tau)}{DT_{\mathrm{I}}}\\&\quad +2M_{i\ell m}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\frac{q_m}{q^2}u'_{\mathrm{B}j}(\mathbf{p};\tau)\frac{\partial u'_{\mathrm{B}n}}{\partial X_{\mathrm{I}n}}(\mathbf{q};\tau)\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}\\&\quad +D_{ip}(\mathbf{k})M_{\ell mnp}(\mathbf{k})\iint\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p}-\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial X_{\mathrm{I}n}}u'_{\mathrm{B}\ell}(\mathbf{p};\tau)u'_{\mathrm{B}m}(\mathbf{q};\tau)\,d\mathbf{p}d\mathbf{q}\end{aligned}\tag{1.39}$$

并满足基于（1.28）的无散条件：

$$\mathbf{u}_1'(\mathbf{k};\tau) = \mathbf{u}_{\mathrm{S1}}'(\mathbf{k};\tau) - i\frac{\mathbf{k}}{k^2}\frac{\partial u_{\mathrm{B}\ell}'(\mathbf{k};\tau)}{\partial X_{\mathrm{I}\ell}}, \tag{1.40}$$

其中，$\mathrm{u}_{\mathrm{S1}}'$ 是一阶无散速度，满足

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{S1}}'(\mathbf{k};\tau) = 0. \tag{1.41}$$

由（1.39）可见，所有大尺度非均匀性效应都通过一个尺度参数 δ 进入右端（r.h.s.），该参数源自（1.31）的右端。另一方面，（1.39）的左端（l.h.s.）与u_{B}' 方程（1.37）中的对应项具有相同的形式。将（1.39）的右端视为力项，我们利用由（1.38）定义的格林函数 G，形式上求得$\mathrm{u}_{\mathrm{S1}}'$ 。借助u_{B}'、$\mathrm{u}_{\mathrm{S1}}'$等的表达式，我们利用直接相互作用近似计算湍流关联。

（E）具有镜像对称性破缺的基本场。为了使螺旋度效应发挥作用，必须向湍流提供螺旋度。正如第4节将要讨论的那样，系统旋转与某种非均匀性耦合，可以提供此类供给机制之一。由于螺旋度是镜像对称性破缺的度量，因此我们需要在理论表述中恰当地捕捉这种对称性破缺。

在标准的双尺度分析中，假设基本场 u_{B}' 均匀且各向同性。为了考虑螺度效应，本文假设基本场均匀且各向同性，但不具有镜像对称性。

首先，我们假设构型空间中基本速度场的关联具有一般形式

。在均匀湍流中，统计性质与原点的位置无关，而仅由相对位置 $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ 决定。因此，双点双时速度相关写作

$$\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r};t,t') = \langle u_i'(\mathbf{x};t)u_j'(\mathbf{x}';t')\rangle = \langle u_i'(\mathbf{0};t)u_j'(\mathbf{r};t')\rangle. \tag{1.42}$$

各种几何构型下相关张量的一般形式已由 Robertson [1940] 和 Chandrasekhar [1950]推导得出。各向同性且均匀 R_{ij} 的通用表达式˜可由以下结果得到 [Lesieur,˜2008]。根据两点两时间相关 R_{ij} 以及两个任意固定的˜向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，我们构造一个量$a_i R_{ij}(\mathbf{r};t,t')b_j$，它是一个标量，因此具有各向同性。这个标量在 $\mathbf{r}$、$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 旋转后应保持不变。因此，它仅取决于这些向量的长度、相对角度及取向；$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，以及 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。因此，我们有

$$a_i\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r};t,t')b_j = A(\mathbf{r};t,t')\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + B(\mathbf{r};t,t')(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}) + C(\mathbf{r};t,t')\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{1.43}$$

若选取 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 分别为 i 和 j 方向上的单位向量 $\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{e}j$，则得到

$$\tilde{R}_{ij}(\mathbf{r};t,t') = A(\mathbf{r};t,t')\delta_{ij} + B(\mathbf{r};t,t')r_i r_j + C(\mathbf{r};t,t')\epsilon_{ij\ell}r_\ell, \tag{1.44}$$

或者等价地,

$$\tilde{R}_{ij} = g\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right) + f\frac{r_i r_j}{r^2} + h\epsilon_{ij\ell}\frac{r_\ell}{r} \tag{1.45}$$

与 $g = A$、$f = A + r^2 B$ 和 $h = rC$。这里 g 表示横向 e

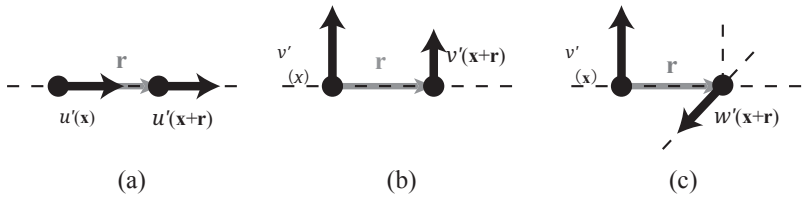

图1.3：速度相关性。(a) 纵向，(b) 横向，以及 (c) 交叉相关性。这里，r 是位移向量，u' 是沿 r 方向的速度脉动的纵向分量，v' 和 w' 是彼此垂直的横向分量。

速度关联，f 是纵向速度相关性，h 是交叉速度相关性（图1.3）。交叉速度相关性除以 r，取极限 $r \to 0$ 后，等价于局部螺度 $\langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$。

与构型空间中的 (1.45) 相对应，在波数空间中有如下表达式。假定基本场的统计性质为

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle u'_{\mathrm{B}i}(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T)u'_{\mathrm{B}j}(\mathbf{k}',\mathbf{X};\tau',T)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \\
&\quad = D_{ij}(\mathbf{k})Q(k,\mathbf{X};\tau,\tau',T) + \Pi_{ij}(\mathbf{k})Q_{\mathrm{C}}(k,\mathbf{X};\tau,\tau',T) \\
&\qquad + \frac{i}{2}\frac{k_\ell}{k^2}\epsilon_{ij\ell}H(k,\mathbf{X};\tau,\tau',T), \qquad (1.46)
\end{aligned}$$

其中，Q 是基本场的能量谱密度，Q_{C} 是可压缩对应项，H是螺度对应项，$D_{ij}(\mathbf{k})(= \delta_{ij} - k_i k_j/k^2)$是无散投影算子，$\Pi_{ij}(\mathbf{k})(= k_i k_j/k^2)$是可压缩投影算子，$\epsilon_{ij\ell}$ 是交错张量。对于不可压缩流体，

(1.46)可化简为

$$\frac{\langle u'_{\mathrm{B}i}(\mathbf{k},\mathbf{X};\tau,T)u'_{\mathrm{B}j}(\mathbf{k}',\mathbf{X};\tau',T)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} = D_{ij}(\mathbf{k})Q(k,\mathbf{X};\tau,\tau',T) + \frac{i}{2}\frac{k_\ell}{k^2}\epsilon_{ij\ell}H(k,\mathbf{X};\tau,\tau',T). \tag{1.47}$$

这是均匀各向同性、非镜像对称不可压缩湍流的最一般表达式 [Batchelor, 1953]。同时，假设格林函数 $G'_{ij}(\mathbf{k};\ \tau,\ \tau')$ 是各向同性的，即

$$G'_{ij}(\mathbf{k};\tau,\tau') = D_{ij}(\mathbf{k})G(k;\tau,\tau'). \tag{1.48}$$

正如我们将在下一小节（§ 1.3.3）中看到的，构型空间中的关联函数可以通过谱函数的谱积分计算得到。由（1.47）可知，湍流能量计算为

$$\langle {\mathbf{u}'_{\mathrm{B}}}^2\rangle/2 = \langle u'_{\mathrm{B}\ell}u'_{\mathrm{B}\ell}\rangle/2 = \int Q(k;\tau,\tau)\ d\mathbf{k}, \tag{1.49}$$

这表明，（1.47）中与 H 相关的部分并不对湍流能量作出贡献。另一方面，湍流螺旋度计算为

$$\langle \mathbf{u}'_{\mathrm{B}}\cdot\boldsymbol{\omega}'_{\mathrm{B}}\rangle = \left\langle u'_{\mathrm{B}\ell}\epsilon_{\ell mn}\frac{\partial u'_{\mathrm{B}n}}{\partial x_m}\right\rangle = \int H(k;\tau,\tau)\ d\mathbf{k}. \tag{1.50}$$

只有式（1.47）的非镜像对称部分才会对湍流螺旋度产生贡献。

1.3.3. 雷诺应力的解析表达式与涡旋驱动力

构型空间中的雷诺应力可用其波数空间对应量表示为

$$\mathcal{R}_{ij} = \langle u_i'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}; \tau, T) u_j'(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{X}; \tau, T) \rangle = \int \mathcal{R}_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{X}; \tau, \tau, T) \; d\mathbf{k}, \tag{1.51}$$

其中，被积函数缩写为 $\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{k})$，表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij}(\mathbf{k}) \;&=\; \frac{\langle u_i'(\mathbf{k};\tau) u_j'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \\
&= \frac{\langle u_{0i}'(\mathbf{k};\tau) u_{0j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \\
&\quad + \delta\left(\frac{\langle u_{0i}'(\mathbf{k};\tau) u_{1j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} + \frac{\langle u_{1i}'(\mathbf{k};\tau) u_{0j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \right) + O(\delta^2) \\
&= \frac{\langle u_{\mathrm{B}i}'(\mathbf{k};\tau) u_{\mathrm{B}j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} + \frac{\langle u_{\mathrm{B}i}'(\mathbf{k};\tau) u_{01j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} + \frac{\langle u_{01i}'(\mathbf{k};\tau) u_{\mathrm{B}j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} \\
&\quad + \delta\left(\frac{\langle u_{\mathrm{B}i}'(\mathbf{k};\tau) u_{10j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} + \frac{\langle u_{10i}'(\mathbf{k};\tau) u_{\mathrm{B}j}'(\mathbf{k}';\tau)\rangle}{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')} + \cdots \right) \\
&\quad + O(\delta^2)
\end{aligned} \tag{1.52}$$

将具有统计性质（1.47）的 $\mathrm{u}_{\mathrm{B}}'(\mathrm{k};\,\tau)$、$\mathrm{u}_{01}'(\mathrm{k};\,\tau)$ 和 $\mathrm{u}_{10}'(\mathrm{k};\,\tau)$ 代入（1.52），可得雷诺应力表达式：

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_{\mathrm{T}} \mathcal{S}_{ij} + \left[\Gamma_i \Omega_{*j} + \Gamma_j \Omega_{*i} \right]_{\mathrm{D}}, \tag{1.53}$$

其中，D 表示张量的偏差部分或无迹部分： $\mathcal{A}_{ij\mathrm{D}} = \mathcal{A}_{ij} - (1/3)\mathcal{A}_{\ell\ell}\delta_{ij}$，S $= \{\mathcal{S}_{ij}\}$是平均速度应变率，定义为

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \mathbf{U}\delta_{ij}, \tag{1.54}$$

且 Ω_* 是平均绝对涡量 $\Omega_* = \Omega + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$。在 (1.53) 中，输运系数 ν_{T} 和 $\mathbf{\Gamma}$表示为

$$\nu_{\mathrm{T}} = \frac{7}{15}\int d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{t} d\tau_1 G(k;\tau,\tau_1)Q(k;\tau,\tau_1), \tag{1.55}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{30}\int k^{-2} d\mathbf{k}\int_{-\infty}^{t} d\tau_1 G(k;\tau,\tau_1)\nabla H(k;\tau,\tau_1). \tag{1.56}$$

这里，ν_{T} (1.55) 是与 (1.53) 中平均速度应变 S 耦合的输运系数，称为涡黏度或湍流黏度，它由格林函数 G 和能量谱函数 Q决定。在最简单的情形下，若格林函数的时间积分可独立于能量谱函数的时间积分求得，则 $\int_{-\infty}^{t} G(k;\tau,\tau_1)d\tau_1$给出湍流时间尺度 τ，而能谱$\int d\mathbf{k}Q(k;\tau,\tau_1)$的谱积分给出湍流能量 $K \sim u'^2$（u'：湍流速度的大小）。在这种情况下，(1.55) 可化简为

$$\nu_{\mathrm{T}} \sim \tau K \sim u'\ell, \tag{1.57}$$

其中，$\ell \sim u'\tau$ 是湍流的特征长度。方程 (1.57) 对应于湍流黏度的混合长度表达式。

另一方面，$\mathbf{\Gamma}$ (1.56) 是式 (1.53) 中平均绝对涡量 Ω_* 的耦合系数。该 $\mathbf{\Gamma}$ 由 G 和湍流螺度谱函数的空间梯度 ∇H决定。方程 (1.56) 表明,

湍流螺旋度的非均匀性对于动量输运中的螺旋度效应至关重要。与式 (1.57) 类似， $\mathbf{\Gamma}$ 的最简单表达式可写为

$$\mathbf{\Gamma} \sim \ell^2 \tau \nabla H. \tag{1.58}$$

这种形式的 $\mathbf{\Gamma}$；与其正比的是 ∇H 而非 H，这可以通过雷诺应力的对称性论证自然地理解。雷诺应力 $\mathsf{R} = \{\langle u_i' u_j' \rangle\}$具有对称性： $\mathcal{R}_{ij} \to \hat{\mathcal{R}}_{ij} = \langle \hat{u}_i' \hat{u}_j' \rangle = \langle (-u_i')(-u_j') \rangle = \langle u_i' u_j' \rangle = \mathcal{R}_{ij}$，即在坐标系 $\mathbf{x} \to \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ 反演下保持不变，并且具有偶宇称。平均（绝对）涡量是轴矢量或赝矢量，在反演下符号不变。另一方面，湍流螺旋度是$\hat{}$赝标量，在反演下符号会改变。由此可知，螺旋度 H （奇宇称）本身不能作为与 $\mathbf{\Omega}_*$ 耦合的正比系数进入雷诺应力表达式；但螺旋度的梯度 $\hat{} \; \hat{} \; \nabla H$具有偶宇称 $\nabla H \to \nabla H = (-\nabla)(-H) = \nabla H$，因此可以。实际上，正是在 (1.56) 中得到了这种 ∇H 依赖关系。

请注意， $\mathbf{\Gamma}$ 是一个矢量，而 $\mathbf{\Gamma}$ 的方向由湍流螺旋度 H 的空间分布通过 ∇H决定。根据 H的空间分布，式（1.53）中的 $\Gamma_i \Omega_{*j} + \Gamma_j \Omega_{*i}$各分量的符号可能为正，也可能为负。如果其符号与涡黏项 $-\nu_\mathrm{T} \mathcal{S}_{ij}$的符号相反，则 $\mathbf{\Gamma}$项或与螺旋度相关的项会抑制涡黏效应；反之，则会增强涡黏效应。然而， $\mathbf{\Gamma}$ 项或与螺旋度相关的项的符号并非任意分布。由于湍流螺旋度的生成取决于平均涡量和旋转，因此通常预期，与平均涡量和旋转耦合的螺旋度非均匀性 $\mathbf{\Gamma}$ $\mathbf{\Omega}_* = \{\Gamma_i \Omega_{*j}\}$呈现某种特定符号。应基于湍流螺旋度的输运方程进行详细讨论

（式（1.69）、式（1.73）—（1.75）及其模型（1.78），见§ 1.4.2）。

平均涡量方程 (1.19) 中的涡旋驱动力 $\mathrm{V}_\mathrm{M} = \{V_{\mathrm{M}i}\}$ 可由雷诺应力 R $= \{\mathcal{R}_{ij}\}$ 通过以下精确关系得到:

$$\mathbf{V}_\mathrm{M} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{R}} + \nabla K, \tag{1.59}$$

其中，$K(= \langle \mathrm{u}'^2 \rangle/2)$ 是湍流能量。第二项，即与 K相关的项，不会对平均涡量 Ω 的演化产生贡献，因为 $\nabla \times (\nabla K) = 0$。

将雷诺应力表达式 (1.53) 代入 (1.59)，可得涡旋驱动力的表达式:

$$\mathbf{V}_\mathrm{M} = -D_\Gamma(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}) - [(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}) \cdot \nabla]\boldsymbol{\Gamma} - \nu_\mathrm{T} \nabla \times \boldsymbol{\Omega} \tag{1.60}$$

with

$$D_\Gamma = \nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}. \tag{1.61}$$

在 (1.60) 中，第三项，即与 ν_T相关的项，表示涡黏度导致的平均涡量 Ω 破坏。另一方面，与 $\boldsymbol{\Gamma}$ 相关的第一项和第二项则表示 Ω 对抗涡黏效应而可能发生的生成或维持。从 (1.60) 可知，与平均绝对涡量（平均涡量和旋转）耦合的非均匀湍流螺旋度可能有助于平均涡量生成，而湍流能量则会导致平均涡量破坏。

根据雷诺应力的谱表达式（1.53）以及（1.55）和（1.56），螺旋度效应相对于涡黏效应的相对大小可写为

$$\frac{(\text{helicity effect})}{(\text{eddy-viscosity effect})} = \frac{|\nu_\mathrm{T} \boldsymbol{\mathcal{S}}|}{|\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Omega}_*|} \sim \frac{\Omega_*}{\mathcal{S}} \frac{|H(k)|}{kE(k)}, \tag{1.62}$$

其中，$\Omega_* = \sqrt{\Omega^{*ij}\Omega^{*ij}}$和 $\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{S}_{ij}\mathcal{S}_{ij}}$分别是平均绝对涡量和平均速度应变的大小。如果螺度谱 $H(k)$与能量 $E(k)$具有相同的标度关系（直接数值模拟支持这一点），则相对螺旋度 $|H(k)|/[kE(k)]$ 的变化规律为 $\propto k^{-1}$。这意味着，随着我们转向更小的尺度，螺旋度效应的重要性会降低。在考虑将螺旋度效应应用于具有较小滤波宽度 Δ的大涡模拟（LES）亚格子尺度（SGS）建模时，应牢记这一点。

1.4. 考虑螺旋度的湍流建模

在前文中，我们展示了平均速度和涡量场会通过雷诺应力 $\mathrm{R} = \{\mathcal{R}_{ij}\}$ 以及湍流涡动势 $\mathrm{V_M} = \{V_{\mathrm{M}i}\}$受到湍流螺旋度的影响。从实际应用的角度来看，构建一种融入螺旋度效应的湍流模型十分重要。螺旋湍流中，速度与涡量脉动彼此（至少部分地）对齐，本质上是三维的。同时，螺旋流动结构在大尺度上通常表现出很强的各向异性。因此，我们必须在从大尺度到小尺度的所有尺度范围内，考虑一个三维的巨大模拟区域。这对直接数值模拟（直接数值模拟）而言是一个极具挑战性的情形。借助融入螺旋度效应的湍流模型，我们可以一致地对与天体物理、地球物理、等离子体物理和工程现象相关的螺旋湍流流动构型进行数值分析。下面，我们将介绍这样一种螺旋度湍流模型的实例，并着重阐述建模的基本概念。

1.4.1. 单点统计量的选择

正如第 2 节所指出的，螺旋度总量和能量总量一样，都是流体方程系统的无黏不变量。从这个意义上说，螺旋度局部密度和能量局部密度一样，都是体现流体动力学性质的基本量。

湍流能量 $\langle \mathrm{u}'^2 \rangle/2 (\equiv K)$ 表示脉动运动的局部强度。这一点充分体现在湍流能量决定了涡黏度等湍流输运性质。与湍流能量不同，湍流螺旋度 $\langle \mathrm{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle (\equiv H)$ 表示左手和右手扭转特性。从这个意义上说，湍流螺旋度本身可以用作衡量脉动运动结构的指标。

$K-\varepsilon$ 模型是工程学和科学领域中应用最广泛的湍流模型之一。在该模型中，为了以自洽的方式求解平均场和湍流场，湍流统计量方程——即湍流能量 $K=\langle \mathrm{u}'^2 \rangle/2$ 及其耗散率 ε 的方程——与平均场方程 [Launder & Spalding, 1972年, Rodi, 1993] 同时求解。涡黏度、涡扩散率等湍流输运系数用 K 和 ε 表示。由于输运方程与平均场的动力学一同求解， $K-\varepsilon$模型在对平均场–湍流相互作用进行非线性、自洽处理方面更为完善。

除单位质量湍流能量 K 及其耗散率ε外，我们还采用湍流螺旋度 H 作为湍流统计量之一。这三个湍流统计量定义为

$$K=\langle \mathbf{u}'^2 \rangle/2, \tag{1.63}$$

$$\varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right\rangle, \tag{1.64}$$

$$H = \langle \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle. \tag{1.65}$$

此外，我们还可以采用湍流螺旋度的耗散率 ε_H:

$$\varepsilon_H = 2\nu \left\langle \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j'}{\partial x_i} \right\rangle \tag{1.66}$$

作为一种湍流统计量。然而，与 ε的模型方程相比， ε_H 的对应方程尚未得到很好的构建。因此，我们不将 ε_H 采用为湍流统计量。关于螺度耗散率方程的建模，参见 Yokoi [2016]。

涡黏度 ν_T (1.55)和螺度相关输运系数 $\mathbf{\Gamma}$ (1.56)通过波数空间中的谱和响应函数积分表示，对于实际应用而言过于复杂。利用上述单点统计量 K、 ε 和 H，雷诺应力 R (1.53)中的涡黏度 ν_T和螺度相关系数 $\mathbf{\Gamma}$ ，以及涡旋驱动力 $\mathrm{V_M}$ (1.60) 中的相应项，可简化并建模为

$$\nu_\mathrm{T} = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \tag{1.67}$$

$$\mathbf{\Gamma} = C_\gamma \frac{K^4}{\varepsilon^3} \nabla H, \tag{1.68}$$

其中 C_μ 和 C_γ 是模型常数。请注意，这些表达式是用湍流统计量 K、 ε和 H 表示的，其中 $\tau \sim K/\varepsilon$ 和$\ell \sim K^{3/2}/\varepsilon$；而表达式（1.57）和（1.58）则是用混合长度 ℓ 和湍流的特征时间尺度 τ 表示的。

1.4.2. 螺旋度湍流模型

螺旋度湍流模型由平均速度方程（1.17）、雷诺应力表达式（1.53）、相应的输运系数 ν_{T} （1.55）和 $\mathbf{\Gamma}$ （1.56），以及针对三个湍流统计量 K、 ε和 H 的模型方程构成。

根据基本方程，湍流能量和螺旋度的精确方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)F=P_F-\varepsilon_F+\nabla\cdot\mathbf{T}_F, \tag{1.69}$$

其中， F表示湍流能量 K或湍流螺旋度 H，即 $F=(K,H)$。在方程 (1.69) 中， P_F、 ε_F 和 T_F分别是 F的产生率、耗散率和输运通量。它们定义为

$$P_K=-\left\langle u'_\ell u'_m\right\rangle\frac{\partial U_m}{\partial x_\ell}, \tag{1.70}$$

$$\varepsilon_K=\nu\left\langle\frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell}\frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell}\right\rangle\equiv\varepsilon, \tag{1.71}$$

$$\mathbf{T}_K=-\left\langle p'\mathbf{u}'\right\rangle-\left\langle\frac{1}{2}\mathbf{u}'^2\mathbf{u}'\right\rangle+\nu\nabla\left(\frac{1}{2}\left\langle\mathbf{u}'^2\right\rangle\right), \tag{1.72}$$

$$P_H=-\left\langle u'_m u'_\ell\right\rangle\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_\ell}+\Omega_\ell\frac{\partial}{\partial x_m}\left\langle u'_m u'_\ell\right\rangle, \tag{1.73}$$

$$\varepsilon_H=2\nu\left\langle\frac{\partial u'_m}{\partial x_\ell}\frac{\partial\omega'_m}{\partial x_\ell}\right\rangle, \tag{1.74}$$

$$\mathbf{T}_H=-\left\langle p'\boldsymbol{\omega}'\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\mathbf{u}'^2\boldsymbol{\omega}'\right\rangle-\left\langle(\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}')\mathbf{u}'\right\rangle+2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\left\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\right\rangle+\nu\nabla\left\langle\mathbf{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\right\rangle, \tag{1.75}$$

其中 $[2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\langle\mathbf{u}'\mathbf{u}'\rangle]_\ell=2\omega_{\mathrm{F}m}\left\langle u'_m u'_\ell\right\rangle$。

由精确方程 (1.69) 及 (1.70)–(1.75)，{v1}、{v2} 和 {v3} 的模型方程可写为

K、 ε 和 H 可表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)K=P_K-\varepsilon+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{\sigma_K}\nabla K\right), \tag{1.76}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)\varepsilon=C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{K}P_K-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{K}\varepsilon+\nabla\cdot\left(\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{\sigma_\varepsilon}\nabla\varepsilon\right), \tag{1.77}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla\right)H=P_H-\varepsilon_H+\nabla\cdot\left(2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}K+\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{\sigma_H}\nabla H\right). \tag{1.78}$$

这里， σ_K、 σ_ε、 σ_H 分别是能量、耗散率和螺旋度的湍流普朗特数； $C_{\varepsilon 1}$、 C_{ε_2} 和 C_H 是与能量耗散率和螺旋度耗散率相关的模型常数。

对于式（1.78）右端的 ε_H ，我们采用如下代数模型:

$$\varepsilon_H=C_H\frac{\varepsilon}{K}H. \tag{1.79}$$

或者，我们也可以构造螺旋度耗散率 ε_H 的输运方程，并与式（1.76）—（1.78）一并求解，而不采用代数模型（1.79）。我们假设，螺旋度与被动标量类似，由尺度 k、能量传递率和螺旋度传递率 ε 和 ε_H决定。假设惯性区内的谱为

$$\frac{\sigma_K(k,\mathbf{x};\mathbf{t})}{\varepsilon}=\sigma_{K0}\varepsilon^{-1/3}k^{-11/3}, \tag{1.80}$$

$$\frac{\sigma_H(k,\mathbf{x};\mathbf{t})}{\varepsilon_H}=\sigma_{H0}\varepsilon^{-1/3}k^{-11/3}, \tag{1.81}$$

其中， σ_{K0} 是柯尔莫哥洛夫常数， σ_{H0} 是螺旋度对应的常数。借助 TS-DIA，在最低阶分析中，我们得到了 H、 ε、 ε_H与最大含能涡旋尺寸之间的代数关系

涡旋 ℓ_{C}，如式（1.79）所示。这对应于均匀各向同性湍流中湍流螺旋度耗散率 ε_H 的估计。若进一步进行一阶分析，则可得到螺旋度耗散率 ε_H 的方程:

$$\frac{D\varepsilon_H}{Dt} = C_{\varepsilon H1}\frac{\varepsilon_H}{K}P_K - C_{\varepsilon H2}\frac{\varepsilon_H}{K}\varepsilon + C_{\varepsilon H3}\frac{\varepsilon_H}{H}P_H - C_{\varepsilon H4}\frac{\varepsilon_H}{H}\varepsilon_H, \tag{1.82}$$

其中模型常数在理论上估计为

$$C_{\varepsilon H1} = 0.36,\ \ C_{\varepsilon H2} = 0.49,\ \ C_{\varepsilon H3} = C_{\varepsilon H4} = 1.1. \tag{1.83}$$

根据螺度谱同时依赖于 ε 和 ε_H（如式（1.81）所示）的假设，ε_H 方程不仅取决于 P_H 和 ε_H，还取决于 P_K 和 ε。关于模型推导的详细信息，请参阅 Yokoi [2016]。

由于尚未通过数值方法检验 ε_H 方程的有效性，以下我们采用式（1.78）及其代数模型（1.79）。[5]

在平均流能量和螺旋度的方程 $\mathsf{U}^2/2$ 和 $\mathsf{U}\cdot\Omega$ 中，项与 P_K (1.70) 和 P_H (1.73) 中的完全相同，但符号相反。这意味着，平均场能量和螺旋度的汇（或源）对应于湍流对应量的源（或汇）。从这个意义上说，产生项 P_K 和 P_H 表示能量和螺旋度从平均场能量级联到湍流对应量。由 (1.70) 和 (1.73) 可知，非均匀平均场与雷诺应力耦合会引发这种级联，并有助于产生湍流能量和

[5]然而，值得注意的是，在某些流动构型中，代数模型会产生偏差。例如，在埃克曼边界层的直接数值模拟中，湍流螺旋度的空间分布 H 在某个高度会发生符号反转，而该处的湍流螺旋度耗散率 ε_H 并未消失 [（Deusebio 与 Lindborg， 2014]）。

螺旋度。

正如模型方程 (1.76)–(1.78) 中第三项或与 σ 相关的项所示，T_K、T_H 等输运率项采用梯度扩散近似进行建模。另一方面，(1.78) 中的 $2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}K$ 项表示由旋转方向上的非均匀性引起的湍流螺旋度生成：

$$\nabla\cdot(2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}K)=(2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\nabla)K. \tag{1.84}$$

预计这一项在地球物理流和天体物理流的湍流螺旋度生成中发挥关键作用，因为旋转和分层是其中的重要因素。例如，在台风和飓风中，旋转$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 与流动的垂直非均匀性相结合，可能有助于湍流螺旋度生成。相比之下，在龙卷风中，系统旋转 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 不会起作用，但平均相对涡量与 P_H (1.73) 第二项中的非均匀雷诺应力相结合，可能有助于湍流螺旋度生成。§ 1.6.4 将讨论其在某些地球物理和天体物理流中的可能应用。

在没有湍流螺旋度 ($H=0$) 的情况下，这个三方程 ($K-\varepsilon-H$) 模型应简化为标准的两方程 ($K-\varepsilon$) 模型。因此，与 $K-\varepsilon$ 模型相关的模型常数应与标准 $K-\varepsilon$ 模型中的保持一致，即

$$C_\mu=0.09,\ \sigma_K=1.0,\ C_{\varepsilon1}=1.4,\ C_{\varepsilon2}=1.9,\ \sigma_\varepsilon=1.3. \tag{1.85}$$

请注意，采用固定常数的 $K-\varepsilon$ 模型已成功应用于许多二维和三维壁面边界层、管道流、自由剪切流、再循环流、受限流和射流。关于模型及模型常数的有用介绍

可参见Launder & Spalding [1972], Rodi[1993]。从这个意义上说， $K-\varepsilon$ 模型中的模型常数（1.85）已得到充分优化，应尽可能保持固定。众所周知， $C_{\varepsilon 1}$ 或 $C_{\varepsilon 2}$ 变化5%，会导致射流扩展速率变化20% [Rodi， 1993]。正如稍后在§ 1.5.3中将要讨论的那样，若不考虑螺旋度效应，为了将标准 $K-\varepsilon$ 模型实际应用于旋流管流，就必须大幅降低 $C_{\mu}=0.09 \rightarrow 0.001$ 。然而，这种临时处理并无确凿依据。

对于其余属于 $K-\varepsilon-H$模型本身的模型常数，应通过将当前螺度模型实际应用于螺旋湍流（例如旋流）来确定。

利用螺旋度效应的概念，我们可以为大涡模拟（LES）构建一组亚格子尺度湍流模型。在大涡模拟中，我们对场量 f 应用滤波器，将其分解为网格尺度（GS）和亚格子尺度（SGS）分量， $\overline{f}$ 和 f''。在模拟中，求解大尺度或网格尺度运动（大涡），而小尺度或亚格子尺度运动则通过建模处理（亚格子尺度建模）。Smagorinsky模型是最常用的亚格子尺度模型。在该模型中，网格尺度方程中出现的亚格子尺度黏度 ν_{S} 表示为网格尺度速度应变 $\overline{S}$ （ $=\sqrt{\overline{\mathcal{S}}_{ij}^2/2}$）和滤波宽度 Δ 的函数，即 $\nu_{\mathrm{S}}=(C_{\mathrm{S}}\Delta)^2\overline{S}$ （$\overline{\mathcal{S}}_{ij}$：网格尺度应变率张量， C_{S}：Smagorinsky常数）。正如这一表达式所示，Smagorinsky模型是混合长度模型在亚格子尺度上的对应形式（注意， Δ 是未解析运动或亚格子尺度运动的最大尺度）。这种简洁性使Smagorinsky模型广泛应用于各种类型的湍流中。然而，Smagorinsky模型存在若干不足之处。其中一个不足是需要不断调整常数。Smagorinsky常数 C_{S} 必须进行调整

不同流动中的取值不同： $C_{\mathrm{S}}=0.18$ 各向同性湍流取0.15，混合层湍流取0.10，壁面湍流取0.10。这意味着，针对均匀各向同性湍流优化、模型常数为 $C_{\mathrm{S}}=1.8$ 的 Smagorinsky 模型，若应用于普遍存在流向涡量结构的近壁湍流，其耗散会过强，超过三倍（（$1.8/1.0$）$^{2}=3.24$）。

由于流向涡量强烈暗示局部存在湍流螺旋度，因此预计湍流螺旋度在降低剪切湍流（如混合层和壁面湍流）中的有效黏度方面发挥着重要作用。在该模型中，通过亚格子尺度螺度，将流向涡量所表征的湍流结构效应纳入亚格子尺度模型。即使在经典Smagorinsky模型的框架下，纳入亚格子尺度螺度效应也能缓解含有流向涡量的亚格子尺度剪切结构存在时亚格子尺度黏度被高估的问题 [Yokoi & Yoshizawa,2017]。

1.5. 旋流的应用

1.5.1. 旋流

螺旋度湍流模型由平均速度方程和湍流场方程构成，其中雷诺应力由式（1.53）给出，湍流黏度 ν_{T} 和螺度相关系数 $\mathbf{\Gamma}$ 分别由式（1.67）和（1.68）表示。湍流统计量的模型方程分别为：湍流能量 K的方程（1.76），以及能量耗散

率 ε的方程（1.77），还有湍流螺旋度 H 的方程（1.78）；螺旋度耗散率 ε_H 则采用代数模型（1.79）。

我们将当前的螺度模型应用于湍流旋流。首先，我们概述旋流的特征性质。旋流由主流或轴向流，以及围绕轴线的旋流或周向流组成。这种构型非常简单，因此旋流在科学界和工程界随处可见。在工程领域，旋流常用于多种装置中，包括旋流喷嘴、燃烧燃料气体喷射室等。在科学领域，旋流通常见于龙卷风和气旋。在这些地球物理流中，旋转流往往伴随着上升流和/或下降流（图 1.4）。这些螺旋流结构被认为与龙卷风和气旋中大尺度相干流结构的形成和维持有关 [Lilly，1986年，Levina 和 Montgomery，2014]。在天体物理流动现象中，从吸积盘中心区域喷射出的双极喷流被认为呈螺旋状。这些垂直于盘面的外流通常伴随着与吸积盘方位旋转相关的周向流。

旋流射流的一个显著特征是射流速度分布在中心轴附近出现凹陷。在多种旋流中，普遍可以观察到，与外核心区相比，中心区域的轴向速度有所降低。图 1.5 示意性地描绘了直管内湍流旋流的平均轴向速度和周向速度分布。在靠近入口的上游区域，旋流运动在中心区域附近注入，此时平均轴向速度在中心轴附近呈现凹陷分布。这种凹陷分布逐渐减弱

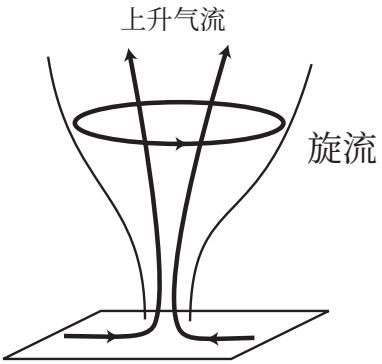

图 1.4：气旋旋流伴随上升气流。

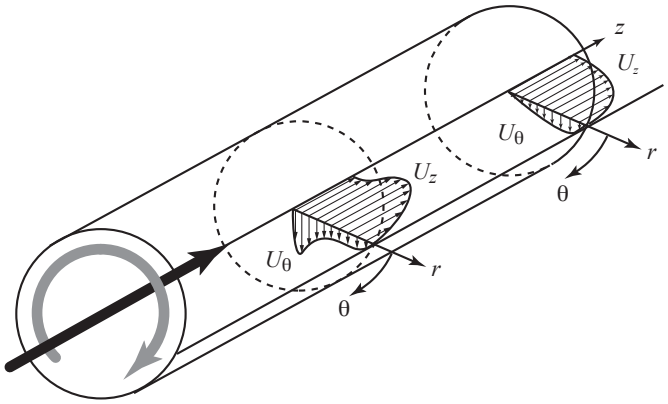

图 1.5：直管中旋流的构型。

并向下游区域发展，最终变为平坦分布，与通常无旋流的湍流管流中观察到的分布一致。

旋流中轴向速度的减小，在层流情况下很容易理解。我们考虑柱坐标系 (r, θ, z)，其旋流轴沿 z 方向。对于定常轴对称旋流，我们假设径向流动 u_r 远小于周向速度和轴向速度 u_θ 与 u_z，因而可以忽略。在这种情况下，径向动量平衡由向心加速度与

径向压力梯度之间的平衡实现，即

$$-\frac{(u_\theta)^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.86}$$

（ρ：流体密度）。将式（5.1）从轴心 $r = 0$ 到外周区域中的径向位置 $r = r_*$，对 r 积分，并对 z 求导，可得

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{r=0} - \left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{r=r_*} = -\rho \int_0^{r_*} \frac{\partial}{\partial z}\frac{(u_\theta)^2}{r} dr. \tag{1.87}$$

这表明，中心（$r = 0$）与外周点（$r = r_*$）处的压力轴向梯度并不相同，具体取决于该处周向速度 u_θ 的大小。另一方面，动量的轴向平衡为

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1.88}$$

结合式（1.87），可写为

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}(u_z)^2\right|_{r=0} &= -\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{r=0} \\
&= -\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{r=r_*} + \int_0^{r_*} \frac{\partial}{\partial z}\frac{(u_\theta)^2}{r} dr \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}(u_z)^2\right|_{r=r_*} + \int_0^{r_*} \frac{\partial}{\partial z}\frac{(u_\theta)^2}{r} dr.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

这意味着轴向速度的演化在中心区域和外围区域之间存在差异。这种差异取决于周向速度分布沿轴向的演化，具体体现为式（1.89）右端最后一项。如果旋流运动在中心和内侧

管道核心区在入口处受到驱动，并在核心区内衰减，那么式（1.89）中的第二项或与（u_θ）^{2}相关的项为负：

$$\int_0^{r_*} \frac{\partial}{\partial z}\frac{(u_\theta)^2}{r}dr < 0. \tag{1.90}$$

在这种情况下，我们有

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}(u_z)^2\bigg|_{r=0} < \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}(u_z)^2\bigg|_{r=r_*}, \tag{1.91}$$

这意味着，在下游区域，中心处的轴向速度（$r = 0$）相对于外部区域的速度（$r = r_*$）较小，从而在中心区域形成凹陷分布。另一方面，如果旋流运动由外周区域驱动，那么在除近壁面区域以外的流动主体部分，旋转速度将沿轴向增加。于是，(1.89)最后一行中的第二项为正。在这种情况下，中心处的轴向速度应大于外部区域中的相应速度，从而导致中心区域的轴向速度加速。这实际上发生在轴向旋转管流中，此时外边界管壁的旋转是流体旋流运动的来源。这一论述清楚地表明，旋转速度沿轴向的衰减通过压力相互作用，直接与中心区域轴向速度的减速相联系。

由于湍流通量的存在，湍流旋流中的情况要复杂得多。在这种情况下，准确评估雷诺应力对于准确描述和正确预测旋流至关重要。

1.5.2. 湍流旋流的特性

由于几何形状简单，直管中的旋流已通过实验得到广泛研究。这些实验研究提供了关于旋流中平均轴向和周向速度以及湍流统计量的详尽数据 [Kitoh, 1991, Steenbergen, 1995, Hoekstra, Derksen, & Van Den Akker, 1999, Gupta & Kumar, 2007]。

直管中湍流旋流的主要特征如下：

(i) 与核心区的轴向流相比，中心轴区域的平均轴向流速度减慢（中心处出现凹陷）。减速程度随旋流强度（经尺度化的角动量轴向通量）增大而增加；

(ii) 旋流强度随距参考点的下游距离或轴向距离呈指数衰减。

此处，旋流强度 S_{W} 定义为角动量轴向通量与线动量轴向通量之比，经尺度化后表示为

$$S_{\mathrm{W}} = \frac{\int_0^a 2\pi r^2 U_\theta U_z dr}{\pi a^3 U_{\mathrm{m}}^2}, \tag{1.92}$$

其中， a 为管道半径， U_{m} 为体积平均速度，定义为 $U_{\mathrm{m}} = \int_0^a 2\pi U_z r dr / \pi a^2$。

上述两个特征彼此相关。第一个特征：中心处轴向速度的凹陷示意如图 1.6 所示。

在旋流强度较大的情况下，中心轴区域会发生平均轴向流反转。这种反转是工程应用中一个非常重要的课题，因为与燃烧、燃料供应等相关的流动方向实际上会在流动中的某些位置发生改变，

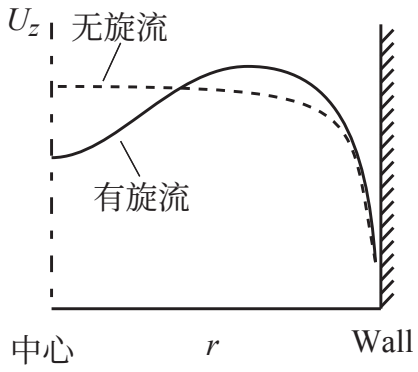

图 1.6：有旋流和无旋流时的平均轴向速度剖面。

等等。借助螺旋度这一变分法约束条件的概念，研究人员通过变分分析考察了轴向流反转的条件 [Yoshizawa 等，2001年，Yokoi 等， 2004]。理论上已经证明，如果平均流螺度大于临界螺度（其大小与平均轴向动量通量的平方成正比），那么中心轴处的平均轴向速度就会反转。

1.5.3. 直管内旋流的传统湍流模型

众所周知，标准涡黏性型 $K-\varepsilon$ 模型无法很好地再现特征（i）和（ii）。在式（1.53）中去掉第三项，即与螺旋度相关的项，就得到标准 $K-\varepsilon$ 模型。将标准 $K-\varepsilon$ 模型应用于管道中的湍流旋流时，得到的平均轴向速度剖面是平坦的；在没有旋流运动的湍流管流中，观测到的轴向速度剖面正是如此（图 1.6）。这是因为，在充分发展湍流中，涡黏效应非常强，

因此，除壁面附近黏度主导非线性的边界层外，不允许存在非均匀的平均速度结构。为了弥补标准 $K-\varepsilon$ 模型的这一缺陷，并在 $K-\varepsilon$模型框架内再现凹陷轴向速度剖面，工程领域提出了对模型进行若干修改。在这一修正后的 $K-\varepsilon$ 模型中，与雷诺应力的r-θ 分量相关的模型常数 $\mathcal{R}_{r\theta}$被人为设得极小，例如 $C_\mu = 0.09 \to 0.001$。于是，模型计算保留了平均轴向速度的凹陷分布 [Kobayashi & Yoda, 1987]。然而，任何优秀的湍流模型都应满足模型常数的普适性要求，这种处理却是权宜之计，完全不可取。

1.5.4. 使用螺旋度湍流模型分析湍流旋流

我们将本文的螺旋度湍流模型（$K-\varepsilon-H$ 模型）应用于直管中的湍流旋流。在该模型中，除包含输运系数 ν_T (1.67) 和 $\mathbf{\Gamma}$(1.68) 的平均速度方程 (1.17) 外，还同时求解湍流统计量的三个输运方程：K(1.76)、ε (1.77) 和 H (1.78)。由此自洽地确定平均场和湍流场。

图 1.7 中，我们绘出了由 $K-\varepsilon-H$ 模型计算的平均轴向速度 U_z 分布和旋流强度 S_W 的衰减情况，并将其与实验结果以及标准 $K-\varepsilon$ 模型的对应结果进行了比较。正如 § 1.5.3 中所述，平均轴向速度的凹陷分布在

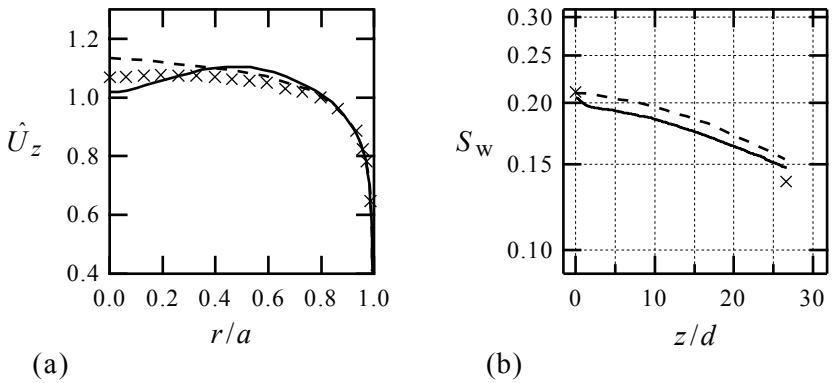

图 1.7：平均轴向速度的径向分布和旋流强度的轴向衰减。（a）按体积平均速度 $U_z = U_z/U_{\mathrm{M}}$ 归一化的轴向速度，以及（b）旋流强度 S_W。 $\times$：实验； $---$：标准 $K-\varepsilon$ 模型； $--$：螺旋度（$K-\varepsilon-H$）模型。根据 Yokoi & Yoshizawa [1993] 重绘。

中心区域无法用标准 $K-\varepsilon$ 模型再现。与此形成鲜明对比的是，使用本文的 $K-\varepsilon-H$ 模型，无需对模型常数进行任何人为调整，便可自然地再现这种凹陷分布。与标准 $K-\varepsilon$ 模型相比，螺旋度（$K-\varepsilon-H$）模型也更准确地再现了旋流强度 S_{W} 的指数衰减。

这些结果清楚地表明，螺旋度效应与描述湍流旋流的流动演化密切相关。非均匀湍流螺旋度与旋转和/或大尺度涡量（平均速度剪切的反对称分量）耦合，通过与大尺度速度应变（平均速度剪切的对称分量）耦合的涡黏度，抵消湍流能量导致的输运增强。

1.6. 非均匀螺旋度产生的大尺度流动

上一节讨论了螺旋度效应在输运抑制中的重要性。湍流螺旋度有助于输运增强与输运抑制之间的动态平衡。湍流螺旋度通过涡黏度抵消湍流能量导致的输运增强，从而抑制输运。同时，湍流螺旋度也可能有助于形成全局流动结构。本节将讨论湍流螺旋度在产生大尺度流方面的作用。

1.6.1. 涡旋发电机

在流体的涡量方程 (1.6) 中，用磁场 b 替换涡量 $\boldsymbol{\omega}$，并用磁扩散率 η 替换黏度 ν，我们得到磁感应方程:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}. \tag{1.93}$$

磁感应方程（1.93）使发电机效应成为可能。与平均涡量感应方程（1.19）相对应，平均磁场 B 的感应方程写为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times \mathbf{E}_{\mathrm{M}} \tag{1.94}$$

其中 B 满足无散条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.95}$$

其中，$\mathrm{E_M}$ 是定义为下式的湍流电动势

$$\mathbf{E}_{\mathrm{M}} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle. \tag{1.96}$$

平均磁感应方程 (1.94) 通过湍流电动势 $\mathrm{E_M}$实现大尺度磁场的生成与维持。尽管 (1.6) 与 (1.93) 之间存在若干根本差异 [Moffatt & Dormy, 2019], 但二者的相似性表明，涡旋发电机可能存在；即通过平均涡量方程中的湍流涡动势 $\mathrm{V_M} = \langle \mathrm{u}' \times \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 实现大尺度涡量的生成与维持。实际上，已有多项研究探讨了这一涡旋发电机问题 [Krause & R¨udiger, 1974, Moiseev, et al., 1983, Chkhetiani & Gvaramadze, 1988, Khomenko, Moiseev & Tur, 1991, Kitchatinov, R¨udiger & Khomenko, 1994]。这些研究发现，要实现大尺度流动生成，雷诺应力必须存在某种对称性破缺，例如各向异性、可压缩性、平均流等。例如，Elperin 及其合作者研究了平均速度剪切对均匀非螺旋湍流的影响 [Elperin, Kleeorin & Rogachevskii, 2003] 以及对形成涡旋结构的大尺度不稳定性的影响 [Elperin, et al., 2007]。数值研究证实了剪切流湍流中会自发形成大尺度流动模式 [K¨apyl¨a, Mitra & Brandenburg, 2009]。非螺旋湍流中的这些剪切流效应对应于与雷诺应力二阶非线性模型相关的湍流各向异性状态。速度剪切 $\nabla \mathrm{U} = \{\partial U_j / \partial x_i\}$

可分解为应变率张量部分 $\mathcal{S}_{ij}$ 和涡量张量部分 Ω_{ij}。关于 $\mathcal{S}_{ij}$ 和 Ω_{ij} 的非线性效应，可用应变张量和涡量张量的二次项表示，例如 $\mathcal{S}_{i\ell}\mathcal{S}_{\ell j}$, $\mathcal{S}_{i\ell}\Omega_{\ell j}$, $\Omega_{i\ell}\Omega_{\ell j}$。这些非线性模型会在管道流动中产生二次流 [Speziale, 1991]。需要注意的是，无需求助于非镜像对称性 [，这些雷诺应力的非线性表达式可通过 TSDIA公式中的高阶 $O(\delta^2)$ 计算推导得到 [Yoshizawa, 1984, 1993]。

下文将从非均匀螺度效应的角度探讨涡旋发电机问题 [Yokoi & Yoshizawa, 1993年, Yokoi & Bran- denburg, 2016, Kleeorin & Rogachevskii, 2018]。

有一些机制与本文讨论的螺旋度效应类似。一种是所谓的各向异性动能 α（AKA）效应 [Frisch、She 和 Sulem, 1987] 另一种是 Λ 效应 [R¨ udiger, 1980, 1989]。AKA 效应是非镜面对称湍流中整体流动生成的一种大尺度不稳定性。在 AKA 公式中，假设湍流雷诺数较小，并且雷诺应力可以通过对小而均匀的平均速度进行泰勒展开来表示。在这些假设下，平均速度的演化受一种与平均速度剪切耦合的各向异性输运系数支配。正如这些假设所表明的，AKA 效应基本上只在低雷诺数下起作用，此时动量方程中的涡黏度可以忽略。这与本文讨论的、作用于强非线性湍流中的螺旋度效应形成鲜明对比。另一方面， Λ 效应是湍流各向异性对雷诺应力的贡献。在这一公式中，假设雷诺应力的表达式是角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$的泛函的线性组合。 Λ 效应与本文讨论的螺旋度效应相似——

似之处在于，这两种效应都在强湍流区域起作用。这与 AKA 效应形成鲜明对比。然而， Λ 效应中的雷诺应力表达式是以假设形式给出的。从这个意义上说，对于每种具体应用，都应考察决定输运系数的物理机制及其有效性。关于 AKA 效应和 Λ 效应的进一步说明，读者可参阅 Yokoi & Brandenburg [2016]的附录。

将涡旋驱动力 $\mathrm{V_M}$ (1.60) 的表达式代入平均涡量方程 (1.19)，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} &= \nabla \times [\mathbf{U} \times (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}) - \nu \nabla \times \boldsymbol{\Omega}] + \nabla \times \mathbf{V}_{\mathrm{M}} \\ &= \nabla \times [\mathbf{U} \times (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})] - \nabla \times [(\nu + \nu_{\mathrm{T}}) \nabla \times \boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{I}_{\mathrm{V}}. \end{aligned} \tag{1.97}$$

这里，第二项表示湍流导致的增强输运。由于涡黏度ν_{T}，有效黏度从 ν 增强至 $\nu + \nu_{\mathrm{T}}$ 。第三项 $\mathrm{I_V}$ 定义为

$$\mathbf{I}_{\mathrm{V}} = \nabla \times \left\{ -D_{\Gamma} (\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}) - \left[(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}) \cdot \nabla \right] \boldsymbol{\Gamma} \right\}, \tag{1.98}$$

该项表示非均匀螺旋度效应 $[\boldsymbol{\Gamma} \propto \nabla H$ (1.56)] 可能导致的涡量感应。$\mathrm{I_V}$ 的符号可以为正，也可以为负。其符号取决于湍流螺旋度的空间分布，具体取决于 $D_{\Gamma} = \nabla^2 H$ 和 $(\Omega_* \cdot \nabla)\boldsymbol{\Gamma}$ 的符号，其中 Ω_* 是平均绝对涡量，定义为 $\Omega_* = \Omega + 2\omega_{\mathrm{F}}$。当 $\mathrm{I_V}$ 为负时，湍流螺旋度效应会增强涡黏度效应。

在大尺度涡量的发展阶段，此时 $|\Omega| \ll |2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}|$,

由非均匀螺旋度引起的感应可近似表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{\mathrm{V}} &= \nabla\times\left[-2D_{\Gamma}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}-\left(2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\Gamma}\right]\\ &= -2(\nabla D_{\Gamma})\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}-2\nabla\times\left[(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Gamma}\right].\end{aligned}\tag{1.99}$$

1.6.2. 螺旋度效应导致流动生成的起源：简单论证

对平均涡量方程（1.97）取旋度的逆运算，得到

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}=\mathbf{U}\times(\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})-(\nu+\nu_{\mathrm{T}})\nabla\times\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{V}_{\mathrm{M}}+\nabla\varphi,\tag{1.100}$$

其中，φ 是由边界条件确定的势场，其细节此处不作讨论。利用湍流涡动势 $\mathbf{V}_{\mathrm{M}}$ (1.60)，湍流所感应的平均速度 $\delta\mathbf{U}$，可通过对(1.100)进行时间积分近似表示为

$$\delta\mathbf{U}\sim-\tau D_{\Gamma}\boldsymbol{\Omega}_{*}\sim-\tau(\nabla^{2}H)\boldsymbol{\Omega}_{*}.\tag{1.101}$$

这意味着，在由湍流螺旋度的拉普拉斯算子 $\nabla^2H=D_\Gamma$ 表示的非均匀湍流螺旋度存在时，会诱导出整体流动 $\delta\mathbf{U}$。对于$\nabla^2H<0$，该流动与平均绝对涡量 $\boldsymbol{\Omega}_*(=\boldsymbol{\Omega}+2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})$ 平行；对于 $\nabla^2H>0$，则与之反平行。某个量的拉普拉斯算子表示该量在局部相对于周围环境的分布程度是更多还是更少。由（1.101）可知，在湍流螺旋度局部分布更为集中（$\nabla^2H<0$）的区域，会沿与平均绝对涡量 $\boldsymbol{\Omega}_*$ 平行的方向产生平均流 $\delta\mathbf{U}$；而在湍流螺旋度

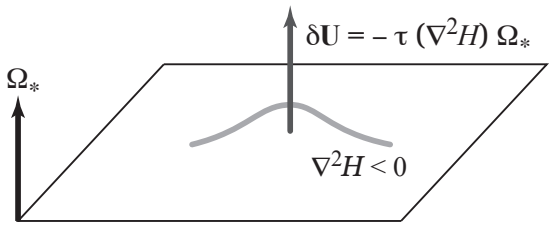

图1.8：螺旋度效应导致整体流动感应的一种可能物理起源。

相对于周围环境分布更少（$\nabla^2 H > 0$）的区域，则沿与 Ω 反平行的方向产生平均流。从这个意义上说，这种整体流动是由平均绝对涡量（相对涡度和旋转）诱导的，同时消耗了相对于周围环境而言过剩的湍流螺旋度（图1.8）。由于诱导出的整体速度对于 $\nabla^2 H < 0$ （或 $\nabla^2 H > 0$）与原始平均绝对涡量 Ω_* 平行（或反平行），因此会产生正（或负）的平均场螺度 $\mathrm{U} \cdot \Omega$。从这个意义上说，螺旋度会从较小尺度向较大尺度发生反向散射。这是具有恒定通量的螺旋度逆级联吗？在什么参数取值范围内会出现这一现象？这些问题有待今后进一步研究。

1.6.3. 螺旋度效应导致整体流动生成的数值验证

借助多尺度重整化微扰展开法，我们得到了雷诺应力的表达式（1.53）。式（1.53）中螺旋度效应的关键要素是由 $\boldsymbol{\Gamma}(\propto \nabla H)$ 表示的非均匀湍流螺旋度，以及由 $\Omega_*(= \nabla \times \mathrm{U} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})$ 表示的平均速度剪切的反对称部分。我们通过

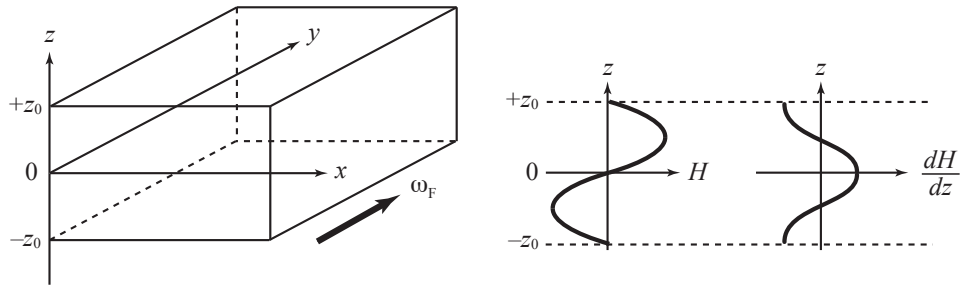

图1.9：用于验证螺旋度效应的直接数值模拟设置。采用外加旋转 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}} = (0, \omega_{\mathrm{F}}, 0)$ 的周期盒配置（左），以及外加湍流螺旋度 H 及其梯度 dH/dz 的空间分布（右）。

非均匀螺旋度湍流的直接数值模拟（DNS）（Yokoi & Brandenburg 2016），检验雷诺应力表达式（1.53）的有效性。为此，我们采用笛卡尔坐标系（x, y, z）中一个盒状区域内的螺旋湍流数值设置，并施加外加旋转 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$，其旋转轴沿 y 方向：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}} = (\omega_{\mathrm{F}x}, \omega_{\mathrm{F}y}, \omega_{\mathrm{F}z}) = (0, \omega_{\mathrm{F}}, 0) \tag{1.102}$$

如图 1.10 所示。湍流螺旋度 $H = \langle \mathrm{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}' \rangle$ 由正弦强迫从外部施加。

在真实的地球物理和天体物理流动现象中，螺旋度及其非均匀性来源于平均场通过场构型中的非均匀性产生的螺旋度 [见（1.78）]，和/或源于与（1.76）和（1.78）中的扩散项 [相关的边界条件]。例如，旋转与非均匀性相结合——如能量非均匀性、密度分层、惯性波传播的不对称性等——可能是产生湍流螺旋度的代表性机制。为简化数值设置，这里我们采用外部强迫作为向湍流中提供螺旋度的

向湍流注入螺旋度的机制。

在初始状态下，我们的设置中完全没有平均速度或大尺度速度（$\mathsf{U} = 0$）。由（1.53）可知，在发展的早期阶段，雷诺应力的 y-z 分量 $\mathcal{R}_{yz}$ 为

$$\mathcal{R}_{yz} = \langle u_y' u_z' \rangle = \eta 2\omega_{\mathrm{F}} \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{1.103}$$

其中

$$\eta = C_\eta \tau \ell^2 = C_\eta \frac{K}{\varepsilon} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \tag{1.104}$$

（C_η：模型常数）。

一旦螺旋度效应开始生成平均流，雷诺应力 $\mathcal{R}_{yz}$ 可表示为

$$\mathcal{R}_{yz} = \langle u_y' u_z' \rangle = -\nu_{\mathrm{T}} \frac{\partial U_y}{\partial z} + \eta 2\omega_{\mathrm{F}} \frac{\partial H}{\partial z}. \tag{1.105}$$

这里我们假设，所生成的平均相对涡量 $\mathsf{\Omega} = \nabla \times \mathsf{U}$ 仍远小于外加旋转（$|\mathsf{\Omega}| \ll 2|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}|$），因此在螺旋度生成项中可忽略不计。（1.105）中的第一项，即与 ν_{T} 相关的项，表示涡黏效应。第二项，即与螺旋度梯度相关的项，表示由非均匀螺旋度导致的大尺度速度生成。如果在统计稳态下涡黏度 ν_{T} 项与螺旋度项相互平衡，则有$\mathcal{R}_{yz} = \langle u_y' u_z' \rangle \simeq 0$。此时，我们有

$$U_y \simeq \frac{\eta}{\nu_{\mathrm{T}}} 2\omega_{\mathrm{F}} H. \tag{1.106}$$

这意味着，在这种平衡态下，会诱导出平均流 U，其方向沿着外加旋转 e

方向 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$。在正螺旋度区域（$H > 0$），诱导流 U 与旋转 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 平行；而在负螺旋度区域（$H < 0$），则与之反平行。请注意，湍流螺旋度的非均匀性是生成大尺度流所不可或缺的。事实上，如果施加均匀的湍流螺旋度，就不会观察到大尺度流生成。

在图 1.10 中，我们展示了大尺度流（U）和湍流螺旋度 H 随时间的演化。U_y 和 H 等值线的空间（z）分布随时间的变化如图所示。由于整个演化过程中，湍流螺旋度都由正弦强迫外部施加，因此可以观察到稳定的正弦模式（$z > 0$ 时为正的 H，$z < 0$时为负的 H）（上图）。另一方面，初始时刻不存在大尺度流（U $= 0$）（下图）。由于非均匀螺旋度效应，随着时间推移，大尺度流开始生成（早期阶段），并最终达到稳定状态（发展阶段）。

在图 1.11 中，我们绘出了演化早期阶段（对 $t/\tau = 40$ 至 200 之间的时间取平均）的雷诺应力 $\mathcal{R}_{yz}$ 的 y-z 分量，以及湍流螺旋度梯度与旋转相乘所得的量 $2\omega_{\mathrm{F}}(\partial H/\partial z)$。$\mathcal{R}_{yz} = \langle u'_y u'_z \rangle$ 的空间分布与 $2\omega_{\mathrm{F}}(\partial H/\partial z)$ 吻合良好。这表明，非均匀螺旋度与旋转的耦合作用确实促成了大尺度流动生成。

图1.12绘出了发展平衡阶段（对 $t/\tau = 0$ 至 2000 的时间进行平均）平均轴向速度 U_y 与乘以旋转后的湍流螺旋度 $2\omega_{\mathrm{F}}H$随 z的变化关系。诱导产生的平均轴向速度 U_y 的空间分布与湍流螺旋度 $2\omega_{\mathrm{F}}H$的空间分布相当吻合。这表明，在发展平衡阶段，涡黏效应 ν_{T}S $= \{\nu_{\mathrm{T}}\mathcal{S}_{ij}\}$ 与非均匀

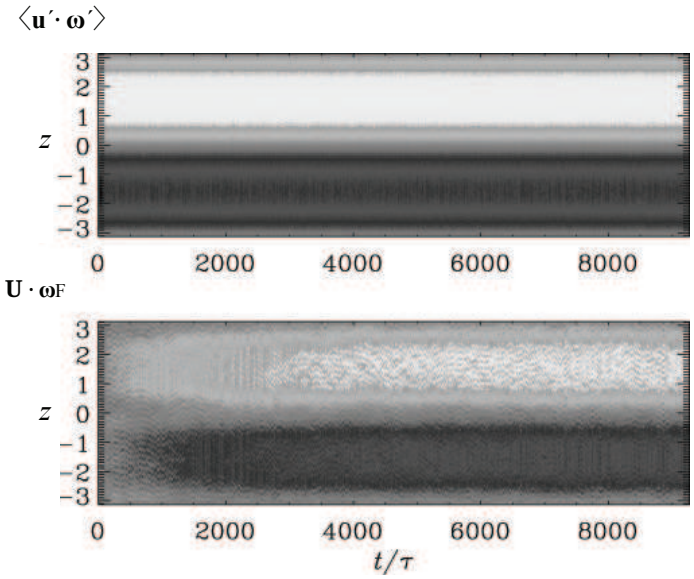

图 1.10：依赖于 z 时，湍流螺旋度（上）和平均流（底部）的时间演化。根据 Yokoi & Brandenburg [2016] 重绘。

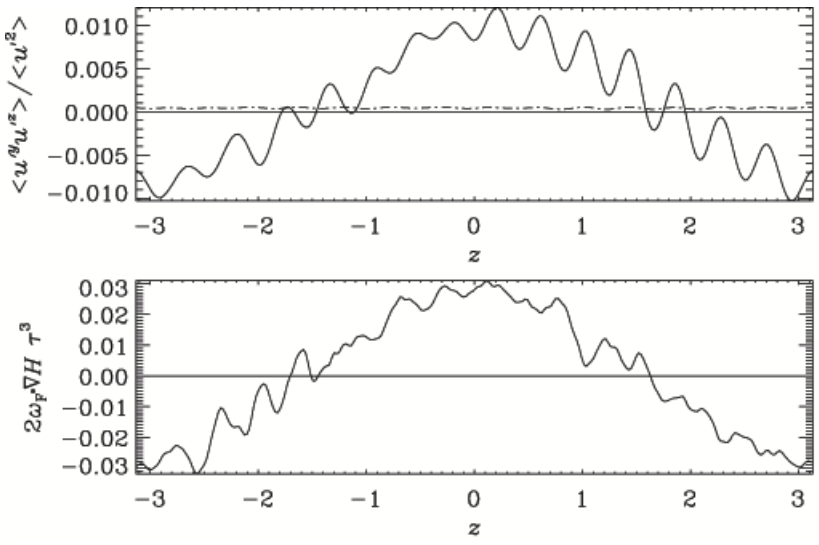

图 1.11：演化早期阶段的雷诺应力和螺度梯度。雷诺应力的 y-z 分量（上）以及湍流螺旋度梯度项 $\omega_F(\nabla H)_z$ （底部）。对从 $t/\tau = 40$ 到200的时间区间取平均。根据 Yokoi & Brandenburg [2016] 重绘。

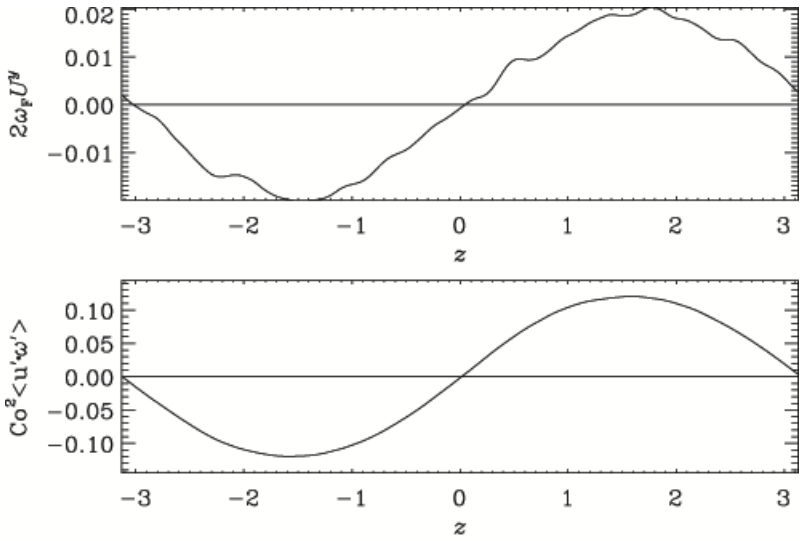

图1.12：演化发展阶段诱导的平均速度和湍流螺旋度。诱导的平均速度 U_y（顶部）和湍流螺旋度 H（底部）。对从 $t/\tau = 0$ 到 2000 的时间段取平均。根据 Yokoi & Brandenburg [2016] 重绘。

螺旋度效应 $\mathbf{\Gamma\Omega}_* = \{\Gamma_i \Omega_{*j}\}$ (1.106) 得到了良好的实现和维持。

从这些结果可以看出，仅靠涡黏效应远远不够，在分析具有旋转运动的系统中的湍流输运时，还应考虑非均匀螺度效应。

通过对外加局域螺旋度的旋转湍流进行大涡模拟（LES），也证实了非均匀螺旋度对流动生成和输运抑制的影响。在这项研究中，通过施加有旋转和无旋转的驱动，在局部引入湍流螺旋度 [Inagaki, Yokoi & Hamba, 2017]。只有同时施加湍流螺旋度和旋转时，才观察到整体流动生成。对雷诺应力各分量的考察表明，与涡黏度相抗衡的是科里奥利力项和雷诺应力方程中的压力扩散

项。这是自然的，因为旋转效应 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 只能通过科里奥利力项和脉动压力项影响湍流动力学。这一结果表明，通过精细建模与脉动压力相关的项，有望改进湍流螺旋度模型方程（1.78）。

1.6.4. 球形几何中的可能应用

1.6.4.1. 球面

为了考察非均匀螺旋度所引起的感应的物理后果，我们按照图 1.9，在球面切向面上考虑局部笛卡尔坐标 (x, y, z)。这里， x 表示方位方向， y表示朝向北极的纬向极向，而 z 表示垂直于局部切向表面向外的径向方向。我们考虑两种极限情形。一种情形是水平方向（x 和y）上的尺度远大于法向尺度（z）。另一种情形是法向尺度（沿 z 方向）远大于水平方向（沿 x和 y 方向）的尺度。

（A）水平方向尺度较大的情况。如果水平方向的尺度远大于法向尺度，则局部笛卡尔坐标（x, y, z）中的梯度算子可近似为

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \simeq \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{1.107}$$

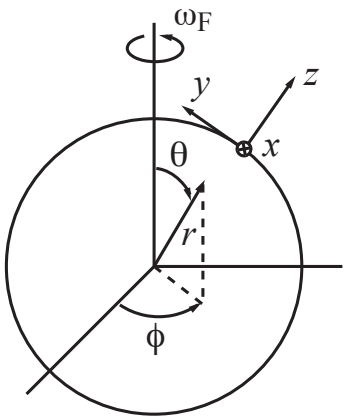

图 1.13：局部笛卡尔坐标（x，y，z）。

在这种情况下，式（1.99）中的第二项消失。因此，非均匀螺旋度导致的涡量感应为

$$\mathbf{I}_{\mathrm{V}} = -2(\nabla D_{\Gamma}) \times \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}. \tag{1.108}$$

由于局部笛卡尔坐标中的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 可用余纬极角 θ 表示为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}} = (\omega_{\mathrm{F}x}, \omega_{\mathrm{F}y}, \omega_{\mathrm{F}z}) = (0, \omega_{\mathrm{F}} \sin\theta, \omega_{\mathrm{F}} \cos\theta)\,, \tag{1.109}$$

式（1.108）可表示为

$$\mathbf{I}_{\mathrm{V}} = -2\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}) \times \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}} = \left(2\frac{\partial D_{\gamma}}{\partial z}\omega_{\mathrm{F}} \sin\theta, 0, 0\right). \tag{1.110}$$

这意味着，旋转 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}$ 与非均匀湍流螺旋度耦合，可能会在 x 或方位方向上诱导出大尺度涡量，尤其是在低纬度区域（$0 \ll \theta < \pi/2$）。一旦大尺度涡量

在方位方向上生成，即 Ω_x，式 (1.98) 中的第一项便开始起作用，并给出

$$I_{\mathrm{V}y} \simeq \{\nabla \times [-D_\Gamma(\boldsymbol{\Omega} + 2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F})]\}_y = -\frac{\partial}{\partial z}(D_\Gamma \Omega_x), \tag{1.111}$$

诱导大尺度涡量的纬向分量 Ω_y。这一机制会在旋转的恒星和/或行星天体表面低纬度区域产生螺旋状大尺度涡旋结构。

（B）法向尺度较大的情况。如果沿切向表面法线方向的长度尺度远大于水平方向上的相应尺度，则梯度算子可近似为

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \simeq \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right). \tag{1.112}$$

在这种情况下，式 (1.98) 中与螺度梯度相关的向量 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可写为 s

$$\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y, 0) \simeq \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, 0\right). \tag{1.113}$$

在涡量生成的早期阶段（$|\Omega| \ll |2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}|$），由式 (1.99) 可知，螺度对涡量感应的贡献为

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_\mathrm{V} &= \nabla \times [-2D_\Gamma \boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} - (2\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Gamma}] \\
&= \left(-2\frac{\partial D_\Gamma}{\partial y}\omega_\mathrm{F}\cos\theta, 2\frac{\partial D_\Gamma}{\partial x}\omega_\mathrm{F}\cos\theta, -2\frac{\partial D_\Gamma}{\partial x}\omega_\mathrm{F}\sin\theta\right) \\
&\quad + \left(0, 0, 2\omega_\mathrm{F}\sin\theta\left(\frac{\partial^2\Gamma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Gamma_y}{\partial x \partial y}\right)\right).
\end{aligned} \tag{1.114}$$

对于低纬度区域，这可简化为

$$\mathbf{I}_\mathrm{V} = \left(0, 0, 2\omega_\mathrm{F}\sin\theta\left(-\frac{\partial D_\Gamma}{\partial y} + \frac{\partial^2\Gamma_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Gamma_y}{\partial x \partial y}\right)\right). \tag{1.115}$$

这意味着，旋转矢量与非均匀湍流螺旋度耦合后，会在低纬度区域切向表面的法向方向上诱导出大尺度涡量。这可能有助于增强近赤道区域气旋的生成 [Yokoi & Yoshizawa, 1993]。

1.6.4.2. 角动量输运

方程（1.101）表明，湍流螺旋度的非均匀空间分布与平均涡旋运动和/或旋转相耦合，能够在平均涡量/旋转方向上诱发大尺度流。这也可以表述为：由于非均匀湍流螺旋度效应，角动量被输运至流动加速和/或生成的区域。下面给出两个有趣的情形。

（A）恒星角动量输运。恒星和行星内部对流运动通过发电机作用，在形成和维持恒星和行星磁场方面发挥着关键作用。日震学的最新发展揭示了太阳内部的流动构型：太阳角速度的纬向和径向分布，以及经向环流的基本模式。已经确定，以太阳角速度表示的太阳方位角旋转在近赤道区域和近表层区域较快 [Miesch, 2005]。

尽管经向环流的详细模式仍是一个尚待解决的问题，但其基本模式可以认为如图1.14(a)所示。在表层区域，经向环流 U_{MC} 向极方向流动，而在一定深度处则返回并向赤道方向流动。于是，

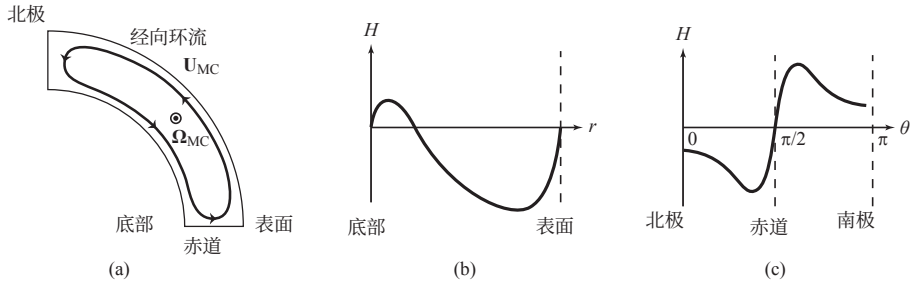

图1.14：从非均匀螺旋度效应的角度观察太阳中的角动量输运。(a) 经向环流 [U_{MC} 的基本模式：经向环流速度，$\Omega_{\mathrm{MC}}(=\nabla\times\mathrm{U}_{\mathrm{MC}})$：与经向环流相关的涡量]。(b) 湍流螺旋度的径向变化。(c) 湍流螺旋度的余纬变化。所有图均为示意图。

与经向环流相关的平均涡量 $\Omega_{\mathrm{MC}}(=\nabla\times\mathrm{U}_{\mathrm{MC}})$，指向西向方位方向。

另一方面，利用模拟恒星和行星对流区的球壳区域直接数值模拟，获得了湍流动能螺度的空间分布 [Duarte 等， 2016]。根据数值结果，湍流螺旋度的径向分布示意如图1.14(b)所示。在对流区的底部边界，螺旋度为零；在底部附近，螺旋度为正。正螺旋度随半径增大而减小，并在对流区较浅处变为负值。负螺旋度的幅值在接近表面时减小，最终在表面边界处变为零。这种螺旋度的空间分布，可以用旋转方向上的非均匀性导致的螺旋度生成机制（$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}}\cdot\nabla$）$K$(1.84)来理解，相关讨论见 § 1.4.2。若一个具有角动量的流体团块接近外边界，它会因受到冲击而沿水平方向膨胀。

由于局部角动量守恒，团块的旋转减弱，从而产生相对于周围环境的负向涡旋运动。这也可以用旋转项方向上的非均匀性来表述。

我们将非均匀螺旋度效应作用于平均速度 [(1.53)，并结合式 (1.58)]，研究太阳内部的角动量输运问题。考虑球极坐标系 (r, θ, ϕ) 中的角动量输运。绕旋转轴的角动量 L 定义为

$$L = \Gamma r^2 \omega_{\mathrm{F}} + \Lambda r U_\phi \tag{1.116}$$

其中 $\Lambda = \sin\theta$。 L 的输运满足

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho L + \nabla \cdot (\rho \mathbf{F}_L) = 0. \tag{1.117}$$

这里， ρ 是密度，F_L 是角动量的矢量通量，表示为

$$F_{Lr} = L U_r + r\Lambda \mathcal{R}_{r\phi}, \tag{1.118}$$

$$F_{L\theta} = L U_\theta + r\Lambda \mathcal{R}_{\theta\phi}, \tag{1.119}$$

其中 R$(= \{\mathcal{R}_{ij}\} = \{\langle u_i' u_j' \rangle\})$ 是雷诺应力。

在轴对称情形（$\partial/\partial\phi$）下，雷诺应力中的非均匀螺度贡献可写为

$$\mathcal{R}^{(H)}_{\theta\phi} = +\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r U_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right), \tag{1.120}$$

$$\mathcal{R}^{(H)}_{r\phi} = +\frac{\partial H}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r U_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right). \tag{1.121}$$

在太阳表面存在向极方向的经向环流时，北半球的环向平均涡度为负，即

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rU_\theta \begin{cases} <0 & \text{(Northern hemisphere)} \\ >0 & \text{(Southern hemisphere)} \end{cases} \tag{1.122}$$

另一方面，北半球的湍流螺旋度预计在浅层区域（表面附近除外）比深层区域更为负，如下所示

$$\frac{\partial H}{\partial r} \begin{cases} <0 & \text{(Northern hemisphere)} \\ >0 & \text{(Southern hemisphere)} \end{cases} \tag{1.123}$$

同时，除赤道附近螺旋度符号由负变正的区域外，两个半球的湍流螺旋度余纬梯度均为负 [图1.14(c)]。因此，我们预计

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} \begin{cases} <0 & \text{(Northern hemisphere)} \\ <0 & \text{(Southern hemisphere)} \end{cases} \tag{1.124}$$

由（1.122）—（1.124）可知，螺度贡献对角动量通量的贡献可写为

$$r\Lambda\mathcal{R}^{(H)}_{\theta\phi} \simeq +\Lambda\frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rU_\theta > 0, \tag{1.125}$$

$$r\Lambda\mathcal{R}^{(H)}_{r\phi} \simeq +r\Lambda\frac{\partial H}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rU_\theta > 0. \tag{1.126}$$

方程（1.125）和（1.126）表明，θ-ϕ和 r-ϕ 分量的螺度贡献为正。这意味着螺旋度效应有助于加速

方位速度，将角动量输运至更浅层、纬度更低（近赤道区域）的区域。这与日震观测结果一致。利用模拟太阳对流区的球壳进行直接数值模拟（DNS）的初步研究表明，在采用太阳内部参数时，螺度项$(\nabla H)\Omega| = \{|(\partial H/\partial x_i)\Omega_j|\}$的量级与 $\mathcal{R}_{r\phi}$ 和 $\mathcal{R}_{\theta\phi}$ [Miesch, 2017]的量级相当。这表明，这种非均匀螺旋度效应值得在太阳内部的背景下进一步研究。

更直观地，我们可以如下论述非均匀螺旋度效应对太阳角动量输运的作用。从式（1.101）可知，螺旋度效应引起的平均速度变化为

$$\delta\mathbf{U}_{\rm MC} \sim -\tau(\nabla^2 H)\mathbf{\Omega}_{\rm MC}. \tag{1.127}$$

由于 $\nabla^2 H$ 在浅层区域 [图 10(a)], 中为正，平均速度 $\delta \mathrm{U}_{\rm MC}$ 的变化（1.127）预计将与经向环流产生的平均涡量$\Omega_{\rm MC}$方向相反。我们看到，这种非均匀螺旋度效应有助于浅层对流区方位角角速度的加速，这也与日震学观测相符。

（B）气旋眼墙附近的风速加速。非均匀螺旋度效应另一个可能有趣的应用，是热带气旋眼墙形成区域的风速加速。观测已证实，气旋核心会形成双眼墙结构（图1.15），且每道眼墙所在的径向位置都存在一个明显的风速（气旋切向速度）极大值。这种双眼墙

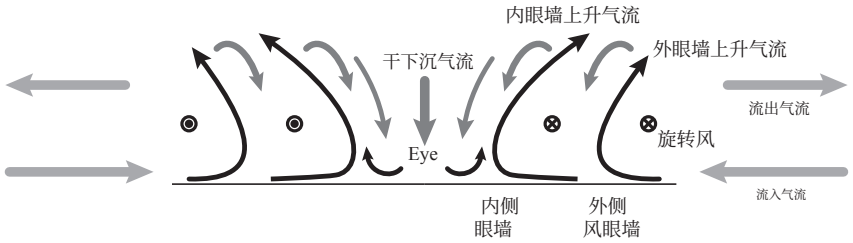

图1.15：热带气旋的流动构型。

结构以及眼墙处的最大风速，此前已从涡旋罗斯贝波的径向传播及其在眼墙形成区域的停滞角度进行讨论 [Montgomery &Kallenbach, 1997年, Huang, Montgomery & Wu, 2012年, House, 2010]。

由于风眼墙区域与非均匀螺度生成有关，因此这种风速加速或许可以用非均匀螺旋度效应来解释。气旋的常见结构是内外风眼墙处有上升气流，风眼处有干性强迫下沉气流（图1.15）。上升气流及其环流下沉气流构成了平均涡量的方位角分量。同时，气旋风眼区域存在垂直流，且气旋风速所对应的垂直平均涡量与之相伴，这表明那里存在平均流螺度 $\mathrm{U}\cdot\Omega$。这意味着风眼墙附近的湍流螺旋度必定高度不均匀。如此强的非均匀平均螺旋度，自然会导致湍流螺旋度 $H=\langle \mathrm{u}'\cdot\boldsymbol{\omega}'\rangle$ 的空间分布不均匀。根据 (1.101)，平均方位角涡量与风眼墙附近的非均匀螺旋度相结合，可能会诱发方位方向的大尺度流。

1.7. 总结与结论

螺旋度会影响湍流中的流动动力学和基本统计性质。与表征涨落强度性质的能量不同，螺旋度表征的是涨落的结构性质。将螺旋度效应纳入湍流统计理论，需要考虑流向交叉相关或交叉分量相关，以及纵向和横向速度相关（1.45）。在构型空间中，纵向和横向速度相关与湍流能量相关，而交叉相关则与湍流螺旋度相关。由于螺旋度衡量镜像对称性的破缺，因此在理论分析中，需要将波数空间中涨落相关表达式的非镜像对称部分纳入考量 [(1.46) 和 (1.47)]，以体现螺旋度效应。

湍流输运通过湍流通量来表示，例如平均动量方程中的雷诺应力和平均涡量方程中的涡旋驱动力。在镜像对称的情况下，湍流输运仅由脉动强度决定。脉动越强，有效输运就越显著。从湍流模型的角度看，涡黏度代表了湍流导致的这种增强输运。湍流黏度用湍流能量及其时间尺度表示。在非镜像对称的情况下，螺旋度和能量一样，也会作为湍流输运的描述量出现在湍流通量的表达式中。

借助多尺度重整化微扰展开理论，我们得到了雷诺应力和湍流电动势的解析表达式。在这些理论结果中，输运系数以谱相关函数和响应函

数（格林函数）的形式表示。涡黏度是与平均速度剪切的对称部分（平均速度应变）耦合的输运系数，它由能量谱函数和格林函数对谱和时间的积分表示（1.55）。在缺乏反射对称性的系统中，除了涡黏度之外，还会出现另一个与平均速度剪切的反对称部分（平均涡量和旋转）耦合的输运系数。后一个输运系数由螺度谱函数和格林函数的非均匀性表示（1.56）。

基于这些分析结果，我们构建了一种通过湍流螺旋度纳入结构效应的湍流模型。为了构建自洽的模型方程组，应同时求解平均场和湍流场。为此，我们提出了湍流能量 K、其耗散率 ε以及湍流螺旋度 H 的输运方程（$K-\varepsilon-H$ 模型）。该模型应用于直管中的旋流。这个螺旋度湍流模型能够成功再现旋流的主要特征：平均轴向速度减小以及旋流强度呈指数衰减；采用涡黏性表示的标准 $K-\varepsilon$ 模型则完全无法再现这些特征。这个数值结果表明，对于旋流而言，过度增强有效输运的涡黏度可以通过非均匀螺旋度效应成功抵消。

螺旋度效应还通过对一个旋转三重周期对称盒进行直接数值模拟（DNS）得到了验证，其中非均匀螺旋度由外部驱动施加。从无初始平均流的构型出发，结果表明，非均匀螺旋度与旋转耦合作用，促使整体流动沿旋转矢量方向产生

。结果表明，在流动演化的早期阶段，雷诺应力与非均匀螺旋度高度关联；此时由于缺乏平均速度应变，涡黏效应较弱。此外，在发展阶段，诱导平均流与局部湍流螺度之间的高度关联，证实了涡黏效应与非均匀螺度效应之间的平衡。这些数值验证表明，在非镜像对称的情况下，除通常与平均速度应变耦合的涡黏效应外，还应考虑与平均绝对涡量（平均涡量和旋转）耦合的螺旋度效应。

根据这些理论和数值结果，我们可以总结螺旋度在流体湍流输运中的作用。在非镜像对称系统中，雷诺应力可示意性地表示为

$$\begin{array}{rccc} & \text{Eddy viscosity} & \text{Helicity effect} & \\ \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle := & \overbrace{-\nu_{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mathcal{S}}} & \overbrace{+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Omega}_*} & . \\ \text{Transport:} & \text{Enhancement} & \text{Suppression} & \\ \text{Flow/Structure:} & \text{Destruction} & \text{Generation} & \end{array} \tag{1.128}$$

此处为简洁起见，省略了张量的偏差分量和转置分量的记号，:= 表示“示意性地表示”，S 为平均速度应变张量， $\boldsymbol{\Gamma} \propto \nabla H$ 为螺度梯度，而 $\Omega_*(=\Omega + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{F}})$ 为平均绝对涡量。涡黏度 ν_{T} 由湍流能量和湍流时间尺度决定，而螺度相关输运系数 $\boldsymbol{\Gamma}$ 则由螺度梯度、湍流时间尺度和湍流长度尺度决定。值得注意的是，强螺旋度、旋转、速度剪切、非平衡效应等因素的存在会改变湍流时间尺度和长度尺度。 [Yokoi、Masada 和 Takiwaki， 2022]。实际上，

在传统的非线性湍流建模研究中，已经探讨了应变张量和涡量张量效应对湍流时间尺度和长度尺度的影响 [Speziale， 1991]。

在处理非镜像对称湍流中的湍流输运时，必须将代表输运抑制和结构生成的螺度效应纳入湍流通量及其模型表达式，同时也要考虑湍流能量效应。在当前讨论的螺度效应中，湍流输运以及整体流动生成／耗散的变化方向取决于湍流螺旋度的空间分布。从这个意义上说，湍流螺旋度的时空演化，以及其产生、耗散和输运机制，发挥着至关重要的作用。在真实世界的湍流中，这些机制由平均场与湍流场之间的非线性动力学决定。基于 § 1.4 所述湍流建模的自洽方法，对于探索自然界中的全局流动生成机制具有根本意义。

应当更加重视螺旋度。尤其是，为了加深我们对湍流和非线性流动现象的认识，亟需开展详细的实验室实验和原位及／或遥感观测，并对螺旋度（动能螺度、磁螺旋度、电流螺度、剩余螺旋度、交叉螺度，.....）的时空分布进行数值计算。

致谢

谨向匿名审稿人致谢，他们凭借深厚的知识与见解提出了深思熟虑的意见，为改进本文做出了很大贡献。我谨将此文献给我的父母，以纪念他们：Hisashi Yokoi（1928.3.14-1999.7.18）和 Taduko

Yokoi（1929.10.13-2020.4.22）。他们给予了我博爱式鼓励，并引领我走上学术生涯。

参考文献

Alexakis, A. & Biferale, L.（2018）。湍流中的级联与转变。《Phys. Rep.》，524:1–139。doi: 10.1016/j.physrep.2018.08.001。

Andr´e, J. C. & Lesieur, M.（1977年）。螺旋度对高雷诺数下各向同性湍流演化的影响。《流体力学杂志》，81:187–207。

Angriman, S.、Cobelli,P. J.、Bourgoin, M.、Huisman, S. G.、Volk, R. & Mininni, P. D.（2021年）。湍流中示踪粒子轨迹的镜像对称性破缺。《Phy. Rev. Lett.》，127:254502。

Batchelor, G. K.（1953年）。《均匀湍流理论》（剑桥大学出版社，剑桥）。

Biferale L.、Musacchio S. & Toschi F.（2012年）。三维各向同性湍流中的逆能量级联。《Phys. Rev. Lett.》，108:164501。doi: 110.1103/PhysRevLett.108.164501。

Brandenburg A. & Subramanian, K.（2005年）。天体物理磁场与非线性发电机理论。《物理报告》，417:1–209。

Brandenburg A. & Petrosyan, A.（2012年）。线性强迫湍流中的动能螺旋度衰减。《天文学通报》，333:195–201。

Chandrasekhar,S.（1950年）。轴对称湍流理论。《皇家学会哲学汇刊 A》，242:557-577。

Chen, Q., Chen, S., & Eyink, G. L.（2003年）。三维湍流中能量与螺旋度的联合级联。《物理流体》，15:361–374。

Chkhetiani, O. G. & Gvaramadze, V. V.（1988年）。可压缩螺旋湍流中大尺度涡旋的生成。载于《瓦伦纳-阿巴斯图马尼等离子体天体物理学国际学校与研讨会联合论文集》，意大利瓦伦纳，1988年8月24日至9月3日（ESA SP-285，1988年），1：363–369。

Deusebio, E., & Lindborg, E.（2014年）。埃克曼边界层中的螺旋度。流体力学杂志，755：654–671。

Duarte, L. D. V., Wicht, J., Browning, M. K., & Gastine, T.（2016）。球形对流中的螺旋度反转：向赤道方向传播的发电机波的一种机制。《皇家天文学会月刊》，456：1708–1722。

Elperin, T., Kleeorin, N., & Rogachevskii, I.（2003年）。具有平均速度剪切的均匀湍流中大尺度涡量的生成。《物理评论E》，68：016311-1–8。

Elperin, T.、Golubev, I.、Kleeorin, N. 和 Rogachevskii, I.（2007年）。剪切非螺旋湍流中的大尺度不稳定性：涡旋结构的形成。《物理评论E》，76：066310-1–12。

Frisch, U.、She, Z. S. 和 Sulem, P. L.（1987年）。各向异性动能α效应驱动的大尺度流动。Physica D，28：382–392。

Gupta, A. & Kumar, R.（2007年）。圆柱中的三维湍流旋流：实验与计算。《Int. J. Heat Fluid Flow》，28：249–261。

Hide, R.（1989）。超螺旋度、螺旋度与位涡。《Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.》，48：69–79。

Hoekstra, A. J., Derksen, J. J. & Van Den Akker, H. E. A. (1999). 气旋分离器中湍流旋流的实验和数值研究。《化学工程科学》，54:2055–2065。

House Jr., R. A. (2010年). 热带气旋中的云。《月度天气评论》，138:293–344。

Huang, Y.-H., Montgomery, M. T., & Wu, C.-C. (2012年). 台风森拉克（2008）中的同心眼墙形成。第二部分：轴对称动力学过程。《大气科学杂志》69:662–674。doi: 10.1175/JAS-D-11-0114.1。

Inagaki, K., Yokoi, N., & Hamba, F. (2017年). 通过非均匀螺旋度在旋转湍流中产生平均流的机制。《物理评论·流体》，2:114605。doi: 10.1103/PhysRevFluids.2.114605。

K¨apyl¨a, P. J., Mitra, D., & Brandenburg, A.（2009年）。剪切流湍流中的大尺度涡量生成数值研究。《物理评论E》，79:016302- 1–8。

Khomenko, G. A., Moiseev, S. S., & Tur, A. V.（1991）。可压缩介质中的流体动力学阿尔法效应。流体力学杂志，225:355。

Kitchatinov, L. L., R¨udiger, G., & Khomenko, G.（1994年）。旋转分层盘中的大尺度涡旋。Astron. Astrophys.，287:320。

Kitoh, O.（1991）。直管中湍流旋流的实验研究。流体力学杂志，225:445–479。

Kleeorin, N. 与 Rogachevskii, I.（2018）。具有非均匀螺旋度的旋转分层湍流中大尺度涡量的生成：平均场理论。等离子体物理学杂志，84:735840303。

Kobayashi, T. & Yoda, M.（1987年）。用于直管湍流旋流的修正 $k-\epsilon$ 模型。日本机械工程学会国际期刊，30：66–71。

Kraichnan, R. H.（1959）。极高雷诺数下各向同性湍流的结构。流体力学杂志，5：497–543。

Kraichnan, R. H.（1964）。直接相互作用近似下各向同性湍流的衰减。《物理流体》，7：1030–1048。

Kraichnan, R. H.（1973）。螺旋湍流与绝对平衡。流体力学杂志，59：745–752。

Krause, F. & R¨adler, K.-H.（1980）。《平均场磁流体动力学与发电机理论》（Pergamon出版社，牛津）。

Krause, F. & R¨udiger, G.（1974）。平均场流体动力学中的雷诺应力 I：不可压缩均匀各向同性湍流。《天文学通报》，295：93。

Launder, B. E. & Spalding, D. B.（1972年）。《湍流数学模型讲义》（学术出版社，伦敦）。

Lesieur, M.（2008）。《流体中的湍流》第4版（施普林格出版社，Dordrecht）。

Leslie, D. C.（1973）。《湍流理论的发展》（克拉伦登出版社，牛津）。

Levina, G. V. 和 Montgomery, M. T.（2014年）。热带气旋生成：基于螺旋流组织的数值诊断。《物理学杂志：会议系列》544：012013。doi：10.1088/1742-6596/544/1/012013。

Lilly, D. K.（1986年）。旋转对流风暴的结构、能量学与传播。第二部分：螺旋度与风暴稳定化。《大气科学杂志》，43：126–140。

Marino, R., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A.（2013年）。旋转分层湍流中的逆级联：大尺度的快速增长。《欧洲物理学快报》，102：44006。

Marino, R., Mininni, P. D., Rosenberg, D., & Pouquet, A.（2013年）。旋转分层湍流中螺旋度的涌现。《物理评论E》，87：033016。

McComb, W. D.（1990年）。《流体湍流物理学》（牛津：克拉伦登出版社）。

Miesch, M.（2005年）。对流区与日冕层的大尺度动力学。《生活评论：太阳物理学》，2：1–139。http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-1。
Miesch, M.（2017年）。致纽约的私人通信。

Moffatt, H. K.（1978年）。《导电流体中的磁场生成》（剑桥大学出版社，剑桥）。

Moffatt, H. K.（1992年）。拓扑约束下的弛豫。载于《流体与等离子体动力学的拓扑方面》，H. K. Moffatt、G. M. Zaslavsky、P. Comte 和 M. Tabor（编），（Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特），第3–28页。

Moffatt, H. K. 和 Dormy, E.（2019年）。《自激流体发电机》，（剑桥大学出版社，剑桥）。Moiseev, S. S.、Sagdeev, R. Z.、Tur, A. V.、Khomenko, G. A. 和 Yanovsky, V. V.（1983年）。流体动力学湍流中大尺度结构起源的理论。《苏联物理学期刊》，53：1149。

Montgomery, M. T. 与 Kallenbach, R. J.（1997年）。涡旋罗斯贝波理论及其在飓风螺旋带和强度变化中的应用。《Q. J. R. Meteorol. Soc.》，123：435–465。

Parker, E. N.（1955年）。磁流体发电机模型。《Astrophys. J.》，122：293–314。

Parker, E. N.（1979年）。《宇宙磁场》（牛津大学出版社，牛津）。

Pouquet, A. 与 Yokoi, N.（2022年）。螺旋流体与（Hall）-MHD 湍流：简要综述。《Phil. Trans. Roy. Soc. A.》，380：20210087-1–18。

Robertson, H. P.（1940年）。各向同性湍流的不变量理论。《Proc. Cambridge Phil. Soc.》，36：209–223。

Rodi, W.（1993年）。《湍流模型及其在水力学中的应用：现状综述》（泰勒-弗朗西斯出版社，伦敦）。

Rogers, M. M. & Moin, P.（1987年）。不可压缩湍流中的螺旋度涨落。《物理流体》，30：2662–2671。

R¨udiger，G.（1980）。雷诺应力与差分自转 I：关于缓慢旋转恒星中纬向通量的近期计算。Geophys. Astrophys. Fluid Mech.，16：239–261。

R¨udiger，G.（1989）《差分自转与恒星对流：太阳和类太阳恒星》（Gordon andBreach，纽约）。

Speziale, C. G.（1991）。湍流中雷诺应力闭合发展所用的解析方法。《流体力学年评》，23：107–157。

Steenbergen, W.（1995）。带旋流的湍流管流。论文，埃因霍温理工大学。

Steenbeck, M., Krause, & R¨adler, K.-H.（1966）。在受科里奥利力影响的湍流运动中，导电介质~~的平均~~洛伦兹场 v ×B 的计算。自然研究杂志 A 部，第 21 卷：369–376。

Tobias S. M.（2021年）。湍流发电机。《流体力学杂志》观点，912：1–76。doi：10.1017/jfm.2020.1055。

Waleffe F.（1993年）。螺旋分解中的惯性传递。《物理流体》A，5：677–685。

Yokoi, N.（2013年）。交叉螺度及相关发电机。《地球物理与天体物理流体动力学》，104：114–184。

Yokoi, N.（2016）。螺度耗散率方程的建模。载于《湍流研究进展VI》，《施普林格物理学会议录》第165卷，J. Peinke 等编（海德堡：施普林格出版社），第93–96页。doi：10.1007/978-3-319-29130-7 17。

Yokoi, N.（2020）。“湍流、输运与重联”。载于《磁流体动力学拓扑学、重联与稳定性理论专题》，CISM国际机械科学中心 591，D. MacTaggart, A.

Hillier（编）（施普林格出版社，海德堡），第 177–265 页。doi: 10.1007/ 978-3-030-16343-3 6。

Yokoi, N. & Yoshizawa, A.（1993年）。非均匀湍流中螺旋度效应的统计分析。《物理流体》A，5:464–477。

Yokoi, N. & Brandenburg, A.（2016）。非均匀螺旋度所引发的大尺度流动生成。《物理评论E》，93:033125。

Yokoi, N. & Yoshizawa, A.（2017年）。通过螺旋度纳入结构效应的亚格子尺度模型。载于《湍流进展VII》，施普林格出版社《物理学论文集》196, R. Orl¨u 等编（施普林格出版社，海德堡），第115–121页。doi: 10.1007/978-3-319-57934-4 17。

Yokoi, N., Yoshizawa, A., Itoh, K. & Itoh, S.-I.（2004年）。利用整体螺旋度概念对湍流旋涡管流中的流动反转条件进行变分分析。《物理流体》，16:1186–1202。

Yokoi, N., Masada, Y., & Takiwaki, T.（2022年）。利用羽流对恒星对流输运进行建模：I. 双重平均公式中的非平衡湍流效应。《皇家天文学会月报》，16:1186–1202。doi: 10.1093/mnras/stac1181。

Yoshizawa, A.（1984）。雷诺应力偏离其涡黏性表示的统计分析。《物理流体》，27:1377–1387。

Yoshizawa, A.（1984）。利用涡黏性类型表示的重整化推导模型雷诺应力输运方程。《物理流体》A，5:707–715。

Yoshizawa, A., Yokoi, N., Nisizima, S., Itoh S.-I., & Itoh, K.（2001年）。变化al

借助螺旋度研究湍流旋涡管流的方法。《物理流体》，13：2309–2319。