arXiv:2303.02417v1 [math.NT] 4 Mar 2023

狄利克雷特征扭曲与 L-函数的多项式型欧拉乘积

J.KACZOROWSKI 和 A.PERELLI

摘要。我们证明，2阶L-函数的狄利克雷特征扭曲若满足适当性质，则其欧拉乘积为多项式型。

数学主题分类（2010）：11M41
关键词：狄利克雷特征扭曲；欧拉乘积；塞尔伯格类 ss

1. 引言

狄利克雷特征扭曲的性质与 L-函数局部欧拉因子的形式，是两个看似毫不相关的主题。本论文的主要目标是说明，事实上这两个主题密切相关。我们重点研究塞尔伯格类 $\mathcal{S}$ 或扩展塞尔伯格类 $\mathcal{S}^\sharp$ 中的 L-函数，因为它们为这项研究提供了十分便利的框架。我们在第 2 节汇总与 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}^\sharp$ 相关的基本事实和记号。这里我们回顾一下函数的扭曲

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} \tag{1.1}$$

由 $\mathcal{S}^\sharp$ 经狄利克雷特征 χ (模 q)定义为

$$F^\chi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)\chi(n)}{n^s}.$$

这一运算在自守 L-函数理论中至关重要。如果 F 属于塞尔伯格类，那么预期 F^χ 也属于同一类，至少当 F 的导子与本原特征 χ 的导子互素时是如此。许多特殊情形下这一点成立，尤其是对于自守 L-函数，但一般情形仍是一个悬而未决的问题。

第二个主题是研究 F 在（1.1）中的局部欧拉因子的可接受形式。回顾一下， F 在素数 p 处的局部因子定义为

$$F_p(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(p^k)}{p^{ks}}. \tag{1.2}$$

塞尔伯格类定义中的欧拉乘积公理告诉我们

$$F(s)=\prod_p F_p(s)\quad\text{and}\quad\log F_p(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b(p^k)}{p^{ks}}, \tag{1.3}$$

其中

$$b(p^k)\ll p^{\vartheta k} \tag{1.4}$$

对于某个 $\vartheta<1/2$。预计每个 $F\in S$ 都有多项式欧拉乘积，即具有如下形式

$$F_p(s)=\prod_{j=1}^{\partial_p}\left(1-\frac{\alpha_{j,p}}{p^s}\right)^{-1}$$

对所有素数 p 均成立。同样，这在许多特殊情形下都成立，尤其是对于自守 L-函数；但一般而言，这个问题仍悬而未决。

本文证明，对于次数为 2 的函数，狄利克雷特征扭曲所满足的适当性质意味着其局部因子是多项式型的。为以综合的方式陈述我们的结果，我们采用以下术语。

给定一个素数 p，若对于 $\sigma > 1$， $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处分裂，

$$F(s) = F_p(s) \sum_{p \nmid n} \frac{a(n)}{n^s}$$

并且 $F_p(s)$ 满足 (1.3) 和 (1.4)。注意，若 F 在 p 处分裂，那么只要 $n = p^\ell k$ 且 $p \nmid k$，就有 $a(1) = 1$ 以及 $a(n) = a(p^\ell)a(k)$。特别地，塞尔伯格类中的一个 L-函数在所有素数 p处分裂。设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$, q_F 为其导子，假设 $q_F \in \mathbb{N}$，并令 p 为一个不整除 q_F 的素数。我们用 $m_{q_F}(p)$ 表示 p(模 q_F) 的阶，即满足 $p^m \equiv 1$ (模 q_F) 的最小正整数 m。若对于每个满足 $1 \le f \le m_{q_F}(p)$ 的本原狄利克雷特征 χ(模 p^f)，扭曲 F^χ 属于 $\mathcal{S}^\sharp$ 且其次数与 F 相同，则称 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处弱扭曲正则。此外，若 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处弱扭曲正则，且对于 $f = 1$， F^χ 的导子 q_χ 满足 $q_\chi = q_F p^{d_F}$，其中 d_F 为 F 的次数，则称 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处扭曲正则。

定理 1. *Let $F \in \mathcal{S}^\sharp$ be of degree 2 and conductor $q_F \in \mathbb{N}$. Then there exists a constant $B_F > 0$ such that if F splits and is weakly twist-regular at a prime $p > B_F$, then its local factor$F_p(s)$ is a rational function of p^{-s} and its numerator has degree $\le m_{q_F}(p) - 1$. In particular,if $p \equiv 1 \pmod{q_F}$ then $F_p(s)^{-1}$ is a polynomial in p^{-s}. Moreover, if $F \in \mathcal{S}$ then the condition"$p > B_F$" can be replaced by "$p \nmid q_F$".*

定理 2. *Let $F \in \mathcal{S}^\sharp$ be of degree 2 and conductor $q_F \in \mathbb{N}$. Then there exists a constant $B_F > 0$ such that if F splits and is weakly twist-regular at two distinct primes $p, q > B_F$, $p \equiv q \pmod{q_F}$ then $F_p(s)^{-1}$ and $F_q(s)^{-1}$ are polynomials in p^{-s} and q^{-s}, respectively. Moreover, if $F \in \mathcal{S}$ then the condition "$p, q > B_F$" can be replaced by "$p, q \nmid q_F$".*

L函数的一个有趣特征与所谓的重数一性质有关：不整除导子的素数处的局部因子决定了所有其他局部因子，也就是分歧素数处的局部因子。下一个定理将这一现象在素数导子 q_F 的情形下表述得更为精确。事实上，我们证明 q_F 处的局部因子也属于多项式型。我们预期类似的结果对一般的 q_F 也成立，但要证明这一点，似乎需要对本文中的方法作出非平凡的推广。我们希望在未来的论文中研究这一问题。

定理 3. *Let $F \in \mathcal{S}$ be of degree 2 and its conductor q_F be a prime. If F is weakly twist-regular at all primes $\ne q_F$, then F has a polynomial Euler product.*

我们的最后一个结果给出了多项式 $F_p(s)^{-1}$ 的次数信息。

定理 4. *Let $F \in \mathcal{S}$ be of degree 2 and conductor $q_F \in \mathbb{N}$. If F is twist-regular at all primes $p \nmid q_F$, then there exists a constant $B_F > 0$ such that for all primes $p \ge B_F$ we have*

$$F_p(s) = \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_p}{p^s}\right)^{-1}$$

with certain $|\alpha_p|$, $|\beta_p| \le 1$. Moreover, for the primes $p < B_F$, $p \nmid q_F$, we have that $F_p(s)^{-1}$ is a polynomial in p^{-s}.

最后我们指出，本文的结果是迈向针对次数为 2 的 L-函数的非常一般形式的韦伊逆定理的一步。我们将在后续论文中探讨这个问题。

致谢。此项研究部分获得意大利高等数学国家研究所、MIUR 项目 PRIN-2017 *"Geometric, algebraic and analytic methodsin arithmetic"* 以及波兰国家科学中心的项目 2021/41/BST1/00241 *"Analytic methods in number theory"* 资助。

2. Notation

全文中，我们用 $s=\sigma+it$, $e(x)=e^{2\pi ix}$ 和 $\overline{f}(s)$ 表示 $f(\overline{s})$。扩展塞尔伯格类 $\mathcal{S}^\sharp$ 由不恒等于零的狄利克雷级数 (1.1) 构成，这些级数在 $\sigma>1$ 时绝对收敛，并且对于某个整数 $m\geq 0$，$(s-1)^m F(s)$ 是有限阶整函数，且满足如下类型的函数方程

$$F(s)\gamma(s)=\omega\overline{\gamma}(1-s)\overline{F}(1-s),$$

其中 $|\omega|=1$，且 γ 因子

$$\gamma(s)=Q^s\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)$$

具有 $Q>0$, $r\geq 0$, $\lambda_j>0$ 和 $\Re(\mu_j)\geq 0$。注意，共轭函数 $\overline{F}$ 具有共轭系数 $a(n)$。塞尔伯格类 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}^\sharp$ 中满足 (1.2)、(1.3) 和 (1.4) 所示的欧拉乘积形式，并满足拉马努金猜想 $a(n)\ll n^\varepsilon$ 的函数所构成的子类。注意，(1.2) 中的局部因子 $F_p(s)$ 满足

$$F_p(s)\neq 0 \quad \text{for } \sigma>\vartheta. \tag{2.1}$$

关于塞尔伯格类的更多定义、例子和基础理论，请参阅我们的综述论文 [2],[3],[5],[6],[7],[8] 。

$F\in\mathcal{S}^\sharp$的次数 d_F、导子 q_F、根数 ω_F和 ξ-不变量 ξ_F定义如下:

$$d_F=2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j,\qquad q_F=(2\pi)^d Q^2\prod_{j=1}^{r}\lambda_j^{2\lambda_j},$$

$$\omega_F=\omega\prod_{j=1}^{r}\lambda_j^{-2i\Im(\mu_j)},\qquad \xi_F=2\sum_{j=1}^{r}(\mu_j-1/2)=\eta_F+id_F\theta_F$$

其中 η_F、$\theta_F\in\mathbb{R}$。我们还记

$$\omega_F^*=\omega_F e^{-i\frac{\pi}{2}(\eta_F+1)}\Big(\frac{q_F}{(2\pi)^2}\Big)^{i\frac{\theta_F}{2}}\quad\text{and}\quad \tau_F=\max_{j=1,\dots,r}\Big|\frac{\Im(\mu_j)}{\lambda_j}\Big|,$$

而 m_F 表示 F 在 $s=1$处极点的阶。

最后，$F\in\mathcal{S}^\sharp$ 的线性扭曲定义为

$$F(s,\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}e(-n\alpha)$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$。

3. 引理

给定一个狄利克雷特征 χ，我们按惯例用 χ^* 表示诱导 χ的本原特征，用 χ_0 表示主特征。此外，我们回顾一下，$\mu(n)$ 和 $\varphi(n)$ 分别表示莫比乌斯函数和欧拉函数。

引理 1. 设 p 为素数。对于每个整数 $r \geq 1$，存在系数 $c(\chi, p^r)$，其中 χ 遍历模 p^r的狄利克雷特征，使得当 $(n, p^r) = 1$ 时，我们有

$$e(-n/p^r) = \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^r)} c(\chi, p^r)\chi(n).$$

此外

$$c(\chi_0, p^r) = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{if } r = 1 \\ 0 & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

证明。系数 $c(\chi, p^r)$ 的存在性可由既约剩余（模 p^r）群 $\mathbb{Z}_{p^r}^*$ 上的初等调和分析得到。此外，由正交性可得

$$c(\chi_0, p^r) = \frac{1}{\varphi(p^r)} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{p^r}^*} e(-n/p^r) = \frac{\mu(p^r)}{\varphi(p^r)},$$

引理得证。 □

给定一个函数 $F \in \mathcal{S}^\sharp$、一个素数 p 和一个正整数 m，我们定义多项式$W_{m,\, p}(X)$ 如下：

$$W_{m,p}(X) = \sum_{\ell=0}^{m-2} a(p^\ell)X^\ell + \frac{p}{p-1}a(p^{m-1})X^{m-1}.$$

注意，如果 $m = 1$，则该和为空，因而等于 0。还要注意，$W_{m,\, p}(X)$ 并非恒等于零，因为 $a(1) = 1$，这是因为 F 在 p 处分裂。

引理 2。设 p 为素数，m 为正整数，并假设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处分裂。那么对于 $\sigma > 1$，有

$$F(s, 1/p^m) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{a(p^\ell)}{p^{\ell s}} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^{m-\ell}) \\ \chi \neq \chi_0}} c(\chi, p^{m-\ell})F^{\chi^*}(s) + \left(1 - W_{m,p}(p^{-s})F_p(s)^{-1}\right) F(s).$$

证明。将 $n = p^\ell k$ 写成 $p \nmid k$，由于 F 在 p 处分裂，对于 $\sigma > 1$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e(-n/p^m) &= \sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{p^\ell \| n} \frac{a(n)}{n^s} e(-n/p^m) + \sum_{p^m \mid n} \frac{a(n)}{n^s} + \sum_{p \nmid n} \frac{a(n)}{n^s} e(-n/p^m) \\ &= \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{a(p^\ell)}{p^{\ell s}} \sum_{p \nmid k} \frac{a(k)}{k^s} e(-k/p^{m-\ell}) + F(s) - \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{a(p^\ell)}{p^{\ell s}} \sum_{p \nmid k} \frac{a(k)}{k^s}. \end{aligned}$$

现在我们应用引理 1，得到

$$\begin{aligned} \sum_{p \nmid k} \frac{a(k)}{k^s} e(-k/p^{m-\ell}) &= \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^{m-\ell})} c(\chi, p^{m-\ell})F^\chi(s) \\ &= \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^{m-\ell}) \\ \chi \neq \chi_0}} c(\chi, p^{m-\ell})F^{\chi^*}(s) + c(\chi_0, p^{m-\ell})F^{\chi_0}(s). \end{aligned}$$

此外，由于 $F^{\chi_0}(s) = \sum_{p \nmid n} a(n)n^{-s} = F_p(s)^{-1}F(s)$，根据引理 1，我们还有

$$c(\chi_0, p^{m-\ell})F^{\chi_0}(s) = \begin{cases} \frac{1}{1-p}F_p(s)^{-1}F(s) & \text{if } \ell = m-1 \\ 0 & \text{if } \ell < m-1, \end{cases}$$

通过简单计算即可得到该引理。 □

引理 3. 设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 满足 $d = 2$，并设 $a < b$ 为固定值。则

$$F(s) \ll \left(\frac{q_F}{(2\pi e)^2}\right)^{|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1}$$

对 $a \le t \le b$ 和 $\sigma \le -1$ 一致成立。此外，如果 $[a,b] \cap [-\tau_F, \tau_F] = \emptyset$，我们还有

$$F(s) \gg \left(\frac{q_F}{(2\pi e)^2}\right)^{|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1}$$

对 $a \le t \le b$ 和 $\sigma \le -1$ 一致成立。

证明。这是 [4] 中引理2.1 的一个略微精细的版本。我们沿用该引理的证明，使用其中的记号，并回顾此处有 $d = 2$。然后我们注意到，斯特林公式实际上给出了更精确的表达式

$$\log|G(s)| = 2\sigma\log\sigma + (\log\beta - 2)\sigma + \log\sigma + O(1),$$

引理得证。 □

引理 4. 设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 满足 $d_F = 2$，并令 $\alpha > 0$。那么对于每个整数 $K > 0$，都存在多项式 $Q_0(s)$ ...、$Q_K(s)$，且 $Q_0(s) \equiv 1$，使得

$$F(s,\alpha) = -i\omega_F^*(\sqrt{q_F}\alpha)^{2s-1+i\theta_F} \sum_{\nu=0}^{K} \big(\frac{iq_F\alpha}{2\pi}\big)^\nu Q_\nu(s)\overline{F}\big(s+\nu+2i\theta_F, -\frac{1}{q_F\alpha}\big) + H_K(s,\alpha). \quad (3.1)$$

这里，$H_K(s,\alpha)$ 对于 $-K + \frac{1}{2} < \sigma < 2$ 和 $|s| < 2K$ 是全纯的，并满足

$$H_K(s,\alpha) \ll (AK)^K \quad (3.2)$$

其中 $A = A(F,\alpha) > 0$ 为某个常数。此外，$\deg Q_\nu = 2\nu$ and

$$Q_\nu(s) \ll \frac{(A(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!} \qquad \text{for } 1 \le \nu \le \min(|s|, K) \quad (3.3)$$

$$Q_\nu(s) \ll (AK)^K \qquad \text{for } |s| \le 2K,\ \nu \le K. \quad (3.4)$$

证明。这是 [4] 的定理2.1。注意，与定理2.1相比，(3.1) 中位移量的取值不同，即用 $\nu + 2i\theta_F$ 代替 $\nu + i\theta_F$，这是由于本文中使用的 θ_F 的定义略有不同。□

引理 5. 设 $a < b$ 固定，并设 $\mathcal{Q}_\nu(s)$ $\mathcal{F}(s)$ 为定义在水平带 $a \le t \le b$ 内的实值连续函数，满足以下条件：

$$\mathcal{F}(s) \ll 1 \qquad for\ \sigma \ge 1, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}(s) \ll B^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1} \qquad for\ \ \sigma \le 1, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{Q}_\nu(s) \ll \frac{(C(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!} \qquad for\ \ 0 \le \nu \le \min(|s|, |\sigma|+2), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Q}_\nu(s) \ll (C(|\sigma|+2))^{|\sigma|+2} \qquad for\ \ \nu \le |\sigma|+2\ ,\ |s| \le 2[|\sigma|]+2, \quad (3.8)$$

其中 $B, C > 0$。那么对于 $\sigma \le -1$ 和 $a \le t \le b$，有

$$\sum_{0 \le \nu \le |\sigma|+2} \mathcal{Q}_\nu(s)\mathcal{F}(s+\nu) \ll B^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1} \quad (3.9)$$

其中隐含常数取决于 $\mathcal{F}$、a、b、B、C，以及 (3.5)-(3.8) 中的隐含常数).

证明。在证明中，我们使用人为表达式“适当有界”，意指“被一个至多依赖于 $\mathcal{F}$、a、b、B、C 以及 (3.5)-(3.8) 中隐含常数的常数所界”。我们首先指出，不失一般性，可以假设

$$|\sigma| \ge \max(|a|, |b|) + 1. \quad (3.10)$$

事实上，否则 s 和 $s+\nu$ 连同 $0 \le \nu \le |\sigma|+2$ 都处于一个紧域内，因此函数 $\mathcal{Q}_\nu(s)$ $\mathcal{F}(s+\nu)$ 适当有界。于是 $\Phi(s)$ 也适当有界，这种情况下结论便成立。

假设 (3.10) 成立，我们首先考虑 (3.9) 中满足以下条件的项

$$|\sigma| - \max(|a|,|b|) - 1 \le \nu \le |\sigma| + 2. \tag{3.11}$$

对于这样的 ν，我们有 $-\max(|a|,|b|) - 1 \le -|\sigma| + \nu \le 2$；因此，与之前一样，$s+\nu$ 始终处于一个紧致区域内，故 $\mathcal{F}(s+\nu)$ 适当有界。此外，回顾 (3.10)，我们显然有

$$|s| \le |\sigma| + |t| \le 2[|\sigma|] + 2,$$

因此，根据这一点以及 (3.11)，我们可以应用 (3.8) 来估计 $\mathcal{Q}_\nu(s)$。于是，$\Phi(s)$ 中对应于 (3.11) 范围内的 ν 的项，其贡献至多为

$$\ll (C(|\sigma|+2))^{|\sigma|+2} \ll B^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1},$$

此时我们的断言也成立。

最后，假设

$$0 \le \nu \le |\sigma| - \max(|a|,|b|) - 1. \tag{3.12}$$

回顾 σ 为负数，对于这样的 ν，我们有 $\sigma + \nu \le -1$，因此可以应用 (3.6) 得到

$$\mathcal{F}(s+\nu) \ll |\sigma| B^{|\sigma|-\nu}(|\sigma|-\nu)^{2(|\sigma|-\nu)}.$$

此外，对于这样的 ν，我们还有 $\nu \le \min(|s|, |\sigma|+2)$，因此可应用 (3.7)，并由 (3.10) 得到

$$\mathcal{Q}_\nu(s) \ll \frac{(C(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!} \le \frac{(2C|\sigma|)^{2\nu}}{\nu!}.$$

因此，范围 (3.12) 内对应于 ν 的项至多贡献

$$\begin{aligned}
&\ll |\sigma| \sum_{0 \le \nu \le |\sigma|} \frac{(2C|\sigma|)^{2\nu}}{\nu!} B^{|\sigma|-\nu}(|\sigma|-\nu)^{2(|\sigma|-\nu)} \\
&\ll |\sigma| B^{|\sigma|} \max_{0 \le \nu \le |\sigma|} \left(|\sigma|^{2\nu}(|\sigma|-\nu)^{2(|\sigma|-\nu)}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{4C^2}{B}\right)^{\nu} \\
&\ll B^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1},
\end{aligned}$$

引理得证。 □

引理 6. 设 $F \in S^\sharp$ 且 $d = 2$。则线性扭曲 $F(s, 1/q_F)$ 可亚纯延拓至 $\mathbb{C}$，其极点至多位于以下各点

$$1 - \nu - 2i\theta_F \qquad \nu \in \mathbb{Z}, \nu \ge 0$$

且阶为 $\le m_F$。此外，对于满足以下条件的每个 $a < b$

$$(a+\theta_F)(b+\theta_F) > 0 \tag{3.13}$$

我们有，对 $\sigma \le -1$ 和 $a \le t \le b$ 一致地成立

$$F(s, 1/q_F) \ll_{F,a,b} \left(\frac{q_F}{2\pi e}\right)^{2|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1}. \tag{3.14}$$

证明。我们从取 $\alpha = 1/q_F$的引理 4开始。由于

$$\overline{F}\big(s+\nu+2i\theta_F, -\frac{1}{q_F\alpha}\big) = \overline{F}(s+\nu+2i\theta_F), \tag{3.15}$$

(3.1)右端的各项在 $s \neq 1-\nu-2i\theta_F$时均为全纯函数，其中 $\nu \geq 0$ 和s 取(3.1)之后所述的范围。此外，潜在极点由 $F(s)$诱导，因此其阶为 $\leq m_F$。由于 K 可以任意大，故第一个断言成立。

为证明界（3.14），我们对 $K = [|\sigma|]+2$ 应用引理 4。回顾（3.15），由 和（3.2）可 (3.1) 得

$$F(s,1/q_F) \ll q_F^{|\sigma|} \sum_{0\leq\nu\leq|\sigma|+2} (2\pi)^{-\nu}|Q_\nu(s)||\overline{F}(s+\nu+2i\theta_F)| + O\big((A(|\sigma|+2))^{|\sigma|+2}\big). \tag{3.16}$$

接下来，我们对以下对象应用引理 5:

$$\mathcal{Q}_\nu(s) = (2\pi)^{-2\nu}|Q_\nu(s)| \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(s) = |\overline{F}(s+i\theta)|.$$

由（3.3）和（3.4）可知，（3.7）和（3.8）对 $C = A$ 成立；由引理 3 可知，（3.6）对 $B = q_F/(2\pi e)^2$ 成立。最后，由于（3.13）以及 $F(s,1/q_F)$ 的可能奇点的描述，（3.5）也成立。现在显然，（3.14）由（3.9）和（3.16）推出，证明完毕。□

对于塞尔伯格类 $\mathcal{S}$ 中的 F，我们用 $N_F(\sigma,T)$ 表示 F 在矩形区域 $\beta > \sigma, |\gamma| \leq T$ 中的非平凡零点 $\beta+i\gamma$ 的个数。

引理 7。　设 $F \in \mathcal{S}$，其中 $d = 2$。则对任意 $\varepsilon > 0$ 及任意固定的 $\sigma > 1/2$，我们有 e

$$N_F(\sigma,T) \ll T^{3/2-\sigma+\varepsilon}.$$

证明。见 [4] 第 474—475 页。 □

4. Proof of Theorem 1

设 p 如定理 1 中所述。特别地，我们可以假设 $p \nmid q_F$，并令 $m = m_{q_F}(p)$。根据引理 2，我们有

$$W_{m,p}(p^{-s})F_p(s)^{-1}F(s) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{a(p^\ell)}{p^{\ell s}} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^{m-\ell}) \\ \chi\neq\chi_0}} c(\chi, p^{m-\ell})F^{\chi^*}(s) + F(s) - F(s,1/p^m), \tag{4.1}$$

其中右侧的所有项在 $\mathbb{C}$ 上都是亚纯的，最后一项除外。由于 $p^m \equiv 1$（模 q_F），我们有 $F(s,\ p^m/q_F)\ = F(s,\ 1/q_F)$，因此由引理 4，取 $\alpha = 1/p^m$，可得

$$\begin{aligned} F(s,1/p^m) = &-i\omega_F^* \left(\frac{\sqrt{q_F}}{p^m}\right)^{2s-1+i\theta_F} \sum_{\nu=0}^{K} \left(\frac{iq_F}{2\pi p^m}\right)^\nu Q_\nu(s)\overline{F}(s+\nu+2i\theta_F, -1/q_F) \\ &+ H_K(s,1/p^m). \end{aligned} \tag{4.2}$$

由引理 6 可知，这给出了 $F(s,1/p^m)$ 到 $\mathbb{C}$ 的亚纯延拓，因此 (4.1) 左侧的项也同样如此。因此，该函数

$$W(s) := W_{m,p}(p^{-s})F_p(s)^{-1} \tag{4.3}$$

在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯函数，并且根据（2.1），其可能的极点位于半平面 $\sigma \leq \vartheta$上。回顾（4.1）、（4.2）以及引理 6 中所描述的 $F(s,1/q_F)$的奇点结构，$W(s)$在某个有界高度的水平带之外的可能极点由 $F(s)$的零点所诱导。然而，$F_p(s)$是（$2\pi i/\log p$）-周期的，因此一个这样的极点会在带 $\sigma \leq \vartheta$, $|t| \leq T$中生成 $\gg T$个极点。如果 $F \in \mathcal{S}$ 这将与引理 7 中的密度估计相矛盾，从而$W(s)$是整函数。若 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 我们可以采用 Gierszewski [1] 的一个想法，并将 $B_F > 0$ 取得足够大，使得整个水平带 $2\pi/\log B_F \leq t \leq 4\pi/\log B_F$中没有 F的非平凡零点，于是可推出当 $p > B_F$时，$W(s)$是整函数。

为了完成证明，只需证明 $W(s)$是 p^{-s}中的多项式，因为$W_{m,p}(p^{-s})$是 p^{-s} 中的次数为 $\leq m-1$的多项式。为此，由于 $W(s)$是（$2\pi i/\log\ p$）-周期的，我们首先估计 $W(s)F(s)$，其中 $a \leq t \leq b$，$a > \max(|\theta_F|, \tau_F)$，且 $b = a + 2\pi/\log\ p$。由（4.1）可得

$$W(s)F(s) \ll C_1^{|\sigma|} \max_{0\leq \ell \leq m-1} \max_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p^{m-\ell}) \\ \chi \neq \chi_0}} |F^{\chi^*}(s)| + |F(s)| + |F(s, 1/p^m)| \tag{4.4}$$

其中 $C_1 > 0$ 为某个常数。由于 F 在 p 处弱扭曲正则，我们有 $F^{\chi^*} \in \mathcal{S}^\sharp$，且其次数为 2，因此由引理 3，(4.4) 中前两项之和为

$$\ll C_2^{|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1}$$

其中 $C_2 > 0$。此外，由 (4.2) 和引理 4，结合 $K = [|\sigma|] + 2$，可知最后一项为

$$\ll \left(\frac{p^m}{\sqrt{q_F}}\right)^{2|\sigma|} \sum_{\nu=0}^{K} \left(\frac{q_F}{2\pi p^m}\right)^{\nu} |Q_\nu(s)||F(\overline{s} + \nu - 2i\theta_F, 1/q_F)| + O\left((A|\sigma|)^{|\sigma|}\right).$$

我们利用引理 5 和以下条件估计此和

$$\mathcal{Q}_\nu(s) = \left(\frac{q_F}{2\pi p^m}\right)^{\nu} |Q_\nu(s)| \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(s) = |F(\overline{s} - 2i\theta_F, 1/q_F)|.$$

如引理 6 的证明中那样，但用引理 6 本身代替引理 3，我们很容易验证引理 5 中的假设均成立，从而得到

$$F(s, 1/p^m) \ \ll C_3^{|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1}$$

其中 $C_3 > 0$ 为某个常数。因此

$$W(s)F(s) \ll C_4^{|\sigma|} |\sigma|^{2|\sigma|+1} \tag{4.5}$$

其中 $C_4 = \max(C_2, C_3)$。另一方面，我们利用引理 3 对 $F(s)$ 作下界估计。回顾 (4.5) 以及 $a > \tau_F$，可得

$$W(s) \ll C_5^{|\sigma|}$$

具有某个 $C_5 = C_5(F, p) > 0$，对 $-\infty < \sigma < \infty$ 和 $a \leq t \leq b$ 一致成立。如同 [4] 的定理 1.1 的证明（见第 448 页），此界意味着 $W(s)$ 是关于 p^{-s} 的多项式，正如所需。

最后，我们写作

$$F_p(s) = \frac{N_p(p^{-s})}{D_p(p^{-s})}$$

其中 $N_p, D_p \in \mathbb{C}[X]$ 是互素规范化多项式。由于 $W(s)$ 是整函数，由 (4.3) 可知 N_p 整除 $W_{m,p}$，因此其次数为 $\leq m-1$。特别地，若 $p \equiv 1 \pmod{q_F}$，则 $N_p \equiv 1$，定理 1 得证。□

5. Proof of Theorem 2

由定理 1 可知，$F_p(s)^{-1}$ 是关于 p^{-s} 的有理函数；假设该有理函数不是多项式。因此，$F_p(s)^{-1}$ 的奇点位于有限条垂直直线上，并且根据 (2.1)，存在 $\sigma_p \leq \vartheta < 1/2$，使得 $F_p(s)^{-1}$ 在 $\sigma > \sigma_p$ 上全纯，且在直线 $\sigma = \sigma_p$ 上有无穷多个极点。更确切地说，$F_p(s)^{-1}$ 的极点位于有限个公差为 $2\pi i/\log p$ 的等差数列上，并且根据引理 7，每个

这样的等差数列都包含 $F_p(s)^{-1}F(s)$ 的无穷多个极点。此外，应用引理 2 并取 $m=1$，我们得到

$$\frac{p}{p-1}F_p(s)^{-1}F(s)=\sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p)\\ \chi\neq\chi_0}} c(\chi,p)F^{\chi}(s)+F(s)-F(s,1/p), \tag{5.1}$$

因此，$F(s,1/p)$ 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯，其在直线 $\sigma=\sigma_p$ 上与 $F_p(s)^{-1}F(s)$ 具有相同的奇点，并且当 $\sigma>\sigma_p$ 时至多在 $s=1$ 有一个极点。显然，若以素数 q 代替 p，且假设 $F_q(s)$ 不是多项式型，则类似结论也成立；不失一般性，我们可以假设 $\sigma_q\le\sigma_p$。如果 $F_q(s)$ 是多项式型，则令 $\sigma_q=-\infty$。

我们用 $h(s)$ 表示一个在 $\sigma>\sigma_p-1$ 上亚纯且只有有限个极点的泛函。由引理 4，取 $\alpha=p/q_F$ 和任意大的 K，并注意到当 ν 充分大时，相应各项在 $\sigma>\sigma_p-1$ 上全纯，因此有

$$F(s,p/q_F)=-i\omega_F^*(p/\sqrt{q_F})^{2s-1+i\theta_F}\sum_{\nu=0}^{K_p}\left(\frac{ip}{2\pi}\right)^{\nu}Q_\nu(s)\overline{F}(s+\nu+2i\theta_F,-1/p)+h(s)$$

其中 K_p 是适当的整数。因此，回想 $Q_0(s)\equiv 1$，由 $F(s,1/p)$ 的上述性质可推出

$$F(s,p/q_F)=-i\omega_F^*(p/\sqrt{q_F})^{2s-1+i\theta_F}\overline{F}(s+2i\theta_F,-1/p)+h(s). \tag{5.2}$$

同样，将素数 q 替换为 p时，也有类似的公式。此外，对(5.2)进行两次共轭运算可得

$$F(s,1/p)=-i\omega_F^*(\sqrt{q_F}/p)^{2s-1+i\theta_F}\overline{F(\overline{s}-2i\theta_F,p/q_F)}+h(s), \tag{5.3}$$

将 q 替换为 p时，同样成立。

但 $p\equiv q$ (模 q_F)，因此

$$F(\overline{s}-2i\theta,p/q_F)=F(\overline{s}-2i\theta_F,q/q_F)$$

由此，利用 (5.3) 可得

$$F(s,1/p)=(q/p)^{2s-1+i\theta_F}F(s,1/q)+h(s).$$

这表明，除有限个之外，$\sigma_q=\sigma_p$ 以及 $\sigma=\sigma_p$ 上 $F(s,1/p)$ 和 $F(s,1/q)$ 的奇点彼此重合。若 $F\in\mathcal{S}$，根据引理 7，这只有在相关等差数列的公差相同时才可能发生，即 $p=q$，这就产生了矛盾。若 $F\in\mathcal{S}^\sharp$，则我们仿照定理 1 的证明，运用 Gierszewski[1] 中的思路。因此，$F_p(s)^{-1}$ 没有奇点，故它是 p^{-s} 中的一个多项式。由对称性，同样的结论也适用于 $F_q(s)^{-1}$，结论得证。□

6. Proof of Theorem 3

显然，F 在每个素数处都分裂，因为它属于 $\mathcal{S}$。此外，记素数 q_F为 p，给定一个素数 $p_1\neq p$，显然存在一个不同的素数 $p_2\neq p$，使得 $p_1\equiv p_2$（模 p）。因此，根据定理 2，我们只需证明 $F_p(s)^{-1}$ 是关于p^{-s}的多项式。

由正交性，对于 $\sigma>1$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{p-1}F(s,a/p)&=(p-1)\sum_{p\mid n}\frac{a(n)}{n^s}-\sum_{p\nmid n}\frac{a(n)}{n^s}\\&=(p-1)\big(F(s)-F_p(s)^{-1}F(s)\big)-F_p(s)^{-1}F(s)\\&=\big(p-1-pF_p^{-1}(s)\big)\,F(s).\end{aligned} \tag{6.1}$$

对于每个 $1 \le a < p$，我们固定一个素数 $p_a \equiv a \pmod{p}$，使得 $F(s, a/p) = F(s, p_a/p)$。因此，由引理 4，取任意大的 $\alpha = p_a/p$ 和 K，我们得到

$$F(s,a/p) = -i\omega_F^* \left(\frac{p_a}{\sqrt{p}}\right)^{2s-1+i\theta_F} \sum_{\nu=0}^{K} \left(\frac{ip_a}{2\pi}\right)^{\nu} Q_\nu(s)\overline{F}(s+\nu+2i\theta_F, -1/p_a) + H_K(s, p_a/p). \quad (6.2)$$

但根据引理 1，我们有

$$\overline{F}(s,-1/p_a) = \frac{1}{1-p_a}\overline{F}_{p_a}(s)^{-1}\overline{F}(s) + \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p_a)\\ \chi \neq \chi_0}} \overline{c(\chi, p_a)}\overline{F^\chi}(s). \quad (6.3)$$

根据定理3的假设，扭曲 $\overline{F^\chi}(s)$ 属于 $S^\sharp$，且次数为 2；此外，根据定理 2，$\overline{F}_{p_a}(s)^{-1}$ 是 p_a^{-s} 中的一个多项式。因此，(6.2) 和 (6.3) 给出了 $F(s, a/p)$ 在整个复平面上的亚纯延拓，其可能的极点仅位于 $1-\nu-i\theta_F$、$\nu \ge 0$。

此外，我们还有

$$\overline{F}_{p_a}(s)^{-1} \ll p_a^{C|\sigma|} \quad (6.4)$$

对于某个 $C > 0$，根据引理 3，

$$\overline{F^\chi}(s) \ll A^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1} \quad (6.5)$$

对于某个 $A > 0$，一致地对 $\sigma \le -1$ 和 $b \le t \le c$ 成立，其中 b、c 为任意固定的、满足 $|\theta_F| < b < c$ 的量。因此，应用引理 5，并取

$$\mathcal{Q}_\nu(s) = \left(\frac{p_a}{2\pi}\right)^{\nu} |Q_\nu(s)| \qquad \text{and} \qquad \mathcal{F}(s) = |\overline{F}(s + 2i\theta_F, -1/p_a)|,$$

我们得到

$$F(s,a/p) \ll B^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1} \quad (6.6)$$

对于某个 $B > 0$，对 $\sigma \le -1$ 和 $b \le t \le c$ 一致，其中任意固定 $|\theta_F| < b < c$。现在，将 (6.1) 改写为

$$F_p(s)^{-1} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{pF(s)} \sum_{a=1}^{p-1} F(s, a/p), \quad (6.7)$$

我们得到 $F_p(s)^{-1}$ 在整个复平面上的亚纯延拓。最后，按照定理 1 的证明中的周期性和稠密性论证，我们得出 $F_p(s)^{-1}$ 是一个整函数。此外，由 (6.6)、(6.7) 和引理 3 可得

$$F_p(s)^{-1} \ll D^{|\sigma|}$$

对于某些 $D > 0$。因此，同样按照定理 1 的证明，$F_p(s)^{-1}$ 是关于 p^{-s} 的多项式，结论得证。□

7. 定理 4 的证明

与定理 3 的证明类似，对每个 $(a, q_F) = 1$，我们固定一个素数 $p_a \equiv a \pmod{q_F}$。由 (5.1) 取 $p = p_a$，可得

$$F(s, 1/p_a) \ll |F(s)| + |F_{p_a}(s)^{-1}F(s)| + \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p)\\ \chi \neq \chi_0}} |c(\chi, p_a)F^\chi(s)|.$$

与定理3的证明中一样，我们可知（6.4）和（6.5）在当前情形下也成立，第二个界中以 F^χ 替代 $\overline{F^\chi}$，并且 $b > \max_{\chi(\bmod p)} |\theta_{F^\chi}|$。因此，感谢引理 3，对于这样的 s，我们有

$$F(s, 1/p_a) \ll C_1^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1}$$

其中 $C_1 > 0$ 是某个常数。因此，先应用引理 4（取 $\alpha = p_a/q_F$），再应用引理 5，我们得到

$$F(s, p_a/q_F) \ll C_2^{|\sigma|} \sum_{0 \le \nu \le |\sigma|+2} |Q_\nu(s)||F(\overline{s} + \nu - 2i\theta, 1/p_a)| + (A|\sigma|)^{|\sigma|} \ll C_3^{|\sigma|}|\sigma|^{2|\sigma|+1} \tag{7.1}$$

对于某些 C_2、$C_3 > 0$，对 $\sigma \le -1$ 和 $b < t < c$ 一致成立。

现在令 p 为充分大的素数，例如 $p \ge B_F$，其中 $B_F > q_F$ 为某个值。于是存在 $(a, q_F) = 1$ 使得 $p \equiv p_a$（模 q_F）。我们将在水平半条带 $\sigma \le -1$、$b < t < c$ 中从上方估计 $|F_p(s)^{-1}|$，其中 $c > b + 2\pi/\log p$，且 b 充分大。利用引理 4（取 $\alpha = 1/p$）、$F(s, p/q_F) = F(s, p_a/q_F)$ 这一事实、引理 5 以及 (7.1)，我们得到

$$\begin{aligned} F(s, 1/p) &\ll \left(\frac{p}{\sqrt{q_F}}\right)^{2|\sigma|+1} \sum_{0 \le \nu \le |\sigma|+2} \left(\frac{q_F}{2\pi p}\right)^{\nu} |Q_\nu(s) F(\overline{s} + \nu - 2i\theta_F, p_a/q_F)| + (A|\sigma|)^{|\sigma|+1} \\ &\ll (C_4 p)^{2|\sigma|+1}|\sigma|^{2|\sigma|+1}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

接下来，由引理 2（取 $m = 1$），再结合引理 3 和 (7.2)，由于根据定理 4 的假设，F^χ 的导子 q_{F^χ} 等于 $q_F p^2$，我们得到

$$\begin{aligned} F_p(s)^{-1} &\ll \frac{1}{|F(s)|} \sum_{\substack{\chi \,(\mathrm{mod}\, p) \\ \chi \ne \chi_0}} |c(\chi, p) F^\chi(s)| + \frac{1}{|F(s)|}|F(s, 1/p)| + 1 \\ &\ll (C_5 p)^{2|\sigma|+1} \ll p^{(5/2)|\sigma|}. \end{aligned}$$

但我们已经从定理 2 得知，对于某个多项式 $P_p \in \mathbb{C}[z]$，$F_p(s)^{-1} = P_p(p^{-s})$，因此，最后一个不等式表明它的次数至多为 2。由于 P_p 的常数项为 1，我们可以写成

$$F_p(s) = \left(1 - \frac{\alpha_p}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_p}{p^s}\right)^{-1}$$

其中 α_p 和 β_p 是某些复数。回想一下，F 的狄利克雷系数满足拉马努金猜想，我们必须有 $|\alpha_p|$，$|\beta_p| \le 1$（参见 [4] 第 448–449 页），结论由此得证。□

References

[1] K.Gierszewski - *Some remarks on twists and Euler products in the Selberg class* - 帕尔马大学数学杂志 11 (2020)，293–299。[2] J.Kaczorowski - *Axiomatic theory of L-functions: the Selberg class* - 载于 *Analytic NumberTheory*，C.I.M.E.暑期学校，切特拉罗（意大利）2002年，A.Perelli 和 C.Viola 编，133–209，Springer讲义录第1891卷，2006年。[3] J.Kaczorowski，A.Perelli - *The Selberg class: a survey* - 载于 *Number Theory in Progress*，《A.Schinzel 荣誉纪念会议论文集》，K.Gy¨ory *et al.* 编，953–992，德格鲁伊特，1999年。[4] J.Kaczorowski，A.Perelli - *Twists, Euler products and a converse theorem for L-functionsof degree* 2 - 比萨高等师范学院年刊 (V) 14 (2015)，441–480。[5] A.Perelli - *A survey of the Selberg class of L-functions, part I* - 米兰数学杂志 73 (2005)，19–52。[6] A.Perelli - *A survey of the Selberg class of L-functions, part II* - 帕尔马大学数学杂志 (7) 3* (2004)，83–118。[7] A.Perelli - *Non-linear twists of L-functions: a survey* - 米兰数学杂志 78 (2010)，117–134。[8] A.Perelli - *Converse theorems: from the Riemann zeta function to the Selberg class* - 意大利数学联盟通报 10 (2017)，29–53。

Jerzy Kaczorowski，数学与计算机科学学院，A.Mickiewicz 大学，61-614 Pozna´n，波兰；波兰科学院数学研究所，00-956 华沙，波兰。电子邮箱： kjerzy@amu.edu.pl

Alberto Perelli，数学系，热那亚大学，Dodecaneso 路 35 号，16146 热那亚，意大利。电子邮箱： perelli@dima.unige.it