arXiv:2303.02420v1 [math.NT] 4 Mar 2023

狄利克雷特征扭曲与 L-函数的多项式欧拉乘积，II

J. Kaczorowski 和 A. Perelli

谨以此文纪念 Eduard Wirsing

摘要。我们在一篇先前的论文中证明，若塞尔伯格类中的一个 L-函数 F 的次数为 2，其导子 q_F 是素数，并且 F 在所有素数 $p \neq q_F$处均弱扭正则，那么 F 就具有多项式欧拉乘积。本文将这一结果推广到导子 q_F为无平方因子的次数为 2 的 L-函数，其中这些函数在所有素数 $p \nmid q_F$处均弱扭正则。

数学主题分类（2010）：11M41
关键词：狄利克雷特征扭曲；欧拉乘积；塞尔伯格类

1. Introduction

在 [5] 中，除其他结果外，我们证明了：若一个来自塞尔伯格类 $\mathcal{S}$ 的 L-函数 F 的次数为 2，导子 q_F 是素数，并且 F 在所有素数 $p \neq q_F$处都是弱扭正则的，那么 F 就有一个多项式欧拉乘积。本文沿用 [5] 中的记号，但为方便读者，我们在第 2 节回顾一些基本定义。本文旨在将上述结果推广如下。

定理 1. 设 $F \in \mathcal{S}$ 的次数为 2，且其导子 q_F 无平方因子。若 F 在所有素数 $p \nmid q_F$处都是弱扭正则的，则 F 有一个多项式欧拉乘积。

这并非一个直接的推广；事实上，除了要用到下面的定理 2 之外，还需要对 [5] 中的方法作实质性扩展。另一方面，当前方法无法完全解决这个问题，也就是说，无法涵盖所有整数导子；要证明完整结果，可能还需要一些新的思路。

证明中一个主要工具是以下关于扩展塞尔伯格类中 L-函数的线性扭曲的变换公式，该公式本身也具有独立意义。

定理 2. 设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 满足 $d_F = 2$，且设 $\alpha > 0$。那么，对每个整数 $K > 0$，存在多项式 $Q_0(s)$ ...、$Q_K(s)$，其中 $Q_0(s) \equiv 1$，使得

$$F(s,\alpha) = -i\omega_F^*(\sqrt{q_F}\alpha)^{2s-1+2i\theta_F} \sum_{\nu=0}^{K} \Big(\frac{iq_F\alpha}{2\pi}\Big)^\nu Q_\nu(s)\overline{F}\Big(s+\nu+2i\theta_F, -\frac{1}{q_F\alpha}\Big) + H_K(s,\alpha). \quad (1.1)$$

此处，$H_K(s,\alpha)$ 在 $-K+\frac{1}{2} < \sigma < 2$ 上是全纯的，并且满足

$$H_K(s,\alpha) \ll (|s|+1)^{2K+A} \quad (1.2)$$

其中 $A = A(F,\alpha)$ 是某个常数 > 0。此外，$\deg Q_\nu = 2\nu$，并且

$$Q_\nu(s) \ll \frac{(A(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!} \qquad for\ 1 \le \nu \le \min(|s|, K). \quad (1.3)$$

这应与 [4] 中的定理 1.2 作比较。除了在 (1.1) 中用 $2\theta_F$ 替代 θ_F 外，由于与 [4] 相比，θ_F 的定义略有变化（见下一节），

主要区别在于对 $H_K(s,\alpha)$ 大小的估计，以及该估计成立时 s 的取值范围。具体而言， [4] 中的定理 1.2 指出

$$H_K(s,\alpha) \ll (AK)^K \qquad \text{for } -K+\frac{1}{2} < \sigma < 2,\ |s| \le 2K. \tag{1.4}$$

在定理 1 的证明中，我们考虑形如 $F(s+i\tau)$ 的 L-函数平移，其中 $\tau \to \infty$，因此需要在半平面而非圆盘中合理地控制 $H_K(s,\alpha)$ 的大小。事实上，对于 $\tau \to \infty$，(1.4) 给出的估计对于定理 1 的证明而言过于粗糙。相比之下，(1.2) 保证了多项式增长，这恰好是所需的。原则上，定理 2 的证明与 [4] 中定理 1.2 的证明具有相同的主要结构。然而， s 位于半平面这一新情况，迫使我们在证明中作出重大的技术调整。

致谢。我们衷心感谢审稿人认真审阅我们的稿件，并指出了许多错误。本研究部分得到意大利国家高等数学研究所、意大利大学与科研部的 PRIN-2017 *"Geometric* 项目资助，以及波兰国家科学中心的 2021/41/BST1/00241 *"Analytic methods innumber theory"* 项目资助。

2. Definitions

全文中，我们用 $s=\sigma+it$, $e(x) = e^{2\pi i x}$ 和 $\overline{f}(s)$ 表示 $f(\overline{s})$。扩展塞尔伯格类 $\mathcal{S}^\sharp$ 由不恒等于零的狄利克雷级数组成

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

其在 $\sigma > 1$绝对收敛，且对于某个整数 $m \ge 0$，$(s-1)^m F(s)$ 是有限阶整函数，并满足如下形式的函数方程

$$F(s)\gamma(s) = \omega\overline{\gamma}(1-s)\overline{F}(1-s),$$

其中 $|\omega| = 1$ ，且 γ 因子

$$\gamma(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

具有 $Q > 0, r \ge 0, \lambda_j > 0$ 和 $\Re(\mu_j) \ge 0$。注意，共轭函数 $\overline{F}$ 具有共轭系数 $a(n)$。塞尔伯格类 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}^\sharp$ 中满足拉马努金猜想 $a(n) \ll n^\varepsilon$ 且具有如下形式的欧拉乘积的函数所构成的子类

$$F(s) = \prod_p F_p(s), \quad \text{where} \quad F_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(p^k)}{p^{ks}}$$

满足

$$\log F_p(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \quad \text{with } b(p^k) \ll p^{\vartheta k} \text{ for a certain } \vartheta < 1/2. \tag{2.1}$$

注意，式 (2.1) 中的级数在 $\sigma > \vartheta$ 处绝对收敛，因此 e

$$F_p(s) \text{ is holomorphic and bounded away from 0 for } \sigma > \vartheta' \text{ for some } \vartheta' < 1/2. \tag{2.2}$$

我们称 $F \in \mathcal{S}$ 具有多项式欧拉乘积，如果对每个素数 p，都存在 $\partial_p \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha_{j,\,p} \in \mathbb{C}$，使得

$$F_p(s) = \prod_{j=1}^{\partial_p} \left(1 - \frac{\alpha_{j,p}}{p^s}\right)^{-1}.$$

在这种情况下，由拉马努金猜想可得 $|\alpha_{j,\,p}| \le 1$；参见 [4] 第 448–449 页。狄利克雷特征 χ (模 q) 的扭曲定义为：对于 $\sigma > 1$

$$F^{\chi}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\chi(n)}{n^s}.$$

若对于每个满足 $1 \le f \le m_{q_F}(p)$ 的本原狄利克雷特征 χ(模 p^f)，其中 $m_{q_F}(p)$ 是 p(模 q_F) 的阶数，扭曲 F^{χ} 属于 $\mathcal{S}^\sharp$ 且次数与 F 相同，则称 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 在 p 处是弱扭正则的。此外，$F \in \mathcal{S}^\sharp$ 的线性扭曲定义为：对于 $\sigma > 1$

$$F(s,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e(-n\alpha)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$。

$F \in \mathcal{S}^\sharp$ 的次数 d_F、导子 q_F、根数 ω_F 和 ξ-不变量 ξ_F 定义为

$$d_F = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j, \qquad q_F = (2\pi)^d Q^2 \prod_{j=1}^{r} \lambda_j^{2\lambda_j},$$

$$\omega_F = \omega \prod_{j=1}^{r} \lambda_j^{-2i\Im(\mu_j)}, \qquad \xi_F = 2\sum_{j=1}^{r} (\mu_j - 1/2) = \eta_F + i d_F \theta_F$$

其中 η_F，$\theta_F \in \mathbb{R}$。我们还记

$$\omega_F^* = \omega_F e^{-i\frac{\pi}{2}(\eta_F+1)} \Big(\frac{q_F}{(2\pi)^2}\Big)^{i\theta_F} \quad \text{and} \quad \tau_F = \max_{j=1,\dots,r} \Big|\frac{\Im(\mu_j)}{\lambda_j}\Big|,$$

m_F 表示 F 在 $s = 1$ 处极点的阶数。在 ω_F^* 以及下文的其他定义中，与 [4] 中相应的定义相比，我们将 θ_F 改为 $2\theta_F$。这是由于上述对 ξ-不变量的定义略有不同，并且我们考虑的是次数为 $d_F = 2$ 的函数。F 的 H-不变量定义为

$$H_F(n) = 2\sum_{j=1}^{r} \frac{B_n(\mu_j)}{\lambda_j^{n-1}} \qquad n = 0, 1, \dots$$

其中 $B_n(x)$ 是第 n 个伯努利多项式。注意，$H_F(0) = d_F$是次数，而 $H_F(1)$ 是 ξ-不变量。关于塞尔伯格类的更多定义、例子和基础理论，请参阅我们的综述论文 [1],[2],[6],[7] 。

与 [4], 中 ν、$\mu = 1$、2、.....的情形相同，我们定义多项式 $R_\nu(s) = R_{\nu,\,F}(s)$ 和 $V_\mu(s) = V_{\mu,\,F}(s)$ 如下

$$\begin{aligned} R_\nu(s) &= B_{\nu+1}(1 - 2s - 2i\theta_F) + B_{\nu+1}(1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{k} \big((-1)^\nu H_F(k) s^{\nu+1-k} - \overline{H_F(k)}(1-s)^{\nu+1-k}\big) \end{aligned} \tag{2.3}$$

and

$$V_\mu(s) = (-1)^\mu \sum_{m=1}^{\mu} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\nu_1 \ge 1, \dots, \nu_m \ge 1 \\ \nu_1 + \dots + \nu_m = \mu}} \prod_{j=1}^{m} \frac{R_{\nu_j}(s)}{\nu_j(\nu_j+1)}, \tag{2.4}$$

分别。我们还通过公式定义 $Q_0(s) \equiv 1$，并对 $\nu = 1$、2、.....，定义定理 2 中出现的多项式 $Q_\nu(s)$

$$\exp\big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{(w+2s-1+2i\theta_F)^\nu}\big)\approx 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Q_\nu(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)},$$

以及系数 $C_{\mu,\ell}$, $\ell\geq\mu\geq 1$，由

$$\frac{1}{w^\mu}\approx\sum_{\ell=\mu}^{\infty}\frac{C_{\mu,\ell}}{(w-1)\cdots(w-\ell)}. \tag{2.5}$$

此外，我们将系数 $A_{\mu,\nu}(s)$ ($\nu\geq\mu\geq 1$) 定义为

$$\frac{1}{(w+2s-1+2i\theta_F)^\mu}\approx\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\frac{A_{\mu,\nu}(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)}. \tag{2.6}$$

这里，$\approx$ 表示当 $w\to\infty$ 时的渐近展开，即将左端的求和截断于$\nu = N$ 会引入大小为 $O_s(1/|w|^{N+1})$ 的误差。关于 (2.5) 和 (2.6) 的更精确含义，参见下文的引理 8 和 9。

记 $w = u + iv$，并对给定的 s，如下定义围道 $\mathcal{L}(s)$:

$$\mathcal{L}(s)=\mathcal{L}_{-\infty}(s)\cup\mathcal{L}_{\infty}(s)$$

其中

$$\mathcal{L}_{-\infty}(s)=(-\sigma+c_0-i\infty,-\sigma+c_0+it_0]\cup[-\sigma+c_0+it_0,-\sigma-c_0+it_0]$$

$$\mathcal{L}_{\infty}(s)=[-\sigma-c_0+it_0,-\sigma-c_0+i\infty).$$

这里，$t_0 = t_0(s) = c_1(|s|+1)^2$ 以及 $c_0, c_1 > 0$ 是依赖于 F、足够大的常数，具体取值将在后文确定。请注意，与 [4]中的类似选取相比，此处对 t_0 的选取有显著差异；这里的 t_0 大得多，这对定理 2 的证明很重要。此外，我们用 $\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$ 表示取正向的半直线 $1-2s-2i\theta_F-\mathcal{L}_\infty(s)$，因此

$$\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)=(1-\sigma+c_0-i\infty,1-\sigma+c_0-it_0^*]$$

其中 $t_0^* = t_0^*(s) = t_0 + 2t + 2\theta_F$。此外，令

$$\mathcal{L}^*_{\infty}(s)=[1-\sigma+c_0-it_0^*,N+1]\cup[N+1,N+1+i\infty),$$

其中正整数 N 将在稍后选定（见下文中的（5.10）），并记

$$\mathcal{L}^*(s)=\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)\cup\mathcal{L}^*_{\infty}(s).$$

我们还将使用记号

$$G(s,w)=\frac{(2\pi)^{1-r}}{\Gamma(1-w)}\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j(1-s-w)+\bar{\mu}_j)\Gamma(1-\lambda_j(s+w)-\mu_j)$$

and

$$S(s,w)=\frac{2^{r-1}}{\sin\pi w}\prod_{j=1}^{r}\sin\big(\pi(\lambda_j(s+w)+\mu_j\big).$$

最后，A、B、c、c'，.....将表示正常数，它们可能依赖于 F（也可通过依赖于上述常数 c_0、c_1而间接依赖），且每次出现时不一定相同。$\ll$-和 O-符号中的常数还可能依赖于 F（s）（同样也可通过 c_0、c_1 而间接依赖）。

3. 引理

引理 1. 设 $F \in \mathcal{S}$ 和 q_F 均为无平方因子。则当 $\sigma > 1$ 时，我们有

$$\sum_{\substack{1\le a\le q_F\\(a,q_F)=1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e(-\frac{a}{q_F}n) = F(s) \sum_{d|q_F} d\mu(\frac{q_F}{d}) \prod_{p|d} \left(1 - F_p(s)^{-1}\right). \tag{3.1}$$

证明。为简便起见，我们用 q 代替 q_F。回顾 Ramanujan和的著名 Kluyver公式

$$c_q(n) := \sum_{\substack{1\le a\le q\\(a,q)=1}} e(an/q) = \sum_{d|(q,n)} \mu(\frac{q}{d})d.$$

由于 $c_q(n) \in \mathbb{R}$，(3.1) 的左边等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} c_q(n) = \sum_{d|q} \mu(\frac{q}{d}) d^{1-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(dn)}{n^s}. \tag{3.2}$$

现在我们计算一般情形下 $d|q$, $d = p_1 \dots p_k$ 的内和。可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(dn)}{n^s} &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n\ge 1\\ p_j^{\nu_j}||n\\ (1\le j\le k)}} \frac{a(dn)}{n^s} \\
&= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{a(p_j^{\nu_j+1})}{p_j^{\nu_j s}} \right) \sum_{(n,p_1\dots p_k)=1} \frac{a(n)}{n^s} \\
&= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{a(p_j^{\nu_j+1})}{p_j^{\nu_j s}} \right) \left(\prod_{j=1}^{k} F_{p_j}(s)^{-1} \right) F(s) \\
&= F(s) d^s \prod_{j=1}^{k} \left(1 - F_{p_j}(s)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

将此代入 (3.2)，得到 (3.1)，证明完毕。 □

对于塞尔伯格类 $\mathcal{S}$中的 F，我们用 $N_F(\sigma, T)$ 表示 F 在矩形区域 $\beta > \sigma$, $|\gamma| \le T$内的非平凡零点 $\beta + i\gamma$的个数。

引理 2。 设 $F \in \mathcal{S}$ 满足 $d = 2$。则对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及任意固定的 $\sigma > 1/2$，我们有 e

$$N_F(\sigma, T) \ll T^{3/2-\sigma+\varepsilon}.$$

证明。参见 [4] 第 474–475 页。 □

引理 3。设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$ 满足 $d = 2$。则存在正常数 $T_0 = T_0(F)$，使得

$$F(s) \asymp \left(\frac{q_F}{(2\pi e)^2}\right)^{|\sigma|} |s|^{2|\sigma|+1}$$

对 $|t| \ge T_0$ 和 $\sigma \le -1$ 一致成立。

证明。这是 [4] 中引理 2.1 的一个改进版本。证明由 F 的函数方程和斯特林公式推出；另见 [5] 中的引理 3。□

引理 4. 设 $F \in \mathcal{S}$, p 为素数，且 $\sigma > 1$。那么存在系数 $c(\chi, p)$，其中 χ 遍历模 p的狄利克雷特征 χ，使得

$$F(s, 1/p) = \sum_{\substack{\chi (\bmod p) \\ \chi \neq \chi_0}} c(\chi, p) F^{\chi}(s) + \left(1 - \frac{p}{p-1} F_p(s)^{-1}\right) F(s).$$

证明。参见 [4], 的公式 (2.6)，注意到 $F(s, 1/p) = F(s, -(p-1)/p)$。 □

引理 5。设 $F \in \mathcal{S}^\sharp$, q 是正整数，且 $\theta < 1/2$ 固定。此外，对于每个素数 $p|q$，设 ε_p 是满足 $|\varepsilon_p| = 1$ 的复数。则存在两个正常数 a 和 b（仅依赖于 θ），以及一个正数列 $\tau_k \to \infty$, $k \geq 1$，满足以下两个条件

i) 对每个素数 $p|q$，都有 $|p^{-i\tau_k} - \varepsilon_p| < 1/k$；ii) 对于 $-1 \leq \sigma \leq \theta$ 和 $|t - \tau_k| \leq \tau_k^a$，$|F(\sigma + it)| \geq \tau_k^{-b}$ 一致成立

证明。数 $\log p$, $p|q$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。因此，根据经典克罗内克逼近定理的一个众所周知的版本，对于每个 $k \geq 1$，存在一个数 τ 的相对稠密集，使得

$$|p^{-i\tau} - \varepsilon_p| < \frac{1}{k} \quad \text{for all } p|q.$$

因此，利用引理 2，我们看到，对于某个 $T_0(F)$（即引理 3 中出现的常数），该不等式组存在一个解 $\tau_k \geq 2\max(k, T_0(F))$，使得 $F(\sigma + it) \neq 0$ for

$$-1 \leq \sigma < (1 + 2\theta)/4 \qquad \text{and} \quad |t - \tau_k| \leq \tau_k^a,$$

其中，a 是任意一个小于 $(1 - 2\theta)/4$ 的固定正数。对于处于此范围内的 s，我们使用众所周知的公式

$$-\frac{F'}{F}(s) = \sum_{|\gamma - t| < 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log \tau_k), \quad \text{therefore} \quad -\frac{F'}{F}(s) = O(\log \tau_k).$$

因此，回顾引理 3，我们有

$$\log |F(\sigma + it)| = \log |F(-1 + it)| + \Re \int_{-1}^{\sigma} \frac{F'}{F}(u + it)\, du \geq -b \log \tau_k$$

对于 $-1 \leq \sigma \leq \theta$ 和 $|t - \tau_k| \leq \tau_k^a$，引理得证。 □

引理 6。设 $R_\nu(s)$ 如 (2.3) 中所示，并设 $c \geq 1$。对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $1 \leq \nu \leq c(|s| + 1)$，我们有

$$R_\nu(s) \ll \big(c'(|s| + 1)\big)^{\nu + 1}$$

其中 $c' \geq c + 1$ 适当。

证明。这是 [4], 中引理 3.8，其中给出了 c' 的显式下界。 □

Let

$$V_{\mu,N}(s) = (-1)^\mu \sum_{m=1}^{\mu} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{1 \leq \nu_1 \leq N, \ldots, 1 \leq \nu_m \leq N \\ \nu_1 + \ldots + \nu_m = \mu}} \prod_{j=1}^{m} \frac{R_{\nu_j}(s)}{\nu_j(\nu_j + 1)}. \tag{3.3}$$

回顾定义 (2.4)，我们看到 $V_{\mu,\ N}(s) = V_\mu(s)$，其中 $\mu \leq N$。

引理 7. 对于 $s \in \mathbb{C}$ 和 $1 \leq \mu \leq c(|s| + 1)$，我们有

$$V_{\mu,N}(s) \ll \frac{(c'(|s| + 1)^{2\mu}}{(\mu - 1)!},$$

其中 c 和 c' 与引理 6 中相同。此外，对于所有 $\mu \geq 1$

$$V_{\mu,N}(s) \ll (c'(|s| + 1)^{2\mu}.$$

证明。由引理 6 可知，对每个 $\mu \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} |V_{\mu,N}(s)| &\leq \sum_{m=1}^{\mu} \frac{1}{m!} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_m=\mu} \prod_{j=1}^{m} \frac{(c'(|s|+1))^{\nu_j+1}}{\nu_j(\nu_j+1)} \\ &\ll (c'(|s|+1))^{\mu} \sum_{m=1}^{\mu} \frac{(c'(|s|+1))^m}{m!} \ll (c'(|s|+1))^{2\mu}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

此外，回想 $c' \geq c+1$，对于 $1 \leq \mu \leq c(|s|+1)$，我们有

$$\sum_{m=1}^{\mu} \frac{(c'(|s|+1))^m}{m!} \leq \mu \max_{1\leq m\leq \mu} \frac{(c'(|s|+1))^m}{m!} = \frac{(c'(|s|+1)^{\mu}}{(\mu-1)!},$$

由此及 (3.4) 即可得出该引理。 □

引理 8. 对于 $w \in \mathbb{C}$ 及整数 μ、M，若 $1 \leq \mu \leq M \leq |w|/2$，则有

$$\frac{1}{w^{\mu}} = \sum_{\ell=\mu}^{M} \frac{C_{\mu,\ell}}{(w-1)\cdots(w-\ell)} + R_{\mu,M}(w), \tag{3.5}$$

其中系数 $C_{\mu,\,\ell}$ 由 (2.5) 和

$$R_{\mu,M}(w) \ll \frac{2^M M!}{(\mu-1)!} \frac{1}{|w(w-1)\cdots(w-M)|}.$$

证明. 这是 [4] 中的引理 3.13。 □

引理 9. 设 $s \in \mathbb{C}$ 和 $1 \leq \mu \leq \nu \leq N$ 为整数，并设

$$A_{\mu,\nu}(s) = \sum_{k=0}^{\nu-\mu} \binom{-\mu}{k} C_{\mu+k,\nu}(2s-1+2i\theta_F)^k.$$

那么对于 $w \in \mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$ 和 $1 \leq N \leq |\sigma|+c$，我们有

$$\frac{1}{(w+2s-1+2i\theta_F)^{\mu}} = \sum_{\nu=\mu}^{N} \frac{A_{\mu,\nu}(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)} + O\big(\frac{4^N N!|2s-1+2i\theta_F|^{N-\mu+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}\big),$$

其中，O-符号中的常数可能依赖于 c。

Proof. 我们仿照 [4]，中引理 3.14 的证明，假设第 2 节中 $\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$ 的定义里的常数 c_1 足够大，并以不同方式估计误差项。给定一个整数 $P \geq 0$，对于 $w \in \mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$，我们有

$$\frac{1}{(w+\eta)^{\mu}} = \sum_{k=0}^{P} \binom{-\mu}{k} \frac{\eta^k}{w^{\mu+k}} + O\left(\frac{2^{P+\mu}|\eta|^{P+1}}{|w|^{P+\mu+1}}\right), \tag{3.6}$$

其中 $\eta = 2s-1+2i\theta_F$。取 $P = N-\mu$。由于 $|w| \geq 2N$，对于 $w \in \mathcal{L}^*_{-\infty}$，(3.6) 中的误差项为

$$\ll \frac{4^N|\eta|^{N-\mu+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}. \tag{3.7}$$

现在我们应用引理 8，其中 $M = N$，并将 (3.6) 中的 $1/w^{\mu+k}$ 替换为 (3.5) 的主项。这会产生一个大小为

$$\ll \frac{2^N N!}{|w(w-1)\cdots(w-N)|} \sum_{k=0}^{N-\mu} \left|\binom{-\mu}{k}\right| \frac{|\eta|^k}{(k+\mu)!} \ll \frac{4^N N!|\eta|^{N-\mu}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}, \tag{3.8}$$

因此，根据(3.6)–(3.8)可得 $1/(w+\eta)^{\mu}$ 的展开式，引理得证。 □

引理 10. 设 $s \in \mathbb{C}$ 和 $c \geq 1$。对于 $1 \leq \nu \leq |s| + c$，有

$$Q_\nu(s) \ll \frac{(c'(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!}$$

取适当的 $c' = c'(c) > 0$。

证明。根据 [4] 中的引理 3.18。 □

4. Proof of Theorem 1

由 [5] 中的定理 2 可知，对于所有素数 $p \nmid q_F$，$F_p(s)^{-1}$ 是关于 p^{-s} 的多项式。主要困难在于证明对素数 $p|q_F$，这一结论同样成立。

令 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 表示单位圆，r 表示 q_F 的素因子个数，给定 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{T}^r$，并令 τ_k 为引理 5 中出现的数列，其中取 $q = q_F$。令 $l_k := \log \tau_k$，不妨假设 τ_k 足够大。我们置

$$\Omega_k := \{s = \sigma + it : \sigma \leq 1/2, |t| \leq l_k^2\},$$
$$\Omega_{k,1} := \{s \in \Omega_k : \sigma \leq -l_k\} \quad \text{and} \quad \Omega_{k,2} := \{s \in \Omega_k : \sigma \geq -l_k\}.$$

此外，对于 $\sigma > 1$，令

$$G_k(s) := \frac{1}{F(s+i\tau_k)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q_F \\ (a,q_F)=1}} F(s+i\tau_k, a/q_F). \tag{4.1}$$

由引理 1 可得

$$G_k(s) = \sum_{d|q_F} d\mu(\frac{q_F}{d}) \prod_{p|d} \left(1 - F_p(s+i\tau_k)^{-1}\right) \tag{4.2}$$

因此由（2.2）可知

$$G_k(s) \ll 1 \quad \text{for } \sigma > \vartheta' \text{ with a certain } \vartheta' < 1/2. \tag{4.3}$$

如同 [5], 中定理 3 的证明，对于每个 $a (\mathrm{mod} q_F)$，$(a, q_F) = 1$，我们固定一个素数 $p_a \equiv a (\mathrm{mod} q_F)$。显然 $F(s, a/q_F) = F(s, p_a/q_F)$，因此我们应用定理 2，取 $s \in \Omega_k$, $\alpha = p_a/q_F$ 和 $K = [|\sigma|] + 2$，可得

$$F(s+i\tau_k, a/q_F) = -i\omega_F^* \left(\frac{p_a}{\sqrt{q_F}}\right)^{2s-1+2i(\tau_k+\theta_F)}$$
$$\times \sum_{\nu=0}^{K} \left(\frac{ip_a}{2\pi}\right)^\nu Q_\nu(s+i\tau_k)\overline{F}(s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F), -1/p_a) + H_K(s+i\tau_k, p_a/q_F). \tag{4.4}$$

此外，利用引理 4 可得

$$\overline{F}(s, -1/p_a) = \sum_{\substack{\chi (\bmod p_a) \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{c(\chi, p_a)}\overline{F^\chi}(s) - \left(1 - \frac{p_a}{p_a - 1}\overline{F}_{p_a}(s)^{-1}\right)\overline{F}(s). \tag{4.5}$$

由 [5] 的定理 2 可知，$\overline{F}_{p_a}(s)^{-1}$ 是关于 p_a^{-s} 的多项式，特别地，它是整函数。由于对于 $s \in \Omega_k$，我们有 $\Im(s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F)) \neq 0$，且 $F(s)$ 和 $F^\chi(s)$ 的可能极点位于 $s = 1$，由 (4.5) 可推得 $\overline{F}(s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F) - 1/p_a)$ 在 $s \in \Omega_k$ 上全纯。因此，由 (4.1)、(4.4) 以及引理 5 的 ii)，我们得出 $G_k(s)$ 在 $s \in \Omega_k$ 上全纯。

现在我们估计此区域内的 $G_k(s)$。由 (4.1)、(4.4) 和 (4.5)，我们有

$$G_k(s) \ll \frac{B^{|\sigma|}}{|F(s+i\tau_k)|}\sum_{0\le\nu\le K}|Q_\nu(s+i\tau_k)|$$
$$\times \max_{\substack{1\le a\le q_F\\(a,q_F)=1}}\left(\sum_{\substack{\chi(\bmod p_a)\\ \chi\neq\chi_0}}|\overline{F^\chi}(s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F))| + B^{|\sigma+\nu|}|\overline{F}(s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F))|\right) \quad (4.6)$$
$$+ \max_{\substack{1\le a\le q_F\\(a,q_F)=1}}\frac{|H_K(s+i\tau_k,p_a/q_F)|}{|F(s+i\tau_k)|},$$

其中及下文中，$B>1$ 表示某个常数，在不同位置不一定相同。注意，我们用到了这样一个事实：$F_{p_a}(s)^{-1}$ 是关于 p_a^{-s}的多项式，因此它是$\ll B^{|\sigma|}$。回顾 (1.3)、引理 3，以及我们关于 F^χ 是关于 $\mathcal{S}$的二次函数这一假设，可知对于 $\sigma\le -1$，含有 $\nu\le -\sigma-1$ 的项的贡献至多为

$$\begin{aligned}
&\ll B^{|\sigma|}\max_{0\le\nu\le-\sigma-1}\frac{(|s|+\tau_k)^{2\nu}}{\nu!}\frac{(|s+\nu+i(\tau_k+2\theta_F)|+1)^{2|\sigma+\nu|+1}}{(|s|+\tau_k)^{2|\sigma|+1}}\\
&\ll B^{|\sigma|}\max_{0\le\nu\le-\sigma-1}\frac{(|\sigma|+\tau_k)^{2\nu}}{\nu!}\frac{(|\sigma+\nu|+\tau_k)^{2|\sigma|-2\nu}}{(|\sigma|+\tau_k)^{2|\sigma|}} \qquad (4.7)\\
&\ll B^{|\sigma|}\max_{0\le\nu\le-\sigma-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{(|\sigma|-\nu+\tau_k)}{|\sigma|+\tau_k}\right)^{2(|\sigma|-\nu)}\ll B^{|\sigma|}.
\end{aligned}$$

对于 $\sigma\le -1$，含有 $-\sigma\le\nu\le K$ 的项（至多有 3 项）的贡献为

$$\ll B^{|\sigma|}\frac{(|\sigma|+\tau_k)^{2|\sigma|}}{([|\sigma|]+1)!}\frac{\tau_k^A}{(|\sigma|+\tau_k)^{2|\sigma|}}\ll B^{|\sigma|}\frac{\tau_k^A}{(|\sigma|+1)^{|\sigma|}}\ll\tau_k^A. \qquad (4.8)$$

最后，对于 $\sigma\le -1$，利用 (1.2)，(4.6) 右端的最后一项的贡献为

$$\frac{H_K(s+i\tau_k,p_a/q_F)}{F(s+i\tau_k)}\ll B^{|\sigma|}\frac{|s+i\tau_k|^{2|\sigma|+A}}{(|\sigma|+\tau_k)^{2|\sigma|+1}}\ll B^{|\sigma|}(|\sigma|+\tau_k)^A\ll B^{|\sigma|}\tau_k^A. \qquad (4.9)$$

对于 $s\in\Omega_k$和 $\sigma\ge -1$，我们有 $|F(s+i\tau_k)|\gg\tau_k^{-A}$；而 (4.6) 中所有其他项都是$\ll\tau_k^A$。因此，综合 (4.6)、(4.7)、(4.8) 和 (4.9)，我们得出

$$G_k(s)\ll B^{|\sigma|}\tau_k^A \quad \text{for } s\in\Omega_k. \qquad (4.10)$$

注意，隐含常数以及 A 和 B可能依赖于 F，但与τ_k无关。

现在令 $s\in\Omega_{k,1}$。对于这些值，我们有 $\tau_k^A\le e^{A|\sigma|}$；因此，回顾我们关于常数 B的约定，(4.10) 给出

$$G_k(s)\ll B^{|\sigma|} \quad \text{for } s\in\Omega_{k,1}. \qquad (4.11)$$

对于 $s\in\Omega_{k,2}$，我们写作

$$g_k(s):=\exp(-4\cos(s/(2l_k))) \quad \text{and} \quad \widetilde{G}_k(s):=B^sG_k(s)g_k(s).$$

对于 $s\in\Omega_{k,2}$，我们有 $|g_k(s)|\le 1$，因此由 (4.3) 可知，在 $\Omega_{k,2}$ 边界的右侧垂直部分，$G_k(s)\ll 1$。类似地，利用 (4.11) 可知，在 $\Omega_{k,2}$ 边界的左侧垂直部分，s 也成立。在该边界的水平部分，我们有 $g_k(s)\ll\exp(-e^{l_k/2})$，因此由 (4.10) 得到

$$\widetilde{G}_k(s)\ll B^{\sigma+|\sigma|}\tau_k^A\exp(-e^{l_k/2})\ll 1.$$

~因此，借助最大模原理，我们得出，对于 $s \in \Omega_{k,\,2}$， $G_k(s) \ll 1$ 。~现在假设 $s \in \Omega_{k,\,2}$ 且 $|t| \le 1$。由于 $g_k(s) \gg \exp(-\exp(O(1/l_k)) \gg 1$ 且 $G_k(s) \ll 1$，对于这样的 s，我们有 $B^s G_k(s) \ll 1$ 。这与 (4.11) 一起意味着

$$B^s G_k(s) \ll 1 \quad \text{for } \sigma \le 1/2 \text{ and } |t| \le 1 \tag{4.12}$$

在 τ_k上一致收敛。

现在回顾一下，式 (4.1) 中的函数 $G_k(s)$ 是借助引理 5 中的数列 τ_k 定义的。特别地，对于每个 $p|q_F$，我们都有 $p^{-i\tau_k} \to \varepsilon_p$ 。因此，根据 (2.2) 和 (4.2)，对于 $\sigma > \vartheta'$ 和 $|t| \le 1$，极限

$$G(s, \boldsymbol{\varepsilon}) = \lim_{k\to\infty} B^s G_k(s) \tag{4.13}$$

存在，并表示一个有界全纯函数。因此，根据维塔利收敛定理（参见 Titchmarsh 的第 5.21 节 [8]），该极限存在，且对于所有 $\sigma \le 1/2$、$|t| \le 1$， $G(s, \boldsymbol{\varepsilon})$ 都是全纯的。此外，回顾 (4.12) 及引理 5 的 i)，我们有

$$G(s, \boldsymbol{\varepsilon}) \ll 1 \tag{4.14}$$

对于 $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{T}^r$、 $\sigma \le 1/2$ 和 $|t| \le 1$ 一致成立。记 $\sigma > \vartheta'$ 为

$$F_p(s)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(p^m)}{p^{ms}},$$

容易看出

$$H(s, \varepsilon_p) := \lim_{k\to\infty} \left(1 - F_p(s + i\tau_k)^{-1}\right) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(p^m)}{p^{ms}} \varepsilon_p^n.$$

因此，回顾（4.2）和（4.13），对于 $\sigma > \vartheta'$ 我们得到

$$G(s, \boldsymbol{\varepsilon}) = B^s \sum_{d|q_F} d\mu(\frac{q_F}{d}) \prod_{p|d} H(s, \varepsilon_p). \tag{4.15}$$

现在令 $d\mu(\boldsymbol{\varepsilon})$ 表示 $\mathbb{T}^r = \prod_{p|q_F} \mathbb{T}_p$ 上的哈尔测度，其中对于每个 $p|q_F$，我们用 $\mathbb{T}_p$ 表示单位圆 $\mathbb{T}$ 的一个副本。显然， $d\mu(\boldsymbol{\varepsilon})$ 是圆 $\mathbb{T}_p$ 上归一化勒贝格测度 $d\mu(\varepsilon_p)$ 的乘积。对于给定的素数 $p_j|q_F$ 和正整数 m，令

$$J(s) = J(s; p_j, m) := \int_{\mathbb{T}^r} G(s, \boldsymbol{\varepsilon}) \varepsilon_{p_j}^{-m} \, d\mu(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

由于 $G(s, \boldsymbol{\varepsilon})$ 对于 $\sigma \le 1/2$ 和 $|t| \le 1$ 是全纯的，因此 $J(s)$ 也是全纯的。此外，回顾（4.14），对于这样的 s，我们有

$$J(s) \ll 1. \tag{4.16}$$

由 (4.15)、富比尼定理和正交关系，对于 $\sigma > \vartheta'$，我们有

$$\begin{aligned}
J(s) &= B^s \sum_{d|q_F} d\mu(\frac{q_F}{d}) \int_{\mathbb{T}^r} \prod_{p|d} H(s, \varepsilon_p) \varepsilon_{p_j}^{-m} \, d\mu(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= B^s \sum_{d|q_F} d\mu(\frac{q_F}{d}) \prod_{\substack{p|d \\ p\neq p_j}} \int_{\mathbb{T}_p} H(s, \varepsilon_p) \, d\mu(\varepsilon_p) \int_{\mathbb{T}_{p_j}} H(s, \varepsilon_{p_j}) \varepsilon_{p_j}^{-m} \, d\mu(\varepsilon_{p_j}) \\
&= B^s p_j \mu(\frac{q_F}{p_j}) \int_{\mathbb{T}_{p_j}} H(s, \varepsilon_{p_j}) \varepsilon_{p_j}^{-m} \, d\mu(\varepsilon_{p_j}) = B^s \mu(\frac{q_F}{p_j}) c(p_j^m) p_j^{1-ms}.
\end{aligned}$$

通过解析延拓　　对 $\sigma \le 1/2$ 和 $|t| \le 1$，这一等式成立；利用 (4.16)，我们得到

$$c(p_j^m) \ll_{p_j,m} \left(\frac{B}{p_j^m}\right)^{|\sigma|}.$$

当 m 足够大时，右端趋于 0，因为 $\sigma \to -\infty$，于是对于这样的 m，有 $c(p_j^m) = 0$。这表明 $F_{p_j}(s)^{-1}$ 是关于 p_j^{-s} 的多项式，定理 1 得证。□

5. Proof of Theorem 2

我们紧密沿用 [4]，中定理 1.2 的证明，并经常参照该文。因此这里仅作简要说明，只指出主要的改动。起初，我们暂不确定下文中足够大的常数 c_0、c_1、N 的取值，并在需要时补充条件。此外，回想一下，路径 $\mathcal{L}(s)$（见第 2 节）的定义与 [4] 第 3.1 节中的定义相同，但 t_0 的选取不同；因此，下面的估计与 [4] 第 3.3 节中的类似估计有所不同。

设 $z_X = \frac{1}{X} + 2\pi i\alpha$，其中 $X > 0$ 很大。记

$$F_X(s,\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \exp(-nz_X),$$

与 [4] 中的 (3.27) 一样，对于 $\sigma < 2$，我们有

$$F_X(s,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(2-\sigma)} F(s+w)\Gamma(w) z_X^{-w}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}(s)} F(s+w)\Gamma(w) z_X^{-w}\,\mathrm{d}w. \tag{5.1}$$

若 $w = u + iv \in \mathcal{L}_{-\infty}(s)$，则 $\Re(s+w) \ge -c_0$，因此对于某个 $c > 0$，有 $F(s+w) \ll |s+w|^c$，因为 $F(s)$ 在垂直条带上具有多项式增长。若还满足 $v < t_0$，则 $\Re(s+w) = c_0 > 1$，从而 $F(s+w) \ll 1$。此外，仍对于 $w \in \mathcal{L}_{-\infty}(s)$，我们有

$$|z_X^{-w}| = |z_X|^{-u} \exp(v(\pi/2 - \eta(X))),$$

其中 $\eta(X) > 0$，且 $\eta(X) = O(1/X)$，由斯特林公式可得

$$\Gamma(w) \ll e^{-\frac{\pi}{2}|v|}(|v|+1)^{u-\frac{1}{2}}.$$

因此，由于 t_0 的选取不同，$\mathcal{L}_{-\infty}(s)$ 对 (5.1) 的贡献为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_{-\infty}(s)} F(s+w)\Gamma(w) z_X^{-w}\,\mathrm{d}w \ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c}$$

其中 A 为某个正数，且 c 为常数；这些常数在不同出现处不一定相同。因此，对于 $\sigma < 2$ 以及任意固定的 $\alpha > 0$，[4] 中的方程 (3.28) 变为

$$\begin{aligned} F_X(s,\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)} F(s+w)\Gamma(w) z_X^{-w}\,\mathrm{d}w + O(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c}) \\ &= \mathcal{I}_X(s,\alpha) + O(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c}), \end{aligned} \tag{5.2}$$

即，当 $X \to \infty$ 时一致地。

如同 [4], 第467页所述，现在我们应用 $F(s)$ 的函数方程以及 $\Gamma(s)$的反射公式，从而得到

$$\mathcal{I}_X(s,\alpha) = \omega Q^{1-2s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)} \overline{F}(1-s-w)G(s,w)S(s,w)(Q^2 z_X)^{-w}\,\mathrm{d}w;$$

定义见第 2 节。考虑到 t_0 的不同选择，根据 [4] 中关于 $w \in \mathcal{L}_\infty$ 的引理3.1和3.2，我们有

$$S(s,w) = -ie(-\xi_F/4)e^{-\pi i s}(1 + O(e^{-\eta v}))$$

对于某个正的 η，并且

$$G(s,w) \ll e^{-\frac{\pi}{2}(v+2t)}(v+|s|+1)^{2|\sigma|+c}.$$

因此，将 $S(s,w)$ 替换为 $-ie(-\xi_F/4)e^{-\pi is}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_X(s,\alpha) &= -i\omega e(-\xi_F/4)Q^{1-2s}e^{-\pi is}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)}\overline{F}(1-s-w)G(s,w)(Q^2z_X)^{-w}\mathrm{w}\\ &\quad + O(A^{|\sigma|}\int_{t_0}^{\infty}|G(s,-\sigma-c_0+iv)||(Q^2z_X)^{\sigma+c_0-iv}||e^{-\pi is}|e^{-\eta v}\mathrm{v})\\ &= \mathcal{J}_X(s,\alpha)+O(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c}),\end{aligned} \tag{5.3}$$

也就是说，当 $X\to\infty$ 时一致成立。

如 [4]，第 467 页所述，我们利用 [3] 中斯特林公式的一致版本，将 (5.3) 中的 $G(s,w)$ 化为单个 Γ 因子。对于 $1\le N\le |s|+c$ 和 $\beta=\prod_{j=1}^r\lambda_j^{2\lambda_j}$，按 [4] 中的方法推导，我们得到

$$\begin{aligned}\log G(s,w) &= \log\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)+(\frac{1}{2}-s-w)\log\beta+\log\prod_{j=1}^r\lambda_j^{-2i\Im\mu_j}\\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{w^\nu}+O\big(\frac{(c(|s|+1))^{N+2}}{|w|^{N+1}}\big).\end{aligned} \tag{5.4}$$

由于对 $w\in\mathcal{L}_\infty(s)$ 有 $O\big(\frac{(c(|s|+1))^{N+2}}{|w|^{N+1}}\big)<1$，只要 $\mathcal{L}_\infty(s)$ 的定义中所取的常数足够大，则对 $1\le N\le|\sigma|+c$ 我们有

$$e^{O\left(\frac{(c(|s|+1))^{N+2}}{|w|^{N+1}}\right)}=1+O\big(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{N+2}}{|w|^{N+1}}\big).$$

因此，由 (5.4) 可得

$$\begin{aligned}G(s,w) &= \Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)\beta^{\frac{1}{2}-s-w}\prod_{j=1}^r\lambda_j^{-2i\Im\mu_j}\exp\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{w^\nu}\big)\\ &\quad\times\big(1+O\big(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{N+2}}{|w|^{N+1}}\big)\big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

此外，利用引理 6，对于 $w\in\mathcal{L}_\infty(s)$ 和 $1\le N\le c(|s|+1)$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{w^\nu} &\ll \sum_{\nu=1}^{N}\frac{(c'(|s|+1))^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{|w|^\nu}\\ &\ll \sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu(\nu+1)}\frac{(c'(|s|+1))^{\nu+1}}{(c_1(|s|+1))^{2\nu}}=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu(\nu+1)}(\frac{c'}{c_1})^{2\nu}\ll 1\end{aligned} \tag{5.6}$$

若 $c_1\ge c'$。我们再次指出，(5.5) 和 (5.6) 成立，得益于我们目前在定义 $\mathcal{L}_\infty(s)$ 时对 t_0 的选择。与 [4] 相比，这一细微但重要的变化使我们在 s 方面得到了更好的估计（参见 [4] 中的引理 3.9 和 (3.31)）。

接下来，我们在 (5.3) 的积分 $\mathcal{J}_X(s,\alpha)$ 中，用 $G(s,w)$ 的主项替换它。这会产生大小为

$$\begin{aligned}
&\ll A^{|\sigma|}e^{\pi t}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)}|\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)|\exp\big(\Re\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{w^\nu}\big)\big)\big|(Q^2z_X)^{-w}\big|\frac{(|s|+1)^{N+2}}{|w|^{N+1}}|\mathrm{w}|\\
&\ll A^{|\sigma|}e^{\pi t}(|s|+1)^{N+2}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)}|\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)|\big|(Q^2z_X)^{-w}\big|\frac{|dw|}{|w|^{N+1}}\\
&\ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{N+2}\int_{t_0}^{\infty}e^{-\pi v/2}e^{\pi v/2}v^{-\sigma+c_0-N-1/2}\mathrm{v}\ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{N+2}
\end{aligned}$$

若 $N\geq-\sigma+c_0+1$，该界关于 X 一致。事实上，这个界

$$|\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)(Q^2z_X)^{-w}||w|^{-N-1}\ll A^{|\sigma|}e^{-\pi t}v^{-\sigma+c_0-N-1/2},$$

用于得到最后一个估计，可由斯特林公式推出，即

$$\begin{aligned}
\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)&\ll|1-2s-w-2i\theta_F|^{1/2-\sigma+c_0}\\
&\quad\times\exp((2t+v+2\theta_F)\arg(1-2s-w-2i\theta_F))\\
&\ll v^{1/2-\sigma+c_0}\exp((2t+v+2\theta_F)\arg(1-2s-w-2i\theta_F)),
\end{aligned}$$

注意到

$$\arg(1-2s-w-2i\theta_F)=-\arctan\left(\frac{2t+v+2\theta_F}{1-2\sigma-u}\right)=-\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{|\sigma|+1}{2t+v+2\theta_F}\right).$$

因此，由 (5.3)、(5.5)，并回顾 q_F 和 ω_F^* 的定义，对于

$$|\sigma|+c\leq N\leq|\sigma|+c+1 \tag{5.7}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X(s,\alpha)=\omega_F^*\big(\frac{q_F}{4\pi^2}\big)^{1/2-s-i\theta_F}e(-\frac{1}{2}(s+i\theta_F))\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_\infty(s)}\overline{F}(1-s-w)\times\\
\times\Gamma(1-2s-w-2i\theta_F)\exp\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{w^\nu}\big)\big(\frac{q_Fz_X}{4\pi^2}\big)^{-w}\mathrm{w}+O\big(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c'}\big).
\end{aligned}$$

因此，在上述积分中作代换 $1-2s-w-2i\theta_F\to w$，并回顾第 2 节中 $\mathcal{L}_{-\infty}^*(s)$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_X(s,\alpha)&=-i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha-i\frac{\sqrt{q_F}}{2\pi X}\big)^{2s-1+2i\theta_F}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}_{-\infty}^*(s)}\bar{F}(s+w+2i\theta_F)\Gamma(w)\\
&\quad\times\exp\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(-1)^\nu R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{(w+2s-1+2i\theta_F)^\nu}\big)\big(\frac{q_Fz_X}{4\pi^2}\big)^{w}\mathrm{w}+O\big(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+c'}\big),
\end{aligned}\tag{5.8}$$

一致地，当 $X\to\infty$ 时。

再次将 $\eta=2s-1+2i\theta_F$ 写成幂级数展开，利用指数函数的幂级数展开并回顾 (3.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
\exp\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(-1)^\nu R_\nu(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{(w+\eta)^\nu}\big)&=1+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{V_{\mu,N}(s)}{(w+\eta)^\mu}\\
&=1+\sum_{\mu=1}^{N}\frac{V_\mu(s)}{(w+\eta)^\mu}+O(\sum_{\mu=N+1}^{\infty}\frac{|V_{\mu,N}(s)|}{|w+\eta|^\mu}).
\end{aligned}\tag{5.9}$$

由于对于 $w\in\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$，我们有 $|w+\eta|\geq 2(c'(|s|+1))^2,$，其中 c' 表示引理 7 中的常数，利用该引理可得

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=N+1}^{\infty}\frac{|V_{\mu,N}(s)|}{|w+\eta|^{\mu}})&\ll\sum_{\mu=N+1}^{\infty}\frac{(c'(|s|+1)^{2\mu}}{|w+\eta|^{\mu}}\leq\frac{(c'(|s|+1)^{2(N+1)}}{|w+\eta|^{N+1}}\sum_{\mu=N+1}^{\infty}2^{-\mu}\\&\ll A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{2N+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}.\end{aligned}$$

因此，利用 (5.9) 以及引理 7 和 9

$$\begin{aligned}&\exp\big(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(-1)^{\nu}R_{\nu}(s)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{(w+\eta)^{\nu}}\big)=1+\sum_{\mu=1}^{N}\frac{V_{\mu}(s)}{(w+\eta)^{\mu}}+O(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{2N+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|})\\&=1+\sum_{\mu=1}^{N}V_{\mu}(s)\sum_{\nu=\mu}^{N}\frac{A_{\mu,\nu}(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)}+O\big(\frac{4^NN!}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}\sum_{\mu=1}^{N}|V_{\mu}(s)||\eta|^{N-\mu+1}\big)\\&\qquad+O(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{2N+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|})\\&=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{Q_{\nu}(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)}+O\big(\frac{4^NN!(c'(|s|+1)^N}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}\sum_{\mu=1}^{N}\frac{(c'(|s|+1)^{\mu+1}}{(\mu-1)!}\big)\\&\qquad+O(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{2N+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|})\\&=\sum_{\nu=0}^{N}\frac{Q_{\nu}(s)}{(w-1)\cdots(w-\nu)}+O(A^{|\sigma|}\frac{(|s|+1)^{2N+1}}{|w(w-1)\cdots(w-N)|})\end{aligned}$$

现在，我们用上述公式的主项替换 (5.8) 中的 $\exp(\sum_{\nu=1}^{N}...)$。这会带来一个大小为

$$\begin{aligned}&\ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2N+1}\int_{\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)}\frac{|\Gamma(w)|}{|w(w-1)\cdots(w-N)|}e^{\pi|v|/2}|\mathrm{w}|\\&=A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2N+1}\int_{\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)}\frac{|\Gamma(w-N)|e^{\pi|v|/2}}{|w|}|\mathrm{w}|.\end{aligned}$$

此外，我们还希望 N 满足 $\Re(w-N)\leq 0$，其中 $w\in\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)$，也就是说，我们取

$$N=[-\sigma]+k \tag{5.10}$$

其中 k 是满足 (5.7) 的充分大的正整数。作此选择后，我们有 $|\Gamma(w-N)|\ll e^{-\pi|v|/2}/|v|^{1/2}$，因此该积分为 $\ll 1$。于是 (5.8) 变为，当 $X\to\infty$ 时一致成立，

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X(s,\alpha)=-i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha-i\frac{\sqrt{q_F}}{2\pi X}\big)^{2s-1+2i\theta_F}\sum_{\nu=0}^{N}Q_{\nu}(s)\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}^*_{-\infty}(s)}\overline{F}(s+w+2i\theta_F)\times\\\times\Gamma(w-\nu)\big(\frac{q_Fz_X}{4\pi^2}\big)^{w}\mathrm{w}+O\big(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+B}\big),\end{aligned} \tag{5.11}$$

这与 [4] 中的 (3.35) 类似。

将 (5.11) 中的积分路径替换为整个路径 $\mathcal{L}^*(s)$ 会产生误差；由于 $\nu \le N$，根据引理 10，该误差的大小为

$$\ll A^{|\sigma|}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(|s|+1)^{2\nu}}{\nu!}\int_{\mathcal{L}^*_\infty(s)}|F(s+w+2i\theta_F)\Gamma(w-\nu)\big(\frac{q_F z_X}{4\pi^2}\big)^w||\mathrm{d}w|.$$

现在令 $w\in\mathcal{L}^*_\infty(s)$。显然，$F(s+w+2i\theta_F)\ll 1$。此外，对于 $0\le\nu\le N$，我们有$-c\le\Re(w-\nu)\le N+1-\nu$，因此对于 $v\neq 0$

$$v\arg(w-\nu)=v\arg(iv)+\arg\left(1+i\frac{\nu-u}{v}\right)=\frac{\pi}{2}|v|+O(|\sigma|+1).$$

注意到此估计对 $v=0$ 也成立，由斯特林公式可得

$$\log|\Gamma(w-\nu)|=(u-\nu-1/2)\log|w-\nu|-\frac{\pi}{2}|v|+O(|\sigma|+1).$$

因此

$$\Gamma(w-\nu)\ll A^{|\sigma|}e^{-\frac{\pi}{2}|v|}(|s|+|v|+1)^{N-\nu+1/2}.$$

此外，$|z_X^w|\ll A^{|\sigma|}e^{-v\arg z_X}$，因此上述误差为（取适当的 $c''>0$）

$$\ll A^{|\sigma|}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(|s|+1)^{2\nu}}{\nu!}\int_{-t_0^*(s)}^{\infty}(|s|+|v|+1)^{|\sigma|-\nu+c''}e^{-\pi|v|/2-v\arg z_X}\mathrm{d}v\ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+B}.$$

由柯西定理，我们还有：对于 $0\le\nu\le N$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}^*(s)}\overline{F}(s+w+2i\theta_F)\Gamma(w-\nu)\big(\frac{q_F z_X}{4\pi^2}\big)^w\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\sigma|+\nu+2-i\infty}^{|\sigma|+\nu+2+i\infty}\overline{F}(s+w+2i\theta_F)\Gamma(w-\nu)\big(\frac{q_F z_X}{4\pi^2}\big)^w\mathrm{d}w\\&=\big(\frac{q_F}{4\pi^2X}+i\frac{q_F\alpha}{2\pi}\big)^\nu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a(n)}}{n^{s+\nu+2i\theta_F}}\exp(-\frac{4\pi^2}{q_F z_X}n)\end{aligned}$$

因为被积函数的极点位于 $\mathcal{L}^*(s)$ 的左侧。因此，（5.11）变为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_X(s,\alpha)=&-i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha-i\frac{\sqrt{q_F}}{2\pi X}\big)^{2s-1+2i\theta_F}\sum_{\nu=0}^{N}\big(\frac{q_F}{4\pi^2X}+i\frac{q_F\alpha}{2\pi}\big)^\nu Q_\nu(s)\\&\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a(n)}}{n^{s+\nu+2i\theta_F}}\exp(-\frac{4\pi^2}{q_F z_X}n)+O(A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2|\sigma|+B}),\end{aligned}\tag{5.12}$$

当 $X\to\infty$ 时一致成立。注意，由于

$$-\frac{4\pi^2}{q_F z_X}=\frac{2\pi i}{q_F\alpha}-\frac{1}{q_F\alpha^2}\frac{1}{X+O(1)},$$

对于每个 ν，级数 (5.12) 对所有 s 都绝对收敛。

如同第472页 [4], 所述，最后一步是使（5.12）中求和 ν 的范围与 σ 无关（回想一下，N 取决于 σ，见（5.10））。设 $K>0$ 为一个足够大的整数，并令 $\sigma>-K+1/2$。根据 N 和 K的相对大小，我们分别将ν 介于 $N+1$ 与 K 之间或介于 $K+1$ 与 N之间的项加入（5.12）或从中删去。在这两种情况下，我们都有

$\sigma+\nu>3/2$ 对于这样的 ν（将它们记为 $\nu\in\mathcal{X}$），因此由引理 10可推出

$$\begin{aligned}-i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha-i\frac{\sqrt{q_F}}{2\pi X}\big)^{2s-1+2i\theta_F}\sum_{\nu\in\mathcal{X}}\big(\frac{q_F}{4\pi^2X}+i\frac{q_F\alpha}{2\pi}\big)^{\nu}Q_\nu(s)\times\\ \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a(n)}}{n^{s+\nu+2i\theta_F}}\exp(-\frac{4\pi^2}{q_Fz_X}n)\ll A^{|\sigma|}\sum_{\nu\in\mathcal{X}}\frac{(c'(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!}\end{aligned}\tag{5.13}$$

关于 X一致地成立。如果 $N<K$ 这是

$$\ll A^{|\sigma|}(|s|+1)^{2K}\sum_{\nu\geq N+1}\frac{c'^{2\nu}}{\nu!}\ll\frac{A^{|\sigma|}c'^{2N}}{(N+1)!}(|s|+1)^{2K}\sum_{\nu\geq0}\frac{c'^{2\nu}}{\nu!}\ll(|s|+1)^{2K},$$

而如果 $N>K$ 我们有

$$A^{|\sigma|}\sum_{\nu\in\mathcal{X}}\frac{(c'(|s|+1))^{2\nu}}{\nu!}\ll A^{|\sigma|}\frac{(c'(|s|+1)^{2N}}{(N-1)!}\ll(|s|+1)^{2N}\ll(|s|+1)^{2K+A}.$$

因此，鉴于 (5.2)、(5.3)、(5.12) 和 (5.13)，对于 $-K+1/2<\sigma<2$ 我们有

$$\begin{aligned}F_X(s,\alpha)=&-i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha-i\frac{\sqrt{q_F}}{2\pi X}\big)^{2s-1+2i\theta_F}\sum_{\nu=0}^{K}\big(\frac{q_F}{4\pi^2X}+i\frac{q_F\alpha}{2\pi}\big)^{\nu}\\ &\times Q_\nu(s)F_X^*(s+\nu+2i\theta_F,\alpha)+H_X(s,\alpha),\end{aligned}\tag{5.14}$$

其中

$$F_X^*(s,\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a(n)}}{n^s}\exp(-\frac{4\pi^2}{q_Fz_X}n)$$

and

$$H_X(s,\alpha)\ll(|s|+1)^{2K+A}$$

当 $X\to\infty$时一致成立。此外，由于 $F_X(s,\alpha)$、$F_X^*(s,\alpha)$ 和 $Q_\nu(s)$ 是整函数，$H_X(s,\alpha)$ 也是整函数。此外，由 (5.14) 可得，对于 $1<\sigma<2$

$$\lim_{X\to\infty}H_X(s,\alpha)=H(s,\alpha)$$

存在且是全纯的，因为这显然对 $F_X(s,\alpha)$ 和 $F_X^*(s,\alpha)$ 成立。由 (5.14) 可知，对于 $1<\sigma<2$ 我们还有

$$H(s,\alpha)=F(s,\alpha)+i\omega_F^*\big(\sqrt{q_F}\alpha\big)^{2s-1+2i\theta_F}\sum_{\nu=0}^{K}\big(i\frac{q_F\alpha}{2\pi}\big)^{\nu}Q_\nu(s)\bar{F}(s+\nu+2i\theta_F,-\frac{1}{q_F\alpha}).\tag{5.15}$$

因此，根据维塔利收敛定理，极限函数 $H(s,\alpha)$ 存在，并且对于$-K+1/2<\sigma<2$是全纯的，且满足

$$H(s,\alpha)\ll(|s|+1)^{2K+A}.$$

这为（5.15）右端提供了解析延拓和界，定理 2 随之得证。

References

[1] J.Kaczorowski - *Axiomatic theory of L-functions: the Selberg class* - 载于 *Analytic Number Theory*，C.I.M.E.暑期学校，切特拉罗（意大利），2002年，A.Perelli 和 C.Viola 编，133–209，施普林格数学讲义第1891卷，2006年。[2] J.Kaczorowski, A.Perelli - *The Selberg class: a survey* - 载于 *Number Theory in Progress*，A.Schinzel 荣誉会议论文集，K.Gy¨ory *et al.* 编，953–992，德古意特，1999年。[3] J.Kaczorowski, A.Perelli - *A uniform version of Stirling's formula* - 函数与近似 45（2011），89–96。[4] J.Kaczorowski, A.Perelli - *Twists, Euler products and a converse theorem for L-functions of degree* 2 - 比萨高等师范学院年刊（V）14（2015），441–480。[5] J. Kaczorowski, A. Perelli - *Twists by Dirichlet characters and polynomial Euler productsof L-functions* - 预印本。[6] A.Perelli - *A survey of the Selberg class of L-functions, part I* - 米兰数学杂志 73（2005），19–52。[7] A.Perelli - *A survey of the Selberg class of L-functions, part II* - 帕尔马大学数学杂志（7）3*（2004），83–118。[8] E.C.Titchmarsh - *Theory of Functions* - 牛津大学出版社，1952年。

Jerzy Kaczorowski，数学与计算机科学学院，A.Mickiewicz University，61-614 波兹南，波兰；波兰科学院数学研究所，00-956 华沙，波兰。电子邮件： kjerzy@amu.edu.pl
Alberto Perelli，数学系，热那亚大学，多德卡内索街 35 号，16146 热那亚，意大利。电子邮件： perelli@dima.unige.it