arXiv:2303.02424v1 [gr-qc] 4 Mar 2023

广义相对论中的角动量与超平移

王慕道

Abstract. 如何测量双黑洞并合过程中被引力辐射带走的角动量？自20世纪60年代发现“超平移歧义”以来，这一直是个微妙的问题：同一系统的两位遥远观测者记录的角动量可能并不相同。在本次演讲中，我将介绍准局域质量和最优等距嵌入理论如何提出一种新的角动量定义，使其不受任何超平移歧义的影响。这项工作是我与 Po- Ning Chen、Jordan Keller、王业恺和丘成桐合作完成的。

Contents

1. 引言 1 2. 面向普通听众的科普讲座 2 3. 深入讨论 9 4. 附录 17 参考文献 18

1. 引言

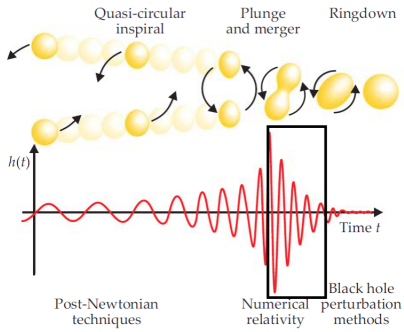
在激光干涉引力波天文台和室女座引力波探测器首次观测到引力波时， [1],事件 GW150914 对应于一个双黑洞并合。

初始黑洞的质量分别为 36 个单位和 29 个单位，最终黑洞的质量为 62 个单位，其中有 3 个单位的质量以引力波的形式辐射出去。初始的两个黑洞彼此绕转，随后逐渐稳定为一个单独的旋转黑洞。人们自然会想知道，有多少“角动量”以引力波的形式辐射出去。后来发现，由于存在

本材料基于美国国家科学基金会资助的研究，资助编号为 DMS-1810856 和 DMS-2104212。

© 2023 国际出版社

FIGURE 1. 双黑洞并合 [**6**,第 396] 页图 12.1



“超平移歧义”。辐射出去的质量总量具有“超平移不变性”，也就是说，任意两位观察者记录的质量通量都相同。另一方面，同一系统的两位观察者可能记录到不同的“角动量”通量。本系列讲座旨在解释什么是超平移，以及这种歧义从何而来。

自20世纪60年代以来，人们为消除超平移歧义做出了大量努力。一种方法是试图找出一位“最佳观察者”；另一种方法则是寻求角动量的新定义。去年，人们发现了首个不存在此类歧义的角动量定义 [**15**,**18**] ，本系列讲座旨在介绍这一新定义。

2. 面向大众的科普讲座

2.1. 未来零无穷远与超平移。广义相对论的一个关键公理是，光速是一个普适常数。在时空图示中，令竖直向上的方向表示未来时间方向，并将光速设为 1，光便沿着所谓的“类光测地线”以 45 度角向上行进。某一时刻，从某个天文事件（例如双黑洞合并）向各个方向发出的光线／类光测地线构成一个“零超曲面”。这些零超曲面可以用“迟滞时间”标记，通常记作 u。

FIGURE 2. 与 $u = u_1$ 对应的零超曲面

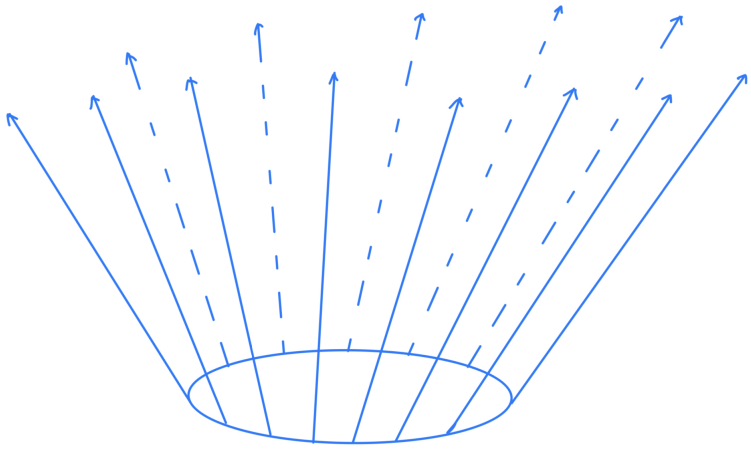
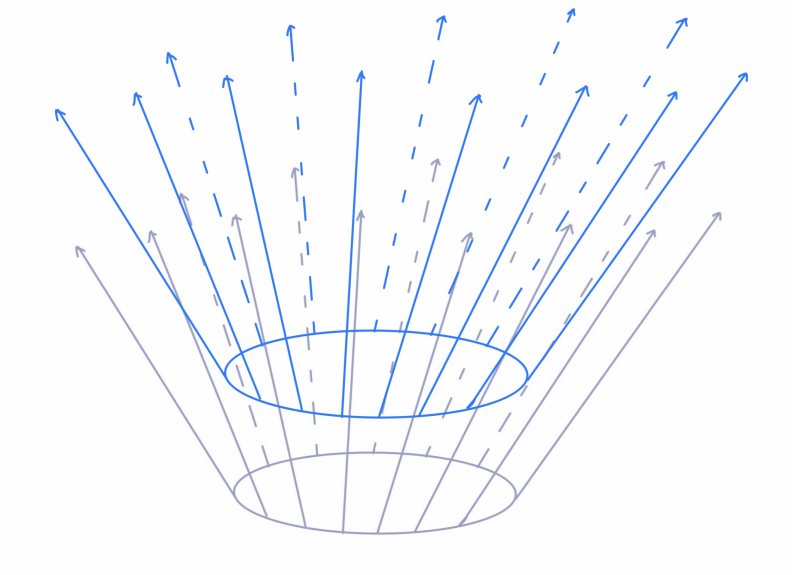
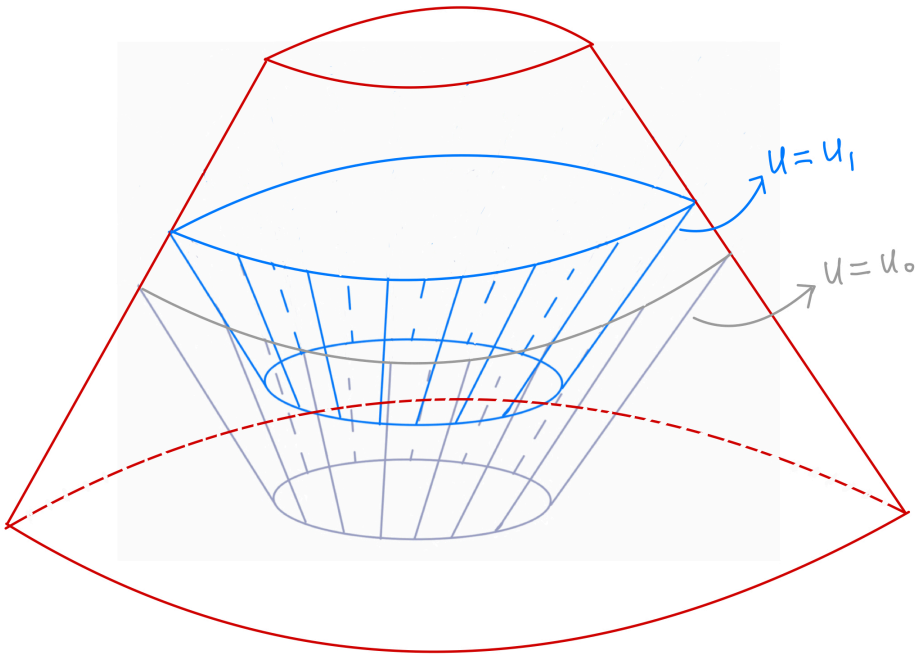


FIGURE 3. 与 $u = u_0$和 $u = u_1$ 对应的两个零超曲面



一个理想化的遥远观测者位于这些类光测地线／超曲面的端点集合处，该处称为未来零无穷远，记作 $\mathscr{I}^+$。对于孤立引力系统，未来零无穷远处的引力场很弱，因此该系统对应于渐近平坦时空，也就是说，这是一种在遥远处趋近平坦闵可夫斯基时空的时空。彭罗斯的共形紧化 [**42, 43**] 将渐近平坦时空的未来零无穷远识别为一个二维球面 S^2（所有方向）与一条由迟滞时间 u 参数化的实线（$-\infty$，∞）的乘积。$u=-\infty$ 对应类空无穷远，$u=\infty$对应类时无穷远。

FIGURE 4. 未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$



在坐标为（t， x， y， z）、度量为

$$-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2,$$

u可以取为 $u=t-r$，适用于 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。u的等值面就是如上所述的零超曲面，并在未来零无穷远处与二维球面相交。

当我们对坐标系（t， x， y， z）进行平移时，会得到一个新的迟滞时间 $\bar{u}=\bar{t}-\bar{r}$，其形式为

$$\bar{u}=u+\alpha_0+\alpha_1\sin\theta\sin\phi+\alpha_2\sin\theta\cos\phi+\alpha_3\cos\theta+O(\frac{1}{r}),$$

其中 $x=r\sin\theta\sin\phi$， $y=r\sin\theta\cos\phi$， $z=\cos\theta$以及 α_0， α_1， α_2， α_3是平移常数。计算过程见附录。

邦迪-梅茨纳-萨克斯（BMS）[9, 45] 于20世纪60年代发现， $\bar{u}$ 可以取为如下形式

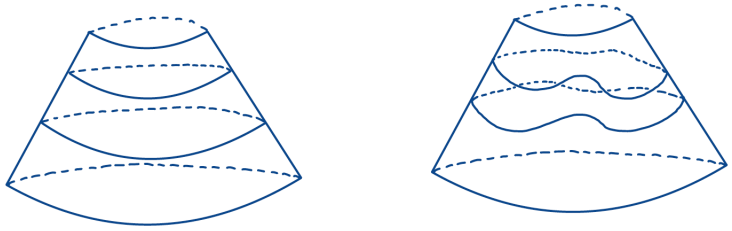
$$\bar{u}=u-f(\theta,\phi)+O(\frac{1}{r})$$

对于定义在 S^2上的任意光滑函数 f， $\bar{u}$ 的等值面仍然是零超曲面，而时空度量与闵可夫斯基度量仅相差一个 $O(\frac{1}{r})$阶的项。这正是邦迪等人所研究的渐近平坦时空的形式。

对于一般的渐近平坦时空，也可以进行这样的坐标变换。对于一个存在辐射的一般孤立引力系统而言，新的迟滞时间 $\bar{u}$ 与原来的迟滞时间 u 无法区分。因此，未来零无穷远的对称群是无限维的 BMS群，它远大于 10 维的庞加莱群（闵可夫斯基时空的对称群）。

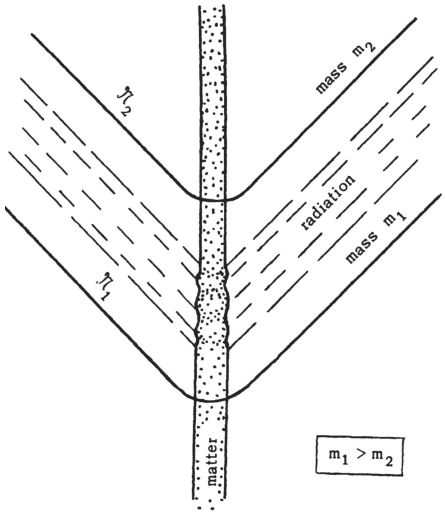
当 f为调和模 $\ell=1$（即具有 $\alpha_0+\alpha_1\sin\theta\sin\phi+\alpha_2\sin\theta\cos\phi+\alpha_3\cos\theta$ 的形式）时，从 u到 $\bar{u}=u-f$的坐标变换是一种“普通”平移。因此，球面上的高阶模函数所导致的变换称为“超平移”。普通平移属于庞加莱群，而超平移则不属于。一般而言，超平移歧义对应于对未来零无穷远叶状分层的不同但无法区分的选择，或者对应于观察孤立引力系统的不同理想化遥远观测者。

FIGURE 5. 将未来零无穷远想象成一个灯罩。不同的迟滞时间对应灯罩上的不同标记



2.2. 未来零无穷远处的邦迪能量/质量。 对于固定的迟滞时间 u，每个 u 切片（或 u 的水平集） $u = u_0$，都对应一个邦迪质量/能量概念 $E(u_0)$。邦迪质量满足著名的质量损失公式，即当 $u_0 \leq u_1$ 时， $E(u_0) \geq E(u_1)$，这体现了沿零方向辐射出去的质量。这是对引力波动性质最早的理论验证之一。

FIGURE 6. 彭罗斯辐射导致的质量损失 [**41**]



它也被证明是正的，因此孤立系统不能辐射掉超过其初始质量的质量（ $u = -\infty$处的阿诺维特-德塞尔-米斯纳（ADM）质量）。

此外，辐射损失的质量，即总质量通量，在超平移下保持不变，即

$$\lim_{u\to\infty} E(u) - \lim_{u\to-\infty} E(u) = \lim_{\bar{u}\to\infty} E(\bar{u}) - \lim_{\bar{u}\to-\infty} E(\bar{u}), \tag{2.1}$$

如果 u 和 $\bar{u}$ 通过超平移或普通平移相关联。

2.3. 角动量的故事。另一方面，角动量的情形则大不相同。

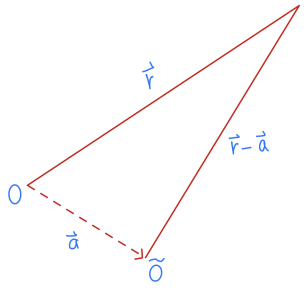
在经典力学中，粒子的角动量定义为

$$J = m\mathbf{r} \times \mathbf{r}'.$$

˜如果我们将原点（或坐标系）平移至 O，角动量 J 会因线动量 $\mathbf{p}$而发生变化

$$J_{\tilde{O}} = m(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{r}' = J - \mathbf{a} \times \mathbf{p}.$$

FIGURE 7. 角动量会因线动量而发生变化



在狭义相对论中，我们研究平坦闵可夫斯基时空上的物质场。每个物质场都有一个能量-动量密度张量。将能量-动量密度张量与十个Killing场之一配对，可得到一个守恒量。特别是，旋转Killing场，例如 $x\partial_y - y\partial_x$ ，可给出角动量。

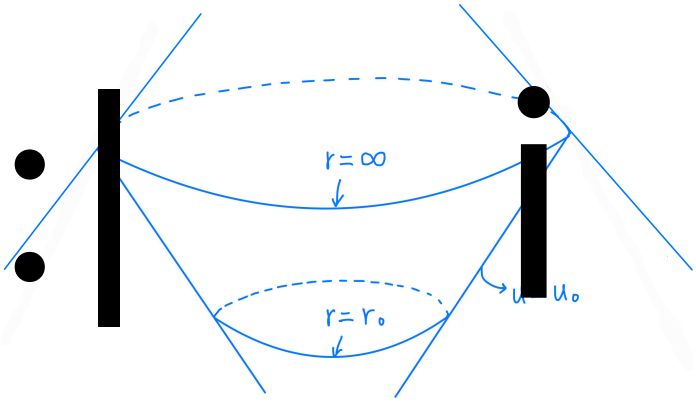
在广义相对论中，时空是满足爱因斯坦方程的洛伦兹四维流形。由于爱因斯坦等效原理，引力不存在能量-动量密度（或者说，引力场的能量无法局域化，参见 Misner-Thorne-Wheeler 第 20 章，[**37**]）。此外，一般时空中不存在 Killing 场。然而，在孤立引力系统／渐近平坦时空的无穷远处，时空渐近于闵可夫斯基时空。在零无穷远定义角动量，需要找到一种“渐近”能量-动量密度和一个“渐近” Killing 场。然而，存在辐射时，情况就变得非常微妙。

自20世纪60年代以来，已有多种关于未来零无穷远处角动量的提议。不同的方法（哈密顿量、旋量-扭量、Ko-Marman 类型等）得出了不同的定义，例如 Newmann-Penrose[**39**], Winicour-Tamburino [**52**], Bramson 1975 [**10**], Ashtekar-Hansen 1978[**5**], 彭罗斯 1982 [**40**], Ludvigsen-Vickers 1983 [**35**], Dray-Streubel 1984 [**25**],

Moreschi 1986 [**38**], Dougan-Mason 1991 [**24**], Rizzi 1997 [**44**], Chru´sciel-Jezierski-Kijowski 2002 [**20**], Helfer 2007 [**28, 29**], Barnich-Troessaert 2011[**7**], Hawking-Perry-Stromínger 2017 [**27**], Javadinezhad-Kol-Porrati 2019 [**32**], Klainerman-Szeftel 2019 [**34**], Comp`ere-Oliveri-Seraj 2020 [**23**]等。

为消除这一歧义，我们的方法是寻找一种新的角动量定义 $J(u)$，其总通量满足超平移不变性/协变性。为了获得零超曲面 $u = u_0$ 的角动量，我们考虑一族由r 参数化的二维曲面（$4\pi r^2$ 是此类曲面的面积），使得在未来零无穷远附近 $r \to \infty$ 。

FIGURE 8. 由 r 等值集叶状分解的零超曲面 $u = u_0$



因此，零超曲面 $u = u_0$ 由二维曲面叶状分解，这些曲面由$u = u_0$, $r = r_0$给出。Chen-Wang-Yau 在 2015 [**13, 14**] 中定义了其上的拟局域角动量 $J(u_0, r_0)$。当 $r \to \infty$ 时，这些曲面趋近于零无穷远处的截面；我们定义 $J(u) = \lim_{r\to\infty} J(u, r)$。 [**15, 18**] 中证明， $J(u)$ 的总通量满足所需的不变性，即:

$$\lim_{u\to\infty} J(u) - \lim_{u\to-\infty} J(u) = \lim_{\bar{u}\to\infty} J(\bar{u}) - \lim_{\bar{u}\to-\infty} J(\bar{u}),$$

如果 u 和 $\bar{u}$ 通过超平移相关联。

另一方面，当 u 和 $\bar{u}$ 由普通平移联系起来时，相应的总通量之间满足经典力学中变换公式的精确对应形式。超平移不变性/协变性将通过 Bondi-Sachs 坐标系来解释，超平移歧义正是在这一坐标系中首次被发现的。这种歧义确实普遍存在于对未来零无穷远的任何描述中。关于零无穷远附近双零规范中的超平移歧义，参见 [**17**] 。

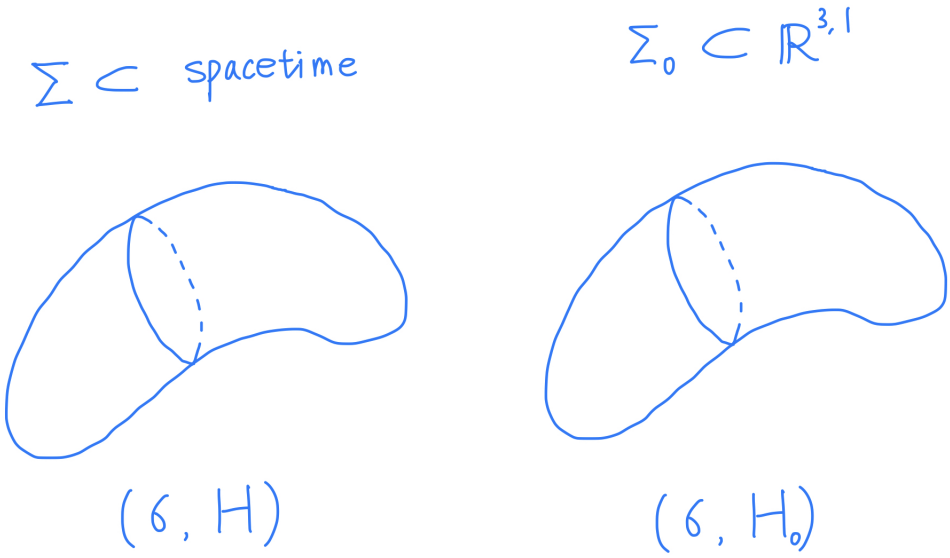
3. 深入讨论

3.1. 准局域质量和角动量。自广义相对论诞生以来，质量和角动量等守恒量的定义一直是最棘手的问题之一。根据爱因斯坦等效原理，引力不存在密度，时空也不存在典范坐标系。爱因斯坦方程的非线性特性使这一问题更加复杂。

准局域质量这一概念与时空中围成一个类空区域的二维闭合曲面 Σ 相关。 Σ 被假定为一个拓扑二维球面，但具有不同的内蕴几何和外蕴几何；我们希望从中读出曲面附近时空中的引力效应。假设该曲面是类空的，即诱导度量 σ 是黎曼度量。外蕴几何的一个重要部分由平均曲率向量场 $\mathbf{H}$ of Σ来度量。$\mathbf{H}$ 是曲面的一个法向量场，使得沿任意零法向方向ℓ 的零膨胀由 $\mathbf{H}$ 与 ℓ的配对 $\langle \mathbf{H}\ \ell \rangle$ 给出。

在 [**49**], Wang-Yau 提出了以下准局域质量的定义，它仅取决于时空中一个二维曲面 Σ 的 σ 和$\mathbf{H}$ 。要计算具有物理数据（σ,$\mathbf{H}$）的 Σ 的准局域质量，首先要解最优等距嵌入方程，见下文（3.1）。该方程给出将 Σ 嵌入闵可夫斯基时空的一个嵌入，其像曲面 Σ_0 与 Σ具有相同的诱导度量，即 σ。然后比较 Σ 和 Σ_0 的外在几何，并根据 σ,$\mathbf{H}$ 和$\mathbf{H_0}$计算准局域质量。

FIGURE 9. 嵌入闵可夫斯基时空的等距嵌入



假设平均曲率向量$\mathbf{H}$是类空的，则具有物理数据（$\sigma, \mathbf{H}$）的物理曲面Σ给出（$\sigma, |\mathbf{H}|, \alpha_{\mathbf{H}}$），其中$|\mathbf{H}| > 0$是$\mathbf{H}$的洛伦兹范数，$\alpha_{\mathbf{H}}$是由$\mathbf{H}$确定的联络一形式。给定$\sigma$的一个等距嵌入$X: \Sigma \to \mathbb{R}^{3,1}$。令$\Sigma_0$为像$X(\Sigma)$，而（$\sigma, |\mathbf{H_0}|, \alpha_{\mathbf{H_0}}$）为$\Sigma_0$的相应数据（$\mathbf{H_0}$仍假设为类空）。

令T为$\mathbb{R}^{3,1}$的未来指向类时单位 Killing 矢量场，并将$\tau = -\langle X, T\rangle$定义为$\Sigma$上的一个函数。在$\Sigma$上定义函数$\rho$和 1-形式$j_a$：

$$\rho = \frac{\sqrt{|\mathbf{H}_0|^2 + \frac{(\Delta\tau)^2}{1+|\nabla\tau|^2}} - \sqrt{|\mathbf{H}|^2 + \frac{(\Delta\tau)^2}{1+|\nabla\tau|^2}}}{\sqrt{1+|\nabla\tau|^2}}$$

$$j_a = \rho\nabla_a\tau - \nabla_a\left(\sinh^{-1}(\frac{\rho\Delta\tau}{|\mathbf{H}_0||\mathbf{H}|})\right) - (\alpha_{\mathbf{H}_0})_a + (\alpha_{\mathbf{H}})_a,$$

其中，∇_a是关于度量σ的协变导数，$|\nabla\tau|^2 = \nabla^a\tau\nabla_a\tau$以及$\Delta\tau = \nabla^a\nabla_a\tau$。$\rho$是拟局域质量密度，$j_a$是拟局域动量密度。利用$\rho$和$j_a$，在[**13, 14**]中定义了一整套拟局域守恒量。

（X，T）的最优等距嵌入方程为

$$\begin{cases} \langle dX, dX\rangle & = \sigma \\ \nabla^a j_a & = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

第一个方程是嵌入闵可夫斯基时空的等距嵌入方程，第二个方程是等距嵌入空间中准局域能量$E(\Sigma, \tau)$[**49, 50**]的欧拉-拉格朗日方程。最优等距嵌入（X，T）对应的准局域质量定义为

$$E(\Sigma, X, T) = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \rho.$$

在[**49, 50**]中证明了，$E(\Sigma, X, T)$一般为正，而对于闵可夫斯基时空中的曲面则为零。

Chen-Wang-Yau 在[**13, 14**]中运用准局域质量和最优等距嵌入理论来定义准局域守恒量。对于一个最优等距嵌入(X, T)，将K限制为$\mathbb{R}^{3,1}$在$\Sigma_0 = X(\Sigma) \subset \mathbb{R}^{3,1}$上的旋转（或推动）Killing 场，即可将准局域守恒量定义为：

$$-\frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \langle K, T\rangle\rho + (K^\top)^a j_a,$$

其中，$K^\top$是K的切于Σ_0的分量。特别地，$K = x^i\partial_j - x^j\partial_i, i < j$定义了相对于$\partial_t$的角动量。这里，$(t, x^i)$和$(\partial_t, \partial_i)$是闵可夫斯基时空的标准坐标和坐标矢量。

最优等距嵌入Σ_0的像，本质上是闵可夫斯基时空中与物理曲面最为匹配的“唯一”曲面

曲面 Σ。如果原始曲面 Σ 恰好是闵可夫斯基时空中的一个曲面，那么上述过程将 $\Sigma_0 = \Sigma$ 确定到一个整体等距变换。 [**12**] 中的定理使我们能够为那些趋近于闵可夫斯基时空中某个曲面的构型求解最优等距嵌入系统。这对于孤立系统在无穷远处的计算尤其足够。

对于靠近零无穷远的曲面，方程组 (3.1) 存在唯一解，可以显式地 [**11**] 并通过数值方法计算。Wang-Yau 拟局域能量动量在 Bondi-Sachs 坐标中的极限已在 [**11**] 中得到评估。

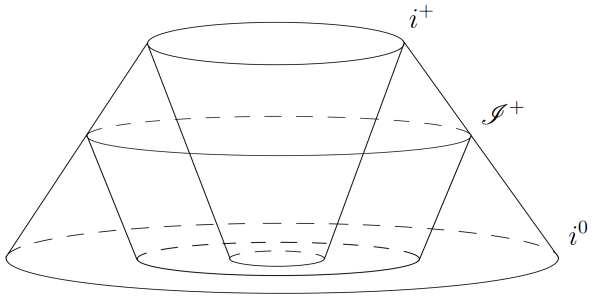
通过这一唯一解移植旋转Killing场 K $\mathbb{R}^{3,1}$，我们定义 Σ 上的拟局域角动量为

$$\int_{\Sigma} j(K^T).$$

Chen-Wang-Yau 拟局域角动量的极限定义了零无穷远处的总角动量。对于非常一般的时空，即使在零无穷远处不存在任何剥落结构，也可以进行这一构造。

3.2. Bondi-Sachs 坐标与 Bondi-Sachs能量-动量的超平移不变性。 未来零无穷远的一个重要描述是 Bondi-Sachs 坐标系 [**9, 45**]，BMS群的作用最初就是在该坐标系下表述的。

FIGURE 10. 未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$ 从 $u = -\infty$ (i^0) 到$u = \infty$ (i^+)



在 Bondi-Sachs 坐标系（u, r, x^2, x^3）中，物理时空度量的形式为

$$-UVdu^2 - 2Ududr + r^2 h_{AB}(dx^A + W^A du)(dx^B + W^B du), A, B = 2, 3. \tag{3.2}$$

未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$ 对应于理想化的零超曲面$r = \infty$，可用坐标 (u, x) $\mathscr{I}^+ = I \times S^2$ 表示，其中 $u \in I$和 $x = (x^2, x^3) \in S^2$为单位球面。出射辐射条件

[**45**] 和真空爱因斯坦方程意味着关于 r的以下逆幂展开:

$$V = 1 - \frac{2m}{r} + O(r^{-2}),$$
$$W^A = \frac{1}{2r^2}\nabla_B C^{AB} + O(r^{-3}),$$
$$h_{AB} = \sigma_{AB} + \frac{C_{AB}}{r} + O(r^{-2}),$$

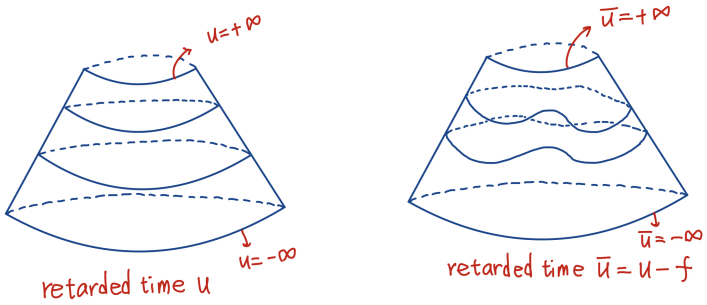
其中, $\sigma_{AB}(x)$ 是 S^2 上的标准圆度量, ∇_A 表示关于 σ_{AB} 的协变导数。指标依据度量 σ_{AB} 进行缩并、升降。在 $\mathscr{I}^+$ $(r = \infty)$ 上定义了这个 Bondi-Sachs 坐标系的质量方面 $m = m(u, x)$、角方面 $N_A = N_A(u, x)$ 和剪切$C_{AB} = C_{AB}(u, x)$。我们还定义了新闻函数 $N_{AB} = \partial_u C_{AB}$。

一个超平移 是在 $\mathscr{I}^+$ 处对坐标 $(\bar{u}, \bar{x}) \to (u, x)$ 作如下变换:

$$u = \bar{u} + f(x), x = \bar{x} \tag{3.3}$$

其中 f 是定义在 S^2 上的光滑函数。可以证明, 这一变换可扩展为两个 Bondi-Sachs 坐标系之间的 $(\bar{u}, \bar{r}, \bar{x}) \to (u, r, x)$。

FIGURE 11. 由超平移关联的两个迟滞时间



邦迪-萨克斯能量-动量在 $\mathscr{I}^+$ 上的 u 截面的标准公式为

$$E(u) = \int_{S^2} 2m(u, \cdot), P^k(u) = \int_{S^2} 2m(u, \cdot)\tilde{X}^k, k = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

其中 $\tilde{X}^k$, $k = 1$, 2, 3 是 $\mathbb{R}^3$ 上限制在 S^2 上的标准坐标函数。

真空爱因斯坦方程意味着（参见 [**20, 36**]）

$$\partial_u m = -\frac{1}{8}N_{AB}N^{AB} + \frac{1}{4}\nabla^A\nabla^B N_{AB} \tag{3.5}$$

由此可得邦迪质量损失公式:

$$\partial_u E(u) = -\int_{S^2} N_{AB}N^{AB} \leq 0.$$

我们假设 $\mathscr{I}^+$ 从 i^0 ($u=-\infty$) 延伸到 i^+ ($u=+\infty$)，并且存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得

$$N_{AB}(u,x) = O(|u|^{-1-\varepsilon}) \text{ as } u \to \pm\infty. \tag{3.6}$$

因此， $E(u)$ 的总通量为

$$\lim_{u\to+\infty} E(u) - \lim_{u\to-\infty} E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{S^2} N_{AB}N^{AB} \tag{3.7}$$

¯对于超平移 (3.3)，已知坐标系 $(\bar{u},\bar{x})$ 中的新闻函数 $N_{AB}(\bar{u},x)$ 与坐标系 (u,x) 中的新闻函数 $N_{AB}(u,x)$ 之间的关系为:

$$\bar{N}_{AB}(\bar{u},x) = N_{AB}(\bar{u}+f(x),x). \tag{3.8}$$

例如，参见 [**20**, (C.117) 和 (C.119)] 。结合 (3.6) 和 (3.7)，即可得出总质量通量 (2.1) 的超平移不变性。辐射出的总能量是定义良好的。

3.3. 角动量总通量的超平移不变性。角动量的定义更为微妙，并且依赖于 W^A 的高阶展开:

$$W^A = \frac{1}{2r^2}\nabla^D C^A_D + \frac{1}{r^3}\left(\frac{2}{3}N^A - \frac{1}{16}\nabla^A(C_{DE}C^{DE}) - \frac{1}{2}C^A_B\nabla^D C^B_D\right) + O(r^{-4}).$$

单形式 $N_A(u,\ x) = \sigma_{AB}N^B(u,\ x)$ 称为角动量方面，它出现在目前所有关于 $\mathscr{I}^+$ 处角动量的定义中。然而， N_A 在超平移下的变换公式相当复杂。事实上，新闻函数 N_{AB} 是 $\mathscr{I}^+$ 处唯一以简单方式变换的量。超平移下 m 和 C_{AB} 的变换公式见（3.20）。这给在零无穷远处找到定义良好的角动量带来了很大困难，而且目前已知的定义都不是超平移不变／协变的。人们曾尝试通过选择 $\mathscr{I}^+$ 的特殊叶状分层来消除超平移歧义，例如 Moreschi [**38**], 提出的“优美截面”或 Rizzi [**44**] 提出的“优选切面”。然而，这些方法只适用于一些特殊情形，似乎无法涵盖黑洞形成 [**44**, 参考文献 14]。此外，也有人尝试确定零无穷远处的特殊条件，使已知的角动量定义具有超平移不变性 [**3**, **4**]。

1982年，彭罗斯 [**41**] 作出了如下陈述:

角动量这一概念本身会因超平移而发生“偏移”，在这种情况下，“很难看出如何严格讨论引力辐射所携带的角动量等问题”。

在 Bondi-Sachs 坐标系中，在固定的 u切片上，考虑 2-曲面$r = r_0$ 并令 $r_0 \to \infty$。Keller-Y.-K. Wang-Yau 在 [**33**]中计算了这族 2-曲面上 $\mathscr{I}^+$ 处 CWY 准局域角动量的极限。答案取决于一个新的项 c，它由 C_{AB} 按以下方式分解得到；此前任何角动量定义中都未曾出现过该项。我们将 C_{AB} 分解为

$$C_{AB} = \nabla_A \nabla_B c - \frac{1}{2}\sigma_{AB}\Delta c + \frac{1}{2}(\epsilon_A{}^E \nabla_E \nabla_B \underline{c} + \epsilon_B{}^E \nabla_E \nabla_A \underline{c}) \tag{3.9}$$

其中， ϵ_{AB} 表示 σ_{AB}的体积形式。函数 $c = c(u,\ x)$和$c = c(u,\ x)$分别称为 $C_{AB}(u,\ x)$的闭势和余闭势。它们被选为 $\ell \geq 2$ 调和模态，因此这种分解是唯一的。

项 $c = c(u,\ x)$出现在 CWY 角动量中，这是通过求解与$\Delta(\Delta + 2)$ $c = \nabla^A \nabla^B C_{AB}$相对应的最优等距嵌入方程得到的。

$\mathscr{I}^+$ 的渐近对称性由 BMS 场 [**45**]组成。若 BMS 场 Y 在 Bondi-Sachs 坐标系$(u,\ x)$中满足以下条件，我们称之为旋转 *BMS* 场：

$$Y = \hat{Y}^A \frac{\partial}{\partial x^A} \tag{3.10}$$

其中，$\hat{Y}^A(x)$是 S^2上的旋转Killing场。

CWY 角动量 [**33**] 的极限可表示为

Definition 1. 对于一个与 u 上的 $\mathscr{I}^+$ 截面相切的旋转 *BMS* 场 Y，u 截面的角动量定义为：

$$J(u, Y) = \int_{S^2} \hat{Y}^A \left(N_A - \frac{1}{4} C_{AB} \nabla_D C^{DB} - c \nabla_A m \right)(u, \cdot), \tag{3.11}$$

其中 $c = c\,(u,\ x)$ 由 (3.9) 给出。

相比之下，Dray-Streubel 定义的经典角动量[**25**] 为

$$\tilde{J} = \int_{S^2} \hat{Y}^A (N_A - \frac{1}{4} C_A{}^D \nabla^B C_{DB}).$$

定义中的最后一项 $-\int_{S^2} c \nabla_A m(u, \cdot)$ 确实对应于哈密顿理论中的参考项。

3.4. 超平移不变性的证明。假设 $(\bar{u},\ \bar{x})$ 是另一个 Bondi-Sachs 坐标系，我们类似地定义：

$$J(\bar{u}, \bar{Y}) = \int_{S^2} \hat{Y}^A \left(\bar{N}_A - \frac{1}{4} \bar{C}_A{}^D \bar{\nabla}^B \bar{C}_{DB} - \bar{c} \bar{\nabla}_A \bar{m} \right)(\bar{u}, \cdot), \tag{3.12}$$

其中 $\bar{Y} = \hat{Y}^A \frac{\partial}{\partial \bar{x}^A}$ 是一个与 $\bar{u}$ 截面相切的旋转 BMS 场。

¯如果在 $(u,\ x)$ 坐标系中，两个旋转 BMS 场 Y 和 Y 满足超平移关系 f，

$$\bar{Y} = \hat{Y}^A \frac{\partial}{\partial x^A} + \hat{Y}(f)\frac{\partial}{\partial u} \text{ and } Y = \hat{Y}^A \frac{\partial}{\partial x^A} \tag{3.13}$$

对于 S^2上的旋转Killing场 $\hat{Y}$。在这种情况下， $\bar{Y}$与 $\bar{u}$ 截面相切，而 Y与 u 截面相切。

角动量 (3.11) 的总通量定义为

$$\delta J(Y) = \lim_{u\to+\infty} J(u,Y) - \lim_{u\to-\infty} J(u,Y).$$

在超平移下,

$$\delta J(\bar{Y}) = \lim_{\bar{u}\to+\infty} J(\bar{u},\bar{Y}) - \lim_{\bar{u}\to-\infty} J(\bar{u},\bar{Y}).$$

当两个Bondi-Sachs坐标通过超平移相关联时，可以证明（见下文 (3.20)）

$$m(+) = \lim_{u\to+\infty} m(u,x) = \lim_{\bar{u}\to+\infty} \bar{m}(\bar{u},x) \text{ and } m(-) = \lim_{u\to-\infty} m(u,x) = \lim_{\bar{u}\to-\infty} \bar{m}(\bar{u},x) \tag{3.14}$$

是 S^2 上的两个函数，在超平移下保持不变。

THEOREM 2. 在条件 (3.6)下，假设两个邦迪-萨克斯坐标系通过超平移 f 相关联，且 Y 和 Y 是满足 f (3.13) 的旋转 *BMS* 场。那么

$$\delta J(\bar{Y}) - \delta J(Y) = -\int_{S^2} \left(2 f_{\ell\leq 1} \hat{Y}^A \nabla_A (m(+) - m(-))\right), \tag{3.15}$$

其中， $f = f_{\ell\leq 1} + f_{\ell\geq 2}$ 表示分解为相应的调和模态。

PROOF. 真空爱因斯坦方程意味着（见 [**20, 36**]）：

$$\begin{aligned} \partial_u N_A = {} & \nabla_A m - \frac{1}{4}\nabla^D(\nabla_D \nabla^E C_{EA} - \nabla_A \nabla^E C_{ED}) \\ & + \frac{1}{4}\nabla_A(C_{BE}N^{BE}) - \frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA}) + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla_D N^{DB}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

旋转Killing场 $\hat{Y}$满足 $\nabla_A \hat{Y}^A = 0$和 $\nabla^A \hat{Y}^D + \nabla^D \hat{Y}^A = 0$，因此

$$\int_{S^2} \hat{Y}^A \partial_u N_A = \int_{S^2} \hat{Y}^A \left[-\frac{1}{4}\nabla_B(C^{BD}N_{DA}) + \frac{1}{2}C_{AB}\nabla_D N^{DB}\right].$$

因此,

$$\partial_u \tilde{J}(u,Y) = \frac{1}{4}\int_{S^2} \hat{Y}^A \left[C_{AB}\nabla_D N^{BD} - N_{AB}\nabla_D C^{BD} - \nabla_B(C^{BD}N_{DA})\right]. \tag{3.17}$$

根据（3.11），总通量 $\delta J(Y)$ 因此为

$$\delta J(Y) = \delta \tilde{J}(Y) - \left[\int_{S^2} \hat{Y}^A c \nabla_A m\right]_{u=-\infty}^{u=+\infty}, \tag{3.18}$$

where

(3.19)

$$\delta\tilde{J}(Y)=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{S^2}\hat{Y}^A\left[C_{AB}\nabla_D N^{BD}-N_{AB}\nabla_D C^{BD}-\nabla_B(C_{BD}N_{DA})\right](u,\cdot)du.$$

已知，对于超平移（3.3），$(\bar{u},\bar{x})$ 坐标系中的质量方面 $\bar{m}(\bar{u},x)$、剪切 $C_{AB}(\bar{u},x)$ 与 (u,x) 坐标系中的质量方面 $m(u,x)$、剪切 $C_{AB}(u,x)$ 之间满足以下关系：

(3.20)

$$\begin{aligned}\bar{m}(\bar{u},x)&=m(\bar{u}+f,x)+\frac{1}{2}(\nabla^B N_{BD})(\bar{u}+f,x)\nabla^D f\\&\quad+\frac{1}{4}(\partial_u N_{BD})(\bar{u}+f,x)\nabla^B f\nabla^D f+\frac{1}{4}N_{BD}(\bar{u}+f,x)\nabla^B\nabla^D f\\\bar{C}_{AB}(\bar{u},x)&=C_{AB}(\bar{u}+f(x),x)-2\nabla_A\nabla_B f+\Delta f\sigma_{AB}\end{aligned}$$

例如，参见 [**20**, (C.117) 和 (C.119)]。

新闻函数 (3.6) 的衰减条件意味着质量方面和剪切的极限满足

(3.21)

$$\lim_{\bar{u}\to\pm\infty}\bar{m}(\bar{u},x)=\lim_{u\to\pm\infty}m(u,x),\ \lim_{\bar{u}\to\pm\infty}\bar{C}_{AB}(\bar{u},x)=\lim_{u\to\pm\infty}C_{AB}(u,x)-2\nabla_A\nabla_B f+\Delta f\sigma_{AB}.$$

特别是，势 c 的极限满足：

$$\lim_{\bar{u}\to\pm\infty}c(\bar{u},x)=\lim_{u\to\pm\infty}c(u,x)-2f_{\ell\geq 2}.$$

由此可得，(3.18) 的第二项对差值 $\bar{}(\delta J)\,Y(-\delta J)$ 的贡献为

$$\int_{S^2}[2f_{\ell\geq 2}\hat{Y}^A\nabla_A(m(+)-m(-))]. \tag{3.22}$$

另一方面，将 (3.20) 代入后，经过分部积分和变量替换可知，(3.18) 中第一项，即 $\delta J(Y)-\delta J(Y)$，的贡献为 [**18**]，

$$\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{S^2}f\hat{Y}^A\nabla_A\big(N_{BD}N^{BD}-2\nabla^B\nabla^D N_{BD}\big)\right]du.$$

此时，我们使用真空爱因斯坦方程 (3.5)，交换积分次序（由 (3.6) 可知，富比尼定理适用），并将最后一个积分改写为

$$\int_{S^2}[-2f\hat{Y}^A\nabla_A(m(+)-m(-))].$$

鉴于 (3.22)，$\delta J(Y)-\delta J(Y)$ 由 (3.15) 给出。 □

根据 (3.4)，线动量的总通量为 $\delta P^k=2\int_{S^2}(m(+)-m(-))\tilde{X}^k$。由此可得

(3.23)

$$\delta J(\bar{Y})=\delta J(Y)+\alpha_i\varepsilon^{ik}{}_j\delta P^j,\ \text{if } f=\alpha_0+\alpha_i\tilde{X}^i+f_{\ell\geq 2}\text{ and }\hat{Y}^A=\epsilon^{AB}\nabla_B\tilde{X}^k$$

特别地，如果 f属于调和模 $\ell \geq 2$，那么 $\delta J(Y) = \delta J(Y)$ 是不变量。因此，δJ 在任意 $\ell \geq 2$ 超平移下保持不变。

对于普通平移 $f = \alpha_0 + \alpha_i \tilde{X}^i$，上述公式可以简化为

$$\delta J(\bar{Y}) - \delta J(Y) = \alpha_i \epsilon^{ik}{}_j \delta P^j \text{ for } \hat{Y}^A = \epsilon^{AB} \nabla_B \tilde{X}^k,$$

其中，δP^j 是 Bondi-Sachs线动量的总通量。

这是系统经过“普通”平移时角动量的经典变换定律。引力辐射带走的角动量可以在没有任何歧义的情况下定义。

4. 附录

在附录中，我们明确写出闵可夫斯基时空中的一个庞加莱变换，它是邦迪-Sachs坐标之间的一个BMS变换。假设在闵可夫斯基时空的两个笛卡尔坐标系 ´，´，1，2，3 和 $\bar{x}^\alpha$，，1，2，3 之间给定了一个庞加莱变换，且

$$\bar{x}^\alpha = A^\alpha_\beta x^\beta + T^\alpha,$$

使得 $A \in O(3,1)$ 和 $T^\alpha \in \mathbb{R}^{3,1}$。我们将使用指标 $i, j, k = 1, 2, 3$ 和 $\bar{x}^0 = \bar{t}$，$x^0 = t$。转换为相应的邦迪-Sachs坐标后，有 $u = t - r$ 和 $\bar{u} = \bar{t} - \bar{r}$，其中 $\bar{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\bar{x}^i)^2}$ 和 $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}$。我们还记 $\tilde{x}^i = \frac{x^i}{r}$。

下面我们计算 $\bar{r}$ 和 $\bar{u}$ 关于 r 的逆幂展开。$\bar{r}$ 的展开为:

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (A^i_\beta x^\beta + T^i)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^3 [A^i_0(u+r) + r A^i_j \tilde{x}^j + T^i]^2} \\
&= r\sqrt{\sum_{i=1}^3 [A^i_0 + A^i_j \tilde{x}^j + r^{-1}(A^i_0 u + T^i)]^2} \\
&= r\sqrt{\sum_{i=1}^3 (A^i_0 + A^i_j \tilde{x}^j)^2 + 2r^{-1}(A^i_0 + A^i_j \tilde{x}^j)(A^i_0 u + T^i) + O(r^{-2})}
\end{aligned}$$

由于 $(1, \tilde{x}^1, $v6$, \tilde{x}^3)$ 是一个零向量，因此它在 $O(3,1)$ 作用下的像也为零向量，由此可得

$$\sum_{i=1}^3 (A^i_0 + A^i_j \tilde{x}^j)^2 = (A^0_0 + A^0_j \tilde{x}^j)^2.$$

因此，我们得到

$$\bar{r} = r(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j) + \frac{(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)(A_0^i u + T^i)}{(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j)} + O(r^{-1}).$$

我们接下来计算 $\bar{u}$。

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{x}^0 - \bar{r} \\ &= A_0^0(u + r) + rA_i^0\tilde{x}^i + T^0 - \bar{r}.\end{aligned}$$

与 $\bar{r}$ 的展开式比较，我们得出 r^1 的首项系数为零。常数阶项（r^0）的系数因此为

$$\begin{aligned}&A_0^0 u + T^0 - \frac{(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)(A_0^i u + T^i)}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j} \\ &= u\frac{A_0^0(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j) - A_0^i(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j} + \frac{T^0(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j) - T^i(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j}, \\ &= \frac{u}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j} + \frac{T^0(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j) - T^i(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j} \\ &= K(u + \tilde{f})\end{aligned}$$

其中 $\tilde{f} = T^0(A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j) - T^i(A_0^i + A_j^i\tilde{x}^j)$ 属于模式 $\ell = 1$，且 $K = \frac{1}{A_0^0 + A_j^0\tilde{x}^j}$。注意，在上面的第二个等式中，我们使用了 $O(3,1)$ 不变性。因此，普通平移对应于 $K = 1$ 或 $A_0^0 = 1, A_j^0 = 0, j = 1,2,3$ 的情形。

参考文献

[1] B. P. Abbott 等人 *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*，《物理评论快报》116（2016年），第6期，061102。[2] R. Arnowitt、S. Deser 和 C. W. Misner, *The dynamics of general relativity Grav-*，载于，– Wiley, *itation: An introduction to current research* 227 265, 纽约。[3] A. Ashtekar、T. De Lorenzo、N. Khera；《广义相对论与引力》（2020年）。[4] A. Ashtekar、T. De Lorenzo、N. Khera；Phys. Rev. D 101，044005（2020年）。[5] A. Ashtekar、Abhay 和 R. O. Hansen, *A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I. Universal structure asymptotic symmetries and conserved , ,* 《数学物理杂志》（ ），第–期。[6] Baumgarte、T. Shapiro、S. *quantities at spatial infinity.* 19 1978 7, 1542 1566 *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on theComputer.* 剑桥大学出版社（2010年）[7] G. Barnich 和 C. Troessaert。 *Aspects of the BMS/CFT correspondence,* 《高能物理学杂志》，2010(5):62，2010年。[8] H. Bondi, *Gravitational waves in general relativity*, 《自然》，186:535，1960年5月。[9] H. Bondi、M. G. J. van der Burg 和 A. W. K. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. VII. Waves from axi-symmetric isolated systems* ，《皇家学会会刊》A辑 269（1962年）21–52。[10] R. D. Bramson, *Relativistic angular momentum for asymptotically at Einstein-Maxwell manifolds.* 341 463 490, 1974 75 《皇家学会会刊》（伦敦）A辑，：–/。

[11] P.-N. Chen、M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Evaluating quasi-local energy and solving optimal embedding equation at null infinity* 308 2011 , 《数学物理通讯》（ ），第3期，845 863–。[12] P.-N. Chen、M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Minimizing properties of critical points of quasi-local energy* 329 2014 3, 919 , 《数学物理通讯》（ ），第–期[13] P.-N. Chen、M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Conserved quantities in general relativity: from the quasi-local level to spatial infinity* 338 2015 , 《数学物理通讯》（ ），第1期，31 80–。[14] P.-N. Chen、M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Quasilocal angular momentum and center of mass in general relativity* 20, 4 2016 671 682 , Adv. Theor. Math. Phys. 第（ ），–。[15] P.-N. Chen、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau, *Supertranslation invariance of angular momentum* 25, 3 2021 777 789, , Adv. Theor. Math. Phys. 第（ ），– arXiv: 2102.03235[16] P.-N. Chen、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau, *BMS charges without supertranslation ambiguity* 393 2022 3,1411 1449, , 《数学物理通讯》（ ），第–期 arXiv: 2107.05316[17] P.-N. Chen、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau, *Supertranslation invariance of angular momentum at null infinity in double null gauge* 2204 , arXiv: 。[18] P.-N. Chen、J. Keller、M.-T. Wang、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau, *Evolution of angular momentum and center of mass at null infinity* 386 2021 , 《数学物理通讯》（ ），第 1, 551 588, 2102 03221 –期 arXiv: 。D. Christodoulou 和 S. Klainerman, [19] *The global nonlinear stability of the Minkowski space* 41 , 《普林斯顿数学丛书》，。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993年。[20] P. T. Chru´sciel、J. Jezierski 和 J. Kijowski, *Hamiltonian field theory in the radiating regime* 70 2002 , 《物理学讲义专著》，。Springer-Verlag，柏林，。[21] P. T. Chru´sciel、J. Jezierski 和 S. Leski, *The Trautman-Bondi mass of hyperboloidal initial data sets* 8 2004 83 139 , Adv. Theor. Math. Phys.（ ）–。[22] P. T. Chru´sciel、M. A. H. MacCallum 和 D. B. Singleton, *Gravitational waves in general relativity. XIV. Bondi expansions and the "polyhomogeneity" of $\mathscr{I}$* , 《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑 350（1995年），第1692期，113–141。[23] G. Comp`ere、R. Oliveri 和 A. Seraj, *The Poincare and BMS flux-balance laws with application to binary systems* 2020, 10, 116, 49 , 《高能物理学杂志》第期，页 [24] A. J. Dougan 和 L. J. Mason。*Quasilocal mass constructions with positive energy*, 《物理评论快报》，第 67 16 2119 2122, 1991 ( ): – T. Dray 和 M. Streubel, , 《经典与量子引力》1（1984年），第1期，15–26。[25] R. Geroch, *Asymptotic structure of space-time.*（辛辛那提大学研讨会论文集，俄亥俄州辛辛那提，1976年），第1–105页。Plenum，纽约，1977年。[26] S. W. Hawking, M. J. Perry 和 A. Strominger, *Superrotation Charge and supertranslation hair on black holes* 2017 5 161, 2017 , 《高能物理学杂志》，（）：。[27] A. D. Helfer, *Angular momentum of isolated systems*, 《广义相对论与引力》39（2007年），第12期，2125–2147。[28] A.D. Helfer, *Angular momentum, spinors, and twistors*, 《物理评论D》104（2021年），第10期，论文编号104053。[29] G. T. Horowitz 和 M. J. Perry, *Gravitational energy cannot become negative*, 《物理评论快报》48（1982年），第6期，371–374。[30] W.-L. Huang、S.-T. Yau 和 X. Zhang, *Positivity of the Bondi mass in Bondi's radiating spacetimes* 17 2006 , Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.（ ），第4期，335–349。[31] R. Javadinezhad、U. Kol 和 M. Porrati, *Comments on Lorentz transformations, dressed asymptotic states and Hawking radiation* 2019, 1, , 《高能物理学杂志》第期。089

[33] J. Keller、Y.-K. Wang 和 S.-T. Yau, *Evaluating quasi-local angular momentum and center-of-mass at null infinity* 24, 6 2020 1423 1473 , 《Adv. Theor. Math. Phys.》第（ ）期, –。[34] S. Klainerman 和 J. Szeftel, *Effective results on uniformization and intrinsic GCM spheres in perturbations of Kerr* 1912 , arXiv: 。12195
[35] *Momentum* M. Ludvigsen 和 J. A. G. Vickers, , *angular momentum and their quasilocal null surface extensions* 16 6 1155 1168, 1983 , 《J. Phys. A》, （）: –。[36] T. M ¨ *Bondi-Sachs formalism* 11 12 33528, 2016 1609 01731 adler 和 J. Winicour, , Scholarpedia, （）: 。arXiv: 。[37] C. W. Misner、K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., 美国加利福尼亚州旧金山, 1973年。[38] O. M. Moreschi, *On angular momentum at null infinity.* 《Class. Quantum Grav.》3, 1986年, 503 525–。[39] E. T. Newman 和 R. Penrose, *Note on the Bondi-Metzner-Sachs group*, 《J. Mathe- matical Phys.》7, 1966年, 863–870。[40] R. Penrose。
Quasilocal mass and angular momentum in general relativity, 《皇家学会会刊》伦敦A辑, 381(1780):53–63, 1982年。[41] R. Penrose, 《经典广义相对论中的一些未解问题》, 载于 *Seminar on Differential Geometry* 631 668, 102, , –《数学年刊研究》丛书, 普林斯顿大学出版社, 美国新泽西州普林斯顿。[42] R. Penrose,
Asymptotic properties of fields and space-times 10 1963 , 《物理评论快报》–。66 68
[43] R. Penrose, *Conformal treatment of infinity*的再版, 《Gen. Relativity Gravitation》43（2011年）, 第3期, 901–922。[44] A. Rizzi, *Angular momentum in general relativity: a new definition*, 《物理评论快报》81（1998年）, 第6期, 1150–1153。[45] R. K. Sachs,
Gravitational waves in general relativity VIII. Waves in asymptotically flat space-time. , 《皇家学会会刊》270 1962 103 126
A辑–。[46] R. Schoen 和 S.-T. Yau, *Proof that the Bondi mass is positive*, 《物理评论快报》48（1982年）, 第6期, 369–371。[47] J. A. Valiente Kroon, *A comment on the outgoing radiation condition for the gravitational field and the peeling theorem* 31 1999 , 《Gen. Relativity Gravitation》（）, 第8期, 1219 1224–。[48] M. G. J. van der Burg
Gravitational waves in general relativity IX. Conserved Quantities. , 《皇家学会会刊》294 1966 112 122
A辑–。[49] M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Quasi-local mass in general relativity*, 《物理评论快报》102（2009年）, 第2期, 编号021101。[50] M.-T. Wang 和 S.-T. Yau, *Isometric embeddings into the Minkowski space and new quasi-local mass* 288 2009 3, 919 942 , 《数学物理通讯》（）, 第–期。[51] J. Winicour, *Logarithmic asymptotic flatness*, 《Found. Phys.》15（1985年）, 第5期, 605–616。[52] J. Winicour 和 L. Tamburino, *Lorentz-covariant gravitational energy-momentum linkages.* 15 601 605, 1965 《物理评论快报》, : –。

Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10027, USA*Email address*: mtwang@math.columbia.edu