自由拉格朗日陀螺欧拉-泊松方程的旋转矩阵直接通解。

Alexei A. Deriglazov[1], *[1]Depto. de Matemática, ICE,
Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brazil(日期：2023年7月28日)

无需采用欧拉角等特定参数化，即可求解用于确定刚体旋转矩阵的欧拉-泊松方程。对于自由拉格朗日陀螺，我们得到了一个一般解析解并对其进行了讨论，还将其与泊松运动图像进行了比较。

arXiv:2303.02431v1 [physics.class-ph] 4 Mar 2023

I. 引言。

本文是系列论文的第四篇 [6, 7, 9], ，旨在系统阐述刚体动力学，并将刚体视为一个带有运动学约束的系统。可以通过适当的拉格朗日作用量来考虑这些约束（见 [6]中的式（12））。接受这一表达式后，我们不再需要对刚体的行为作出任何额外的公设或假设。如 [6], 所示，刚体的所有基本量和特征，以及运动方程和运动积分，均可通过标准经典力学方法，在变分问题的框架内直接且明确地推导得到。特别是，对于转动自由度，该变分问题导出欧拉-泊松方程

$$I\dot{\mathbf{\Omega}} = [I\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}], \tag{1}$$

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkm}\Omega_k R_{im}, \tag{2}$$

这些方程应针对旋转矩阵采用任意初始条件求解： $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$。Ω_i 的初始条件可以是任意三个数值，它们表示刚体的初始旋转速度。这些方程描述了相互独立的变量 $R_{ij}(t)$ 和 $\Omega_i(t)$ [6]所构成的哈密顿系统。这里， $R_{ij}(t)$ 是一个 3×3 矩阵，而 $\Omega_i(t)$ 是刚体角速度的哈密顿对应量。假定惯性张量 I 为对角矩阵：$I = diagonal(I_1, I_2 I_3)$。给定解 $R(t)$ 后，刚体上点 $\mathbf{y}(t)$ 的运动可按以下规则还原：$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}(0)$，其中 $\mathbf{x}(0)$ 是该点在质心系中的初始位置，而项 $\mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t$ 描述质心相对于实验室系的运动。还要注意，矩阵 R_{ij} 的列和行都有简单的几何解释。列 $R(t) = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$ 构成一个与刚体固连的正交归一基。行 $R^T(t) = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3)$ 表示刚体基底中的实验室基向量 $\mathbf{e}_i$。例如，数值 $\mathbf{G}_1(t) = (R_{11}, R_{12}, R_{13})$ 是基向量 $\mathbf{e}_1$ 在基底 $\mathbf{R}_i(t)$ 中的分量。

欧拉-泊松方程具有多个运动积分。它们是转动能、

$$2E = (\mathbf{\Omega} I \mathbf{\Omega}) = I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2, \tag{3}$$

角动量的三个分量

$$m_i = (RI\mathbf{\Omega})_i = I_1 R_{i1}\Omega_1 + I_2 R_{i2}\Omega_2 + I_3 R_{i3}\Omega_3, \tag{4}$$

以及另外六个积分

$$R_{ki}R_{kj} = a_{ij}. \tag{5}$$

积分常数 a_{ij} 由初始条件确定： $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 意味着 $a_{ij} = \delta_{ij}$。因此，满足这些初始条件的系统的任意解 $R_{ij}(t)$ 在未来任意时刻都将自动成为正交矩阵： $R^T(t)R(t) = 1$。此外，初始条件还意味着能量与角动量之间存在以下关系：

$$2E = \frac{1}{I_1}m_1^2 + \frac{1}{I_2}m_2^2 + \frac{1}{I_3}m_3^2. \tag{6}$$

*电子邮箱：alexei.deriglazov@ufjf.br

角动量的平方不包含 R_{ij}

$$\mathbf{m}^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2, \tag{7}$$

因此，欧拉方程本身有两个相互独立的运动积分 (3) 和 (7)。

方程 (2) 是用过多的变量写出的。事实上，在任一时刻，九个矩阵元素 R_{ij} 满足六个约束 $R^TR = 1$，因此只需知道若干个 $9 - 6 = 3$ 相互独立的参数，就能确定矩阵 R。在教科书中，使用诸如欧拉角 [1–3] 这样的一组不可约变量来讨论这些方程的解，已成为由来已久的传统。然而，有若干理由不赞成这种表述方式。首先，在基于欧拉角的讨论中，方程 (2) 常常被计算过程淹没，有时甚至完全没有提及。其次，要描述一个刚体，我们需要了解的恰恰是 $R_{ij}(t)$ 的演化。既然如此，我们为什么还要坚持引入独立变量？第三，用独立变量进行描述往往只在局部成立，这可能导致误解，见 [9]。最后，直接针对原始变量求解欧拉-泊松方程，有时比通过独立变量求解同一方程所费的力气更少，例如参见 [4] 中对自由非对称陀螺的欧拉方程解。

在这里，我们直接针对变量 $R_{ij}(t)$ 求解自由拉格朗日陀螺的欧拉-泊松方程，不使用任何参数化，并通过三角函数给出 $R_{ij}(t)$ 的通解。

利用矩阵 R 的第 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 行和第 $\mathbf{G}_3$ 行，系统（2）可写为 $I\boldsymbol{\Omega} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_i, \boldsymbol{\Omega}]$。因此，原系统可分解为三个系统。只需求解其中一个包含三个欧拉方程以及针对向量 $\mathbf{G}_i$ 中任意一个（例如 $\boldsymbol{\gamma}$）的三个方程的六方程系统即可：

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \tag{8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Omega}]. \tag{9}$$

然后，选取该系统的三个特解，即可恢复整个旋转矩阵：$\mathbf{G}_1(t)$ 是满足初始条件 $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$ 的解 $\boldsymbol{\gamma}(t)$；$\mathbf{G}_2(t)$ 是满足初始条件$\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1, 0)$ 的解 $\boldsymbol{\gamma}(t)$；$\mathbf{G}_3(t)$ 是满足初始条件 $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0, 1)$ 的解 $\boldsymbol{\gamma}(t)$。

如上文所见，欧拉方程具有两个运动积分（3）和（7）。方程（9）也具有由（4）和（5）导出的两个运动积分：

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \qquad c = I_1\Omega_1\gamma_1 + I_2\Omega_2\gamma_2 + I_3\Omega_3\gamma_3, \tag{10}$$

其中，对于 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{G}_1,$ ， $c = m_1$ ，依此类推。利用这些积分，方程组（8）、（9）可化为两个一阶方程，分别对应各自的变量。对于非对称刚体，可以对它们进行形式积分，并用椭圆积分 [4] 表示结果。但对于拉格朗日（对称）陀螺， R_{ij} 存在一个解析解，我们将在下文给出并加以讨论。

为便于后续使用，我们给出描述刚体时所用基本物理量之间的关系（角速度 ω_i、刚体坐标系中的角速度 Ω_i、角动量 m_i，以及刚体坐标系中的角动量M_i）

$$\boldsymbol{\Omega} = R^T\boldsymbol{\omega} = I^{-1}R^T\mathbf{m} = I^{-1}\mathbf{M}. \tag{11}$$

II. 对称陀螺。

拉格朗日（对称）陀螺是一个具有两个相等转动惯量的刚体。因此，我们考虑方程（8）—（10），其中 $I_1 = I_2$ ，且守恒角动量为 $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ 。首先，我们确认，在不失一般性的情况下，可以假设 $m_1 = 0$。

转动惯量是惯性张量 I 的特征值，其特征向量为 $t = 0$ 处的体固定轴：$I\mathbf{R}_i(0) = I_i\mathbf{R}_i(0)$。由 $I_1 = I_2$ 可知， $I\mathbf{R}_1(0) = I_1\mathbf{R}_1(0)$ 且 $I\mathbf{R}_2(0) = I_1\mathbf{R}_2(0)$，因此任意线性组合 $\alpha\mathbf{R}_1(0) + \beta\mathbf{R}_2(0)$ 也表示一个特征值为 I_1 的特征向量。这意味着我们可以在平面 $\mathbf{R}_1(0)$、$\mathbf{R}_2(0)$ 上任意选取两条正交轴作为惯性轴。我们回顾一下，在 $t = 0$ 处，实验室坐标轴应沿着 $\mathbf{R}_i$ 选取，因为只有在这种情况下，运动方程中才会出现 I_i 而不是张量 I_{ij}。因此，在 $I_1 = I_2$ 的情况下，我们可以在平面（x^1， x^2）内旋转实验室坐标轴，而不破坏惯性张量的对角形式。利用这一自由度，我们可以假设对于我们的问题， $m_1 = 0$ 。

对称陀螺欧拉方程的通解。当 $I_1 = I_2$ 时，欧拉方程为

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{(I_1 - I_3)\Omega_3}{I_1}\Omega_2, \qquad \dot{\Omega}_2 = -\frac{(I_1 - I_3)\Omega_3}{I_1}\Omega_1, \qquad \dot{\Omega}_3 = 0, \tag{12}$$

or

$$\dot{\Omega}_1 = \omega\Omega_2, \qquad \dot{\Omega}_2 = -\omega\Omega_1, \qquad \Omega_3 = const, \tag{13}$$

其中 $\phi \equiv (I_1 - I_3)\Omega_3/I_1$。它们的通解为 $\Omega_1 = a\sin(\phi t + \phi_0)$、$\Omega_2 = a\cos(\phi t + \phi_0)$、$\Omega_3 = \text{const}$。该解有着简单的物理意义：对于刚体坐标系$\mathbf{R}_i$中的观察者，角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 绕$\mathbf{R}_3$-轴以角频率 ϕ进动。

我们来将积分常数 a、Ω_3 和 ϕ_0 与刚体的基本量联系起来。守恒角动量 m_i 与角速度 Ω_i 的关系如下： $m_i = I_{ij}\Omega_j(0)$，因此 $m_1 = I_1 a\sin\phi_0$、 $m_2 = I_1 a\cos\phi_0$、$m_3 = I_3\Omega_3$。我们的选择 $m_1 = 0$ 确定了方程（14）中的常数 $\phi_0 = 0$。于是 $a = m_2/I_1$ 且 $\Omega_3 = m_3/I_3$。因此，问题中的第一个振荡频率由守恒角动量的第三分量决定： $\phi = (I_1 - I_3)m_3/I_1I_3$。综合考虑以上各点，解为

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{I_1}\sin\phi t, \qquad \Omega_2 = \frac{m_2}{I_1}\cos\phi t, \qquad \Omega_3 = \frac{m_3}{I_3}. \tag{14}$$

解的显式形式表明转动能守恒： $2E = I_i\Omega_i^2(t) = m_2^2/I_1 + m_3^2/I_3$。

对称陀螺泊松方程的通解。 取自方程 (10) 的线性积分以及泊松方程的第三个分量

$$\Omega_2\gamma_1 - \Omega_1\gamma_2 = \dot{\gamma}_3, \qquad I_1\Omega_1\gamma_1 + I_2\Omega_2\gamma_2 = c - I_3\Omega_3\gamma_3. \tag{15}$$

这个线性方程组的解为

$$\gamma_1 = \frac{I_1}{m_2^2}\left[I_1\Omega_2\dot{\gamma}_3 + (c - m_3\gamma_3)\Omega_1\right], \qquad \gamma_2 = \frac{I_1}{m_2^2}\left[-I_1\Omega_1\dot{\gamma}_3 + (c - m_3\gamma_3)\Omega_2\right]. \tag{16}$$

将这些 表达式代入泊松方程 $\dot{\gamma}_1 = \Omega_3\gamma_2 - \Omega_2\gamma_3$，得到关于 γ_3 的封闭方程

$$\ddot{\gamma}_3 + k^2\gamma_3 = \frac{m_3}{I_2}c, \qquad \text{where} \quad k^2 \equiv \frac{m_2^2 + m_3^2}{I_1} = \frac{\mathbf{m}^2}{I_1^2}, \tag{17}$$

其通解为

$$\gamma_3 = b\cos(kt + k_0) + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}, \qquad \text{where} \quad k \equiv \frac{|\mathbf{m}|}{I_1} \tag{18}$$

根据方程 (18)，问题中的第二个振荡频率 k 由守恒角动量的大小决定。将此 γ_3 代入方程 (16)，可得系统 (8)、(9) 的通解如下

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{|\mathbf{m}|b}{m_2}\cos\phi t\sin(kt + k_0) + \left[\frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2}\cos(kt + k_0)\right]\sin\phi t, \\
\gamma_2 &= \frac{|\mathbf{m}|b}{m_2}\sin\phi t\sin(kt + k_0) + \left[\frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2}\cos(kt + k_0)\right]\cos\phi t, \\
\gamma_3 &= b\cos(kt + k_0) + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

在初始时刻 $t = 0$，我们得到

$$\gamma_1(0) = -\frac{|\mathbf{m}|b}{m_2}\sin k_0, \quad \gamma_2(0) = \frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2}\cos k_0, \quad \gamma_3(0) = b\cos k_0 + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}. \tag{20}$$

如上所述，若选择积分常数b和 k_0，使得在 $c = m_1$ 条件下，矩阵 R_{ij} 的三行分别满足 $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$， $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1, 0)$，以及 $c = m_2$ 条件下的 $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0, 1)$，且对应 $c = m_3$，则可由方程（19）得到这三行。用这些初值求解方程（20），在每种情况下均可得到

$$c = m_1 = 0, \quad b = -\frac{m_2}{|\mathbf{m}|}, \quad k_0 = \frac{\pi}{2}; \quad c = m_2, \quad b = -\frac{m_2 m_3}{\mathbf{m}^2}, \quad k_0 = 0; \quad c = m_3, \quad b = \frac{m_2^2}{\mathbf{m}^2}, \quad k_0 = 0. \tag{21}$$

将这些值代入方程（20），即可得到自由拉格朗日陀螺旋转矩阵 R 的最终形式，如下:

$$\begin{pmatrix} \cos kt\cos\phi t-\hat{m}_3\sin kt\sin\phi t & -\cos kt\sin\phi t-\hat{m}_3\sin kt\cos\phi t & \hat{m}_2\sin kt \\ \hat{m}_3\sin kt\cos\phi t+(\hat{m}_2^2+\hat{m}_3^2\cos kt)\sin\phi t & -\hat{m}_3\sin kt\sin\phi t+(\hat{m}_2^2+\hat{m}_3^2\cos kt)\cos\phi t & \hat{m}_2\hat{m}_3(1-\cos kt) \\ -\hat{m}_2\sin kt\cos\phi t+\hat{m}_2\hat{m}_3(1-\cos kt)\sin\phi t & \hat{m}_2\sin kt\sin\phi t+\hat{m}_2\hat{m}_3(1-\cos kt)\cos\phi t & \hat{m}_3^2+\hat{m}_2^2\cos kt \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中，假设 $|\mathbf{m}|\neq 0$，我们用 $\hat{}m_i=m_i/|\mathbf{m}|$ 表示沿守恒角动量方向的单位向量的分量。问题中的两个频率为 $\phi=\frac{I_1-I_3}{I_1I_3}m_3$ 和 $k=|\mathbf{m}|/I_1=\sqrt{m_2^2+m_3^2}/I_1$。有趣的是，矩阵 R 仅通过这两个频率依赖于转动惯量。

III. 旋转矩阵分解为两个连续旋转及 Poinsot 的运动图像。

我们从各种极限情形入手讨论旋转矩阵。

(1) 考虑方向沿实验室坐标轴 OY 的守恒角动量 $\mathbf{m}$，即 $m_3=0, m_2\neq 0$。这意味着 $\phi=0, |\mathbf{m}|=|m_2|$、$\hat{}m_2=\pm 1$，以及 $\hat{}m_2\sin|\mathbf{m}|t/I_1=\sin m_2t/I_1$。将其代入公式（22），得到

$$R_{OY}(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{m_2t}{I_1} & 0 & \sin\frac{m_2t}{I_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\frac{m_2t}{I_1} & 0 & \cos\frac{m_2t}{I_1} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

这种单频运动表示刚体绕惯性轴 OY旋转。

(2) 同理，取 $m_2=0, m_3\neq 0$ 可得 $|\mathbf{m}|=|m_3|, \hat{}m_3=\pm 1, k=|m_3|/I_1$ 和 $\phi+m_3/I_1=m_3/I_3$。将其代入方程（22），可以看到两个频率合并为一个，如下所示

$$R_{OZ}(t)=\begin{pmatrix} \cos\frac{m_3t}{I_3} & -\sin\frac{m_3t}{I_3} & 0 \\ \sin\frac{m_3t}{I_3} & \cos\frac{m_3t}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

这种单频运动表示刚体绕惯性轴 O旋转 Z.

(3) 对于完全对称刚体 $I_1=I_2=I_3$，可得 $\phi=0$，旋转矩阵（22）具有如下形式:

$$R_{\mathbf{m}}(t)=\begin{pmatrix} \cos kt & -\hat{m}_3\sin kt & \hat{m}_2\sin kt \\ \hat{m}_3\sin kt & \hat{m}_2^2+\hat{m}_3^2\cos kt & \hat{m}_2\hat{m}_3(1-\cos kt) \\ -\hat{m}_2\sin kt & \hat{m}_2\hat{m}_3(1-\cos kt) & \hat{m}_3^2+\hat{m}_2^2\cos kt \end{pmatrix}. \tag{25}$$

其中 $k=|\mathbf{m}|/I_1$。刚体上位于轴$\mathbf{m}$ 上的点在此运动过程中保持静止：对于任意 $c\in\mathbb{R}$，都有 $R_{\mathbf{m}}(t)c\mathbf{m}=c\mathbf{m}$。因此，这种运动表示刚体绕守恒角动量向量$\mathbf{m}$旋转。这是完全对称刚体唯一可能的运动。

(4) 为了讨论双频运动（22）的一般情形，我们回顾一下刚体的转动在 Poinsot [2, 3, 5, 6] 图像中的表现。设

$$I_1=I_2>I_3,\qquad m_1=0,\qquad m_2>0,\qquad m_3<0. \tag{26}$$

由此可确定能量 $E=\frac{1}{2}\sum_i I_i^{-1}m_i^2$、半轴 $a_i=\sqrt{2E/I_i}$和初始角速度 $\omega_i(0)=I_i^{-1}m_i$。根据这些数据，我们可以构造不变平面和泊松椭球。初始时刻 $t=0$ 泊松椭球的位置如图1所示。此时，向量 $\mathbf{m}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ 以及点 O、A、C、D、M 和 N 都位于平面 $x=0$上。点 A 表示此时体固向量 $\mathbf{R}_3$ 的端点。随着 $\mathbf{R}_3=[\boldsymbol{\omega},\mathbf{R}_3]$,，刚体上的点 A 开始沿着该点附近所绘箭头的方向运动。由此可确定其他要素的运动方向如下：轮子 D以固定在点 O上的轴 DO为轴，在不变平面上沿所绘圆周无滑动地滚动。$\boldsymbol{\omega}$ 的端点沿该圆周绕 $\mathbf{m}$逆时针运动。因此，体固轴 Dz 上的所有点都沿着以向量 $\mathbf{m}$为轴的圆锥上的圆周运动。特别是，刚体上的点 A 沿圆 $ACBA$运动。

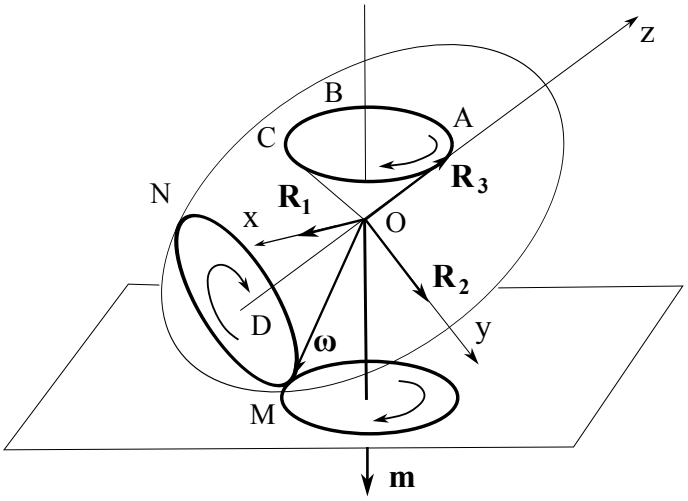


图 1：拉格朗日陀螺的 Poinsot图示。

总之，由刚体上的点构成的轴 Dz生成圆锥面，而刚体的其余点则瞬时绕该轴旋转。

旋转矩阵 (22) 与该图示相对应。事实上，我们可以看到，它可分解如下： $R(t) = R_{\mathbf{m}}(t) \times R_{OZ}(t)$，其中 $R_{\mathbf{m}}(t)$ 是旋转矩阵 (25)，并且

$$R_{OZ}(t) = \begin{pmatrix} \cos\phi t & -\sin\phi t & 0 \\ \sin\phi t & \cos\phi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

其中 $\phi = \frac{(I_1-I_3)}{I_1 I_3} m_3 t$。于是，刚体上任意点在时刻 t的位置 $\mathbf{x}(t)$ 为：$\mathbf{x}(t) = R_{\mathbf{m}}(t) \times R_{OZ}(t)\mathbf{x}(0)$。这是将初始位置矢量 $\mathbf{x}(0)$ 先绕实验室坐标轴 OZ 旋转角度 $\frac{(I_1-I_3)}{I_1 I_3} m_3 t$，再绕$\mathbf{m}$轴旋转角度 $|\mathbf{m}_{I_1}| t$ 得到的。

为完整起见，我们还给出对称陀螺瞬时角速度矢量的显式形式

$$\boldsymbol{\omega}(t) = R(t)\boldsymbol{\Omega}(t) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{(I_1 - I_3)m_2 m_3}{I_1 I_3 |\mathbf{m}|} \sin kt,\ \frac{(I_3 m_2^2 + I_1 m_3^2)m_2}{I_1 I_3 \mathbf{m}^2} - \frac{(I_1 - I_3)m_2 m_3^2}{I_1 I_3 \mathbf{m}^2} \cos kt,\ \frac{(I_3 m_2^2 + I_1 m_3^2)m_3}{I_1 I_3 \mathbf{m}^2} + \frac{(I_1 - I_3)m_2^2 m_3}{I_1 I_3 \mathbf{m}^2} \cos kt \right) \tag{28}$$

该矢量的大小给出了刚体上各点在每一时刻的总旋转频率： $\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{m_2^2}{I_1^2} + \frac{m_3^2}{I_3^2}$。它与旋转矩阵的两个频率之间的关系如下： $\boldsymbol{\omega}^2 = k^2 + \frac{I_1+I_3}{I_1 I_3} m_3 \phi$。

致谢

本研究得到巴西国家科学技术发展委员会（Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient´ıfico e Tecnol´ogico - Brasil）的支持。

[1] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, （剑桥：大学出版社，1917 年）。[2] W. D. MacMillan, *Dynamics of rigid bodies*, （Dover Publications Inc.，纽约，1936 年）。[3] E. Leimanis, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*, （Springer-Verlag，1965 年）。[4] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz, *Mechanics*，第 1 卷，第三版，（Elsevier，1976 年）。

[5] L. Poinsot, *Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, （Bachelier，巴黎，1834）；英文译本：https://hdl.handle.net/2027/coo.31924021260447。[6] A. A. Deriglazov, *Lagrangian and Hamiltonian formulations of asymmetric rigid body considered as a constrained system*, arXiv:2301.10741。[7] A. A. Deriglazov, *Geodesic motion on the symplectic leaf of SO(3) with distorted e(3) algebra and Liouville integrability of a free rigid body* 2302 04828 ,
arXiv: . .[8] A. A. Deriglazov, *Poincaré-Chetaev equations in the Dirac's formalism of constrained systems*, arXiv:2302.12423。[9] A. A.Deriglazov, *Comment on the Letter "Geometric Origin of the Tennis Racket Effect" by P. Mardesic et al Phys. Rev. Lett. 125* 2302 04190 , , *064301 (2020)*, arXiv: . .