arXiv:2303.02443v2 [math.AP] 5 Apr 2024

高维 Boussinesq 方程的角向行波

Amin Esfahani*

摘要

本文研究了此前尚未研究过的高维 Boussinesq 方程中具有非零波速的行波（角向行波）。我们分析了这些波的性质，并证明，与唯一的定态解不同，它们不具有正性、径向对称性和指数衰减。通过采用变分方法和几何方法，并结合扰动理论，我们确立了这些行波的轨道（不）稳定性和强不稳定性。

1 引言

本文研究高维 Boussinesq 方程的行波解

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta(\Delta u + |u|^{p-1}u) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

其中 $1 < p < 2^* - 1$ 且 $2^* = \frac{2n}{n-2}$ 若 $n > 2$ 且 $2^* = \infty$ 若 $n = 2$。Boussinesq [5] 最初通过对小振幅长波作适当近似，从二维自由表面下的势流欧拉运动方程推导出了该方程。方程 (1.1) 也在研究具有自由表面的薄无黏流体层动力学时得到推导；此外，该方程还应用于非线性弦、形状记忆合金、弹性杆中的波传播，以及晶格动力学或耦合电路的连续极限研究（见 [14] 及其中的参考文献）。

在一维情形 $n = 1$下，已有多位作者致力于研究方程 (1.1)。开创性工作见于 Bona 和 Sachs 的经典论文 [3], ，他们运用 Kato 的抽象方法，证明了小初值下柯西问题局部且整体适定。这些结果在 [32], 中得到进一步改进，其中证明了小初值下方程 (1.1) 在能量空间中的整体适定性。近期， [8]发展了具有二次非线性的方程 (1.1) 的反散射变换和 Riemann-Hilbert 方法。多项研究考察了当 $n = 1$时广义 Boussinesq 方程孤立波的稳定性。利用 [20], 中建立的理论， [3], 证明，对于 $1 < p < 5$ 且 $c^2 > \frac{p-1}{4}$，行波是轨道稳定的。已知在一维情形下，方程 (1.1) 存在行波解 $u(x,t) = \varphi(x+ct)$，其中

$$\varphi(\xi) = \left(\frac{p+1}{2}\left(1-c^2\right)\right)^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{p-1}{2}\sqrt{1-c^2}(\xi)\right)$$

是椭圆方程的唯一正基态

$$-\varphi'' + (1-c^2)\varphi = \varphi^{p-1}\varphi, \qquad |c| < 1.$$

当 $1 < p < 5$ 和 $c^2 < \frac{p-1}{4}$，或 $p \geq 5$ 和 $c^2 < 1$时，Liu 在 [34]中证明了行波的轨道不稳定性。他还在 [35] 中证明，若满足 $c = 0$，行波会通过爆破解机制表现出强不稳定性。在 [36], 中，Liu、Ohta 和 Todorova 证明，当 $1 < p < \infty$ 和 $0 < 2(p+1)c^2 < p-1$时，行波

2020年数学主题分类：35Q35、35C08、35B35、35B40 关键词：高维 Boussinesq 方程、行波、轨道稳定性、强不稳定性

*数学系，纳扎尔巴耶夫大学，阿斯塔纳 010000，哈萨克斯坦 电子邮箱：saesfahani@gmail.com, amin.esfahani@nu.edu.kz.

具有强不稳定性。最近，Li、Ohta、Wu 和 Xue 在 [31] 中证明了在退化情形 $c^2=(p-1)/4$ 且满足 $1<p<5$时，行波具有轨道不稳定性。

本文研究广义 Boussinesq 方程 (1.1) 在 $n\geq 2$ 情形下非零波速行波解的稳定性，此情形此前尚未研究过。关于 $p=n=2$ 时方程 (1.1) 行波形状的少量数值研究，见 [11] 和 [40]。

最近，[9] 研究了高维情形下方程 (1.1) 的适定性。更具体地说，Chen、Guo 和 Shao 在 [9] 中利用变换 $v=u+\mathrm{i}\mathfrak{B}^{-1}u_t$ 将方程 (1.1) 化为

$$\mathrm{i}v_t-\mathfrak{B}v+\mathfrak{M}|\Re(v)|^{p-1}\Re(v)=0, \tag{1.2}$$

其中 $\mathfrak{B}=\sqrt{-\Delta(I-\Delta)}$ 且 $\mathfrak{M}=\sqrt{\frac{-\Delta}{I-\Delta}}$。借助与方程 (1.2) 的 Schrödinger 型群相关的 Strichartz 估计，并通过对 [35], 的分析，他们得到了以下结果 [9]

定理 1.1. 初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\Delta(\Delta u+|u|^{p-1}u)=0,\\ (u(0),u_t(0))=(u_0,u_1), \end{cases} \tag{1.3}$$

在 $\vec{u}(t)=(u,(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t)\in H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ 上局部适定

$$s=\begin{cases} 0, & 1<p<1+\frac{4}{n},\\ 1, & 1+\frac{4}{n}\leq p<2^*-1,\\ \max\{0,\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1}\}, & p>1. \end{cases}$$

此外，以下泛函在(1.3)的流下保持不变：

$$\mathbb{E}(u(t))=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t\right|^2+|u|^2+|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathbb{F}(u(t))=\int_{\mathbb{R}^n}((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u_t)\nabla((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u)\,\mathrm{d}x.$$

此外，若 $0<\mathbb{E}(\vec{u}(0))<\underline{\frac{p-1}{2(p+1)}C_{GN}^{-\frac{2(p+1)}{p-1}}}$ 满足 $\vec{u}(0)=(u_0,u_1)$，且 $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}<C_{GN}^{-\frac{p+1}{p-1}}$，则(1.3)在 $H^1(\mathbb{R}^n)\times\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$上全局适定，其中 C_{GN} 是 *Sobolev* 不等式的最佳常数

$$\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}\leq C_{GN}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n(p-1)}{2(p+1)}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n(p-1)}{2(p+1)}}.$$

此外，若 $\vec{u}(0)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\mathbb{E}(\vec{u}(0))<\frac{p-1}{2(p+1)}C_{GN}^{-\frac{2(p+1)}{p-1}}\quad and\quad \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}>C_{GN}^{-\frac{p+1}{p-1}},$$

那么局部解 $u(t)\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 会在有限时间内爆破。

注 1.2. 根据 *[35]* 可知，常数 C_{GN} 可以用(1.1)的（唯一的定态）基态表示。更准确地说，

$$C_{GN}=\|\varphi_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{-\frac{p-1}{p+1}}=\|\varphi_0\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{-\frac{p-1}{2}}=\left(\frac{2(p+1)}{n+2-p(n-2)}\right)^{-\frac{p-1}{2(p+1)}}\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{-\frac{p-1}{p+1}},$$

其中，φ_0 是下列方程的唯一正径向解

$$\varphi-\Delta\varphi=\varphi^p. \tag{1.4}$$

这里，我们关注研究（1.1）在非零波速下（角向）行波的动力学。具体而言，我们寻找形如 $u(x,t) = \varphi(x + \vec{c}t)$ 的解，它是（ 1.1 ）的行波解。因此，剖面函数 φ 必须满足

$$(\vec{c}\cdot\nabla)^2\varphi - \Delta\varphi + \Delta\left(\Delta\varphi + |\varphi|^{p-1}\varphi\right) = 0 \tag{1.5}$$

或者，等价地

$$(I + \mathbb{L}_{\vec{c}})\varphi - \Delta\varphi = \varphi^p, \tag{1.6}$$

其中

$$\mathbb{L}_{\vec{c}} f = \frac{(\vec{c}\cdot\nabla)^2}{-\Delta} f = -\text{p.v. } f * (\vec{c}\cdot\nabla)^2 N_n,$$

且 $N_n(x)$ 是拉普拉斯基本解。由于 (1.1) 在正交变换下保持不变，我们可以取 $\vec{c} = (c, 0, \cdots, 0) = c\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^n$，其中 $|c| < 1$。我们首先证明 (1.6) 的解的存在性。这是通过应用集中紧性原理得到的，这归功于算子 $\mathbb{L}_{\vec{c}}$ 在 Lebesgue 空间中的有界性（见定理 2.1）。关于类似方程的约束下极小化（及稳定性），读者可参阅 [7, 10, 21–25] 及其中的参考文献。

尽管 (1.6) 中的算子 $\mathbb{L}_{\vec{c}}$ 有界，方程 (2.12) 的解的行为却不同于静止情形 $\vec{c} = 0$。首先，例如由 Berestycki 和 Lions [1], 的结果可知，带有 $\vec{c} = 0$ 的 (1.6) 存在唯一的正径向对称基态解。此外，零速度情形下 (1.6) 的解 φ （见 (1.4)）是光滑的，并且呈指数衰减。更准确地说，对某个 $\delta > 0$，有

$$|\partial^\alpha\varphi(x)| \le C_\alpha \exp(-\delta|x|), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le 2.$$

在非零速度情形下，我们在定理 2.8 中证明行波呈代数衰减。为此，我们注意到，(1.6) 的核（见 (2.4)）的行为与 Gross-Pitaevskii 方程中的核类似。其次，与零速情形不同，$\mathbb{L}_{\vec{c}}$ 情形下的算子 $\vec{c} \neq 0$ 不是径向的，因此，为了证明行波的对称性，我们采用了 [6] 提出的一种论证方法，该方法基于傅里叶空间中的 Steiner型重排（见定理 2.3）。第三，与 $\vec{c} = 0$情形不同，(1.1) 的行波并非正的；再加上我们对 (1.6) 的唯一性所知甚少，使得对 (1.6) 的分析颇为困难。

接下来，我们旨在研究 (1.6) 中行波的轨道稳定性，同时考虑到定理 1.1 保证了局部/整体适定性（参见定义 2.1）。为此，我们首先将 (1.6) 转化为具有哈密顿结构的方程组，从而得到行波的一些变分刻画。这有助于我们证明 (1.6) 存在基态。接着，利用基态的变分性质，我们证明 (1.6) 的全体基态构成的集合是稳定的，前提是李雅普诺夫函数关于 $|\vec{c}|$ 是凸的（见定理 2.16）。由于 $\mathbb{L}_{\vec{c}}$的存在，(1.6) 的基态唯一性尚不清楚，因此上述结果在某种程度上弱于通常意义下的轨道稳定性。另一方面，由于在 $\vec{c} \neq 0$情形下缺乏 (1.6) 线性化算子的谱信息， [20] 的经典理论似乎难以直接应用。为克服这一困难，我们在第 2 节中运用扰动理论，证明 (1.6) 的基态收敛到 (1.4) 的唯一基态 φ_0 ；并且，当 $\vec{c}$ 充分小时，φ_0 的谱性质可传递到 (1.6) 的基态 $\varphi_{\vec{c}}$ 上（定理 2.22）。

研究行波轨道稳定性的另一个困难是缺乏尺度变换。正如例如 [4], 所示，适当的尺度变换可以将波速的作用从行波本身完全转移到 Lyapunov 函数中，因此可以通过确定 Lyapunov 函数的凸性来分析行波的轨道（不）稳定性（例如参见 [20]）。为克服非零波速情形下的这一困难，我们在第 3 节采用 [17] 提出的几何方法和变分方法。

我们的另一项结果与方程 (1.6) 的行波的强不稳定性有关。我们要探讨的问题是：在什么条件下，行波会因爆破解机制而不稳定？为此，在第 4 节中，我们首先证明方程 (1.6) 的基态具有山路几何。然后，我们沿用 [36] 中的思路，将 H^1 分解为两个在与方程 (1.1) 相关的柯西问题的流下保持不变的子流形。该分解确定了方程 (1.1) 的局部解表现为全局行为或发生有限时爆破的条件，从而拓展了定理 1.1 的结果（见推论 4.8）。上述子流形强烈依赖于波速 $\vec{c}$，因此我们的结果改进了 [9] 中的相关结果。

最后指出，本文采用的方法也可用于研究高维改进 Boussinesq 方程的角向行波（见 [12,13]）。

$$(1-\beta_1\Delta)u_{tt}=\Delta(u-\alpha u^2-\beta_2\Delta u),$$

其中 u是　　表面高程， β_1、 $\beta_2>0$ 是两个色散系数， α 是一个振幅参数。

在本文中，我们始终假设 $p+1=k/m$，其中 k 为偶函数， m 为奇函数。

2 存在性、变分刻画与稳定性

本节将证明方程 (1.1) 的行波的存在性、变分性质和轨道稳定性。为表述我们的结果，我们定义如下自然的极小化问题

$$m(\vec{c},\lambda)=\inf\left\{J(u),\ u\in H^1(\mathbb{R}^n),\ K(u)=\lambda\right\},$$

其中

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u|^2+|u|^2-\left|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\right|^2\right)\,\mathrm{d}x$$

以及 $K(u)=\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}$。由齐次性可知

$$m(\vec{c})\equiv m(\vec{c},1)=\inf\left\{\frac{J(u)}{K^{\frac{2}{p+1}}(u)},\ u\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}\right\}.$$

由集中紧性原理 [33]可知，只要选择 $\vec{c}$使泛函 J是强制的，上述极小化问题对于每个 $\lambda>0$都有一个解。该强制性条件成立，是因为$|\vec{c}\cdot\nabla|\le|\vec{c}||\nabla|$当 $|\vec{c}|<1$时。在此问题中，如果当 $k\to\infty$且对所有 k都有 $J(\varphi_k)\to m(c,\lambda)$，则序列 $\varphi_k\subset H^1(\mathbb{R}^n)$ 被称为 J的极小化序列。

需要注意的是， $\mathbb{L}_{\vec{c}}f=(\vec{c}\cdot\vec{R})*(\vec{c}\cdot\vec{R})f$，其中 $\vec{R}=(R_1,\cdots,R_n)$，而 R_j、 $1\le j\le n$表示由 $\hat{}\ R_j(\xi)=-\mathrm{i}\frac{\xi_j}{|\xi|}$定义的 Riesz 变换。对于 $n>1$，众所周知， $R_j(x)=\frac{1}{\pi\omega_{n-1}}\mathrm{p.v.}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$。 R_j 的 L^p-有界性意味着 $I+\mathbb{L}_{\vec{c}}$是零阶齐次的，并且对于任意$1<p<\infty$，在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。此外，当 $|\vec{c}|<1$时， $I+\mathbb{L}_{\vec{c}}\ge 0$。因此，通过采用

$$\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}\le C_{\vec{c}}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n(p-1)}{2(p+1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^2-\left|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\right|^2\right)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+2-p(n-2)}{4(p+1)}},\tag{2.1}$$

并按照与 [33], 相同的思路，建立了以下定理。

定理 2.1. 假设$1<p<\frac{n+2}{n-2}$若 $n>2$ 且 $p>1$ 若 $n=2$。令 $|\vec{c}|<1$，并设 $\{\varphi_k\}$ 是 $m(\vec{c},\lambda)$的极小化序列。那么存在 $\{\varphi_k\}$的一个子序列 $\{\varphi_{k_j}\}$、 $\{y_j\}\subset\mathbb{R}^n$和 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^n)$，使得$\varphi_{k_j}\to\varphi$在 $H^1(\mathbb{R}^n)$中，且 φ是在约束 $K(\varphi)=\lambda$下 J的极小元。

注 2.2. 值得注意的是，(2.1) 中的 $C_{\vec{c}}$ 可以用注 *1.2* 中的 C_{GN} 进行估计。更确切地说，可以从以下内容看出

$$(1-|\vec{c}|^2)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\le\int_{\mathbb{R}^n}\left(|u|^2-\left|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\right|^2\right)\,\mathrm{d}x\le\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

以及变分刻画（见 *[42]*）

$$C_{\vec{c}}^{-(p+1)}=\inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n(p-1)}{2}}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n+2-p(n-2)}{4}}}{(p+1)K(u)}$$

that

$$(1-|\vec{c}|^2)^{\frac{p(n+2)-n-2}{4(p+1)}} \geq \frac{C_{\vec{c}}}{C_{GN}} \geq 1. \tag{2.2}$$

通过适当的尺度变换，可以证明

$$C_{\vec{c}} \sim (1-|\vec{c}|^2)^{\frac{p(n+2)-n-2}{4(p+1)}} C_{GN}. \tag{2.3}$$

假设 φ 是定理 2.1 保证存在的 $m(\vec{c},\lambda)$ 的一个约束极小元。那么， φ 满足

$$J'(\varphi) = \ell K'(\varphi)$$

其中某个拉格朗日乘子为 $\ell \in \mathbb{R}$。由此可得

$$J'(\phi) = K'(\phi),$$

其中 $\phi = \ell^{\frac{1}{p-1}}\varphi$。因此， ϕ 是方程 (1.6) 的一个解，并取得最小值 $m(\vec{c})$。

将 (1.6) 乘以 φ 并在 $\mathbb{R}^n$ 上积分，可得

$$2J(\varphi) = (p+1)K(\varphi);$$

从而

$$(p+1)K(\varphi) = 2J(\varphi) = 2\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} (m(\vec{c}))^{\frac{p+1}{p-1}}.$$

达到 $m(\vec{c})$ 的 (1.6) 的解称为基态。(1.6) 的所有基态组成的集合记为

$$G(\vec{c}) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ (p+1)K(\varphi) = 2J(\varphi) = 2\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} (m(\vec{c}))^{\frac{p+1}{p-1}} \right\}.$$

我们还注意到，当 $\vec{c} \neq \vec{0}$时， $P(\xi) = -\frac{(\vec{c}\cdot\xi)^2}{|\xi|^2}$是 $\mathbb{L}_{\vec{c}}$ 的傅里叶乘子，并且关于方向 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 柱对称，其中 $\vec{c} = \ell e$，某个 $\ell \in \mathbb{R}$。回想一下，函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 关于方向 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 柱对称，是指对几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^n$ 以及所有满足 $\mathsf{R}(e) = e$ 的 $\mathsf{R} \in O(n)$，都有 $f(\mathsf{R}y) = f(y)$。对于此类函数，我们使用记号 $f(y) = f(y_{\|}, |y_{\perp}|)$，其中 $y = y_{\|} + y_{\perp}$，且 $y_{\perp}$ 垂直于 e。令 $f^{*_e}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 表示关于方向 e 的 $(n-1)$ 余维施泰纳对称化。此对称化是通过在垂直于 e 的 $(n-1)$ 维平面上进行对称递减重排得到的。

定理 2.3。设 $\vec{c} = \ell e$，其中 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$且 $\ell \in \mathbb{R}$。假设 p是奇数。那么，(1.6)的任意基态 φ都具有如下形式：$\varphi^{\sharp_e}(x + x_0)$，其中某个 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 满足条件 $\varphi^{\sharp_e} := ((\hat{\ }\varphi)^{*_e})^{\vee}$。此外，对于所有满足 $\mathsf{R}\vec{c} = \vec{c}$ 的 $\mathsf{R} \in O(n)$，均有 $\varphi(x) = \varphi(\mathsf{R}x)$。

证明。 证明过程如下：注意到 $\mathbb{L}_{\vec{c}} - \Delta$ 满足 [6] 中定理 2 的假设条件。事实上，可以观察到 $|\xi|^2 - |\vec{c}|^2 \leq |\xi|^2 + P(\xi) \leq |\xi|^2$，且 $|\xi|^2 + P(\xi)$ 关于 $\vec{c}$ 柱对称，而 $|\xi_{\perp}| \mapsto |\xi|^2 + P(\xi)$ 严格递增。通过适当的变换，可以很容易地验证这一点，从而得到 $\vec{c} = (c, 0, \cdots, 0)$。 □

备注 k2.4. 值得注意的是，如果 G 是 $O(n)$ 的子群，且满足 $n \geq 2$，我们可以定义空间

$$H^1_G = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ u \textit{ is invariant with respect to } G \right\}.$$

特别地，当 $G = SO(n)$ 时， H^1_G 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中所有径向函数构成的子空间。*[41]* 中的推论 *2* 表明，若对任意 $x \in \mathbb{S}^{n-1}$，轨道 $H \cdot x$ 都是无限的，则对任意 $p \in (2, 2^*)$，H^1_G 紧嵌入于 $L^p(\mathbb{R}^n)$。因此，若 J 在某个 H^1_G 上对某个 $\vec{c}$ 有定义，则与 H^1_G 相关的 $m(\vec{c})$ 的所有极小化序列在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中相对紧。由此，(1.6) 在 H^1_G 中存在一个基态。当 $\vec{c} = 0$ 时，已知 (1.6) 存在一个径向基态。

注 2.5. 数值计算验证了定理 *2.3* 的结论。如图 *2* 所示，(1.6) 的解的等高线集呈现椭圆形。此外，随着 $\vec{c}$ 趋近于一，椭圆会变得更狭长（沿长轴方向拉长）；而随着 $\vec{c}$ 趋近于零，椭圆则会收缩成圆。

我们的下一个目标是研究行波的衰减行为。注意，(1.6) 可以改写为卷积形式

$$\varphi = \mathbb{K}_{\vec{c}} * \varphi^p, \tag{2.4}$$

其中

$$\hat{\mathbb{K}}_{\vec{c}}(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2 - \frac{1}{|\xi|^2}(\vec{c}\cdot\xi)^2}.$$

有理函数 $\hat{}\,\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 仅在原点处有奇点，该奇点的形式为 $O(|\xi|^{-a})$，其中$a > 0$。关于 $\hat{}\,\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 衰减行为的以下结果由 [18], 得出，其中证明了 $\hat{}\,\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 的导数的可积性估计。这些估计利用傅里叶逆变换公式给出了 $\hat{}\,\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 的代数衰减。事实上，可以观察到，$\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 的渐近性质主要由 $\hat{}\,\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 在原点附近的行为决定。更准确地说，

$$\hat{\mathbb{K}}_{\vec{c}}(\xi) \sim \frac{|\xi|^2}{|\xi|^2 - (\vec{c}\cdot\xi)^2}.$$

此外，利用一些驻相估计，我们观察到对于 $\vec{c} = (c, 0, \cdots, 0)$,

$$\hat{\mathbb{K}}_{\vec{c}}(\xi) = \hat{\mathbb{K}}_{\vec{c}}(\xi_1, \xi_\perp) \sim \frac{1}{1-c^2}\widehat{R_{1,1}}(\sqrt{1-c^2}\xi_1, \xi_\perp) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\widehat{R_{j,j}}(\sqrt{1-c^2}\xi_1, \xi_\perp),$$

其中

$$R_{j,j}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\text{p.v.}\frac{|x|^2 - nx_j^2}{|x|^{n+2}}.$$

实际上，显然 $R_{j,\ j} = -R_j * R_j$。

引理 2.6. 设 $\kappa \in (n-2, n]$. 则存在 $C_\kappa > 0$ 使得

$$|\mathbb{K}_{\vec{c}}(x)| \le C_\kappa |x|^{-\kappa}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。特别地，对于任意$1 < r < \frac{n}{n-2}$，$\mathbb{K}_{\vec{c}} \in L^r(\mathbb{R}^n)$成立；对于任意 $1 \le r < \frac{n}{n-1}$，$\nabla\mathbb{K}_{\vec{c}} \in L^r(\mathbb{R}^n)$成立。此外，对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{\kappa+n}\left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathbb{K}_{\vec{c}}\right| < +\infty.$$

注 2.7. 需要指出的是，若采用适当的变换，假设 $\vec{c} = (c, 0, \cdots, 0)$，那么沿用 *[18],* 中的相同思路可以证明（见 *[19]*）：

$$R^n\mathbb{K}_{\vec{c}} * f(Rx) \to \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)c^2(1-c^2)^{\frac{n-3}{2}}(1-c^2+(c^2-n)x_1^2)}{2\pi^{\frac{n}{2}}(1-c^2+c^2x_1^2)^{\frac{n+2}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $R \to \infty$ 时。

定理 2.8. 设 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 是方程 (1.6) 的一个行波，且满足 $|\vec{c}| < 1$。那么，对于任意$1 < q < \infty$，$\varphi \in W^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ 成立。此外，对于任意 $\kappa \in (n-2, n]$，$|x|^\kappa\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 成立。若对于任意 $s > 0$，$s \mapsto s^p$ 都是光滑的，则$\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$。

证明。 正则性的证明依赖于利佐尔金定理 [37] 以及涉及黎斯算子的标准论证。为此，考虑以下事实：核 $\mathbb{K}_{\vec{c}}$、$\partial_{x_j}\mathbb{K}_{\vec{c}}$ 和 $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\mathbb{K}_{\vec{c}}$（其中 $1 \le i$、$j \le n$）对 $1 < r < \infty$ 起到 $L^r(\mathbb{R}^n)$-乘子的作用。

行波的代数衰减可由引理 2.6 和 [2], 的论证推导得出，因此我们省略细节。

□

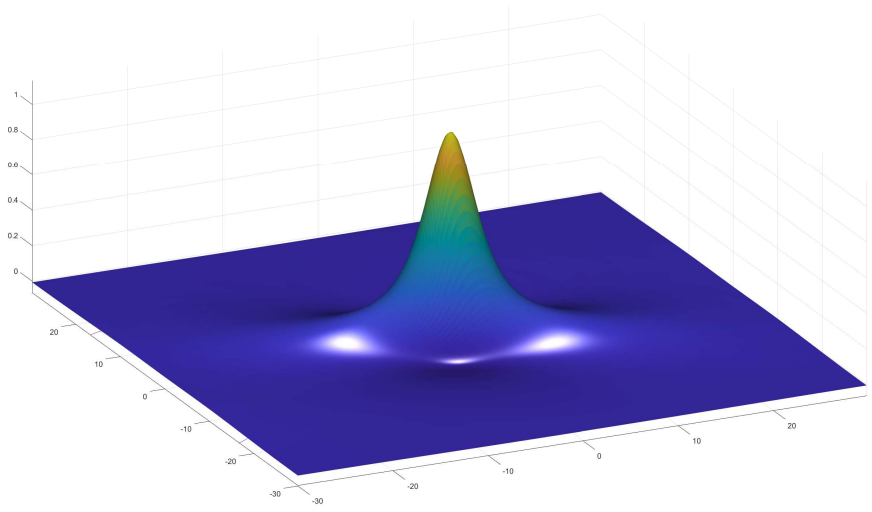

图1：式 (1.6) 的行波，其中 $c = 0.8$。

注2.9。 尽管无法证明这一点，图*1*和图*3*所示的数值计算表明，当 $\vec{c} \neq 0$时，(1.6) 的行波并非正值。这种情况与 $\vec{c} = 0$.的情形不同。

注2.10。 值得注意的是，通过经典计算，可以得到以下 *Pohozaev* 恒等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{p-1}{p+1}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)},\\
&\frac{n+2-p(n-2)}{2(p+1)}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\\
&\frac{n+2-p(n-2)}{n(p-1)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

这些恒等式将有助于我们的不稳定性分析。

为研究式 (1.6) 行波的稳定性，我们注意到式 (1.1) 可等价地表示为一个系统：

$$\begin{cases} u_t = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}v, \\ v_t = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(u - \Delta u - |u|^{p-1}u). \end{cases} \tag{2.6}$$

在这种形式下，动量 $\mathbb{F}$ 和能量 $\mathbb{E}$ 表示为：

$$\mathbb{E}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 + |u|^2 + |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x, \quad \mathbb{F}(\vec{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} v\nabla((-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u)\,\mathrm{d}x.$$

此外 此外，系统 (2.6) 具有哈密顿结构 $\vec{u}_t = \mathscr{J}\mathbb{E}'(t)$，其中 $\vec{u} = (u, v)^T$ 且

$$\mathscr{J} = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \\ -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

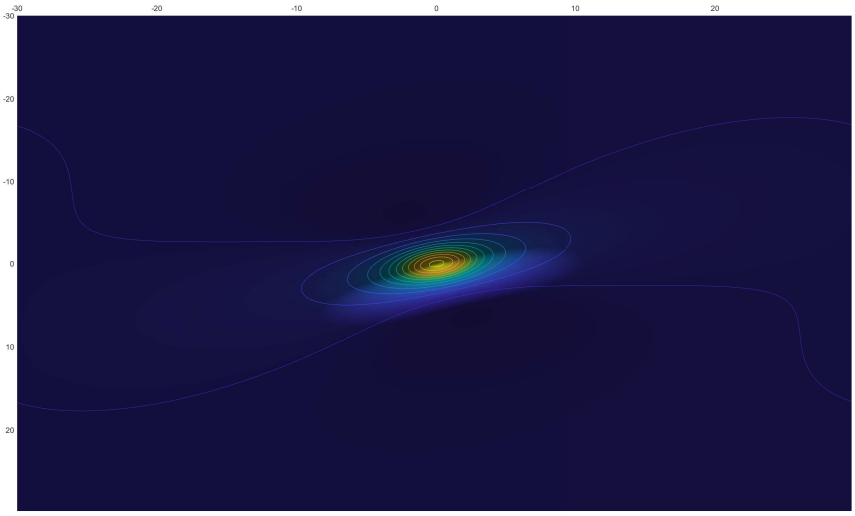

图 2：参数为 $c = 0.8$ 时，方程 (1.6) 的解的等高线。

接下来，我们将注意力转向建立行波的另一种变分刻画。对于 $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$，定义作用泛函

$$S_{\vec{c}}(\vec{\varphi}) = \mathbb{E}(\vec{\varphi}) + \vec{c} \cdot \mathbb{F}(\vec{\varphi}) = \Psi(\varphi) + \frac{1}{2} \left\| \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi + \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \tag{2.7}$$

其中 $\Psi = J - K$。给定一个行波（基态） $\varphi \in G(\vec{c})$，方程 (2.6) 的对应行波解具有如下形式 $(\varphi(x + \vec{c}t), -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi(x + \vec{c}t))$，因此我们定义 $\vec{\varphi} = (\varphi, -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi)$ 并令

$$\mathscr{G}(\vec{c}) = \left\{ \vec{\varphi} = (\varphi, -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi) \in \mathscr{X},\ \varphi \in G(\vec{c}) \right\},$$

其中 $\mathscr{X} = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$。根据此定义可知，任意函数 $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi) \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 确实是 $S_{\vec{c}}$ 的临界点，即

$$S'_{\vec{c}}(\vec{\varphi}) = \begin{pmatrix} \varphi - \Delta\varphi - \varphi^p - \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \psi \\ \psi + \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi \end{pmatrix} = \vec{0}. \tag{2.8}$$

这也意味着，对于任意 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$，都有 $P(\vec{\varphi}) = 0$，其中 $P(\vec{\varphi}) = \langle S'_{\vec{c}}(\vec{\varphi}),\ \vec{\varphi} \rangle$。容易看出，$\vec{\varphi} = (\varphi, \psi) \in \mathscr{X}$ 是 $S_{\vec{c}}$ 的临界点，当且仅当 φ 是 Ψ 的临界点且 $\psi = -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi$。

定理 2.11. 设 $n \geq 2$。那么 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 当且仅当 $\vec{\varphi} \in N$ 且

$$S_{\vec{c}}(\vec{\varphi}) = \inf \left\{ S_{\vec{c}}(\vec{w}),\ \vec{w} \in N \right\},$$

其中

$$N = \left\{ \vec{w} \in \mathscr{X} \setminus \{0\},\ P(\vec{w}) = 0 \right\}.$$

证明。首先注意到，对于 $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$，有 $P = 2J - (p+1)K + 2q$，其中 $q(\vec{\varphi}) = \frac{1}{2} \left\| \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \varphi + \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$。

因此，如果 $\vec{u} = (u, v) \in N$，那么

$$S(\vec{u}) = \frac{p-1}{2} K(u) = -\frac{p-1}{p+1} J(u) + \frac{p-1}{p+1} q(\vec{u}).$$

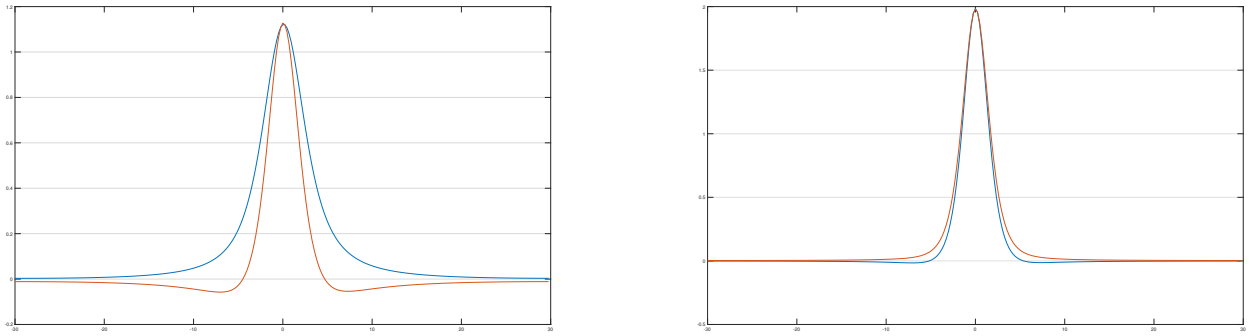

图3: 行波 $c=0.8$（左）和 $c=0.2$（右）在 XY 和 XZ 平面上的投影 es.

现在假设 $\vec{\varphi}=(\varphi,\psi)\in\mathscr{G}(\vec{c})$。则 $P(\vec{\varphi})=0$，所以 $\vec{\varphi}\in N$和 $S(\vec{\varphi})=\frac{p-1}{p+1}J(\varphi)$。于是，根据定义，对于任意 $\vec{u}=(u,v)\in N$，有

$$\frac{J(u)}{K^{\frac{2}{p+1}}(u)}\geq\frac{J(\varphi)}{K^{\frac{2}{p+1}}(\varphi)}.$$

因此，

$$S(\vec{u})\geq\frac{p-1}{p+1}J(u)\geq\frac{K^{\frac{2}{p+1}}(u)}{K^{\frac{2}{p+1}}(\varphi)}\frac{p-1}{p+1}J(\varphi)\geq S(\vec{\varphi}).$$

反之，若 $\vec{u}=$ （u，v）在 N 上使 S 取最小值，则对某个拉格朗日乘子 $\theta\in\mathbb{R}$，有 S'（$\vec{u}$） $=\theta P'$（$\vec{u}$）。因此，

$$0=P(\vec{u})=\langle S'(\vec{u}),\vec{u}\rangle=\theta\langle P'(\vec{u}),\vec{u}\rangle.$$

由于这一事实

$$\langle P'(\vec{u}),\vec{u}\rangle=2P(\vec{u})-(p^2-1)K(u)=(1-p^2)K(u)\neq 0,$$

由此可推得 $\theta=0$，因此 $S'(\vec{u})=0$ 意味着

$$0=\left\langle S'(\vec{u}),(0,v+L_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u)\right\rangle=2q(\vec{u}).$$

这表明 $v=-L_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u$。要证明 $u\in G(\vec{c})$，进而证明 $\vec{u}\in\mathscr{G}(\vec{c})$，只需证明对于所有满足 $K(u)=K(u_1)$ 的 u_1，均有 $J(u)\leq J(u_1)$。对于任意这样的 u_1，令 $\vec{u}_1=(u_1,-L_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u_1)$。因此，我们可得

$$P(s\vec{u}_1)=2s^2J(u_1)-(p+1)s^{p+1}K(u_1)=0$$

对于 $s=\underline{\left(\frac{2J}{p+1}(u_1)\,()K(u_1)\right)^{\frac{1}{p-1}}}$。这意味着 $S(\vec{u})\leq S(s\vec{u}_1)$，从而

$$J(u)\leq J(su_1).$$

事实 $K(u)=K(u_1)$ 和 $2J(u)=(p+1)K(u)$ 表明

$$J(u)\leq J(su_1)=s^2J(u_1)=\left(\frac{2J(u_1)}{(p+1)K(u_1)}\right)^{\frac{2}{p-1}}J(u_1)\leq J(u_1).$$

因此， $J(u)\leq J(u_1)$，证明完毕。 □

注 2.12。与定理 *2.11* 类似，容易看出，如果 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\mathbb{P}(\varphi) := \langle \Psi'(\varphi)\ \varphi\rangle = 0$且

$$\inf\{\Psi(u),\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(u) = 0\} = \Psi(\varphi), \tag{2.9}$$

那么， φ 是(1.6)的弱解。此外，应用集中紧性原理，可知(2.9)存在一个极小元。此外，

$$\begin{aligned} G_1(\vec{c}) &:= \left\{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\},\ \Psi'(\varphi) = 0,\ \Psi(\varphi) \le \Psi(u), \textit{for all}\, u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \textit{such that}\, \Psi'(u) = 0\right\} \\ &= \left\{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n),\ \Psi(\varphi) = m_1(\vec{c}),\ \mathbb{P}(\varphi) = 0\right\}, \end{aligned}$$

其中

$$m_1(\vec{c}) = \inf\left\{\Psi(u),\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(u) = 0\right\}.$$

此外， $m_1(\vec{c}) = m(\vec{c})$ 以及 $G(\vec{c}) = G_1(\vec{c})$。将 S 和 P 分别替换为 Ψ 和 $\mathbb{P}$后，按照定理 *2.11* 的证明思路即可证明这一结论。

定义 2.1。若(2.6) 的行波 $\vec{\varphi}$ 满足以下条件，则称其轨道稳定：对任意 ϵ，存在 $\delta > 0$，使得若 $\|\vec{u}_0 - \vec{\varphi}\|_{\mathscr{X}} < \delta$，则(2.6) 的解 $\vec{u}(t) \in \mathscr{X}$满足 $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$，并且对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均存在

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|\vec{u}(t) - \vec{\varphi}(\cdot - y)\|_{\mathscr{X}} < \epsilon.$$

否则，称 $\vec{\varphi}$ 轨道不稳定。

给定 $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi) \in \mathscr{G}(\vec{c})$，定义 $d(\vec{c}) = S_{\vec{c}}(\vec{\varphi})$。由注 2.12 可知

$$\begin{aligned} d(\vec{c}) = \Psi(\varphi) = m_1 = J(\varphi) - K(\varphi) &= \frac{p-1}{2}K(\varphi) = \frac{p-1}{2}\left(\frac{2m(\vec{c})}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p-1}} \\ &= \frac{p-1}{n+2-p(n-2)}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \\ &= \frac{p-1}{n+2-p(n-2)}J(\varphi) \\ &\ge \frac{p-1}{2(p+1)}(1-|\vec{c}|^2)\|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}(1-|\vec{c}|^2)\left(J(\varphi) + |\vec{c}|^2\left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

因此， d与 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}$（$\vec{c}$）的选择无关。若 $w = \mathbb{L}_{\vec{c}}f$，则（$\vec{c}\cdot\nabla$）$^2 f = -\Delta w$，因此，由拉普拉斯算子在正交变换下的不变性可知， d（$\vec{c}$）$= d$（$|\vec{c}|$），其中

$$\bar{d}(c) = \mathbb{E}(\vec{\varphi}) - c\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\Delta^{-\frac{1}{2}}\varphi)_{x_1}\,\mathrm{d}x$$

其中 $\vec{\varphi} =$（φ，ψ）且 $|c| < 1$。因此， d 是径向的。

引理 2.13. 设 $\vec{c} = \zeta\vec{\varsigma}$满足 $\vec{\varsigma} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$，且 $d_{\vec{\varsigma}} = d(\zeta\vec{\varsigma})$ 对 $\zeta \in [0,1)$成立。若 $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi) \in \mathscr{G}(\vec{c})$，则$d_{\vec{\varsigma}}$在 $[0,1)$上连续且严格递减。此外，它几乎处处可微。记其在可微点处的导数为

$$d'_{\vec{\varsigma}}(\zeta) = -\zeta\left\|\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{\varsigma}}\varphi\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

对于任意 $\varphi \in G_1(\vec{c})$。此外，一般而言，对于任意 $\vec{c} \in B_1(0)$，我们有

$$\nabla_{\vec{c}} d = -\mathbb{F}(\vec{\varphi}).$$

证明。为明确波速 $\vec{c}$ 对结果的影响，我们记 $J(\varphi;\vec{c})$、$\Psi(\varphi;\vec{c})$ 和 $\mathbb{P}(\varphi;\vec{c})$。我们知道，对于任意 $\varphi\in G_1(\vec{c})$，有

$$d_{\vec{\varsigma}}(\zeta)=\Psi(\varphi;\vec{c})=\frac{p-1}{p+1}J(\varphi;\vec{c})=\frac{(p-1)(1-\zeta^2)}{2(p+1)}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

因此，

$$\frac{2(p+1)}{(p-1)(1-\zeta^2)}d_{\vec{\varsigma}}(\zeta)\geq\alpha_+(\zeta)\geq\alpha_-(\zeta)\geq 0,$$

其中

$$\alpha_\pm(\zeta)=\pm\sup\left\{\pm\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,\ \varphi\in G_1(\vec{c})\right\}.$$

令 $0\leq\zeta_1<\zeta_2<\zeta_0<1$ 和 $\varphi_j\in G_1(\vec{c}_j)$，其中 $j=1,2$，且 $\vec{c}_j=\zeta_j\vec{\varsigma}$。于是，由 $\mathbb{P}(\varphi_1;\vec{c}_1)=0$可得

$$\mathbb{P}(\varphi_1;\vec{c}_2)=\mathbb{P}(\varphi_1,\vec{c}_1)+(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2<0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}d(\vec{c}_2)&\leq\Psi(\varphi_1;\vec{c}_1)+\frac{1}{2}\frac{(p-1)(\zeta_1^2-\zeta_2^2)}{p+1}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&=d(\vec{c}_1)+\frac{1}{2}\frac{(p-1)(\zeta_1^2-\zeta_2^2)}{p+1}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&<d(\vec{c}_1).\end{aligned}$$

这意味着 $d_{\vec{\varsigma}}$严格递减，因此在 $[0,1)$ 上几乎处处可微。T
o show the 秒 d cl目标 f the lemma, we fi首先b观察 hat

$$\mathbb{P}(s\varphi_1;\vec{c}_2)=2s^2J(\varphi;\vec{c}_2-2s^{p+1})J(\varphi_1;\vec{c}_1)$$

对于任意 $s\in(0,1)$。那么，$\mathbb{P}(s;\vec{c}_2)>0$ 当 $s^{p-1}<{}^{J}{}_{(\varphi_1;\vec{c}_2)J(\varphi_1;\vec{c}_1)}$ 时。因此，存在 $\left({}^{J}{}_{J(\varphi_1;\vec{c}_2)\,(\varphi_1;\vec{c}_1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}<s_1<1$，使得$\mathbb{P}(s_1\varphi_1;\vec{c}_2)=0$ 并且

$$d(\vec{c}_2)\leq\Psi(s_1\varphi_1;\vec{\varsigma}_1)-\frac{s_1^2(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}{2}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

由于 $\Psi(s\varphi_2;\vec{c}_1)$ 在 $s=1$ 处取得最大值，因此 $\Psi(s_1\varphi_1;\vec{c}_1)\leq\Psi(\varphi_1;\vec{c}_1)=d(\vec{c}_1)$。此外，

$$d(\vec{c}_2)\leq d(\vec{c}_1)-\frac{s_1^2(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}{2}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

利用事实 $\left|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\right|\leq|\vec{c}|$，我们得到 $s_1\geq\left(1-\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$，并且

$$d(\vec{c}_2)\leq d(\vec{c}_1)-\frac{(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}{2}\left(1-\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left\|\mathbb{L}_{\vec{\varsigma}}^{\frac{1}{2}}\varphi_1\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

这意味着

$$d_{\vec{\varsigma}}(\zeta_2)\leq d_{\vec{\varsigma}}(\zeta_1)-\frac{(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}{2}\left(1-\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\alpha_+(\zeta_1).$$

以类似的方式，我们得到

$$d_{\vec{\varsigma}}(\zeta_1)\leq d_{\vec{\varsigma}}(\zeta_2)+\frac{(\zeta_2^2-\zeta_1^2)}{2}\left(1+\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\alpha_-(\zeta_2).$$

总体而言，我们得出

$$-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\left(1+\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\alpha_-(\zeta_2)\le\frac{d_{\vec{\zeta}}(\zeta_2)-d_{\vec{\zeta}}(\zeta_1)}{\zeta_2-\zeta_1}\le-\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\left(1-\frac{\zeta_2^2-\zeta_1^2}{1-\zeta_0^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\alpha_+(\zeta_1)$$

对于 $\zeta_1<\zeta_2<\zeta_0$。这表明 $d_{\vec{\zeta}}$在 $[0,1$上局部利普希茨连续，因而连续。现在，经过适当修改后，利用 [29], 中的引理 4.3 的证明，我们得到

$$\limsup_{\zeta_2\to\zeta_1}\alpha_-(\zeta_2)\le\alpha_+(\zeta_1)$$

and

$$\alpha_-(\zeta_2)\le\liminf_{\zeta_1\to\zeta_2}\alpha_+(\zeta_1),$$

从而 $d'_{\vec{\zeta}}(\zeta^{\pm})=-\zeta\alpha_{\pm}(\zeta)$。因此， $d_{\vec{\zeta}}$可微当且仅当 $\alpha_+(\zeta)=\alpha_-(\zeta)$。于是，在可微点处，对于任意 $\varphi\in G_1(\zeta\vec{\zeta})$，有 $d'_{\vec{\zeta}}(\zeta)=-\zeta\|\mathbb{L}_{\vec{\zeta}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$。 □

推论 2.14。 对于任意 $\vec{c}\in B_1(0)$，结论成立：

$$d(\vec{c})\ge(1-|\vec{c}|^2)^{\frac{p+1}{p-1}}d(0).$$

证明。 不失一般性，我们仍假设 $\vec{c}=(c,0,\cdots,0)$。由 (2.10) 和引理 2.13 可得

$$d(c)\ge(1-c^2)\left(d(c)-\frac{p-1}{2(p+1)}cd'(c)\right)$$

这意味着

$$d'(c)\ge-\frac{2c(p+1)}{(p-1)(1-c^2)}d(c).$$

证明完毕。 □

引理 2.15. 设 $\vec{c}=\zeta\vec{\zeta}$如引理 *2.13* 中所述，并假设 $d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)>0$。那么存在 $\epsilon>0$，使得对所有 $\varphi\in\mathscr{G}(\vec{c})$ 以及任意 $\vec{u}\in U_\epsilon(\mathscr{G}(\vec{c}))\subset\mathscr{X}$，均有

$$\mathbb{E}(\vec{u})-\mathbb{E}(\vec{\varphi})+c(\vec{u})\vec{\zeta}\cdot(\mathbb{F}(\vec{u})-\mathbb{F}(\vec{\varphi}))\ge\frac{1}{4}d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)\left(c_{\vec{\zeta}}(\vec{u})-|\vec{c}|\right)^2.$$

证明. 设 $\vec{\varphi}=(\varphi,-\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)\in\mathscr{G}(\vec{c})$。由于 $d_{\vec{\zeta}}$严格递减，且 $d(\vec{c})=\frac{p-1}{2}K(\varphi)$，我们可以为任意 $u\in U_\epsilon(G_1(\vec{c}))\subset H^1(\mathbb{R}^n)$ 赋予速度 $c_{\vec{\zeta}}(\vec{u})=d_{\vec{\zeta}}^{-1}(\frac{p-1}{2}K(u))\vec{\zeta}$。显然， $\mathbb{P}(u;c_{\vec{\zeta}}(u))\ge0$ 且 $\Psi(u;c_{\vec{\zeta}}(u))\ge d(c_{\vec{\zeta}}(u))$。此外，由引理 2.13 可知 $d'_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)=\vec{\zeta}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})$，因此

$$\begin{aligned}d_{\vec{\zeta}}(\zeta)&\ge d_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)+\vec{\zeta}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})(\zeta-|\vec{c}|)+\frac{1}{4}d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)(\zeta-|\vec{c}|)^2\\&=\mathbb{E}(\vec{\varphi})+\zeta\vec{\zeta}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})+\frac{1}{4}d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)(\zeta-|\vec{c}|)^2,\qquad|\zeta-|\vec{c}||<\epsilon_0\end{aligned}$$

对于某个 $\epsilon_0>0$。现在，如果 $\vec{u}=(u,v)\in U_\epsilon(\mathscr{G}(\vec{c}))\subset\mathscr{X}$，那么 $u\in U_\epsilon(G_1(\vec{c}))\subset H^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$d_{\vec{\zeta}}(\vec{\zeta}\cdot c_{\vec{\zeta}}(u))\ge\mathbb{E}(\vec{\varphi})+c_{\vec{\zeta}}(u)\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})+\frac{1}{4}d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)\left(\vec{\zeta}\cdot c_{\vec{\zeta}}(u)-|\vec{c}|\right)^2.$$

另一方面，根据定义可得

$$d_{\vec{\zeta}}(\vec{\zeta}\cdot c_{\vec{\zeta}}(u))=d_{\vec{\zeta}}(c_{\vec{\zeta}}(u))\le\Psi(u;c_{\vec{\zeta}}(u))\le\mathbb{E}(\vec{u})+c_{\vec{\zeta}}(u)\cdot\mathbb{F}(\vec{u}).$$

结合最后两个不等式即可完成证明。 □

定理 2.16. 令 $\vec{c}\in B_1(0)$。若 $d''_{\vec{\zeta}}(|\vec{c}|)>0$，则 $\mathscr{G}(\vec{c})$ 稳定，其中 $\vec{\zeta}=\vec{c}/|\vec{c}|$。

证明。 证明与 [29] 中定理 5.4 的证明类似，使用引理 2.15 即可。因此我们省略细节。 □

回忆一下， $\varphi_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 是方程 (1.4) 的唯一正径向解。

定理 2.17. 令 $\{\vec{c}_k\}\subset B_1(0)$ 为一个满足 $\vec{c}_k\to\vec{0}$ 当 $k\to\infty$时的序列。若 $\vec{\varphi}_k\in\mathscr{G}(\vec{c}_k)$，则存在 $\vec{c}_k$ 的一个子序列（仍记为原序列）以及平移 y_k，使得 $\vec{\varphi}_k(\cdot-y_k)\to(\varphi_0,0)$ 在 $\mathscr{X}$ 中。

证明。 我们已经看到，若 $\{\vec{\varphi}_k\}\subset\mathscr{X}$满足 $\frac{p-1}{p+1}J(\vec{\varphi}_k)=\frac{p-1}{2}K(\vec{\varphi}_k)\to d(\vec{c})$，则存在某个 $\vec{\varphi}\in\mathscr{G}(\vec{c})$ 和一个序列 $\{y_k\}\subset\mathbb{R}^n$，使得 $\vec{\varphi}_j(\cdot+y_k)$ 经取子序列后强收敛到 $\vec{\varphi}$，收敛于 $\mathscr{X}$ 中。特别地，当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时，这一事实仍成立。现在，由 d 的连续性可知 $m(\vec{c})\to m(\vec{0})$。至此，定理得证。

□

引理 2.18. 设 $\vec{\varphi}\in\mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $\vec{c}\in B_1(0)$。假设存在 $\delta>0$，使得 $\langle\mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{u},\vec{u}\rangle\geq\delta\|\vec{u}\|^2_{\mathscr{X}}$对任意满足 $\langle\vec{\varphi},\vec{u}\rangle=\langle\vec{u},\vec{\varphi}_{x_j}\rangle=0, 1\leq j\leq n$ 的 $\vec{u}\in\mathscr{X}$ 均成立。那么存在 $C>0$ 和 $\varepsilon>0$，使得

$$\mathbb{E}(\vec{u})-\mathbb{E}(\vec{\varphi})\geq C\inf_{y\in\mathbb{R}^n}\|\vec{u}-\vec{\varphi}(\cdot-y)\|^2_{\mathscr{X}} \tag{2.11}$$

for 任意满足 $\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})=\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u})$ 的 $\vec{u}\in U_\varepsilon(\vec{\varphi})$，其中 $U_\varepsilon(\vec{\varphi})$ 是 $\vec{\varphi}$ 的开 ε 邻域。

证明。 取 $\vec{u}\in U_\varepsilon(\vec{\varphi})$，使得 $\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})=\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u})$。根据隐函数定理，存在 $y=y_{\vec{u}}\in\mathbb{R}^n$，使得

$$\|\vec{u}-\vec{\varphi}(\cdot+y)\|^2_{\mathscr{X}}=\min_{z\in\mathbb{R}^n}\|\vec{u}-\vec{\varphi}(\cdot+z)\|^2_{\mathscr{X}},$$

只要 $\varepsilon>0$ 足够小。由泰勒展开可得

$$S_{\vec{c}}(\vec{u})=S_{\vec{c}}(\vec{\varphi})+\langle S'_{\vec{c}}(\vec{\varphi}),\vec{w}\rangle+\frac{1}{2}\langle\mathscr{L}_{\vec{c}}(\vec{\varphi})\vec{w},\vec{w}\rangle+o(\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}}),$$

其中 $\vec{w}=\vec{u}(\cdot-y)-\vec{\varphi}$，线性化算子 $\mathscr{L}_{\vec{c}}=S''_{\vec{c}}(\varphi)$ 定义为

$$\mathscr{L}_{\vec{c}}=\begin{pmatrix}\Upsilon_{\vec{c}} & -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\\ \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} & I\end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

其中 $\Upsilon_{\vec{c}}=I-\Delta-p\varphi^{p-1}$。显然， $\Upsilon_{\vec{c}}$从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ 是自伴的。对方程 $S'_{\vec{c}}(\vec{\varphi})=0$关于 x_j 求导，得到 $\mathscr{L}_{\vec{c}}(\varphi_{x_j})=0$，其中 $1\leq j\leq n$。由于 $\vec{\varphi}$是 $S_{\vec{c}}$的临界点，且$\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u})=\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})$，我们有

$$\mathbb{E}(\vec{u})-\mathbb{E}(\vec{\varphi})=\frac{1}{2}\langle\mathscr{L}_{\vec{c}}(\vec{\varphi})\vec{w},\vec{w}\rangle+o(\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}}).$$

将 $\vec{w}$分解为 $\vec{w}=a\vec{\varphi}+\sum_{j=1}^n\ell_j\vec{\varphi}_{x_j}+\vec{v}$，使得 a、$\ell_j\in\mathbb{R}$和 $\vec{v}\in\mathscr{X}$满足 $\langle\vec{\varphi},\vec{v}\rangle=\langle\vec{v},\vec{\varphi}_{x_j}\rangle=0$、$1\leq j\leq n$，由泰勒展开可得

$$\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})=\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{\varphi})+\langle\vec{c}\cdot\mathbb{F}'(\vec{\varphi}),\vec{w}\rangle+O(\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}})$$

and

$$\langle\vec{c}\cdot\mathbb{F}'(\vec{\varphi}),\vec{w}\rangle=a\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cong a\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

因此 $a=O(\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}})$。此外，我们有 $0=\langle\vec{w},\vec{\varphi}_{x_j}\rangle$，这意味着 $|\ell_j|\|\vec{\varphi}_{x_j}\|_{\mathscr{X}}\leq\|\vec{v}\|_{\mathscr{X}}$，并且

$$\|\vec{w}\|_{\mathscr{X}}\leq(n+2)\|\vec{v}\|_{\mathscr{X}}+O(\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}}).$$

因此，我们推导出

$$\|\vec{v}\|^2_x\geq\frac{1}{n+2}\|\vec{w}\|^2_{\mathscr{X}}+O(\|\vec{w}\|^3_{\mathscr{X}}). \tag{2.13}$$

现在，事实 $\mathscr{L}_{\vec{c}}(\vec{\varphi}_{x_j}) = 0$ 满足 $1 \le j \le n$，意味着

$$\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \langle \mathscr{L}_{\vec{c}}(\vec{w}), \vec{w} \rangle + O(\|\vec{w}\|^3_{\mathscr{X}}). \tag{2.14}$$

引理的假设表明，存在 $\delta > 0$ 使得 $\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{v}, \vec{v} \rangle \ge \delta \|\vec{v}\|^2_{\mathscr{X}}$。结合 (2.13) 和 (2.14) 可得

$$\mathbb{E}(\vec{u}) - \mathbb{E}(\vec{\varphi}) \ge \frac{\delta}{2(n+2)} \|\vec{w}\|^2_x + o(\|\vec{w}\|^2_x).$$

由于 $\vec{\varphi} \in U_\varepsilon(\vec{\varphi})$ 且 $\|\vec{w}\|_{\mathscr{X}} < \varepsilon$，因此存在依赖于 δ 的 $\varepsilon > 0$，使得

$$\mathbb{E}(\vec{u}) - \mathbb{E}(\vec{\varphi}) \ge \frac{\delta}{2(n+2)} \|\vec{u} - \vec{\varphi}(\cdot + y)\|^2_x + o(\|\vec{w}\|^2_x).$$

至此证明完成。 □

以下引理已在 [38] 中的引理 2.4 证明。

引理 2 19 $\delta > 0$ $\langle \Upsilon_0 u\ u \rangle \ge \delta \|u\|^2_{H^1\ \mathbb{R}^n}$ $u \in H^1\ \mathbb{R}^n$ $\langle \varphi_0\ u \rangle = ..$ 存在这样的，使得 $_{,()}$ 对任意满足 $\langle u\ \partial_{x_j}\varphi_0 \rangle = 0\ 1 \le j \le n$ φ_0 1 4 () 的 $.,_{,}$, 其中 是 (.) 的唯一正基态。

引理 2.20. 设 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $\vec{c} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$。假设存在 $\delta > 0$ 使得 $\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{u}, \vec{u} \rangle \ge \delta \|\vec{u}\|^2_{\mathscr{X}}$对任意满足 $\langle \vec{\varphi}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{\varphi}_{x_j} \rangle = 0, 1 \le j \le n$ 的 $\vec{u} \in \mathscr{X}$ 均成立。那么 $\vec{\varphi}$ 在 $\mathscr{X}$ 中稳定。

证明。 </style}证明之后是引理 2.18 以及 [20] 中定理 3.5 的证明。 □

受 [15], 中所述概念的启发，我们证明如下引理。

引理 2.21。 设 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $\vec{c} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$。则存在 $c_0 \in (0,1)$ </style}使得若 (0)，则存在 $\delta > 0$，使得 $\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{u}, \vec{u} \rangle \ge \delta \|\vec{u}\|^2_{\mathscr{X}}$对任意满足 $\langle \vec{\varphi}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{\varphi}_{x_j} \rangle = 0, 1 \le j \le n$ 的 $\vec{u} \in \mathscr{X}$ 均成立。

证明。 我们用反证法证明。假设引理 2.21 不成立。则存在 $\{\vec{c}_j\} \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\{\vec{u}_j = (u_j, v_j)\} \subset \mathscr{X}$，使得 $|\vec{c}_j| < 1, \vec{c}_j \to 0, \langle \vec{u}_j, \vec{\varphi}_j \rangle = \langle \vec{u}_j, \partial_{x_j}\vec{\varphi}_j \rangle = 0, \|\vec{u}_j\|_{\mathscr{X}} = 1$，并且

$$\lim_{j\to\infty} \left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}_j}\vec{u}_j, \vec{u}_j \right\rangle \le 0, \tag{2.15}$$

其中 $\vec{\varphi}_j = (\varphi_j, -\mathbb{L}^{\frac{1}{2}}_{\vec{c}}\varphi_j) \in \mathscr{G}(\vec{c}_j)$。由定理 2.17 可知，存在 $\{\vec{c}_j\}$ 的一个子序列（仍用同一字母表示）以及 $\{y_j\} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\vec{\varphi}_j \to \vec{\varphi}_0 = (\varphi_0, 0)$ 在 $\mathscr{X}$ 中强收敛。因此，存在 $\mathscr{X}$-有界序列 $\{\vec{u}_j(\cdot + y_j)\}$ 的一个子序列（仍用同一字母表示）以及 $\vec{u} = (u, v) \in \mathscr{X}$，使得 $\vec{u}_j(\cdot + y_j) \rightharpoonup \vec{u}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛，且 $|\vec{u}_j(\cdot + y_j)|^2 \rightharpoonup |\vec{u}|^2$ 在 $L^{\frac{p+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛。因此，我们得到

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j^{p-1}(x + y_j)|u_j(x + y_j)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0^{p-1}|u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

这意味着

$$0 \ge \liminf_{j\to\infty} \langle \mathscr{L}_{\vec{c}_j}\vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = 1 - p \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0^{p-1}|u_0|^2 \,\mathrm{d}x.$$

此外，我们有 $0 \ge$ $_{j\to\infty}\langle \mathscr{L}_{\vec{c}_j}\vec{u}_j\ \vec{u}_j \rangle \ge \langle \Upsilon_0 u\ u \rangle.$ $\langle \vec{u}_j\ \vec{\varphi}_j \rangle =$ $\langle \vec{u}_j\ \partial_{x_j}\vec{\varphi}_j \rangle = 0$ $1 \le j \le n$ $\langle u\ \varphi_0 \rangle = \langle u\ \partial_{x_j}\varphi_0 \rangle = 0$ 2 19 $u = 0$ lim inf , , 最后，根据假设，对于 , 我们有 , , 。因此，引理 . 表明 。这与假设矛盾，从而完成证明。 □

结合引理 2.20 和引理 2.21 的结果，我们得到以下稳定性结果。

定理 2.22. 设 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $\vec{c} \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$。则存在 $c_0 \in (0,1)$，使得任意满足$\vec{c} \in B_{c_0}(0)$ 的 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 在 $\mathscr{X}$ 中都是轨道稳定的。

值得注意的是，[20] 中的稳定性证明基于线性化算子 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 的谱。由于 $\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}$ 存在于 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 中，推导 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 的谱性质并非易事。

在 [1], 中，已证明 φ_0 是方程 (1.4) 的唯一基态，且呈指数衰减。具体而言，φ_0 属于 $m(0)$，并且 $(\varphi_0, 0) \in \mathscr{G}(0)$。此外，[43] 还证明算子 $\Upsilon_0 := I - \Delta - p\varphi_0^{p-1}$ 有一个唯一的、简单的负特征值 λ_0，对应的特征函数 χ_0 为正且径向对称，并呈指数衰减。此外，Υ_0 的本质谱为 $[\sigma, +\infty)$，其中 $\sigma > 0$；而 Υ_0 的零空间由 $\partial_{x_j}\varphi_0,\ 1 \le j \le n$ 张成。

具有 $\vec{c} = \vec{0}$ 的算子 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 记为 $\mathscr{L}_0$。显然，$\mathscr{L}_0 = \mathrm{diag}(\Upsilon_0, I)$，因此 Υ_0 的谱性质可由 $\mathscr{L}_0$ 继承。按照 [28], 中所述的扰动理论，可采用 [20]中的方法证明定理 2.22。

命题 *2.1.* 存在 $c_0 \in (0,1)$，使得对于任意 $\vec{c} \in B_{c_0}(0) \subset \mathbb{R}^n$，方程 (2.8) 有一个解 $\vec{\varphi} \in \mathscr{X}_{\vec{c}} := H_{\vec{c}}^1(\mathbb{R}^n) \times L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n)$，且映射 $\vec{c} \mapsto \vec{\varphi}$ 从 $B_{c_0}(0)$ 到 $\mathscr{X}_{\vec{c}}$ 是连续的，其中 $L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n)$ 的定义与 $H_{\vec{c}}^1(\mathbb{R}^n)$ 类似，只需将 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 替换为 $L^2(\mathbb{R}^n)$。此外，当 $\vec{c} \to 0$ 时，$\vec{\varphi}$ 一致收敛到 $(\varphi_0, 0)$，且该收敛关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 一致

证明。不失一般性，假设在 (2.8) 中 $\vec{c} = (c, \cdots, 0) \in L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$。定义映射 $\wp : \mathbb{R} \times \mathscr{X}_c \to L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$，其定义为 $\wp(c, \vec{\varphi}) = S_{\vec{c}}'(\vec{\varphi}) - \frac{\partial \wp}{\partial \vec{\varphi}}(c, 0, \cdots, 0)$。于是，$(\varphi_0, 0)$ 中给出的 $\wp$，定义为从 $\mathscr{X}_c$ 到 $L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ 的映射。显然，$\wp(0, \vec{\varphi}) = 0$，且 $\partial_{x_j}\varphi_0 = 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$，$1 \le j \le n$。$\partial_{x_1}\varphi \notin H_{\vec{c}}^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathscr{L}_0 : \mathscr{X}_c \to L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n) \times L_{\vec{c}}^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 $(0, 0) \in \mathscr{X}_c$，且 $\wp(0, (0, 0)) = 0$。回忆一下，$\mathrm{null}(\mathscr{L}_0)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的一个 n-维子空间，由 $(\partial_{x_j}\varphi_0, 0)$ 生成。由于 $\frac{\partial \wp}{\partial \vec{\varphi}}(0, 0)$，故 $\frac{\partial \wp}{\partial \vec{\varphi}}(0, 0)$ 可逆。因此，由 $\wp$ 和 $\frac{\partial \wp}{\partial \vec{\varphi}}$ 的连续性及隐函数定理可知，存在 $c_0 > 0$ 和一个从 $(-c_0, c_0)$ 到 $\mathscr{X}_c$ 的连续映射 $c \to \vec{\varphi}$，使得对所有 $c \in (-c_0, c_0)$，均有 $\wp(c, \vec{\varphi}) = 0$。 □

注意，$\mathbb{L}_{\vec{c}}$ 是定义在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的紧算子，因此由 [28] 可知，$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{L}_{\vec{c}}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathscr{L}_0)$。由于 $\Upsilon_{\vec{c}}$ 和 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 在闭算子空间 $\vec{c}$ 中均连续地变化，故由关于线性算子特征值相对于扰动的连续性的标准定理（例如参见 [28]中的定理 2.14 和 2.17），证明成立。为了获得关于 $\Upsilon_{\vec{c}}$ 谱的一些信息，我们需要回顾一些记号和定义。

设 $T(\mathbb{R}^n)$ 为定义在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上所有闭算子构成的空间，$\hat{\delta}$ 为 $T(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量

$$\hat{\delta}(S, T) = \|P_S - P_T\|_{B(L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n))},$$

其中，P_T 和 P_S 是它们各自图上的正交投影，且 $\|\cdot\|_{B(L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n))}$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界算子空间中的算子范数。

命题 2.2。 存在 $c_0 \in (0,1)$，使得 $\Upsilon_{\vec{c}}$ 对任意 $\vec{c} \in B_{c_0}(0)$，定义于 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的对象具有以下性质：

(1) $\Upsilon_{\vec{c}}$ 具有单负特征值 $\lambda_{\vec{c}}$，其对应的特征函数为正的径向对称特征函数；

(2) The null space of $\Upsilon_{\vec{c}}$ *is spanned by* $\{\partial_{x_j}\varphi,\ 1 \le j \le n\}$, *where* $\vec{\varphi} = (\varphi, \psi)$ *is the traveling wave of* (1.6);

(3) $\Upsilon_{\vec{c}}$ 的本质谱为正，且与零有正距离；

(4) $\Upsilon_{\vec{c}}$ 的本质谱位于 $[\sigma, +\infty)$ 和 $(\lambda_{\vec{c}}, \chi_{\vec{c}}) \to (\lambda_0, \chi_0)$ 中的 $\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}^n)$ 内，当 $\vec{c} \to$ 时 0.

此外，对于任意 $\vec{c} \in B_{c_0}(0)$ 的 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$，上述谱性质同样成立。

证明。首先，我们证明当 $\vec{c} \to 0$ 时，$\hat{\delta}(\Upsilon_{\vec{c}}, \Upsilon_0) \to 0$。值得注意的是，由于连续性，$\Upsilon_{\vec{c}} - \Upsilon_0 \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$，并且当 $\vec{c} \to 0$ 时，$\Upsilon_{\vec{c}} - \Upsilon_0 \to 0$ 位于 $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ 中。应用 [28], 中的定理 2.14 和 2.17，我们得到：

$$\hat{\delta}(\Upsilon_{\vec{c}} - \Upsilon_0) \le 2\left(1 + \|\Upsilon_{\vec{c}}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^n))}^2\right)\|\Upsilon_{\vec{c}} - \Upsilon_0\|_{B(L^2(\mathbb{R}^n))} \to 0, \quad \text{as } \vec{c} \to 0,$$

由于 $\|\Upsilon_{\vec{c}}\|_{B(L^2(\mathbb{R}^n))}$ 关于 $\vec{c}$ 的一致有界性。 □

3 轨道不稳定性

本节将建立使方程（1.1）的行波 $\vec{\varphi}$ 轨道不稳定的条件。我们采用 [17] 中提出的方法，该方法基于 [20]中的方法。令 $O_{\vec{\varphi}}$ 为 $\vec{\varphi}=(\varphi,-\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)\in\mathscr{G}(\vec{c})$的轨道，即

$$O_{\vec{\varphi}}=\{\vec{\varphi}(\cdot-r),\ r\in\mathbb{R}^n\}.$$

我们的主要不稳定性结果如下。

定理 3.1. 令 $\vec{\varphi}\in\mathscr{G}(\vec{c})$ 且 $|\vec{c}|<1$。若存在 $\vec{\Phi}\in\mathscr{X}$，使得 $\langle\mathbb{F}'(\vec{\varphi})\ \vec{\Phi}\rangle=0$ 并且

$$\left\langle\mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi},\vec{\Phi}\right\rangle<0,$$

则 $O_{\vec{\varphi}}$ 不稳定，其中 $\mathscr{L}_{\vec{c}}=S_{\vec{c}}''(\vec{\varphi})$。

为证明该定理，不失一般性，我们假设 $\vec{c}=(c,0,\cdots,0)$。

引理 3.2. 令 $|c|<1$ 且 $\vec{\varphi}\in\mathscr{G}(\vec{c})$。那么存在 $\epsilon>0$ 以及唯一的 C^1-映射 $\Lambda:\ B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})\to\mathbb{R}$，使得 $\Lambda(\vec{\varphi})=0$ 且 $\Lambda(\tau_r\vec{\psi})=\Lambda(\vec{\psi})-r$。此外，有

(i) $\left\langle\tau_{\Lambda(\vec{\psi})}\vec{\psi},\mathscr{J}\vec{\varphi}\right\rangle=0,$

(ii) $\Lambda'(\vec{\psi})=-\frac{\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\mathscr{J}\vec{\varphi}}{\left\langle\mathbb{F}'(\vec{\psi}),\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\vec{\varphi}\right\rangle}$

对任意 $\psi\in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$ 及 $r\in\mathbb{R}$，其中 $\tau_r\psi(x)=\psi(x-\cdot)$ 和 $B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$ 是 $\mathscr{X}$ 中 $O_{\vec{\varphi}}$ 的 ϵ-邻域。

证明。 定义映射 $\Lambda_1:\mathbb{R}\times B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})\to\mathbb{R}$ 如下

$$\Lambda_1(r,\vec{\psi})=\left\langle\tau_r\vec{\psi},\mathscr{J}\vec{\varphi}\right\rangle.$$

于是，由 $\mathscr{J}$ 的斜自伴性可知 $\Lambda_1(0,\vec{\varphi})=0$。此外，容易验证 $\frac{\partial\Lambda_1}{\partial r}(0,\vec{\varphi})>0$，因此由隐函数定理可知，存在唯一映射 Λ，使得 $\Lambda(\vec{\varphi})$ 且 $\Lambda(\tau_r\vec{\psi})=\Lambda(\vec{\psi})-r$。(i) 和 (ii) 可直接推出。

□

现在，我们定义一个与 [4] 中定义的向量场类似的向量场，以研究不稳定性。

引理 3.3。 设 Λ 如引理 *3.2* 所述，$\vec{\Phi}$ 如定理 *3.1* 所述。存在一个 C^1-映射 $\mathfrak{B}:\ B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})\to\mathscr{X}$，使得 $\tau_r\mathfrak{B}=\tau_r\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(\vec{\varphi})=\vec{\Phi}$ 且 $\left\langle\mathfrak{B}(\vec{\psi})\ \mathbb{F}'(\vec{\psi})\right\rangle=0$ 对所有 $\vec{\psi}\in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$ 均成立。此外，$\mathfrak{B}$ 满足

$$\mathscr{J}\mathfrak{B}(\vec{\psi})=\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\mathscr{J}\vec{\Phi}+\left\langle\mathbb{F}'(\vec{\psi}),\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\vec{\Phi}\right\rangle\Lambda'(\vec{\psi}).\tag{3.1}$$

此外，初值问题 $d\vec{u}\ d_s=\mathfrak{B}(\vec{u})$ 存在唯一的局部 C^1-解 $\mathfrak{U}(s,\vec{\psi}_0)$，满足$\mathfrak{U}(0,\vec{\psi}_0)=\vec{\psi}_0\in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$，使得 $d\ \frac{\mathfrak{U}}{ds}(0,\vec{\varphi})=\vec{\Phi}$, $\mathbb{F}(\mathfrak{U}(s,\vec{\psi}_0))=\mathbb{F}(\vec{\psi}_0)$，并且

$$\mathfrak{U}(s,\tau_r\vec{\psi}_0)=\tau_r\mathfrak{U}(s,\vec{\psi}_0)$$

对所有 $r\in\mathbb{R}$ 和 $\psi_0\in B_\epsilon\ (O_{\vec{\varphi}})$。

证明。 只需定义

$$\mathfrak{B}(\vec{\psi})=\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\vec{\Phi}-\frac{\left\langle\mathbb{F}'(\vec{\psi}),\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\right\rangle}{\left\langle\mathbb{F}'(\vec{\psi}),\tau_{-\Lambda(\vec{\varphi})}\right\rangle}\tau_{-\Lambda(\vec{\psi})}\vec{\varphi}.$$

证明可通过直接计算，根据引理 3.2 中 Λ 的性质推得，因此省略细节。 □

定理 *3.1* 的证明。证明思路与 [16], 中的证明相同，但为完整起见，我们在此简要说明。

首先，我们证明存在 $\epsilon > 0$ 和 $\rho > 0$，使得对所有 $\psi_0 \in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$，都存在 $s = s_{\vec{\psi}_0} \in (-\rho, \rho)$，使得

$$S(\vec{\varphi}) \le S(\vec{\psi}_0) + \left\langle S'(\vec{\psi}_0), \mathfrak{B}(\vec{\psi}_0) \right\rangle s. \tag{3.2}$$

事实上，应用泰勒展开定理可得

$$S(\mathfrak{U}(s, \vec{\psi}_0)) = S(\vec{\psi}_0) + \left\langle S'(\vec{\psi}_0), \mathfrak{B}(\vec{\psi}_0) \right\rangle s + \frac{s^2}{2}\Theta(s, \vec{\psi}_0),$$

其中

$$\Theta(s, \vec{\psi}_0) = \left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0))\mathfrak{B}(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0)), \mathfrak{B}(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0)) \right\rangle + \left\langle S'(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0)), \mathfrak{B}'(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0))(\mathfrak{U}(rs, \vec{\psi}_0)) \right\rangle.$$

根据 $\mathfrak{B}$的定义，显然 $\Theta(s, \vec{\varphi}) < 0$，从而对所有 $\vec{\psi} \in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$，均有 $S(\mathfrak{U}(s, \vec{\psi}_0)) \le S(\vec{\psi}_0) + \frac{s^2}{2}\Theta(s, \vec{\psi}_0)$。这意味着

$$S(\vec{\varphi}) \le S(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi})) - \langle S'(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi})), \mathfrak{B}(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi}))\rangle\, \varrho$$

对所有 $|\varrho| < \rho$均成立。此外，由定理 3.1 的假设条件以及 Θ 和 $\mathfrak{U}$ 的连续性可知，当 $|\varrho| < \rho$ 且 $\rho > 0$充分小时，$S(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi})) < S(\vec{\varphi})$。另外，我们有

$$\langle S'(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi})), \mathfrak{B}(\mathfrak{U}(\varrho, \vec{\varphi}))\rangle < 0 \tag{3.3}$$

对所有 $\varrho \in (0, \rho)$均成立。若证明对每个 $\vec{\psi}_0$，都存在 s使得 $\mathbb{P}(\mathfrak{U}(s, \psi_0)) = 0$，则所需结论即得，因为 $\vec{\varphi}$在满足 $\mathbb{P}(\varphi)$的条件下使 S达到最小值。定义 $g(s, \psi) = \mathbb{P}(\mathfrak{U}(s, \psi))$，并利用以下事实即可推出该结论： $f(0, \vec{\Phi}) = 0$， $\frac{\partial g}{\partial s}(0, \vec{\varphi}) = \left\langle \mathbb{P}'(\vec{\varphi})\ \vec{\Phi} \right\rangle \neq 0$（见 [16,引理 4.5]），以及假设条件 $\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}, \vec{\Phi} \right\rangle < 0$。现在定义

$$A(\vec{\psi}) = \left\langle \tau_{-\Lambda(\vec{\psi})} \mathscr{J}\vec{\Phi}, \vec{\psi} \right\rangle.$$

由引理 3.2 和引理 3.3 可知， $A\colon B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}}) \to \mathbb{R}$ 是一个 C^1-映射，且 $A' = \mathscr{J}\mathfrak{B}$。反设存在 $\{\varrho_j\} \subset (0, , \rho)$，使得当 $j \to \infty$时 $\varrho_j \to 0$，且 $T_j = \sup\{t;$ 当 $j \to \infty$时， $\vec{u}_j(t) \in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})\}$无界，其中 $\vec{\varphi}_j = \mathfrak{U}(\varrho_j, \vec{\varphi})$，而 $\vec{u}_j$是以 $\vec{\varphi}_j$为初始数据的方程 (1.1) 的唯一解。由 $\mathfrak{U}$的连续性可推得 $\vec{\varphi}_j \to \vec{\varphi}$属于 $\mathscr{X}$。在方程 (2.6) 的流映射下， S的不变性表明 $S(\vec{\varphi}_j) < S(\vec{\varphi})$，进而由 (3.3) 可得，对所有 $t \in [0, T_j]$， $S(\vec{u}_j) < S(\vec{\varphi})$。此外，对所有 $t \in [0, T_j]$， $\langle S'(\vec{u}_j)\ \mathfrak{B}(\vec{u}_j)\rangle < 0$，这意味着

$$\mathfrak{D} = \{\vec{u} \in \mathscr{X},\ S(\vec{u}) < S(\vec{\varphi}),\ \langle S'(\vec{u}), \mathfrak{B}(\vec{u})\rangle < 0\}$$

在 (2.6) 的流下保持不变。前面的分析表明，对每个 $t \in [0, T_j]$，都存在满足 (3.2) 的 $s = s(\vec{u}_j(t)) \in (-\rho, \rho)$。不变性 S以及事实 $\vec{u}_j(t) \in \mathfrak{D}$ 意味着，对所有 $t \in [0, T_j]$，有

$$-\langle S'(\vec{u}_j), \mathfrak{B}(\vec{u}_j)\rangle \ge \frac{S(\vec{\varphi}) - S(\vec{\varphi}_j)}{\rho} = \chi_j > 0.$$

由于 $\vec{u}_j(t) \in B_\epsilon(O_{\vec{\varphi}})$，因此 $A(\vec{u}_j(t))$ 在 $[0, T_j]$ 上有界。由引理 3.3,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(\vec{u}_j(t)) &= \left\langle A'(\vec{u}_j(t)), \vec{u}_j'(t) \right\rangle \\ &= \langle \mathscr{J}\mathfrak{B}(\vec{u}_j(t)), \mathscr{J}\mathbb{E}'(\vec{u}_j(t))\rangle \\ &= \langle \mathfrak{B}(\vec{u}_j(t)), S'(\vec{u}_j(t))\rangle = -\chi_j. \end{aligned}$$

因此， $A(\vec{u}_j(t)) \to -\infty$ 如 $t \to \infty$，这表明 T_j 必定有限。这个矛盾完成了证明。 □

推论 3.4。假设存在一个 C^2-映射 $c \mapsto \vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$。若 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $d''(|\vec{c}|) < 0$，则 $O_{\vec{\varphi}}$ 是不稳定的。

证明。定义

$$\vec{\Phi} = \vec{\varphi} - \frac{2d'(|\vec{c}|)}{d''(|\vec{c}|)}\mathfrak{D}(\vec{\varphi}),$$

其中 $D(\vec{\varphi}) = \frac{d}{d|\vec{c}|}\vec{\varphi}$。由引理 2.13 可直接得出 $\langle \mathbb{F}'(\vec{\varphi})\ \Phi\rangle = 0$。另一方面，我们注意到

$$\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\mathfrak{D}(\vec{\varphi}), \vec{\varphi}\rangle = -2d'(|\vec{c}|), \qquad \langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\mathfrak{D}(\vec{\varphi}), \mathfrak{D}(\vec{\varphi})\rangle = -d''(|\vec{c}|).$$

因此，由 $\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}、\ \vec{\Phi}\right\rangle$ 以及定理 3.1 的假设可得

$$\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}, \vec{\Phi}\right\rangle = \langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\varphi}, \vec{\varphi}\rangle + 4\frac{(d'(|\vec{c}|))^2}{d''(|\vec{c}|)} < 0.$$

□

以下推论完成了前面对情形 $\vec{c} = 0$ 的结果。

推论 3.5。设 $\vec{\varphi} \in \mathscr{G}(\vec{c})$ 满足 $|\vec{c}| \in (0,1)$。则 $O_{\vec{\varphi}}$ 是不稳定的，如果

$$p > \frac{2 - n + \sqrt{(n-2)^2 + \varepsilon_{\vec{c}}(4 + 2n + \varepsilon_{\vec{c}})}}{\varepsilon_{\vec{c}}}, \qquad \varepsilon_{\vec{c}} = |\vec{c}|^{-2} - 1. \tag{3.4}$$

证明。对于 $\vec{\varphi} = (\varphi, -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi) \in \mathscr{G}(\vec{c})$，定义 $\vec{\Phi} = (\varphi, \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)$。显然 $\left\langle \mathbb{F}'(\vec{\varphi})\ \vec{\Phi}\right\rangle = 0$。因此，根据定理 3.1，只需找出使 $\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}, \vec{\Phi}\right\rangle < 0$ 成立的条件。由 (2.12) 可知

$$\mathscr{L}_{\vec{c}} = \begin{pmatrix} I - \Delta - p\varphi^{p-1} & -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} \\ \mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}} & I \end{pmatrix}.$$

根据 $\mathscr{L}_{\vec{c}}$ 对任意 $\vec{u} \in \mathscr{X}$ 的定义可知

$$\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{u}, \vec{u}\rangle = 2J(u) - \langle K''(\varphi)u, u\rangle + 2q(\vec{u}).$$

经过一些计算后，由式 (2.5) 可得

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}, \vec{\Phi}\right\rangle &= (1-p)\|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} + 4\left\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \frac{2(1-p^2)}{2n + (p+1)(2-n)}\left(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - \left\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right) + 4\left\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \frac{2(1-p^2)}{2n + (p+1)(2-n)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{2(p+1)(3-2n+p) + 8n}{2n + (p+1)(2-n)}\left\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

[1]利用 $|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi| \le |\vec{c}||\varphi|$，我们得出

$$\left\langle \mathscr{L}_{\vec{c}}\vec{\Phi}, \vec{\Phi}\right\rangle \le \frac{2|\vec{c}|^{-2}(1-p^2) + 2(p+1)(3-2n+p) + 8n}{(p+1)(2-n) + 2n}\left\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < 0$$

提供

$$p > \frac{2 - n + \sqrt{(n-2)^2 + \varepsilon_{\vec{c}}(4 + 2n + \varepsilon_{\vec{c}})}}{\varepsilon_{\vec{c}}}.$$

□

4 强不稳定性

在本节中，我们研究方程（1.1）行波的强不稳定性。更确切地说，我们证明存在一列趋近于该行波的初始数据，而方程（1.1）的相应解会在有限时间内爆破。

本节的主要结果表述如下。

定理 4.1. 假设 $\vec{c}\in B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$。另假设 $1<p<2^*-1$ 和 $|\vec{c}|^2<\frac{p-1}{p+3}$。则方程 (1.1) 的任意$\vec{\varphi}=(\varphi,-\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)\in\mathscr{G}(\vec{c})$ 解都强不稳定，即对于任意 $\epsilon>0$，存在 $\vec{u}_0=(u_0,u_1)\in\mathscr{X}$使得 $\|\vec{u}_0-\vec{\varphi}\|_{\mathscr{X}}<\epsilon$，且以 $\vec{u}_0$ 为初始值的方程 (1.1) 的解 $\vec{u}(t)$ 会在有限时间内爆破。

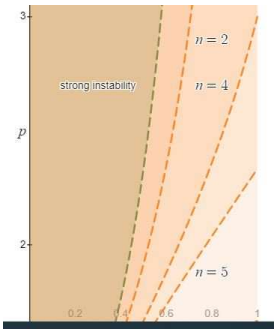

图 4：不同 $n=2$、5、8 和 $|c|\in[0,1)$ 对应的轨道不稳定区域与强不稳定区域。

由 [27], 可知，泛函 Ψ 具有山路几何，且 $|\vec{c}|<1$；此外，山路值给出了最小能量水平。由于 $\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}$ 是零阶齐次的，我们陈述以下引理，并请参阅 [27] 中的证明。

引理 4.2. 有 $c_m=c_g$，其中 $c_g=$下确界$\{\Psi(\varphi)\quad\varphi\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\},\quad\Psi'(\varphi)=0\}$ 且

$$c_m=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\Psi(\gamma(t))>0$$

具有 $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^n))\ \ \gamma(0)=0,\ \Psi(\gamma(1))<0\}$.

引理 4.3。 设 φ 属于 $G(\vec{c})$，且 $\vec{c}\in B_1(0)\subset\mathbb{R}^n$。假设 $1<p<2^*-1$ 且$|\vec{c}|^2<\frac{p-1}{p+3}$。该$n$

$$\Psi(\varphi)=\inf\left\{\Psi(v),\ v\in H^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\},\ \mathscr{K}(v)=0\right\},$$

其中

$$\mathscr{K}(u)=\frac{2\alpha-\beta n}{2}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)+\frac{2\alpha-\beta(n-2)}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-(\alpha(p+1)-\beta n)K(u)$$

使得 $\alpha(p-1)\geq2\beta$ 且

$$\begin{cases}2\alpha=\beta n, & \beta>0,\\ 2\alpha>\beta n, & \beta\geq0.\end{cases}$$

证明。 该证明来自 [26], 中的定理1和定理2，故省略细节。 □

引理 4.4. 集合 $\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-=\{\vec{u}=(u,v)\in\mathscr{X},\ S(\vec{u})<d(\vec{c})\ \ \mathscr{K}(u)<0\}$ 在 (1.3) 的流作用下是不变的。

证明. 令 $\vec{u}_0=(u_0,u_1)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$，且 $\vec{u}(t)=(u(t)\ v(t))\in C([0,T)\ \mathscr{X})$ 为与 $\vec{u}_0$ 对应的 (1.3) 的唯一解。首先，由 (2.7) 可知

$$\Psi(\varphi)=S_{\vec{c}}(\vec{\varphi})-\frac{1}{2}\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi+\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\le S_{\vec{c}}(\vec{\varphi}).\tag{4.1}$$

不变量 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{F}$ 表明，对于任意 $t\in[0,T)$，$S_{\vec{c}}(\vec{u}(t))=S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)<d(\vec{c})$。现在假设存在 $t_0\in(0,T)$，使得对于任意 $t\in[0,t_0)$，$\mathscr{K}(u(t_0))=0$ 且 $\mathscr{K}(u(t))<0$。因此，容易看出

$$\tilde{\Psi}(u(t))\ge d(\vec{c})>0$$

对于任意 $[0,t_0)$，其中 $\tilde{\Psi}(u)=\Psi(u)-\frac{1}{\alpha(p+1)-\beta n}\mathscr{K}(u)$。因此，$u(t_0)\neq0$。于是，事实 $\mathscr{K}(u(t_0))=0$、不等式 (4.1) 和引理 4.3 意味着 $d(\vec{c})\le\Psi(u(t_0))\le S_{\vec{c}}(\vec{u}(t))<d(\vec{c})$。这一矛盾表明，对于任意 $t\in[0,T)$，$\vec{u}(t)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$。□

注 4.5。根据 $\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$ 的定义，显然对于任意 $\lambda>1$，都有 $\lambda\vec{\varphi}=\lambda(\varphi,\ -\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$。此外，利用引理 *4.2* 和 *4.3*、$G(\vec{c})$ 的定义以及定理 *2.11*，可以观察到 $d(\vec{c})=\Psi(\varphi)$。

命题 *4.1*。集合 $\mathfrak{K}_{\vec{c}}^+=\{\vec{u}=(u,v)\in\mathscr{X},\ S(\vec{u})<d(\vec{c})\ \ \mathscr{K}(u)>0\}$ 在方程 *(1.3)* 的流下是不变的。此外，如果 $\vec{u}_0=(u_0,u_1)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^+$，则与初始数据 $\vec{u}_0$ 对应的方程 *(1.3)* 的局部解 $\vec{u}(t)\in C([0,T)\ \mathscr{X})$ 在整个时间范围内全局存在。

证明。类似于引理 4.4 的证明，可以推出 $\mathfrak{K}_{\vec{c}}^+$ 的不变性。为证明局部解 $\vec{u}(t)=(u(t)\ v(t))\in C([0,T)\ \mathscr{X})$ 的整体延拓，只需建立先验估计 $\|\vec{u}(t)\|_{\mathscr{X}}\le C_T$ 对所有 $t\in[0,T)$ 成立。命题的第一部分断言 $\vec{u}(t)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^+$，这意味着 $S(\vec{u}(t))<d(\vec{c})$ 且 $\mathscr{K}(u(t))>0$。因此，由这些不等式可得

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+2\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}(t))-2d(\vec{c})\\&\quad<\frac{1}{\alpha(p+1)-\beta n}\left((2\alpha-\beta n)\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)+(2\alpha-\beta(n-2))\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right).\end{aligned}$$

这立即意味着

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(p-1)}{\alpha(p+1)-\beta n}\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\frac{\alpha(p-1)-2\beta}{\alpha(p+1)-\beta n}+(2\alpha-\beta n)\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\<d(\vec{c})-2\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0)\end{aligned}$$

对所有 $t\in[0,T)$ 均成立。因此我们得出结论：对所有 $t\in[0,T)$，$\|\vec{u}(t)\|_{\mathscr{X}}^2\lesssim d(\vec{c})-2\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0)$。□

注 4.6. 引理 *4.4* 和命题 *4.1* 在采用 (2.7) 并将不变集 $\mathfrak{K}_{\vec{c}}^{\pm}$ 替换为

$$\mathfrak{K}_{\vec{c}}^{\pm}=\{\vec{u}=(u,v)\in\mathscr{X},\ S(\vec{u})<d(\vec{c}),\ \mp\mathscr{K}(\vec{u})<0\},$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(u,v)=&\frac{2\alpha-\beta n}{2}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u+v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)\\&+\frac{2\alpha-\beta(n-2)}{2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-(\alpha(p+1)-\beta n)K(u).\end{aligned}$$

此外，有 $(u_0,v_0)\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$。因此，方程(2.6) 的相应解 $\vec{u}$ 满足

$$\mathscr{K}(\vec{u})<-((p+1)\alpha-n\beta)(d(\vec{c})-S(u_0,v_0)).$$

令 $\vec{\varphi}=(\varphi,-\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi)\in\mathscr{G}(\vec{c})$。通过类似于 [35], 中引理 4.4 的论证，我们容易看出，集合 $D=\{u\in H^1(\mathbb{R}^n),(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。因此，存在 $\{\vec{\varphi}_j=(\varphi_j,-\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi_j)\}_j$，使得当 $j\to\infty$ 时， $\varphi_j\in D$ 和 $\varphi_j\to\varphi$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^n)$。令 $\vec{u}_0=\lambda\vec{\varphi}_j$，其中 $\lambda>1$。于是，我们有

$$S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)=\mathbb{E}(\lambda\vec{\varphi})+\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\lambda\vec{\varphi})+O(j^{-1}).$$

由于 $\lambda\vec{\varphi}\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$，通过充分增大 $j\geq j_0$，可得 $S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)<d(\vec{c})$。类似地，我们有 $\mathscr{K}(\vec{u}_0)<\mathscr{K}(\vec{\varphi})=0$ 以及 $-\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0)>\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$，只要 $j\geq j_0$ 足够大。这意味着对于 $j\geq j_0$， $\vec{u}_0\in\mathfrak{K}_{\vec{c}}^-$。现在，对于 $\lambda>1$, 令 $\vec{u}(t)=(u(t)\ v(t))$，其中 $t\in[0,T)$，为满足初始数据 $\vec{u}_0=\lambda\vec{\varphi}_{j_0}$ 的方程 (1.1) 的解。记

$$I(t)=\|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,\qquad t\in[0,T).$$

由于 $\vec{u}_0\in D$，因此 $I(t)$ 定义良好。参照 [36], 中的引理 2.10 的证明思路，容易看出

$$I'(t)=2\left\langle(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u,v\right\rangle$$

and

$$I''(t)=2\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-2\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+2\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}.$$

引理 4.7。 对于任意 $\lambda>1$，存在 $C_\lambda>0$ 使得

$$I''(t)\geq(p+3)\|v+\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+C_\lambda$$

对所有 $t\in[0,T)$。

证明。 首先，我们注意到

$$2\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}=-2(p+1)\mathbb{E}(\vec{u})+(p+1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+(p+1)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

that

$$\begin{aligned}I''(t)&=(p-1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2-2(p+1)\mathbb{E}(\vec{u})+(p+3)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&=(p+3)\|v+\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-(p+3)\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+(p-1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2-2(p+1)S_{\vec{c}}(\vec{u})-4\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u})\\&=(p+3)\|v+\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-(p+3)\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+(p-1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2-2(p+1)S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)-4\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}-(p+3)\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+(p-1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2&\geq-(p+3)|\vec{c}|^2\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+(p-1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\\&=((p-1)-|\vec{c}|^2(p+3))\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+(p-1)\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&\geq((p-1)-|\vec{c}|^2(p+3))(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2-\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2)\\&\quad+(p-1)\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\&=\frac{2(p-1)(\alpha(p+1)-n\beta)}{\alpha(p-1)-2\beta}\tilde{\Psi}(u).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$I''(t)\geq(p+3)\|v+\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\frac{2(p-1)(\alpha(p+1)-n\beta)}{\alpha(p-1)-2\beta}\tilde{\Psi}(u)-2(p+1)S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)-4\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0).$$

对于任意 $\lambda>1$，容易看出 $S_{\vec{c}}(\vec{u}_0)=\Psi(\lambda\varphi)<d(\vec{c})$ 且 $-\vec{c}\cdot\mathbb{F}(\vec{u}_0)>\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$。由 (2.5)，经过一些直接计算，可由引理 4.4 得到

$$I''(t)\geq\|v+\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\frac{2(p-1)(\alpha(p+1)-n\beta)}{\alpha(p-1)-2\beta}\left(\tilde{\Psi}(u)-d(\vec{c})\right)+\mathscr{C}(u),$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(u) &= 2\left(\frac{(p-1)(\alpha(p+1)-n\beta)}{\alpha(p-1)-2\beta}-p-1\right)d(\vec{c})+4\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\\ &\geq 4\|\mathbb{L}_{\vec{c}}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2>0,\end{aligned}$$

给定 $p<2^*-1$。 □

定理 *4.1* 的证明。 证明由引理 4.7 以及 Levine [30]按照 Payne 和 Sattinger [39]所作的凹性论证得出。事实上，若 $\lambda>1$，则 $\lambda\vec{\varphi}$在 $\mathscr{X}$中收敛到 $\vec{\varphi}$。由 $H^1(\mathbb{R}^n)$中 D的稠密性，我们可以假设，对应于初始数据 $\lambda\vec{\varphi}$的方程 (1.1) 的唯一解 $\vec{u}_\lambda\in C([0,T_\lambda),\mathscr{X})$ 满足以下估计：

$$I''(t)I(t)-\frac{p-1}{4}(I'(t))^2\geq 0,$$

假设 $T_\lambda=+\infty$。然而，这很容易推出存在某个 t_0，使得 $I(t_0)\leq 0$。这一矛盾完成了证明。 □

结合 (2.1) 和 (2.2)，并仿照定理 1.1 的证明，我们得到一个依赖于 $d(\vec{c})$ 的新爆破解条件。

推论 4.8. 设 $\vec{c}\in B_1(0)\in\mathbb{R}^n$，$(u_0,\ u_1)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^n)$。若

$$\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}>C_{\vec{c}}^{-\frac{p+1}{p-1}},$$

然后，局部解 $u(t)\in H^1(\mathbb{R}^n)$ 的(1.3) 在有限时间内爆破。

致谢

作者感谢审稿人认真审阅稿件，并提出有价值的意见以改进结果的呈现。作者获得纳扎尔巴耶夫大学教师发展竞争性研究基金项目2023—2025年度项目的支持（项目编号：20122022FD4121）。

利益冲突

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

数据可用性声明

由于本研究未创建或分析新数据，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] Berestycki, H. 与 Lions, P.-L. 非线性标量场方程。I：基态的存在性。《*Archive for Rational Mechanics and Analysis*》*82*（1983年），313–345。3，15

[2] Bona, J. L. 与 Li, Y. 孤立波的衰减与解析性。《纯粹与应用数学杂志》（第*9*辑）*76*，5（1997年），377–430。6

[3] Bona, J. L., 和 Sachs, R. L. 广义 Boussinesq 方程光滑解的整体存在性及孤立波的稳定性。《数学物理通讯》*118*, 1（1988年）, 15–29. 1

[4] Bona, J. L., Souganidis, P. E., 和 Strauss, W. A. Korteweg-de Vries 型孤立波的稳定性与不稳定性。伦敦皇家学会会刊 *A* 辑 *411* (1987), 395–412. 3, 16[5] Boussinesq, J. 关于沿水平矩形通道传播的波和涡旋的理论：这些波和涡旋向通道中的液体传递从表面到底部近乎相同的速度。*Liouville* 杂志 *(2) 17* (1872), 55–109. 1[6] Bugiera, L., Lenzmann, E., Schikorra, A., 和 Sok, J. 关于色散广义非线性薛定谔方程行进孤立波的对称性。《非线性》*33*, 6 (2020), 2797–2819. 3, 5[7] Chang, X., Hajaiej, H., Ma, Z., 和 Song, L. 具有组合非线性项的双调和非线性薛定谔方程驻波的存在性与不稳定性。*arXiv:2305.00327* (2023). 3[8] Charlier, C., 和 Lenells, J. “好”Boussinesq 方程：Riemann-Hilbert 方法。《印第安纳大学数学杂志》*71*, 4 (2022), 1505–1562. 1[9] Chen, J., Guo, B., 和 Shao, J. 广义 Boussinesq 方程的适定性与散射。《工业与应用数学学会数学分析杂志》*55*, 1 (2023), 133–161. 2, 3[10] Cho, Y., Hajaiej, H., Hwang, G., 和 Ozawa, T. 关于分数阶薛定谔方程的轨道稳定性。《纯粹与应用分析通讯》*13*, 3 (2014), 1267–1282. 3[11] Christou, M. A., 和 Christov, C. I. 用于 Boussinesq 方程二维孤子的 Fourier-Galerkin 方法。《数学与计算机模拟》*74*, 2-3 (2007), 82–92. 2[12] Christov, C., 和 Choudhury, J. 二维 Boussinesq 方程的摄动解。《力学研究通讯》*38*, 3 (2011), 274–281. 4[13] Christov, C., Todorov, M., 和 Christou, M. 二维浅水波的摄动解。载于*AIP* 会议论文集 (2011), 第 1404 卷，美国物理联合会，页 49–56. 4[14] Esfahani, A., 和 Farah, L. G. 六阶 Boussinesq 方程的局部适定性。《数学分析及其应用杂志》*385*, 1 (2012), 230–242. 1[15] Esteban, M. J., 和 Strauss, W. A. 绝热球体外部的非线性束缚态。《偏微分方程通讯》*19*, 1-2 (1994), 177–197. 14[16] Feng, W., 和 Levandosky, S. 非线性梁方程孤立波的稳定性。《微分方程杂志》*269*, 11 (2020), 10037–10072. 17[17] Gonçalves Ribeiro, J. M. 某些处于外磁场中的非线性薛定谔方程对称驻定态的不稳定性。《亨利·庞加莱研究所年刊：理论物理》*54*, 4 (1991), 403–433. 3, 16[18] Gravejat, P. Gross-Pitaevskii 方程行波的衰减。《亨利·庞加莱研究所年刊：非线性分析》*21*, 5 (2004), 591–637. 6[19] Gravejat, P. Gross-Pitaevskii 方程行波的渐近行为。《渐近分析》*45*, 3-4 (2005), 227–299. 6[20] Grillakis, M., Shatah, J., 和 Strauss, W. 存在对称性时孤立波的稳定性理论。I.《泛函分析杂志》*74* (1987), 160–197. 1, 3, 14, 15, 16[21] Hajaiej, H. 某些 ℓ-耦合非线性薛定谔方程驻波的轨道稳定性。《当代数学通讯》*14*, 6 (2012), 1250039, 10. 3[22] Hajaiej, H. 关于用于证明某些分数阶约束变分问题中极小化子存在性与对称性的假设条件的最优性。《亨利·庞加莱年刊》*14*, 5 (2013), 1425–1433. 3

[23] Hajaiej, H., Pacherie, E., and Song, L. 关于具有一般非线性项和势函数的一类椭圆方程归一化基态解的数量。arXiv:2308.14599（2023）。3[24] Hajaiej, H., and Song, L. 关于解的全局分支在 L^2 范数下的严格单调性，以及多类偏微分方程归一化基态的唯一性：两种通用方法及若干示例。arXiv:2302.09681（2023）。3[25] Hajaiej, H., and Stuart, C. A. 关于非线性薛定谔方程驻波稳定性的变分方法。《非线性研究进展》4, 4（2004），469–501。3[26] Jeanjean, L., and Le Coz, S. 通过山路论证研究非线性克莱因–戈尔登方程驻波的不稳定性。《美国数学会汇刊》361, 10（2009），5401–5416。19[27] Jeanjean, L., and Tanaka, K. 关于 $\mathbb{R}^N$中的最小能量解的一点注记。《美国数学会会刊》131, 8（2003），2399–2408。19[28] Kato, T. 线性算子扰动理论。第2版，《数学科学基础丛书》第132卷。Springer，Cham，1976。15[29] Levandovsky, S. 四阶孤立波的稳定性与不稳定性。《动力系统与微分方程杂志》10, 1（1998），151–188。12, 13[30] Levine, H. A. 形如 $Pu_{tt} = -Au + \mathfrak{F}\ u$ *192* 1974 1 21 22 ( )的非线性波动方程解的不稳定性及整体解的不存在性。《美国数学会汇刊》（），–。[31] Li, B., Ohta, M., Wu, Y., and Xue, J. 广义Boussinesq方程孤立波的不稳定性。《工业与应用数学学会数学分析杂志》52, 4（2020），3192–3221。2[32] Linares, F. 广义 Boussinesq 方程小解的整体存在性。《微分方程杂志》106, 2（1993），257–293。1[33] Lions, P.-L. 变分法中的集中紧性原理。极限情形。I。《伊比利亚美洲数学杂志》1, 1（1985），145–201。4[34] Liu, Y. 广义 Boussinesq 方程孤立波的不稳定性。《动力系统与微分方程杂志》5, 3（1993），537–558。1[35] Liu, Y. 广义 Boussinesq 方程解的不稳定性与爆破解。《工业与应用数学学会数学分析杂志》26, 6（1995），1527–1546。1, 2, 21[36] Liu, Y., Ohta, M., and Todorova, G. 非线性克莱因–戈尔登方程和广义 Boussinesq 方程孤立波的强不稳定性。《亨利·庞加莱研究所年刊：非线性分析》24, 4（2007），539–548。1, 3, 21[37] Lizorkin, P. I. 关于$L_{p,\theta}$空间中傅里叶积分的乘子。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》89（1967），269–290。6[38] Mariş, M. 高维中非平稳泡的存在性。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）81, 12（2002），1207–1239。14[39] Payne, L. E., and Sattinger, D. H. 非线性双曲方程的鞍点与不稳定性。《以色列数学杂志》22（1976），273–303。22[40] Pelinovsky, D., and Stepanyants, Y. A. 正色散介质中由二维Boussinesq方程描述的孤立波不稳定性。《实验与理论物理杂志》106（1994），192–206。2[41] Skrzypczak, L. 对称性存在时的函数空间：嵌入的紧性、正则性与函数衰减。载于《函数空间、微分算子与非线性分析：Hans Triebel纪念文集》。Springer，2003，第453–466页。5

[42] Weinstein, M. I. 非线性薛定谔方程与尖锐插值估计。《数学物理通讯》*87*（1983年），567–576。
4[43] Weinstein, M. I. 非线性色散演化方程基态的李雅普诺夫稳定性。《纯粹与应用数学通讯》*39*（1986年），51–67。15