arXiv:2303.02453v1 [math.AG] 4 Mar 2023

模数三元组

布鲁诺·卡恩和宫泽博康

摘要。我们建立了模数三元组理论，以供未来的动机应用使用。

初稿

目录

引言1 1. 模数三元组范畴 5 2. 重要子范畴 18 3. 比较 33 附录 A. 非有效模数 39 参考文献 42

引言

Voevodsky 在 [18]，中发展出的动机理论有一项最重要的结果，即动机上同调群与高阶 Chow 群之间的比较同构。最近，这两个概念在彼此独立的研究中都被推广到了“非 $\mathbb{A}^1$-同伦不变”的领域。一方面，F. Binda 和 S. Saito [2]，将高阶 Chow 群推广为“带模数的高阶 Chow 群”，记作 $\mathrm{CH}^r(X, D, *)$；它们可视为相对 K-群 $K_*(X, D)$ 的循环理论对应物。这里，D 是概形 X 上的有效 Cartier 除子。我们称 (X, D) 为“模对”。另一方面，动机理论已被扩展为“带模数的动机”理论 [10]。其动机是将 Voevodsky 的动机范畴 DM 扩展为另一个三角范畴 MDM，该范畴与一大类非 $\mathbb{A}^1$-不变的

日期：2023年3月7日。2020 年数学主题分类。 14C25、14C20、14C15。关键词和短语。 卡蒂埃除子、模数、动机。第二作者获得 JSPS KAKENHI 资助（21K13783、19K23413）。

引入的层见 [11], 例如所有交换代数群、德拉姆-维特复形等，参见 [12]。

人们自然会期待，沃沃茨基比较定理可以推广为 MDM 的 Hom群与带模数的高阶 Chow 群之间的比较。然而，事实证明这根本行不通。确实，带模数的动机与带模数的高阶 Chow 群具有相反的函子性。带模数的动机相对于一类称为“可容许对应”的态射类具有函子性。可容许对应的一个典型例子 $(X, D) \to (X', D')$ 是由满足 $D \geq f^*D'$的态射 $f\colon X \to X'$ 给出的。另一方面，带模数的高阶 Chow 群（双曲上同调版本）应当相对于第2.5小节中的余可容许对应 $(X, D) \to (X', D')$ 具有函子性；其一个典型例子是由满足 $D \leq f^*D'$ 的态射 $f\colon X \to X'$给出的。根据甲斐亘 [15] 的工作，至少在上述例子中，预期的函子性确实成立。

下面是这一现象的另一个例子。构造沃沃茨基范畴DM的一个关键步骤，是对基域上的所有光滑概形 X，将第一投影 $X \times \mathbf{A}^1 \to X$ 取为可逆态射。在构造MDM时，这一过程被替换为将所有 $(X, D) \otimes \overline{\square} \to (X, D)$ 取为可逆态射，其中 $\overline{\square} = (\mathbf{P}^1, \infty)$，而 $\otimes$ 是模对的张量积。因此，与模对相关联的动机 $M(X, D)$ 满足 $M((X, D) \otimes \overline{\square}) \cong M(X, D)$。另一方面，带模数的高阶 Chow 群满足对偶性质 $\mathrm{CH}^r((X, D) \ *) \cong \mathrm{CH}^r((X, D) \otimes \overline{\square}^\vee, *)$，其中 $\overline{\square}^\vee = (\mathbf{P}^1, -\infty)$。注意，$\overline{\square}^\vee$ 的重数为负。在 [16], 中，第二作者将带模数的高阶 Chow 群的定义推广到由概形 X 和 Cartier 除子 D 构成的对 (X, D)，其中该除子不一定有效；在此基础上证明了这一同构。此结果表明，带模数的动机和带模数的高阶 Chow 群可能通过“改变除子的符号”彼此关联。

本文旨在推广带模数的动机理论，使除子 D 能够改变符号。实现这类推广的一种方式，或许是通过用卡蒂埃除子替换有效 Cartier 除子来扩展该理论：[10] 实际上可以这样做，参见引理 A.5。不过，我们采用了一个更精巧的思路，类似于 F. Binda 的学位论文 [1]中的做法：考虑两个有效 Cartier 除子。因此，我们研究的核心对象是三元组

$$T = (\overline{T}, T^+, T^-),$$

其中 $\overline{T}$是一个概形， T^+、T^-是 有效的 卡蒂埃除子，定义在 $\overline{T}$上。我们称它们为 模数三元组。从直观上说，考虑这样的三元组，相当于考虑一对 $(\overline{T},\ T^+ - T^-)$，正如定义 1.17中的模数条件所示；我们也在命题 A.8中联系了这两种思路。不过，三元组提供的数据使我们能够以更精确、更灵活的方式处理这一理论。在三元组的语境下，“改变符号”体现为“交换除子”。

以下是本文内容的概要：

第 1 节 介绍了模数三元组范畴在多种不同表述下的定义，这些表述沿用了[9]的相应表述。主要范畴记为 **TCor**；与模数对范畴 **MCor**一样，它带有张量结构，并且存在一个到 Voevodsky 的有限对应范畴 **Cor** 的幺半遗忘函子。它还包含**MCor** 作为由条件 $T^- = 0$给出的全子范畴。这里的模数条件比同上引文中的更加复杂，参见定义 1.10和引理 1.12。

第 2 节是本文的核心：它研究了 TCor 的大量子范畴，这些子范畴取决于模数三元组的两个除子 T^+、T^- 之间的关系，以及态射的某些性质。其主要目标是研究包含 MCor $\subset$TCor 在多大程度上具有左伴随或右伴随：这些性质对于未来的（预）层理论可能非常有用。显然，MCor 包含于全子范畴 $\mathrm{T}^{\emptyset}$Cor 中，该子范畴由满足 $T^+ \cap T^- = \emptyset$ 的三元组构成；根据定理 2.18，这一精细包含的两个伴随都存在。此外，根据奇点消解，包含 $\mathrm{T}^{\emptyset}$Cor $\subset$ TCor 具有原左伴随（定理 2.7），因此包含 MCor $\subset$ TCor 也具有原左伴随（定理 2.19）。至于右伴随，如果将范围限制到非全子范畴 $\mathrm{T}^{\mathrm{vvg}}$Cor，则右伴随存在；该子范畴与 TCor 具有相同的对象，但只包含处于“优良位置”的态射，其含义见定义 2.32：参见命题 2.36。

在第 3 节中，我们将 **TCor** 与 F. Ivorra 和 T. Yamazaki 定义的箭图进行比较，见 [7] ，并与 F. Binda 的“模数数据”进行比较，见 [1]: 这些比较效果很好，这表明我们认为这里发展的理论是“正确的”。

在附录中，我们引入了 **NCor** ，这是 **MCor** 的一个更广泛版本，其中涉及的不一定是有效 Cartier 除子，并证明包含映射 **MCor** $\subset$**TCor** 可扩展为满嵌入 **NCor** $\subset$ **TCor**（命题A.8）。这进一步表明，我们认为当前的模数三元组理论是“正确的”。

这篇 43 页的论文仅讨论模数三元组的范畴。预层与层的理论将在未来的工作中发展。

致谢。我们感谢 Federico Binda、Florian Ivorra 和山崎孝雄，就第 3 节进行了非常有启发性的讨论。

约定。

(1) 本文始终固定一个基域 k。我们用 Sch 表示由有限型分离 k-概形构成的范畴，用 Sm 表示其光滑 k-概形组成的全子范畴。(2) 设 $f\colon Y \to X$ 是 Sch 中的一个态射，且 $A \subset X$ 是一个闭子概形。于是，我们将纤维积$A \times_X Y$简记为 $f^{-1}(A)$。(3) 对任意概形 X， X 的正规化是指 X_{red}的正规化，记作 X^N。~(4) 设 $f\colon X \to S$ 是概形之间的一个态射，且 $\pi\colon S \to S$ 是沿某个闭子概形 $Z \hookrightarrow S$ 的膨胀。考虑~沿闭子概形$f^{-1}(Z) = Z \times_S X$对 X 进行的膨胀 $X := \mathrm{Bl}_{f^{-1}(Z)}X \to X$。那么，膨胀的泛性质 ~ ~ ~给出一个唯一态射 $f\colon X \to S$，使得所得方形图交换（见 [5, 推论 7.15]）。我们~称 f 为沿 π 的 f 的严格变换（在 [5], 只有当 f 是闭浸入时，才使用此名称）。注意，若 f 是平坦的，则~ ~有 $X \simeq X \times_S S$。(5) 设 $f\colon Y \to X$ 是 Sch 中的一个态射，且 D 是 X 上的一个卡蒂埃除子。假设卡蒂埃除子的拉回 f^*D 有定义（按 [EGA4-IV, (21.4.2)]中的意义）。那么，为简化记号，我们常将 $D|_Y := f^*D$ 写作简记。

关于卡蒂埃除子的几点事实。设 $f\colon Y \to X$ 是 Sch 中的一个态射，且 $D \subset X$ 是一个卡蒂埃除子。

(1) 若 D 有效且其拉回有定义，则它对应于 Y [上的闭子概形 $D \times_X Y$，参见 EGA4-IV, (21.4.7)]。特别地，采用上述约定，我们有 $f^*(D) = f^{-1}(D)$。(2) 假设满足以下条件之一：(a) Y 是平坦的；或 (b) Y 是既约的，并且对于 Y 的每个不可约分支 Y_i，Y_i 的像 $f(Y_i)$ 不包含于 D 的支撑 $|D|$ 中。那么，拉回 f^*D 有定义：(a) 参见 EGA4-IV, (21.4.5)] ；(b) 参见 [17, 2.2.3] （总结：这是通过以下方式验证的

局部地），或参见 Stacks Project，引理 30.13.13。(3)[1]当 D有效时。

1. 模数三元组范畴

1.1. 模数三元组的定义。

定义 1.1. 在 k 上的一个模数三元组 是一个三元组 $T=(\overline{T},T^+,T^-)$，由以下部分组成：

— 一个概形 $\overline{T}\in$Sch，以及 — $\overline{T}$ 上的两个有效 Cartier 除子 T^+ 和 T^-。

我们称 (T^+,T^-) 是 $\overline{T}$ 上的一个模数结构 。如果$\overline{T}$ 在 k 上适当，则模数三元组T 称为适当。我们定义

$$T^\circ := \overline{T}\setminus T^+,$$

并称其为 T的内部。我们称 T为 $\overline{T}$ 的总体空间。

定义 1.2。模数三元组 T 若满足 $T^\circ\in$ Sm，则称其为内部光滑。模数三元组 T若满足 $T^+\cap T^-=\emptyset$，则称其为不相交。

注1.3。对于任意模数三元组 T，若 T° 既约（例如内部光滑模数三元组），则总体空间 $\overline{T}$ 自动既约。这可用与 [9, 注 1.1.2 (3)], 相同的论证验证；为完整起见，我们在此给出证明。由于问题是局部的，我们可以假设 $\overline{T}$ =Spec(A) 是仿射的，且有效 Cartier 除子 T^+ 是主的。设 $a\in A$ 是生成 T^+的定义理想的一个非零因子。则自然态射 $A\to A[1/a]$ 是单射。由于 $T^\circ=\overline{T}\setminus T^+=$ Spec($A[1/a]$) 是既约的，环 $A[1/a]$ 是既约的。因此， A 也既约。这就证明了断言。

定义 1.4。 设 $T=(\overline{T},T^+,T^-)$ 是一个模数三元组。我们定义一个新的模数三元组，记为 $T^\vee$，其为

$$T^\vee := (\overline{T},T^-,T^+).$$

显然有等式 $(T^\vee)^\vee = T$。注意，通常情况下 $(T^\vee)^\circ \neq T^\circ$。

1.2. 模数条件。 回顾 [8, 引理 A.1]:

引理 1.5。 设 X 是一个概形。设在 X 上给定三个有效 *Cartier* 除子 D_1、D_2 和 E，使得对于每个 $i=1,\ 2$，都有 $E\le D_i$。

那么，我们有：

$$E=D_1\times_X D_2 \quad \textit{iff.} \quad |D_1-E|\cap|D_2-E|=\emptyset.$$

[1] https://stacks.math.columbia.edu/tag/01WQ

注记 1.6。 两个有效 Cartier 除子的“下确界”可能为零，即使 $|D_1| \cap |D_2| \neq \emptyset$: 例如，考虑 $X = \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x_1, x_2])$ 和 $D_i = \{x_i = 0\}$ 的情形。

引理 *1.5*的证明。 将有效卡蒂埃除子 $D_i - E$ 视为 X上的闭子概形，并令

$$Z := (D_1 - E) \times_X (D_2 - E).$$

对于闭子概形 $i\colon V \to X$，令

$$I_V := \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_V).$$

于是，我们有

$$I_{D_1 \times_X D_2} = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

由于 $I_Z = I_{D_1 - E} + I_{D_2 - E} = I_{D_1} \cdot I_E^{-1} + I_{D_2} \cdot I_E^{-1}$，我们有

$$I_Z \cdot I_E = (I_{D_1} \cdot I_E^{-1} + I_{D_2} \cdot I_E^{-1}) \cdot I_E = I_{D_1} + I_{D_2},$$

其中，I_E^{-1} 表示可逆理想层 I_E 的逆。结合上述等式，得到

$$I_Z \cdot I_E = I_{D_1 \times_X D_2}. \tag{1.1}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} |D_1 - E| \cap |D_2 - E| = \emptyset \Leftrightarrow Z = \emptyset \Leftrightarrow I_Z = \mathcal{O}_X \Leftrightarrow^{\dagger} I_{D_1 \times_X D_2} = I_E \\ \Leftrightarrow D_1 \times_X D_2 = E, \end{aligned}$$

其中 $\Leftrightarrow^{\dagger}$ 由（1.1）以及 I_E 可逆这一事实得出。引理 1.5 的证明至此完成。□

定义 1.7。 设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 是一个模数三元组。令 $\pi_T\colon \mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T}) \to \overline{T}$ 为沿闭子概形

$$F_T := T^+ \times_{\overline{T}} T^-,$$

的膨胀，我们称其为 T 的基本轨迹 。记 E_T 为 π 的例外除子，即 $E_T := \pi_T^{-1}(F_T)$。我们设

$$\tilde{T}^+ := \pi_T^* T^+ - E_T, \quad \tilde{T}^- := \pi_T^* T^- - E_T.$$

注意， $\tilde{T}^+$ 和 $\tilde{T}^-$ 是 $\mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T})$ 上的有效卡蒂埃除子。我们将模数三元组 $\mathrm{Bl}(T)$ 定义为

$$\mathbf{Bl}(T) := (\mathbf{Bl}_{F_T}(\overline{T}), \tilde{T}^+, \tilde{T}^-),$$

并称其为 T 的分离 。

注记 1.8。 如果 T^+ 与 T^- 适当相交，那么 $\tilde{T}^-$ 等于 T^-的严格变换。

引理 1.9。对于任意模数三元组 T，我们有 $T^+ \cap T^- = \emptyset$。换言之，$\mathbf{Bl}(T)$ 是不相交的。如果 T 不相交，$\mathbf{Bl}(T) = T$。

证明。第一个断言由引理 1.5得出。第二个断言显然。□

定义 1.10。设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 是一个模数三元组。设 $f: X \to \overline{T}$ 是 Sch 中满足以下条件的态射：

(F) $f^{-1}(F_T)$ 不包含 X. 的任何不可约分支

设 $f\colon X \to \mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T})$ 是 f 沿着 $\pi_T\colon \mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T}) \to \overline{T}$ 的严格变换。若 f 满足相对于 T 的模数条件，则有 $f^{-1}(T^-) = \emptyset$。若浸入 $f\colon V \to \overline{T}$ 满足相对于 T 的模数条件，则简称 V 满足相对于 T 的模数条件。

注记 1.11。(1) 态射 $X \to \overline{T}$ 满足相对于 T 的模数条件，当且仅当对于任意一个视为整概形的不可约分支 V，复合态射 $V \to X \to \overline{T}$ 满足相对于 T 的模数条件。事实上，记 V 为 V 沿着 π_T 的严格变换，则存在自然态射 $p\colon \sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to X$。只需证明 p 是满射。由于 $X \to X$ 是双有理的，复合态射 $\sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to \sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to X$ 的满射性意味着 p 是支配的。但它也是适当的，因为复合态射 $\sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to X \to X$ 等于复合态射 $\sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to \sqcup_{V \in X^{(0)}} V \to X$，而后者是适当的。

(2) 注意，定义 1.10即使有效 Cartier 除子的拉回 $f^*(T^+)$ $f^*(T^-)$ 未定义时仍然有意义。另一方面，如果它们有定义，那么下面的引理 1.12 表明，定义 1.10 意义下的模数条件，可以看作是将经典模数条件（如 [14], [2],[9] 等）推广到相对情形。

引理 1.12. 设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 是一个模数三元组。设 $f\colon X \to \overline{T}$ 是 *Sch* 中的一个态射，使得 $f^{-1}(T^+)$ 和 $f^{-1}(T^-)$ 中均不包含 X 的任何不可约分支（特别地，f 满足定义 *1.10* 的条件 *(F)*）。设 $X^N \to X$ 为正规化，并设 $\nu: X^N \to X \to \overline{T}$ 为复合态射。则以下条件等价：

(a) X^N 上的有效 *Cartier* 除子满足以下不等式：

$$\nu^* T^+ \geq \nu^* T^-.$$

(b) f 满足关于 T 的模数条件。

证明。鉴于注记 1.11 (1) 以及 $X^N = \sqcup_{V \in X^{(0)}} V^N$，~这一事实，我们可以假设 $X = V$ 是整的。令 $f\colon V \to \mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T})$ 为 f 沿 π_T 的严格变换，并令 $\tilde{\nu}\colon \tilde{V}^N \to \tilde{V} \to \mathrm{Bl}_{F_T}(\overline{T})$ 为与正规化态射的复合。注意，适当满射态射 $\tilde{V}^N \to \tilde{V} \to V$ 根据正规化的泛性质诱导出一个适当满射态射 $\tilde{V}^N \to V^N$。根据 [14,引理 2.2], 条件 (a) 等价于 $\tilde{V}^N$ 上的以下有效卡蒂埃除子不等式：

$$\tilde{\nu}^* \pi_T^* T^+ \geq \tilde{\nu}^* \pi_T^* T^-.$$

在两边都加上 $-\tilde{\nu}^* E_T$，等价地可得

$$\tilde{\nu}^* \tilde{T}^+ \geq \tilde{\nu}^* \tilde{T}^-. \tag{1.2}$$

~由引理 1.9，不等式 (1.2) 等价于 $\tilde{\nu}^* T^- = \emptyset$，因此注意到 $\tilde{V}^N \to \tilde{V}$ 是满射，即得条件 (b)。□

引理 *1.13*（分解引理）。设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 是一个模数三元组，并设 $f : X \to \overline{T}$ 和 $g : Y \to \overline{T}$ 是 *Sch* 中满足定义 *1.10* 的条件 *(F)* 的态射。假设 g 经由 f 分解。那么，若 f 满足关于 T 的模数条件，g 也满足该条件。此外，若态射 $Y \to X$ 是适当满射，则逆向蕴含也成立。

证明。第一个断言显然成立，因为根据爆破解的泛性质，g 沿 π_T 的严格变换可经由 f 沿 π_T 的严格变换分解。第二个断言由以下事实推出：适当满射态射 $Y \to X$ 诱导一个适当满射 ~~~

可得 $\eta \in T^+$，从而证明了这一断言。回顾 $T^+ \cap T^- = \emptyset$，我们有 $V \times_{\mathbf{Bl}_{F_T}(\overline{T})} T^- = \emptyset$。□

引理 *1.15*（适当像的模数条件）。设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 是一个模数三元组，且 $f\colon \overline{U} \to \overline{T}$ 是一个适当态射，使有效卡蒂埃除子 $U^+ := f^*T^+$，$U^- := f^*T^-$ 的拉回有定义。设 $U := (\overline{U}, U^+, U^-)$ 是诱导的模数三元组。设 W 是 $\overline{U}$ 的一个整闭子概形，并令 $V := f(W)_{\mathrm{red}}$。那么，V 满足关于 T 的模数条件，当且仅当 W 满足关于 U 的模数条件。

证明。 注意到 $f^{-1}(F_T) = F_U$，我们有

$$V \not\subset F_T \text{ if and only if } W \not\subset F_U.$$

假设这些等价条件成立。

设 $\pi_T\colon T \to T$ 是沿 F_T 对 T 的膨胀，且 $\pi_U\colon U \to \overline{U}$ 是沿 F_U 对 $\overline{U}$ 的膨胀。爆破解的泛性质蕴含存在一个态射 $f\colon U \to T$，使下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{T} \\ {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_T} \\ \overline{U} & \xrightarrow{f} & \overline{T}. \end{array}$$

根据上述假设，我们可以分别考虑 V 和 W 的严格变换 $V \subset T$ 和 $W \subset U$。

断言 1.16. 令 $T^- := \pi_T^* T^- - E_T$ 和 $U^- := \pi_U^* U^- - E_U$。那么，我们在 U 上有以下有效 Cartier 除子等式：

$$\tilde{f}^* \tilde{T}^- = \tilde{U}^-.$$

证明。 上方的交换图表明

$$\tilde{f}^* \pi_T^* T^- = \pi_U^* f^* T^- = \pi_U^* U^-,$$
$$\tilde{f}^* E_T = \tilde{f}^{-1} \pi_T^{-1}(F_T) = \pi_U^{-1} f^{-1}(F_T) = \pi_U^{-1} F_U = E_U,$$

这里的记号根据约定（4）是有意义的。

至此，断言得证。 □

我们回到引理 1.15 的证明。我们需要证明

$$\tilde{V} \cap \tilde{T}^- = \emptyset \text{ if and only if } \tilde{W} \cap \tilde{U}^- = \emptyset.$$

“仅当”部分由断言 1.16 立即可得。假设 $W \cap U^- = \emptyset$。那么，我们有

$$\emptyset = \tilde{f}(\tilde{W} \cap \tilde{U}^-) = \tilde{f}(\tilde{W} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{T}^-)) = \tilde{f}(\tilde{W}) \cap \tilde{T}^-$$

由（集合论意义下的）投影公式及断言 1.16可知。由于适当满射态射 f 诱导出一个适当满射态射 $W \to V$，我们得到 $V \cap T^- = \emptyset$。□

1.3. **模数三元组的TCor 范畴。**

定义 1.17. 设 S、T 为两个内部光滑的模数三元组。一个从 S 到 T 的初等模数对应，是指一个初等有限对应 $V \in \mathrm{Cor}(S^\circ, T^\circ)$，其在 $\overline{S} \times \overline{T}$ 中的闭包 $\overline{V}$ 满足以下模数条件

$$S \otimes T^\vee = (\overline{S} \times \overline{T}, S^+ \times \overline{T} + \overline{S} \times T^-, S^- \times \overline{T} + \overline{S} \times T^+),$$

且在 $\overline{S}$ 上适当。我们记 $\mathrm{TCor}(S, T)$ 为以从 S 到 T的初等模数对应为基的自由阿贝尔群。

注 1.18. 设 $V \in \mathrm{Cor}(S^\circ, T^\circ)$ 是一个初等有限对应。设 $\overline{V}$ 是 V 在 $\overline{S} \times \overline{T}$ 中的闭包，并将其视为一个整k-概形。则有效卡蒂埃除子的拉回

$$S^+|_{\overline{V}}, \quad S^-|_{\overline{V}}, \quad T^+|_{\overline{V}}$$

已定义。事实上，由于 $\overline{V}$ 在 $\overline{S}$上支配，其像不包含于 $|S^\pm|$中。由于 $V \subset S^\circ \times T^\circ$, $\overline{V} \not\subset \overline{S} \times |T^+|$。

需要指出，拉回 $T^-|_{\overline{V}}$未必有定义；等价地，拉回 $(T^- \cap T^\circ)|_V$未必有定义。然而，在这种情况下，根据下面的引理，模数条件总是满足的。

引理 1.19。 设 S 和 T 是内部光滑的模数三元组。设 $V \in \mathbf{Cor}(S^\circ, T^\circ)$ 是一个初等有限对应，其闭包在 $\overline{S}$上适当，并假设 V在 T° 中的投影包含于 $T^- \cap T^\circ$ （或等价地，包含于 T^-）。则 $V \in \mathbf{TCor}(S, T)$。

证明。 设 $\overline{V}$是 V在 $\overline{S} \times \overline{T} = \overline{S \otimes T^\vee}$中的闭包。首先，我们检查$\overline{V}$不包含于 $F_{S \otimes T^\vee}$。设 η是 V的泛点。由于 $\eta \in S^\circ \times T^\circ$，只需证明

$$\eta \notin F^\circ_{S \otimes T^\vee} := F_{S \otimes T^\vee} \cap S^\circ \times T^\circ.$$

右侧可以按如下方式计算（作为一个集合）

$$F^\circ_{S \otimes T^\vee} = (\overline{S} \times T^-) \cap (S^- \times \overline{T}) \cap (S^\circ \times T^\circ).$$

因此，如果 $\eta \in F^{\circ}_{S\otimes T^{\vee}}$，那么我们有 $\eta \in S^{-}\times\overline{T}$，这与 $\overline{V}$支配 $\overline{S}$ 的事实矛盾。因此，我们得出结论： $\eta \notin F_{S\otimes T^{\vee}}$，如所期望的那样。

根据引理 1.14，现在只需证明 $\overline{V} \subset (S\otimes T^{\vee})^{+}$。但是

$$\overline{V} \subset \overline{S}\times T^{-} \subset (S^{+}\times\overline{T} + \overline{S}\times T^{-}) = (S\otimes T^{\vee})^{+}.$$

□

引理 1.20。 设 S, T 是两个（内部光滑的）模数三元组，且 $V \in \mathbf{TCor}(S, T)$ 是初等的。那么

$$V \cap (|S^{-}|\times\overline{T}) \subset \overline{S}\times|T^{-}|.$$

此外，若 V 在 $\overline{T}$ 中的像不包含于 T^{-}，则有

$$T^{-}|_{V^N} \geq S^{-}|_{V^N}.$$

证明。 若 V 在 $\overline{T}$ 中的像包含于 T^{-}，则第一个断言显然成立。反设不然。那么，根据引理 1.12，模数条件意味着

$$S^{+}|_{\overline{V}^N} + T^{-}|_{\overline{V}^N} \geq S^{-}|_{\overline{V}^N} + T^{+}|_{\overline{V}^N},$$

其中 $\overline{V}^N$ 是 $\overline{V}$的正规化。因此，记 V^N 为 V的正规化，我们有

$$T^{-}|_{V^N} \geq S^{-}|_{V^N}.$$

这就证明了第二个断言。由于自然态射 $V^N \to V$ 是满射，第一个断言便得证。□

1.3.1. 复合。

命题 1.21. 设 T_1, T_2, T_3 为三个模数三元组，且 $\alpha : T_1 \to T_2$ 和 $\beta : T_2 \to T_3$ 为模对应。注意，根据定义，有 $\alpha \in \mathbf{Cor}(T_1^{\circ}, T_2^{\circ})$ 和 $\beta \in \mathbf{Cor}(T_2^{\circ}, T_3^{\circ})$。于是，有限对应 $\mathbf{Cor}(T_1^{\circ}, T_3^{\circ})$ 定义了一个模对应 $T_1 \to T_3$。

证明。 显然，我们可以假设 α 和 β 是初等模数对应。设 γ 是 $\beta\circ\alpha$ 的任意一个不可约分支。只需证明 γ 定义了一个模对应 $T_1 \to T_3$。设 $\overline{\alpha}$、 $\overline{\beta}$和 $\overline{\gamma}$分别是 $\overline{T}_1\times\overline{T}_2$、 $\overline{T}_2\times\overline{T}_3$和 $\overline{T}_1\times\overline{T}_3$中的闭包。

步骤 1. 首先，我们证明 $\overline{\gamma}$ 在 $\overline{T}_1$ 上是适当的。由于投影 $T_1^{\circ}\times T_2^{\circ}\times T_3^{\circ} \to T_1^{\circ}\times T_3^{\circ}$ 诱导了一个满射 $|\alpha\times T_3^{\circ} \cap T_1^{\circ}\times\beta| \to |\beta\circ\alpha|$，因此存在 $\alpha\times T_3^{\circ} \cap T_1^{\circ}\times\beta$ 的一个不可约分支 γ'，其泛点位于 γ 的泛点之上。令 $\overline{\gamma'}$ 为

$\underline{\gamma'}$ 在 $\overline{T}_1 \times \overline{T}_2 \times \overline{T}_3$ 中。由于 $\overline{\alpha}$ 在 $\overline{T}_1$ 上是适当的，$\overline{\gamma'}$ 在 $T_1 \times \overline{T}_3$ 上也适当，因此存在一个自然的适当满射态射 $\overline{\gamma'} \to \underline{\overline{\gamma}}$。此外，由于 $\overline{\beta}$ 在 $\overline{T}_2$ 上是适当的，$\overline{\gamma'}$ 在 $\overline{\alpha} \subset \overline{T}_1 \times T_2$ 上也适当，因此 $\overline{\gamma'}$ 在 $\overline{T}_1$ 上适当。特别地，$\overline{\gamma}$ 在 $\overline{T}_1$ 上适当。

步骤 2. 我们证明 $\gamma \in \mathbf{TCor}(T_1, \underline{T_3})$。根据 **步骤 1**，只需证明 $\overline{\gamma}$ 满足关于 $T_1 \otimes T_3^{\vee}$ 的模数条件。若 γ 包含在 $|T_3^-|$ 的纤维中，则由引理 1.19 可得结论。

断言 1.22. 假设 γ 不包含在 $|T_3^-|$ 的纤维中。则以下断言成立：

(a) α 不包含在 $|T_2^-|$ 的纤维中。
(b) β 不包含在 $|T_3^-|$ 的纤维中。
(c) 自然态射 $\gamma' \to \alpha$ 是适当满射，其中 γ' 如**步骤 1**所述，是 $\alpha \times T_3^\circ \cap T_1^\circ \times \beta$ 的一个不可约分支，且位于 γ 之上。特别地，γ' 不包含在 $|T_2^-|$ 的纤维中。

证明。（a）：假设 $\alpha \subset \overline{T}_1 \times T_2^-$。根据引理 1.20，我们有 $\beta \cap T_2^- \times \overline{T}_3 \subset \overline{T}_2 \times T_3^-$。因此，

$$\alpha \times \overline{T}_3 \cap \overline{T}_1 \times \beta \subset (\overline{T}_1 \times T_2^- \times \overline{T}_3) \cap (\overline{T}_1 \times \beta) \subset \overline{T}_1 \times T_2^- \times T_3^-$$

因此

$$\overline{\alpha \times T_3^\circ \cap T_1^\circ \times \beta} \subset \overline{T}_1 \times \overline{T}_2 \times T_3^- .$$

这意味着 $\overline{\gamma}$ 包含于 $\overline{T}_1 \times T_3^-$ 中，这与关于 γ 的假设相矛盾。

（b）：假设 $\beta \subset \overline{T}_2 \times T_3^-$。那么，我们有 $\overline{\alpha \times T_3^\circ \cap T_1^\circ \times \beta} \subset \overline{T}_2 \times \overline{T}_2 \times T_3^-$，因此得到同样的矛盾。

（c）：注意，投影 $T_1^\circ \times T_2^\circ \times T_3^\circ \to T_1^\circ \times T_2^\circ$ 诱导出一个态射 $\gamma' \to \alpha$。由于 α 在 T_1° 的某个不可约分支上有限，γ' 在 T_1° 的同一个分支上是适当的。因此，$\gamma' \to \alpha$ 是适当的。只需证明 $\gamma' \to \alpha$ 是支配的。设 η 是 γ' 的泛点。由于 $\gamma' \to \gamma$ 是满射，它位于 T_1° 的某个不可约分支的泛点之上。设 ξ 是 η 在 α 中的像。注意，ξ 位于 T_1° 的某个不可约分支的泛点之上。由于 α 不可约且 $\alpha \to T_1^\circ$ 有限，ξ 必定是 α 的泛点。这表明 $\gamma' \to \alpha$ 是支配的，从而证明了第一个断言。最后，我们证明第二个断言。如果 $\gamma' \subset \overline{T}_1 \times |T_2^-| \times \overline{T}_3$，则根据 $\gamma' \to \alpha$ 的满射性，我们有 $\alpha \subset \overline{T}_1 \times |T_2^-|$，这与（a）相矛盾。

至此，命题 1.22 的证明完成。 □

鉴于断言 1.22 和注 1.18，有效 Cartier 除子的拉回

$$T_1^{\pm}|_{\overline{\alpha}},\ T_2^{\pm}|_{\overline{\alpha}},\ T_2^{\pm}|_{\overline{\beta}},\ T_3^{\pm}|_{\overline{\beta}},\ T_1^{\pm}|_{\overline{\gamma}},\ T_3^{\pm}|_{\overline{\gamma}},\ T_1^{\pm}|_{\overline{\gamma'}},\ T_2^{\pm}|_{\overline{\gamma'}}\ T_3^{\pm}|_{\overline{\gamma'}}$$

都已定义。

由于 $\gamma' \to \alpha$ 由断言 1.22(c) 可知是满射（特别是支配的），因此它诱导出一个态射 $\overline{\gamma}'^N \to \overline{\alpha}^N$。由于 $\alpha \in \mathbf{TCor}(T_1, T_2)$，我们有

$$T_1^+|_{\overline{\alpha}^N} + T_2^-|_{\overline{\alpha}^N} \geq T_1^-|_{\overline{\alpha}^N} + T_2^+|_{\overline{\alpha}^N},$$

这意味着

$$T_1^+|_{\overline{\gamma}'^N} + T_2^-|_{\overline{\gamma}'^N} \geq T_1^-|_{\overline{\gamma}'^N} + T_2^+|_{\overline{\gamma}'^N}. \tag{1.3}$$

注意，上述不等式中出现的所有有效卡蒂埃除子的拉回都有定义。

令 γ_0 为 γ' 在投影 $T_1^\circ \times T_2^\circ \times T_3^\circ \to T_2^\circ \times T_3^\circ$ 下的像。显然，我们有 $\gamma_0 \subset \beta$。令 $\overline{\gamma}_0$ 为 γ_0 在 $T_2 \times T_3$ 中的闭包。于是，$\overline{\gamma}_0$ 不包含在 $|T_2|$ 和 $|T_3|$ 的纤维中，因为根据断言 1.22，γ' 也具有相同性质。由于 β 满足 $T_2 \otimes T_3^\vee$ 的模数条件，根据引理 γ_0 1.13，γ_0 也满足该条件。因此，引理 1.12 推出

$$T_2^+|_{\overline{\gamma}_0^N} + T_3^-|_{\overline{\gamma}_0^N} \geq T_2^-|_{\overline{\gamma}_0^N} + T_3^+|_{\overline{\gamma}_0^N}.$$

注意到我们有一个自然态射 $\overline{\gamma}'^N \to \overline{\gamma}_0^N$，于是得到

$$T_2^+|_{\overline{\gamma}'^N} + T_3^-|_{\overline{\gamma}'^N} \geq T_2^-|_{\overline{\gamma}'^N} + T_3^+|_{\overline{\gamma}'^N}. \tag{1.4}$$

结合（1.3）与（1.4），可得

$$T_1^+|_{\overline{\gamma}'^N} + T_3^-|_{\overline{\gamma}'^N} \geq T_1^-|_{\overline{\gamma}'^N} + T_3^+|_{\overline{\gamma}'^N}. \tag{1.5}$$

回顾一下，我们在**步骤 1** 中已证明，自然映射 $\overline{\gamma}' \to \overline{\gamma}$ 是适当满射。这诱导出一个适当满射态射 $\overline{\gamma}'^N \to \overline{\gamma}^N$。因此，由 [14, 引理 2.2], 不等式（1.5）可推出

$$T_1^+|_{\overline{\gamma}^N} + T_3^-|_{\overline{\gamma}^N} \geq T_1^-|_{\overline{\gamma}'^N} + T_3^+|_{\overline{\gamma}^N}.$$

这表明 $\gamma \in \mathbf{TCor}(T_1, T_3)$，从而完成了命题1.21的证明。□

定义 1.23。记**TCor**为由 k 上的内部光滑模数三元组作为对象、态射如定义1.17所述的范畴。**TCor**中的复合由命题1.21保证良定义。

存在一个显然的遗忘忠实函子

$$\underline{\omega} : \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor} \to \mathbf{Cor} \tag{1.6}$$

将 T 映射到 T°，并将对应映射到自身。

例 1.24。设 $T = (\overline{T}, T^+, T^-) \in$ TCor，且设 $D \subset \overline{T}$ 为一个有效 Cartier 除子。TCor 中存在一个自然态射

$$(\overline{T}, T^+ + D, T^- + D) \to (\overline{T}, T^+, T^-)$$

当且仅当 $|D| \subseteq |T^+|$ 时，它是一个同构。

例 1.25. 设 $T \in \mathbf{TCor}$。将 $\overline{T} = \bigcup_i \overline{T}_i$ 写成不可约分支的并：于是 $T^\circ = \coprod_i T_i^\circ$，其中 $T_i^\circ = T^\circ \cap \overline{T}_i$。对每个 i，定义一个模对 $T_i = (T_i, T^+|_{\overline{T}_i}, T^-|_{\overline{T}_i})$。注意，除子的拉回有定义，因为对于任意 i，$\overline{T}_i$ 都不包含在 $|T^+| \cup |T^-|$ 中。于是典范映射

$$\bigoplus_i T_i \to T,$$

由有限态射 $\sqcup_i \overline{T}_i \to \overline{T}$ 诱导，是 $\mathbf{TCor}$ 中的一个同构（事实上，在子范畴 $\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 中，该子范畴将于 §1.5 中介绍）。

命题 1.26。 范畴 $\mathbf{TCor}$ 具有一个对称幺半结构，使得该双函子

$$- \otimes - : \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor} \times \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor} \to \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}$$

在对象上的定义如下。对于 S，$T \in \mathbf{TCor}$，张量积 $S \otimes T$ 由下式给出

$$S \otimes T := (\overline{S} \times \overline{T}, S^+ \times \overline{T} + \overline{S} \times T^+, S^- \times \overline{T} + \overline{S} \times T^-).$$

单位对象由下式给出

$$\mathbb{1} := (\mathrm{Spec}(k), \emptyset, \emptyset).$$

函子 $\underline{\omega}$（见 (1.6)）是对称幺半的。

证明。 显然，$\underline{\omega}(S \otimes T) = \underline{\omega}(S) \times \underline{\omega}(T)$。设 $S_1, S_2, T_1, T_2 \in \mathbf{TCor}$ 和 $\alpha \in \mathbf{TCor}(S_1, T_1)$，$\beta \in \mathbf{TCor}(S_2, T_2)$ 是两个模数对应。我们必须证明 $\alpha \otimes \beta \in \mathbf{Cor}(S_1^\circ \times S_2^\circ, T_1^\circ \times T_2^\circ)$ 属于 $\mathbf{TCor}(S_1 \otimes S_2, T_1 \otimes T_2)$。由于

$$\alpha \otimes \beta = \alpha \otimes 1 \circ 1 \otimes \beta$$

根据对称性，只需检查对于任意 $S \in \mathbf{TCor}$，$S \otimes -$ 是 $\mathbf{TCor}$ 上的一个自函子。

设 $\alpha : \overline{T_1} \to T_2$ be 是 $\mathbf{TCor}$ 中的一个态射。由于 $\alpha \in \mathbf{Cor}(T_1^\circ, T_2^\circ)$，它诱导出一个态射 $\beta := S^\circ \times \alpha \in \mathbf{Cor}(S^\circ \times T_1^\circ, S^\circ \times T_2^\circ)$。注意到 $(S \otimes T_i)^\circ = S^\circ \times T_i^\circ$，只需验证 $\beta \in \mathbf{TCor}(S \otimes T_1, S \otimes T_2)$。不失一般性，我们可以假设 α 是一个整循环。在这种情况下，β 也是整的。首先，假设 α 在 T_2° 中的像包含于 T_2^-，这等价于说 β 在 $S^\circ \times T_2^\circ$ 中的像包含于 $\overline{S} \times T_2^-$。于是，特别地，$\beta$ 的像包含于 $(S \otimes T_2)^-$。因此，由引理 1.19 可知 $\alpha \in \mathbf{TCor}(S \otimes T_1, S \otimes T_2)$。接下来，假设 α 在 T_2° 中的像不包含于 T_2^-。那么，β 在 $S^\circ \times T_2^\circ$ 中的像不包含于 $\overline{S} \times T_2^-$。因此，令 β^N 为 β 在 $(\overline{S} \times \overline{T}_1) \times (\overline{S} \times \overline{T}_2)$ 中的闭包 $\overline{\beta}$ 的正规化，则拉回到 $\overline{\beta}$ 上的所有有效

卡蒂埃除子 $S^{\pm}, T_1^{\pm}, T_2^{\pm}$已定义。根据$\alpha$上的模数条件，并注意到存在一个优势态射 $\overline{\beta}^N \to \overline{\alpha}^N$，我们得到

$$T_1^+|_{\overline{\beta}^N} + T_2^-|_{\overline{\beta}^N} \geq T_1^-|_{\overline{\beta}^N} + T_2^+|_{\overline{\beta}^N}.$$

在不等式两边加上 $S^+|_{\overline{\beta}^N}+$和 $S^-|_{\overline{\beta}^N}+$后，我们得到

$$(S^+|_{\overline{\beta}^N}+T_1^+|_{\overline{\beta}^N})+(S^-|_{\overline{\beta}^N}+T_2^-|_{\overline{\beta}^N}) \geq (S^-|_{\overline{\beta}^N}+T_1^-|_{\overline{\beta}^N})+(S^+|_{\overline{\beta}^N}+T_2^+|_{\overline{\beta}^N}),$$

这意味着 $\beta \in \mathbf{TCor}(S \otimes T_1, S \otimes T_2)$。

最后，我们把结合约束和交换约束的定义，以及验证它们由模对应给出的工作留给读者。□

1.4. **范畴TSm**。

定义 1.27。令 TSm 为 TCor 的子范畴，它们具有相同的对象，并且对于任意 $S, T \in \mathbf{TCor}$，集合 $\mathbf{TSm}(S,T)$ 由那些图属于 $\mathbf{TCor}(S,T)$ 的概形态射 $S^\circ \to T^\circ$ 构成。

1.5. **范畴$\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 和 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$**。

定义 1.28. </style}令 $\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 为 TCor 的子范畴，它具有相同的对象，并且对于任意 $S, T \in \mathbf{TCor}$，我们有

$$\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}(S,T) := \left\{ \alpha \in \mathbf{TCor}(S,T) \middle| \begin{array}{l} \text{For any component } V \text{ of } \alpha, \\ \text{the closure of } V \text{ in } \overline{S} \times \overline{T} \text{ is} \\ \text{finite over } \overline{T} \end{array} \right\}.$$

此外，我们定义 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 为 TCor 的子范畴，它具有相同的对象，并且对于任意 $S, T \in \mathbf{TCor}$，我们有

$$\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}(S,T) := \left\{ f \in \mathbf{TSm}(S,T) \middle| \begin{array}{l} f \text{ extends to a morphism of} \\ \text{schemes } \bar{f} : \overline{S} \to \overline{T}. \end{array} \right\}.$$

在此情况下，假设 S 正规，则模数条件可以写为

$$f(S - |S^+|) \subseteq |T^-| \text{ or } S^+ + \bar{f}^* T^- \geq S^- + \bar{f}^* T^+. \tag{1.7}$$

注意，对于任意 $S, T \in \mathbf{TCor}$，若 $\overline{S}$ 正规，则有

$$\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}(S,T) = \mathbf{TSm}(S,T) \cap \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}(S,T)$$

根据扎里斯基连通性定理。

注记 1.29。我们可以像命题 1.21 的证明中的步骤 1 那样，验证有限性条件在复合下保持不变。因此，$\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 和$\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 确实是子范畴。

定义 1.30。TSm 中的态射 $f: S \to T$ 若 S° 的任一连通分支支配 T° 的某个连通分支，则称其为支配的 。TSm 中的态射 $f: S \to T^{\mathrm{fin}}$ 若 f^*T^- 有定义，且满足 $S^+ = f^*T^+$ 和 $S^- = f^*T^-$，则称其为极小的 。

备注 1.31. (1) 极小态射的复合仍然是极小的，依据 [EGA4-IV, (21.4.4)]。

(2) 若 f 是极小态射，则有 $S^+ - S^- = f^*T^+ - f^*T^-$。但是逆命题一般不成立。

1.6. **局部化函子** $b: \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}} \to \mathbf{TCor}$。

定义 1.32. 在 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 中定义一类态射 Σ^{fin}，使得

$$\Sigma^{\mathrm{fin}} := \left\{ (f: S \to T) \in \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Sm}^{\mathrm{fin}} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ is minimal, } f: \overline{S} \to \overline{T} \text{ is} \\ \text{proper and } f^\circ: S^\circ \to T^\circ \text{ is} \\ \text{the identity.} \end{array} \right\}.$$

命题 1.33。

(a) 类 Σ_{fin} 在**TCor**和 **TSm**中具有右分式演算。(b) 包含函子 $b: \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}} \to \mathbf{TCor}$ 诱导一个范畴等价。(c) 包含函子 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}} \to \mathbf{TSm}$ 诱导一个范畴等价

$$\Sigma_{\mathrm{fin}}^{-1}\underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}\,.$$

$$\Sigma_{\mathrm{fin}}^{-1}\underline{\mathbf{T}}\mathbf{Sm}^{\mathrm{fin}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Sm}.$$

证明与 [10, 命题 1.10 的证明相同。4], 只需将其中的一个模数替换为两个模数，故略去不证。

1.7. **可方化态射**。回顾：

定义 1.34 ([SGA3，IV.1.4.0])。范畴 $f: S \to T$ 中的一个态射 $\mathcal{C}$ 称为可方化的，如果对于任意态射 $T' \to T$，纤维积 $S \times_T T'$ 在 $\mathcal{C}$ 中可表示。

命题 1.35。$\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 中的任意极小态射 $f: S \to T$，若 $f^\circ: S^\circ \to T^\circ$ 光滑，则在 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 中可方化。

证明。其思路与 [9, 命题 1.10。7], 相同，但由于存在两个模数，我们需要稍作展开。

设 $g: T_1 \to T$ 是 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 中的态射。考虑模数三元组

$$S_1 := (\overline{S} \times_{\overline{T}} \overline{T}_1, \overline{S} \times_{\overline{T}} T_1^+, \overline{S} \times_{\overline{T}} T_1^-).$$

那么，内部 S_1°等于 $S^\circ \times_{T^\circ} T_1^\circ$，由于 f°： $S^\circ \to T^\circ$ 光滑，因此它是光滑的。事实上，我们有

$$S_1^\circ = \overline{S} \times_{\overline{T}} T_1^\circ = (\overline{S} \times_{\overline{T}} T^\circ) \times_{T^\circ} T_1^\circ = S^\circ \times_{T^\circ} T_1^\circ,$$

其中，最后一个等式成立是因为根据f的极小性有 $S^+ = f^*T^+$。因此，我们有 $S_1 \in \mathbf{TCor}$。此外，我们在 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$中得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{g_1} & S \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T_1 & \xrightarrow{g} & T, \end{array}$$

其中， f_1 和 g_1 分别由投影 $\overline{S}_1 \to \overline{T}_1$ 和 $\overline{S}_1 \to \overline{S}$诱导。事实上，根据 S_1的定义， f_1 是极小的。为证明 g_1的容许性，我们分两种情况讨论。首先，假设 g_1 的像包含于 $|S_1^-|$中。那么， g_1 满足模数条件。接下来，假设 g_1 的像不包含于 $|S^-|$中。由于根据 f的极小性有 $S^- = f^*T^-$，这意味着 $f \circ g_1 = g \circ f_1$ 的像不包含于 T^-中。特别地，g的像不包含于 T^-中。因此， g 的容许性意味着

$$T_1^+|_{\overline{T}_1^N} - T_1^-|_{\overline{T}_1^N} \geq g^*T^+|_{\overline{T}_1^N} - g^*T^-|_{\overline{T}_1^N},$$

其中 $\overline{T}_1^N$是 $\overline{T}^1$的正规化。注意到存在一个典范态射 $\overline{S}_1^N \to \overline{T}_1^N$，我们得到

$$T_1^+|_{\overline{S}_1^N} - T_1^-|_{\overline{S}_1^N} \geq g^*T^+|_{\overline{S}_1^N} - g^*T^-|_{\overline{S}_1^N}.$$

由 f_1 和 f的极小性，我们得到

$$T_1^\pm|_{\overline{S}_1^N} = S_1^\pm|_{\overline{S}_1^N}, \quad T^\pm|_{\overline{S}_1^N} = S^\pm|_{\overline{S}_1^N}.$$

因此，我们有

$$S_1^+|_{\overline{S}_1^N} - S_1^-|_{\overline{S}_1^N} \geq g^*S^+|_{\overline{S}_1^N} - g^*S^-|_{\overline{S}_1^N},$$

这表明 g_1 是可容许的。

现在，我们证明 S_1 表示纤维积 $S \times_T T_1$。给定 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$中的一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{a} & S \\ {\scriptstyle b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T_1 & \xrightarrow{g} & T. \end{array}$$

因此，底层概形图诱导出唯一态射c： $\overline{U} \to \overline{S} \times_{\overline{T}} \overline{T}_1$，使得所得图表可交换。它

只需证明 c定义了一个可容许态射 $U \to S_1$。如果 c 的像包含于 $S_1^- = \overline{S} \times_{\overline{T}} T^-$中，那么根据引理 1.19即可完成证明。假设 c 的像不包含于 $S_1^- = \overline{S} \times_{\overline{T}} T^-$中。那么， b的像也不包含于 T_1^-中。在这种情况下， b 的容许性意味着

$$U^+|_{\overline{U}^N} - U^-|_{\overline{U}^N} \geq T_1^+|_{\overline{U}^N} - T_1^-|_{\overline{U}^N},$$

其中， $\overline{U}^N$是 $\overline{U}$的正规化。注意到 $S_1^\pm|_{\overline{U}^N} = T_1^\pm|_{\overline{U}^N}$，我们得到

$$U^+|_{\overline{U}^N} - U^-|_{\overline{U}^N} \geq S_1^+|_{\overline{U}^N} - S_1^-|_{\overline{U}^N},$$

这表明 c 是可容许的。 □

2. 重要子范畴

在本节中，我们介绍若干有趣的范畴，并研究它们与 TCor 的关系。

—

2.1. **适当模数三元组**。

定义 2.1。 定义 TCor $\subset$ TCor 为由满足 $\overline{T}$ 在 k上是适当的那些 $T \in$ TCor 构成的全子范畴。令τ : TCor $\to$ TCor 为包含函子，由平凡理由它是~~玄~~半的。

本小节旨在证明以下结果。

定理 2.2。 函子 τ 具有一个原左伴随 $\tau^!$，其由以下公式给出：

$$\tau^!(T) := \text{“}\varprojlim\text{”}_{(T \to T_1) \in \mathbf{Comp}(T)} T_1,$$

其中 $\mathbf{Comp}(T)$ 的定义如下。

定义 2.3。对于任意 $T \in$ TCor，定义 Comp(T) 为如下范畴：其对象是由偶对 (T_1, j) 构成的，其中 $T_1 \in$ TCor 配备了一个稠密开浸入 j: $\overline{T} \hookrightarrow \overline{T}_1$，使得对于 $\overline{T}_1$ 上满足 $\overline{T}_1 \setminus |C| = j(\overline{T})$ 的某些有效 Cartier 除子 T_0^+、C，有 $T_1^+ = T_0^+ + C$，且 j 诱导出 TSm 中的一个极小态射 j: $T \to T_1$ （关于极小性，参见定义 1.30）。对于 $T_1, T_2 \in$ Comp(T)，态射集合定义为

$$\mathbf{Comp}(T)(T_1, T_2) := \{\alpha \in \mathbf{TCor}(T_1, T_2) \mid j_{T_2} = \alpha \circ j_{T_1}\}.$$

注意到 Comp(T) 是一个本质小范畴。

命题 2.4。 对于任意 $T \in \mathbf{TCor}$，范畴 $\mathbf{Comp}(T)$ 非空、余滤且有序。更准确地说，对于任意 $(j_{T_1} : T \to T_1)$，$(j_{T_2} : T \to T_2) \in \mathbf{Comp}(T)$，我们总能找到一个 $(j_{T_3} : T \to T_3) \in \mathbf{Comp}(T)$ 对象支配这些对象，使得这些态射 $T_3 \to T_1$ 和 $T_3 \to T_2$ 来自 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$，并且满足以下条件：

($\star$) $\overline{T}_3 \setminus j_{T_3}(\overline{T})$ 是 $\overline{T}_3$ 上一个有效卡蒂埃除子的支撑。

证明。 这与 [9, 引理 1.8。2], 的证明类似，但稍微复杂一些。我们首先证明 $\mathbf{Comp}(T)$ 非空且有序。取任意稠密开浸入 $j_0 \colon \overline{T} \to \overline{T}_0$，其中 $\overline{T}_0$ 在 k上适当。令 $T_0^{\pm}$为 $T^{\pm}$的概形论闭包。考虑以下一系列爆炸

$$\pi : T_1 := \overline{T}''' \xrightarrow{\pi_C} \overline{T}'' \xrightarrow{\pi_-} \overline{T}' \xrightarrow{\pi_+} \overline{T}_0,$$

其中 π_+ 是沿 T_0^+的爆炸， π_- 是沿$\pi_+^{-1}(T_0^-)$的爆炸，而 π_C是沿$(\pi_+ \circ \pi_0)^{-1}(\overline{T}_0 \setminus j_0(\overline{T}))$的爆炸。于是， π在$\overline{T}$上是同构，因此映射 j_0 可提升为稠密开浸入 $j_1 : \overline{T} \to \overline{T}_1$。根据构造， $T_1^{\pm} := \pi^* T_0^{\pm}$是 $\overline{T}_1$上的有效卡蒂埃除子。此外， $C := \pi^{-1}(\overline{T}_0 \setminus j_0(T))$是一个包含于 T_1^+中的有效卡蒂埃除子。令 $T_1 := (\overline{T}_1, T_1^+, T_1^-)$。于是， j_1定义了一个极小态射$T \to T_1$，它在内部上诱导恒等映射。因此，我们得到了 $\mathsf{Comp}(T)$ 中的一个对象（$T \to T_1$）。$\mathsf{Comp}(T)$ 中所有态射在内部上均为恒等映射，这一事实意味着 $\mathsf{Comp}(T)$ 是有序的。

我们证明其余断言。任取 $(j_{T_1} : T \to T_1)$、$(j_{T_2} : T \to T_2) \in \mathsf{Comp}(T)$。于是，总体空间 $\overline{T}_1$和 $\overline{T}_2$双有理，并且以 $\overline{T}$为公共稠密开子集。令 Γ 为双有理映射 $\overline{T}_1 \dashrightarrow \overline{T}_2$的图。注意， j_{T_1} 和 j_{T_2} 都提升为公共稠密浸入 $j : \overline{T} \to \Gamma$。设 $Z := (\Gamma \setminus j(\overline{T}))_{\mathrm{red}}$，并考虑沿 Z 对 Γ 的膨胀 $T_3 := \pi : \mathrm{Bl}_Z(\Gamma) \to \Gamma$。于是， j 提升为稠密开浸入 $j_{T_3} : \overline{T} \to \overline{T}_3$。令 $p : \overline{T}_3 \to \overline{T}_1$为自然投影，并令 E 为例外除子，即 $E = \pi^{-1}(Z)$。取正整数 n，并设

$$T_3 := (\overline{T}_3, p^* T_1^+ + nE, p^* T_1^-).$$

那么我们有 $\overline{T}_3 \setminus j_{T_3}(\overline{T}) = p^{-1}(\overline{T}_1 \setminus j_{T_1}(\overline{T}))$，它是一个有效 Cartier 除子的支撑。由于 $j_{T_3}^*(p^* T_1^+ + nE) = T^+$且 $j_{T_3}^*(p^* T_1^-) = T^-$，根据 j_{T_1}的极小性，我们有 $(T \to T_3) \in \mathsf{Comp}(T)$。显然，投影 p 给出了 $\mathsf{Comp}(T)$ 中的一个态射 $(T \to T_3) \to (T \to T_1)$。还需证明存在一个正整数$n_0$，使得对于任意 $n \geq n_0$，投影 $q : \overline{T} \to \overline{T}_2$ 也定义了 $\mathsf{Comp}(T)$ 中的一个态射 $(T \to T_3) \to (T \to T_2)$。投影 q

当满足以下条件时定义一个可容许态射 $T_3 \to T_2$

$$(p^*T_1^+ + nE) - p^*T_1^- \geq q^*T_2^+ - q^*T_2^-,$$

这等价于

$$nE \geq -p^*(T_1^+ - T_1^-) + q^*(T_2^+ - T_2^-).$$

由 j_{T_1} 的极小性，右端在开子集 $\overline{T}$ 上为零，且 j_{T_1}。因此，右端的支撑包含于 $|E|$。因此，应用 [16, 引理3。16], 我们可以找到所需的 n_0。□

现在我们已准备好证明定理2.2。

定理*2.2*的证明。 对于任意 $T \in \mathbf{TCor}$, 定义一个逆系对象 $\tau^!(T) \in$pro–$\mathbf{TCor}$ 如下：

$$\tau^!(T) := \text{“}\varprojlim_{(T \to T_1) \in \mathbf{Comp}(T)}\text{”} \quad T_1.$$

于是，我们在pro– TCor中有一个显然的态射 $T \to \tau\tau^!(T)$，其中将 T 视为常值逆系对象。只需证明，对于任意$S \in$TCor，所诱导的阿贝尔群映射

$$\varinjlim_{(T \to T_1) \in \mathrm{Comp}_1(T)} \mathbf{TCor}(T_1, S) = \text{pro–}\mathbf{TCor}(\tau^!(T), S) \to \mathbf{TCor}(T, S).$$

是一个同构。由于两边都是 Cor(T°, S°) 的子群，单射性显然。为证明满射性，取任意整循环 $V \in$ TCor(T, S)。如果 V 包含于 S^- 的纤维中，那么对于任意 $(T \twoheadrightarrow T_1) \in$Comp$(T)$，都有 $V \in$TCor(T_1, S)，于是结论成立。我们假设 V 不包含于 S^- 的纤维中。令 $(T \to T_1) \in$ Comp(T) 为满足命题 2.4 中条件 $(*)$ 的对象。令 $\overline{V} \subset \overline{T}_1 \times \overline{S}$，并令 $\overline{V}^N$ 为其闭包。由于$V \in$ TCor(T, S)，卡蒂埃除子

$$(T_1^+|_{\overline{V}^N} - T_1^-|_{\overline{V}^N}) - (S^+|_{\overline{V}^N} - S^-|_{\overline{V}^N})$$

在开子集 $\overline{V}^N \times_{\overline{T}_1} \overline{T} \subset \overline{V}^N$ 上是有效的。因此，根据 [16,引理 3.12] （或 [8, 引理 B.1]），我们可以找到一个正整数 n，使得

$$(T_1^+|_{\overline{V}^N} - T_1^-|_{\overline{V}^N}) - (S^+|_{\overline{V}^N} - S^-|_{\overline{V}^N}) + nD \geq 0,$$

其中 D是 $\overline{T}_1$上的有效 Cartier 除子，满足 $|D| = \overline{T}_1 \setminus \overline{T}$。定义 $T_2 := (\overline{T}_1, T_1^+ + nD, T_1^-)$。于是，开浸入 $T \to \overline{T}_1$ 定义了一个极小态射 $T \to T_2$，并且有 $(T \to T_2) \in$Comp(T)。此外，$V \in$TCor(T_2, S)。□

2.2. **互不相交的模数三元组**。本小节的主要目的是研究以下这个有趣范畴的性质：

定义 2.5. 我们将 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$ 记为 TCor 的满子范畴，它由满足以下条件的内部光滑模三元组 $T=(\overline{T},T^{+},T^{-})$ 构成：T^{+} 与 T^{-} 不相交。此外，我们设 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}:=\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}\cap\mathbf{TCor}$。

注 2.6。 在 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$ 中最显著的对象示例应该是与模数三元组 T（定义 1.7，参见引理 1.9）相关联的模数三元组 $\mathbf{Bl}(T)$ 。遗憾的是，它不一定是 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$ 的对象，因为即使 $T\in\mathbf{TCor}$ 且 $\overline{T}$ 光滑，其内部也可能不光滑。下面是一个例子：

Take $T=(\overline{T},T^{+},T^{-})$ with
- $\overline{T}=\mathbf{A}^{2}=\operatorname{Spec}k[x,y]$
- $T^{+}=$ Cartier divisor $(y=0)$
- $T^{-}=$ Cartier divisor $(x^{2}=0)$.

那么，$\mathbf{Bl}(T)$ 的总体空间是 $\mathbf{Bl}_{(x^2,y)}(\mathbf{A}^2)$，它在 T^{+} 的严格变换之外有一个奇点（比较 [3, 第 179–180] 页）。因此 $\mathbf{Bl}(T)^{\circ}$ 是奇异的。

这由下文的定理 2.7 得到解决，该定理是本小节的主要结果。

定理 2.7。 假设 k *admits resolution of singularities*。则，满嵌入 $\underline{t}:\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}\to\mathbf{TCor}$ 存在一个原左伴随 $\underline{s}$。

在开始证明定理 2.7之前，我们先准备一些定义和引理。

定义 2.8。 定义 TCor^{*} 和 TCor^{**} 为 TCor 的两个全子范畴，使得

$\mathrm{TCor}^{*}=\{T\in\mathrm{TCor}\mid F_T=T^{+}\times_{\overline{T}}T^{-}$ 是一个有效 Cartier 除子$\}$

$\mathrm{TCor}^{**}=\{T\in\mathrm{TCor}^{*}\mid\overline{T}\setminus|T^{+}-F_T|$ 在 $k.\}$ 上光滑

引理 2.9。 对于任意 $T_0\in\mathbf{TCor}$，存在一个态射 $p:T\to T_0$ 属于 Σ^{fin}，且 $T\in\mathbf{TCor}^{*}$。（关于 *1.33*，参见定义 Σ^{fin}。）特别地，满嵌入 $\mathbf{TCor}^{*}\hookrightarrow\mathbf{TCor}$ 是范畴等价。

证明。 令 $\overline{T}=\mathbf{Bl}^{F_{T_0}}(\overline{T_0})$，并令 $p:\overline{T}\to\overline{T_0}$ 为投影。那么 p 诱导出一个态射

$$T:=(\overline{T},p^{*}T_0^{+},p^{*}T_0^{-})\to T_0$$

且 $F_T=p^{*}F_{T_0}$ 是一个有效 Cartier 除子。这个态射显然属于 Σ^{fin}。最后一个陈述是显然的，因为 Σ^{fin} 的态射在 TCor 中是可逆的。□

引理 2.10。 令 $T \in \mathbf{TCor}^{*}$。在奇点消解下，存在一个态射 $\pi\colon\ T_\pi \to T$ 属于 Σ^{fin}，且 $T_\pi \in \mathbf{TCor}^{**}$。特别地，满嵌入 $\mathbf{TCor}^{**} \hookrightarrow \mathbf{TCor}$ 是一个范畴等价。

证明。 只需对 $\overline{T}$ 消解奇点，然后拉回。 □

设 $\mathbf{TCor}^{**,\ \mathrm{fin}} = \mathbf{TCor}^{**} \cap \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$（$\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 的全子范畴）。设 $T \in \mathbf{TCor}^{**,\ \mathrm{fin}}$ 定义 $T' = (\overline{T},\ T^{+} - F_T,\ T^{-} - F_T)$：根据假设，这是 $\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 的一个对象；根据引理 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}$ 1.5，它甚至属于 $\mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$ 中。我们有一个典范态射

$$T \xrightarrow{\iota} T' \tag{2.1}$$

它是 $\overline{T}$ 的恒等态射。

引理 2.11。 设 $S \in \mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}$；取任意不可约对应 $V \in \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}(T,\ S)$。令 V'（分别为 $\overline{V}$）表示 V 在 $T'^{\circ} \times S^{\circ}$（分别在 $\overline{T} \times \overline{S}$）中的闭包。那么

(i) $\overline{V}$ 满足关于 $T' \otimes S^{\vee}$ 的模数条件。(ii) V' 在 T'° 上是有限的。特别地，$V \xrightarrow{\sim} V' \times_{T'^{\circ}} T^{\circ}$。

证明。 若 $\overline{V} \subseteq \overline{T} \times S^{-}$，则由引理 1.14可得 (i) 成立。否则，关于 V 的模数条件推出

$$T^{+}|_{\overline{V}^N} + S^{-}|_{\overline{V}^N} \geq T^{-}|_{\overline{V}^N} + S^{+}|_{\overline{V}^N}$$

这等价于

$$(T')^{+}|_{\overline{V}^N} + S^{-}|_{\overline{V}^N} \geq (T')^{-}|_{\overline{V}^N} + S^{+}|_{\overline{V}^N}. \tag{2.2}$$

这就证明了 (i)。

现在证明 (ii)。注意，以下包含关系成立：

$$\overline{V} \cap (\overline{T} \times |S^{+}|) \subset \overline{V} \cap (|(T')^{+}| \times \overline{S}). \tag{2.3}$$

事实上，若 $\overline{V} \subseteq \overline{T} \times S^{-}$，则假设 $S^{+} \cap S^{-} = \emptyset$ 推出 $\overline{V} \cap (\overline{T} \times |S^{+}|) = \emptyset$。若 $\overline{V} \not\subset \overline{T} \times S^{-}$，则假设 $S^{+} \cap S^{-} = \emptyset$ 以及上文证明的不等式 (2.2) 推出 $(T')^{+}|_{\overline{V}^N} \geq S^{+}|_{\overline{V}^N}$，因此 (2.3) 成立。

将 (2.3) 两边在 $\overline{V}$ 中取补集，得到

$$\overline{V} \cap (\overline{T} \times S^{\circ}) \supset \overline{V} \cap (T'^{\circ} \times \overline{S}),$$

这意味着

$$\overline{V} \cap (T'^{\circ} \times \overline{S}) = \overline{V} \cap (T'^{\circ} \times \overline{S}) \cap (\overline{T} \times S^{\circ}) = \overline{V} \cap (T'^{\circ} \times S^{\circ}) = V'.$$

由于 $\overline{V} \cap (T'^{\circ} \times \overline{S})$ 在 T'° 上是有限的，我们得出 V' 在 T'° 上是有限的。特别地，$V' \times_{T'^{\circ}} T^{\circ}$ 在 T° 上是有限的，因此该开

浸入 $V \hookrightarrow V' \times_{T'^\circ} T^\circ$ 是同构，因为 V 在 T° 上是有限的，且在 V' 中稠密。□

考虑由范畴和函子构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}} & \xrightarrow{\underline{t}^{\mathrm{fin}}} & \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}} \\ {\scriptstyle b^{\emptyset}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor} & \xrightarrow{\underline{t}} & \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor} \end{array} \tag{2.4}$$

其中 b 是命题 1.33 (b) 中的包含函子，$b^{\emptyset}$ 是它在$\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}$上的限制。

引理 2.12。 $\underline{t}^{\mathrm{fin}}$ 的左伴随 $\underline{s}^{\mathrm{fin}}$ 在$\mathbf{TCor}^{**,\ \mathrm{fin}} \subset \mathbf{TCor}^{\mathrm{fin}}$的所有对象上都有定义。

证明。设 $T \in \underline{\mathrm{TCor}}^{**,\ \mathrm{fin}}$。我们断言，态射 ι 诱导一个同构 (2.1)

$$\underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}(T', S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}(T, S) = \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}(T, S)$$

对于任意 $S \in \underline{\mathrm{TCor}}^{\mathrm{fin}}$，这表明赋值 $T \mapsto T'$ 给出了左伴随 $\underline{s}^{\mathrm{fin}}$。

设 $S \in \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}$，且 $\alpha \in \underline{\mathrm{TCor}}^{\mathrm{fin}}(T, S)$。引理 2.11 (ii) 表明，$\alpha$ 可通过 ι延拓为有限对应 $\alpha' \in \underline{\mathrm{Cor}}(T'^\circ, S^\circ)$；引理 2.11 (i) 表明，$\alpha' \in \underline{\mathrm{TCor}}^{\mathrm{fin}}(T', S)$。由于 $T^\circ \to T'^\circ$ 是稠密开浸入，$\underline{\mathrm{Cor}}(T'^\circ, S^\circ) \xrightarrow{\iota^*} \underline{\mathrm{Cor}}(T^\circ, S^\circ)$ 是单射，这表明延拓 α' 具有唯一性，并由此完成证明。□

定理证明*2.7*。由命题1.33 (b) 和 [10, 命题 A.6。2],函子 b （2.4）具有原左伴随 $b^!$ 其由以下公式给出

$$b^! T = \text{“}\varprojlim_{\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T}\text{”} \tilde{T}$$

对于 $T \in \underline{\mathrm{TCor}}$，其中 $\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T$ 是箭头范畴 $\tilde{T} \xrightarrow{s} T$，其对象为$s \in \Sigma^{\mathrm{fin}}$，态射取自 $\underline{\mathrm{TCor}}^{\mathrm{fin}}$。

令 $(\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T)^{**}$ 表示 $\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T$ 中由满足以下条件的 $\tilde{T} \xrightarrow{s} T$ 组成的全子范畴：$\tilde{T} \in \mathbf{TCor}^{**}$；引理 2.9 和 2.10 表明它在 $\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T$ 中是余终的。因此，我们也有

$$b^! T \simeq \text{“}\varprojlim_{(\Sigma^{\mathrm{fin}} \downarrow T)^{**}}\text{”} \tilde{T}. \tag{2.5}$$

然后我们可以使用引理 2.12 逐项作用于 $\underline{s}^{\mathrm{fin}}$ （2.5）的右端，从而得到一个函子

$$\underline{s}^{\mathrm{fin}} b^! : \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor} \to \mathrm{pro}\text{–}\underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}$$

它是复合态射 $b\underline{t}^{\mathrm{fin}} \simeq \underline{t}b^{\emptyset}$ 的原左伴随。这个伴随的单位态射可以写成

$$\eta_T : T \to b\underline{t}^{\mathrm{fin}}\underline{s}^{\mathrm{fin}}b^{!}T \simeq \underline{t}b^{\emptyset}\underline{s}^{\mathrm{fin}}b^{!}T.$$

我们来证明，该态射使$b^{\emptyset}\underline{s}^{\mathrm{fin}}b^{!}$ 成为$\underline{t}$的原左伴随。由于 $b^{\emptyset}$ 在对象上是恒等的，我们有如下关于 $T \in$TCor 和 $S \in \mathbf{T}^{\emptyset}$Cor^{fin}的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{pro}\text{-}\underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\overline{\mathbf{Cor}}^{\mathrm{fin}}(\underline{s}^{\mathrm{fin}}b^{!}T, S) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}(T, \underline{t}b^{\emptyset}S) \\ {\scriptstyle b^{\emptyset}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \mathrm{pro}\text{-}\underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}(b^{\emptyset}\underline{s}^{\mathrm{fin}}b^{!}T, b^{\emptyset}S) & \xrightarrow{\eta_T^{*}\circ\underline{t}} & \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}(T, \underline{t}S) \end{array}$$

其中，根据上文所述的伴随关系，顶行是同构；这意味着底行是满射，剩下只需证明它是单射。由于$\underline{t}$是全忠实的，我们只需证明η_T^{*} 是单射。为此，只需证明$\underline{\omega}(\eta_T)^{*}$ 是单射，其中$\underline{\omega} : \mathbf{TCor} \to \mathbf{Cor}$ 是（1.6）中的忠实函子。这是因为$\underline{\omega}(\eta_T)$ 逐项都是稠密开浸入（此论证已在引理2.12的证明中用过）。□

备注 2.13。 可以用一个形式论证替代本证明末尾的几何论证，该形式论证与 [13, 命题 4.3.6 (b)], 的证明对偶，注意到，与 b一样， $b^{\emptyset}$ 是一个局部化，并且具有原左伴随。我们不这样做，因为这个形式论证会使证明不那么清晰。不过，这里并不需要对$\underline{\omega}(\eta_T)$作具体描述。

备注 2.14。 我们不知道$\underline{t}^{\mathrm{fin}}$ 的左伴随是否在所有对象上都有定义 $T \in$TCor^{fin}；如果是这样，这或许可以让我们去掉奇点消解假设。对于 $T = (\overline{T}, T^{+}, T^{-})$且 $T^{+} = T^{-}$的情形，这引出了一个耐人寻味的问题：函子是否

$$\mathbf{Cor} \ni S^{\circ} \mapsto \mathbf{Cor}(\overline{T}, S^{\circ})$$

可核心表示？（见下文引理 2.15。）

引理 2.15。 设 $T = (\overline{T},\ T^{+},\ T^{-}) \in \mathbf{TCor}$，并假设 $T^{+} = T^{-}$。设 $S \in \mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$。那么，我们有一个如下的对应

$$\underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}^{\mathrm{fin}}(T, S) \cong \mathbb{Z}\left\{ V \in \mathbf{Cor}(T^{\circ}, S^{\circ}) \,\middle|\, \begin{array}{l} V \text{ is irreducible, and the} \\ \text{closure of } V \text{ in } \overline{T} \times S^{\circ} \text{ is} \\ \text{finite over } \overline{T} \end{array} \right\}.$$

证明。 由于两边都是 Cor(T°, S°) 的子群，只需证明对于任意整循环 $V \in$ Cor(T°, S°)，其闭包 $\overline{V}$of

V in $\overline{T}\times\overline{S}$ 满足 $T\otimes S^{\vee}$ 的模数条件，当且仅当$\overline{V}\subset\overline{T}\times S^{\circ}$。这可以如下验证：

$$
\begin{aligned}
&\overline{V}\text{满足关于 } T\otimes S^{\vee}\text{的模数条件}\\
\Leftrightarrow^{1}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times|S^{-}|\text{ or }T^{+}|_{\overline{V}^{N}}+S^{-}|_{\overline{V}^{N}}\geq S^{+}|_{\overline{V}^{N}}+T^{-}|_{\overline{V}^{N}}\\
\Leftrightarrow^{2}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times|S^{-}|\text{ or }S^{-}|_{\overline{V}^{N}}\geq S^{+}|_{\overline{V}^{N}}\\
\Leftrightarrow^{3}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times|S^{-}|\text{ or }S^{+}|_{\overline{V}^{N}}=\emptyset\\
\Leftrightarrow^{4}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times|S^{-}|\text{ or }S^{+}|_{\overline{V}}=\emptyset\\
\Leftrightarrow^{5}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times|S^{-}|\text{ or }\overline{V}\subset\overline{T}\times S^{\circ}\\
\Leftrightarrow^{6}\ &\overline{V}\subset\overline{T}\times S^{\circ},
\end{aligned}
$$

其中 $\Leftrightarrow^{1}$ 可由引理 1.12 和引理 1.14推出，$\Leftrightarrow^{2}$ 由 $T^{+}=T^{-}$得到，$\Leftrightarrow^{3}$ 由 $S^{+}\cap S^{-}=\emptyset$得到，$\Leftrightarrow^{4}$由 $\overline{V}^{N}\to\overline{V}$的满射性得到，$\Leftrightarrow^{5}$显然成立，而 $\Leftrightarrow^{6}$ 再次由 $S^{+}\cap S^{-}=\emptyset$（这等价于 $|S^{-}|\subset S^{\circ}$）推出。□

2.3. **与Cor的关系。**

定义 2.16. 定义一个函子 $\underline{\omega}:\mathsf{TCor}\to\underline{\mathsf{Cor}}$，使得

$$\underline{\omega}(T):=T^{\circ}.$$

此外，定义一个函子 $\lambda:\mathsf{Cor}\to\mathsf{TCor}$，使得

$$\lambda(X):=(X,\emptyset,\emptyset).$$

函子性质很容易验证。

命题 2.17。 函子 λ 是 $\underline{\omega}$的左伴随。

证明。 令 $X\in\mathsf{Cor}$ 和 $T\in\underline{\mathsf{TCor}}$。只需验证

$$\underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}((X,\emptyset,\emptyset),T)=\mathbf{Cor}(X,T^{\circ}).$$

左边显然包含于另一边。令 $V\in\mathbf{Cor}(X,T^{\circ})$ 为任意初等有限对应。由于 V在 $X=(X,\emptyset,\emptyset)^{\circ}$上是有限的（因而是适当的），只需验证模数条件。如果 $V\subset X\times|T^{-}|$，则由命题 1.19可得结论。假设 $V\not\subset X\times|T^{-}|$。注意到，由于 V在 X上是适当的，V在 $X\times\overline{T}$中是闭的。令 V^{N}为 V的正规化。那么我们需要验证以下不等式成立：

$$T^{-}|_{V^{N}}\geq T^{+}|_{V^{N}}.$$

然而，由于 $V\subset X\times T^{\circ}$，右侧为零。 □

2.4. **与 MCor 的关系。** 本文的目标之一是扩展 [10] 的带模数动机范畴。该理论的基本构建模块是模对的两类范畴，分别记作 $\mathbf{MCor}$ 和 $\mathbf{MCor}$，它们是在 [9] 中引入的。本小节的任务是比较这些范畴与模数三元组范畴。

考虑如下由幺半且全忠实函子构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor} & \xrightarrow{\underline{\varphi}} & \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor} \\ & {\scriptstyle\underline{\psi}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\underline{t}} & \\ & \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}, & \end{array} \tag{2.6}$$

其中 $\underline{\varphi}(M) = \underline{\psi}(M) = (\overline{M}, M^{\infty}, \emptyset)$，且 $\underline{t}(T) = T$。

定理 2.18。 $\underline{\varphi}$ 存在一个左伴随 $\underline{p}$ 和一个右伴随 $\underline{q}$。

证明。 我们首先证明 $\underline{\varphi}$ 存在一个左伴随。对任意 $T \in \mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$，令 $T \cong \oplus_{i\in I} T_i$ 为 T 的规范分解，如例 1.25中所述，并设

$$\underline{p}(T) := \bigoplus_{i\in I, T_i^- = \emptyset} (\overline{T}_i, T_i^+).$$

那么，自然投影

$$T^{\circ} = \bigoplus_{i\in I} T_i^{\circ} \to \bigoplus_{i\in I, T_i^- = \emptyset} T_i^{\circ} = (\underline{p}(T))^{\circ}$$

诱导出一个态射 $T \to \underline{p}(T)$，属于 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$。对于任意 $M \in \mathbf{MCor}$，它都诱导出一个阿贝尔群映射

$$\underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor}(\underline{p}(T), M) = \underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor}(\underline{\varphi p}(T), \underline{\varphi} M) \to \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}(T, \underline{\varphi} M).$$

只需证明对于任意 $T \in \mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$ 和 $M \in \mathbf{MCor}$，这是一个同构。若 $T^- = \emptyset$，显然成立。假设 $T^- \neq \emptyset$。那么，我们有 $\mathbf{MCor}(\underline{p}(T)\ M) = \mathbf{MCor}(0, M) = 0$。因此，只需证明 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}(T, \underline{\varphi} M) = 0$，这由 $(\underline{\varphi} M)^- = \emptyset$ 和命题 1.20 得出。

我们证明 $\underline{\varphi}$ 存在右伴随。对于任意 $T \in \mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$，通过令 $\underline{q}(T) = (\overline{T}, T^+)$，在 $\mathbf{MCor}$ 中定义对象 $\underline{q}(T)$。于是，$\overline{T}$ 上的恒等态射诱导出 $\mathbf{T}^{\emptyset}\mathbf{Cor}$ 中的态射 $\underline{\varphi q}(T) = (\overline{T}, T^+, \emptyset) \to T$。对于任意 $M \in \mathbf{MCor}$，它又诱导出阿贝尔群之间的映射

$$\underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor}(M, \underline{q}(T)) = \underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor}(\underline{\varphi} M, \underline{\varphi q}(T)) \to \underline{\mathbf{T}}^{\emptyset}\mathbf{Cor}(\underline{\varphi} M, T).$$

只需证明这是一个同构。设 $V \in \mathsf{Cor}(M^\circ, T^\circ)$ 是一个初等有限对应。令 $\overline{V}$ 为 V 在 $\overline{M} \times \overline{T}$ 中的闭包，并令 $\overline{V}^N$ 为其正规化。那么，V 属于 $\mathsf{MCor}(\varphi M, T)$ 当且仅当 $\overline{V}$ 在 $\overline{M}$ 上是适当的，且满足以下不等式：

$$M^\infty|_{\overline{V}^N} + T^-|_{\overline{V}^N} \geq T^+|_{\overline{V}^N}. \tag{2.7}$$

另一方面，V属于 $\mathsf{MCor}(M, q(T))$ 当且仅当 $\overline{V}$在 $\overline{M}$ 上是适当的，并且满足以下不等式：

$$M^\infty|_{\overline{V}^N} \geq T^+|_{\overline{V}^N}. \tag{2.8}$$

根据 $T^+ \cap T^- = \emptyset$ 的假设，条件（2.7）彼此等价。□ (2.8)

定理 2.19。 假设 k 允许奇点消解。那么， ψ 具有一个原左伴随。

证明。 这由定理 2.7 和 2.18得出。 □

2.5. **余可容许版本：$\mathbf{WCor}$、$\mathbf{WCor}$。**

定义 2.20。 记 WCor 为一个范畴，其对象是模数对 $M = (\overline{M}, M^\infty)$，其中 $\overline{M}$ 在 k 上光滑，并且对于任意 M_1、$M_2 \in \mathsf{WCor}$，我们有

$$\underline{\mathbf{W}}\mathbf{Cor}(M_1, M_2) := \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}((\overline{M}_1, \emptyset, M_1^\infty), (\overline{M}_2, \emptyset, M_1^\infty)).$$

范畴 WCor 称为余容许对应范畴。显然，范畴 WCor 自然地等同于 TCor 的全子范畴，该全子范畴由形如 $(\overline{T}, \emptyset, T^-)$ 的内部光滑模三元组构成。

2.6. **处于坏位置的对应。**

定义 2.21。 定义 $\mathsf{T^bCor}$ 为 TCor 的子箭图，其对象与 TCor 相同，并且对于任意 S、$T \in \mathsf{TCor}$，我们有

$$\underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}(S,T) := \left\{ \alpha \in \underline{\mathbf{T}}\mathbf{Cor}(S,T) \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{For any component } V \text{ of } \alpha,\\ \text{the image of } V \text{ in } T^\circ \text{ is con-}\\ \text{tained in } T^\circ \cap T^-.\end{array} \right\}.$$

关于复合的良定义性，见下述命题。

命题 2.22。

(1) 设 $S \xrightarrow{\alpha} T \xrightarrow{\beta} U$ 是 $\mathbf{TCor}$ 中的一个图表。假设 α 或 β 中有一个是 $\mathbf{T^bCor}$ 中的态射，则复合态射 $\beta \circ \alpha$ 也是。

(2) 设 $S_1 \xrightarrow{\alpha_1} T_1$、 $S_2 \xrightarrow{\alpha_2} T_2$ 是 $\mathbf{TCor}$ 中的两个态射。如果α_1 或 α_2 属于 $\mathbf{T}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}$，则 $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ 也属于（见命题*1.26*，其中 $\otimes$）。

证明。 (1) 这由命题 1.22 (a)、(b) 的逆否命题得出。(2) 由 (1) 和对称性，只需证明 $\alpha \otimes 1 \in \mathbf{T}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}$ 当且仅当$\alpha \in \mathbf{T}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}$，这直接由 $\otimes$ 的定义得出。 □

注 2.23。 这个命题意味着，$\mathrm{T}^{\mathrm{b}}\mathrm{Cor}$ 是 TCor 中的一个“双边 $\otimes$-理想”。

注 2.24。 设 $\alpha \in \mathbf{TCor}(S, T)$ 是一个模对应。如果 α 的某个分支不属于 $\mathbf{T}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}$，那么称 α处于 良好位置。然而，这个条件不太理想，因为 $\mathbf{TCor}$ 中的复合不保留这一性质。我们将在 §2.8中引入“非常良好位置”这一更强的概念。

2.7. **约化对应**。

定义 2.25. 定义加性范畴 $\mathrm{T}^{\mathrm{r}}\mathrm{Cor}$，其对象为 Ob(TCor)，且对于任意 $S, T \in \mathrm{T}^{\mathrm{r}}\mathrm{Cor}$，Hom 群定义为

$$\underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{r}}\mathbf{Cor}(S, T) := \frac{\underline{\mathbf{TCor}}(S, T)}{\underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}(S, T)}.$$

由命题 2.22可知，复合定义良好，而 $\mathbf{TCor}$ 的张量结构通过典范函子$\mathbf{T}^{\mathrm{r}}\mathbf{Cor}$ 诱导出张量结构

$$\underline{\rho} : \underline{\mathbf{TCor}} \to \underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{r}}\mathbf{Cor}\,. \tag{2.9}$$

我们称 $\underline{\mathrm{T}}^{\mathrm{r}}\mathrm{Cor}$ 为约化对应范畴。

注意，对于任意 S, T，Hom 群 $\mathrm{T}^{\mathrm{r}}\mathrm{Cor}(S, T)$ 仍是自由阿贝尔群。

2.8. **处于非常良好位置的对应**。

定义 2.26. 设 $S, T \in \mathrm{TCor}$，且 $\alpha \in \mathrm{TCor}(S, T)$。若 α 处于非常良好位置，则称其

$$V \cap (|S^-| \times T^\circ) \supset V \cap (S^\circ \times |T^-|).$$

我们将 $\mathrm{T}^{\mathrm{vg}}\underline{\mathrm{Cor}}(S, T)$ 记为由处于非常良好位置的模对应构成的自由阿贝尔群。

注记 2.27. (1) 根据引理 1.20，我们总有以下包含关系：

$$V \cap (|S^-| \times T^\circ) \subset V \cap (S^\circ \times |T^-|).$$

因此，当且仅当等号成立时， V 处于非常良好位置。

(2) 如果 α 处于非常良好位置，那么根据注2.24，它处于良好位置。事实上，显然对于 $V \not\subset |S^-| \times T^\circ$ 的任意分支 V 的 $\alpha_\circ$

命题 2.28。 *TCor* 中的复合保持处于非常良好位置的模对应。

证明。设 T_1、T_2、$T_3 \in$TCor，并设 $\alpha \in$TCor(T_1, T_2) 和 $\beta \in$TCor(T_2, T_3) 是处于非常良好位置的模对应。我们希望证明 $\beta\circ\alpha$ 处于非常良好位置。显然，我们可以假设 α 和 β 是整循环。令 γ 为 $\beta\circ\alpha$的任意分支。根据注 2.27，只需证明 $\gamma\cap(|T_1^-|\times T_3^\circ) \supset \gamma\cap(T_1^\circ\times|T_3^-|)$。如命题 1.21 的证明中的步骤 1 所示，我们可以找到 $\alpha\times T_3^\circ\cap T_1^\circ\times\beta$ 的一个分支γ'，使得 γ' 满射地映射到 $\gamma_\circ$ 因此只需证明 $\gamma'\cap(|T_1^-|\times T_2^\circ\times T_3^\circ) \supset \gamma'\cap(T_1^\circ\times T_2^\circ\times|T_3^-|)$。 α 和 β 处于非常良好位置这一假设蕴含

$$(\alpha\times T_3^\circ)\cap(|T_1^-|\times T_2^\circ\times T_3^\circ) \supset (\alpha\times T_3^\circ)\cap(T_1^\circ\times|T_2^-|\times T_3^\circ),$$
$$(T_1^\circ\times\beta)\cap(T_1^\circ\times|T_2^-|\times T_3^\circ) \supset (T_1^\circ\times\beta)\cap(T_1^\circ\times T_2^\circ\times|T_3^-|).$$

这两个包含立即推出所需的包含关系。 □

定义 2.29。 对任意 $S, T \in$TCor，令 $I(S,T)$ 表示由满足 $V \notin \mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\mathbf{Cor}(S,T)$ 的初等对应 $V \in$TCor(S,T) 生成的自由阿贝尔群。根据定义，我们显然有等式

$$\mathbf{TCor}(S,T) = \mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\mathbf{Cor}(S,T) \oplus I(S,T).$$

命题 2.30。 设 $T_1, T_2, T_3 \in \mathbf{TCor}$，且设 $\alpha \in \mathbf{TCor}(T_1,T_2)$和 $\beta \in \mathbf{TCor}(T_2,T_3)$。假设 $\alpha \in I(T_1,T_2)$。那么我们有$\beta\circ\alpha \in I(T_1,T_3)$。特别地，我们得到 **TCor** 的子范畴 I。

证明。 显然，我们可以假设 α 和 β 都是整循环。假设 $\beta\circ\alpha \notin I(T_1, T_3)$。只需证明 $\alpha \notin I(T_1,T_2)$，即 α 处于非常良好位置。根据假设，存在一个分支 ，它属于 $\beta\circ\alpha$ 且处于非常良好位置。如断言 1.22 (c) 所述，我们可以找到 的一个分支 γ'，它满射地映射到α 和 $\gamma_\circ$ 条件 γ 处于非常良好位置意味着

$$\gamma'\cap(|T_1^-|\times T_2^\circ\times T_3^\circ) \supset \gamma'\cap(T_1^\circ\times T_2^\circ\times|T_3^-|). \tag{2.10}$$

另一方面，引理1.20 意味着

$$(T_1^\circ\times\beta)\cap(T_1^\circ\times|T_2^-|\times T_3^\circ) \subset (T_1^\circ\times\beta)\cap(T_1^\circ\times T_2^\circ\times|T_3^-|),$$

因此，注意到 $\gamma'\subset T_1^\circ\times\beta$，我们有

$$\gamma'\cap(T_1^\circ\times|T_2^-|\times T_3^\circ) \subset \gamma'\cap(T_1^\circ\times T_2^\circ\times|T_3^-|). \tag{2.11}$$

由（2.10）和（2.11），我们有

$$\gamma' \cap (|T_1^-| \times T_2^\circ \times T_3^\circ) \supset \gamma' \cap (T_1^\circ \times |T_2^-| \times T_3^\circ).$$

由于 $\gamma' \to \alpha$ 是满射，我们有

$$\alpha \cap (|T_1^-| \times T_2^\circ) \supset \alpha \cap (T_1^\circ \times |T_2^-|).$$

这表明 α 处于非常良好位置。 □

定义 2.31。将 $\mathbf{T^{vg}Cor}$ 定义为 TCor 的子范畴，其中对象为内部光滑三元组，态射为处于非常良好位置的模对应。

2.9. **处于优良位置的对应**。

定义 2.32。设 $S, T \in \mathrm{TCor}$，且设 $\alpha \in \mathrm{TCor}(S, T)$。若对于 α 的任一不可约分支 V，我们都有如下包含关系，则称 α 处于优良位置

$$\overline{V} \cap (|S^-| \times \overline{T}) \supseteq \overline{V} \cap (\overline{S} \times |T^-|), \tag{2.12}$$

或者等价地，

$$|S^-| \times \overline{T} \supseteq \overline{V} \cap (\overline{S} \times |T^-|), \tag{2.13}$$

引理 2.33。若 V 处于优良位置，则它处于非常良好位置（定义 *2.26*）。

证明。将（2.12）与 V相交，得到包含关系

$$V \cap (|S^-| \times \overline{T}) \supseteq V \cap (\overline{S} \times |T^-|) \supseteq V \cap (S^\circ \times |T^-|),$$

但由于 $V \subseteq S^\circ \times T^\circ$，左边等于 $V \cap (|S^-| \times T^\circ)$。 □

命题 2.34。“处于优良位置”这一条件在复合下保持不变，因此（由引理 *2.33*）一个子范畴 $\mathbf{T^{vvg}Cor} \subset \mathbf{T^{vg}Cor}$。

证明。其证明与命题 2.28基本相同，但稍微复杂一些：

设 $\alpha \in \mathrm{TCor}(S, T)$ 和 $\beta \in \mathrm{TCor}(T, U)$ 是有限对应，其不可约分支满足 (2.13)。我们可以假设 α 和 β 是整循环。考虑交集 $(\alpha \times U^\circ) \cap (S^\circ \times \beta) \subset S^\circ \times T^\circ \times U^\circ$，并令 γ 为其中任意一个不可约分支。于是，根据有限对应的复合的构造，$\beta \circ \alpha$ 的任意不可约分支都具有 $\pi(\gamma)$ 的形式，其中 γ，且 $\pi\colon S^\circ \times T^\circ \times U^\circ \to S^\circ \times U^\circ$ 表示投影。因此，只需证明 $\pi(\gamma)$ 满足 (2.13)。

令 $\overline{\alpha} \subset \overline{S} \times \overline{T}$、$\overline{\beta} \subset \overline{T} \times \overline{U}$、$\overline{\gamma} \subset \overline{S} \times \overline{T} \times \overline{U}$和 $\overline{\pi(\gamma)} \subset \overline{S} \times \overline{U}$为闭包。则投影 $\overline{\pi}\colon \overline{S} \times \overline{T} \times \overline{U} \to \overline{S} \times \overline{U}$诱导出一个适当的

支配（因而满射）态射 $\overline{\gamma} \to \pi(\gamma)$，因为 $\overline{\gamma} \subset \overline{\alpha} \times \overline{U}$ 是闭浸入，且 $\overline{\alpha}$ 在 $\overline{S}$ 上是适当的（由 α 的左适当性可知）。

由于 α 和 β 根据假设满足（2.13），因此我们有

$$|S^-| \times \overline{T} \supseteq \overline{\alpha} \cap (\overline{S} \times |T^-|),$$
$$|T^-| \times \overline{U} \supseteq \overline{\beta} \cap (\overline{T} \times |U^-|).$$

将这些拉回到 $\overline{S} \times \overline{T} \times \overline{U}$ 上，我们得到

$$|S^-| \times \overline{T} \times \overline{U} \supseteq (\overline{\alpha} \times \overline{U}) \cap (\overline{S} \times |T^-| \times \overline{U}),$$
$$\overline{S} \times |T^-| \times \overline{U} \supseteq (\overline{S} \times \overline{\beta}) \cap (\overline{S} \times \overline{T} \times |U^-|),$$

从而

$$\begin{aligned} |S^-| \times \overline{T} \times \overline{U} &\supseteq (\overline{\alpha} \times \overline{U}) \cap (\overline{S} \times |T^-| \times \overline{U}) \\ &\supseteq (\overline{\alpha} \times \overline{U}) \cap (\overline{S} \times \overline{\beta}) \cap (\overline{S} \times \overline{T} \times |U^-|) \\ &\supseteq \overline{\gamma} \cap (\overline{S} \times \overline{T} \times |U^-|). \end{aligned}$$

由于 $\overline{\gamma} \to \overline{\pi(\gamma)}$ 是满射，上述包含关系蕴含

$$|S^-| \times \overline{U} \supseteq \overline{\pi(\gamma)} \cap (\overline{S} \times |U^-|),$$

这表明 π（γ）满足（2.13），证毕。 □

注意，(2.6) 中的全忠实函子 $\underline{\psi}$: MCor $\to$ TCor 限制为全忠实函子 $\underline{\psi}^{\mathrm{vvg}}$:MCor $\to \mathrm{T}^{\mathrm{vvg}}$Cor。

对于任意模数三元组 T，我们定义

$$T^{\circ\circ} := \overline{T} \setminus (|T^+| \cup |T^-|).$$

命题 2.35. 存在一个函子 $\underline{g} : \mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor} \to \mathbf{MCor}$，它将模数三元组 T 赋予一个模对

$$\underline{g}(T) := (\overline{T} \setminus |T^-|, T^+|_{\overline{T} \setminus |T^-|}).$$

证明。设 $\alpha \in \underline{\mathrm{T}}^{\mathrm{vvg}}\mathrm{Cor}(S,T)$ 是一个处于优良位置的初等模数对应。定义 $\underline{g}(\alpha) := \alpha \cap (S^{\circ\circ} \times T^{\circ\circ})$。由于$\alpha$ 处于非常良好位置，我们有 $\underline{g}(\alpha) = \alpha \times_{S^\circ} S^{\circ\circ}$，因此 α_0在 $S^{\circ\circ}$的一个分支上有限且满射。我们将证明$\underline{g}(\alpha) \in \mathrm{MCor}(\underline{g}(S), \underline{g}(T))$。

首先，我们检验 $\underline{g}(\alpha)$ 满足左适当性条件。设 $\overline{\alpha} \subset \overline{S} \times \overline{T}$ 和 $\underline{g}(\alpha) \subset (\overline{S} \setminus |S^-|) \times (\overline{T} \setminus |T^-|)$ 为闭包。我们需要证明 $\underline{g}(\alpha)$ 在 $\overline{S} \setminus |S^-|$ 上是适当的。由于 $\overline{\alpha}$ 和 $\underline{g}(\alpha)$ 的泛点相同，因此有 $\underline{g}(\alpha) = \overline{\alpha} \cap (\overline{S} \setminus |S^-|) \times (\overline{T} \setminus |T^-|)$。此外，由于 $\overline{\alpha}$ 在 $\overline{S}$ 上是适当的，我们知道 $\overline{\alpha} \cap (\overline{S} \setminus |S^-|) \times \overline{T}$ 在 $\overline{S} \setminus |S^-|$ 上是适当的。因此，只需证明 $\overline{\alpha} \cap (\overline{S} \setminus |S^-|) \times \overline{T}$

已经包含于 $(\overline{S}\setminus|S^-|)\times(\overline{T}\setminus|T^-|)$。但这直接由（2.13）推出。

接下来我们证明 $\underline{g}(\alpha)$满足模数条件。设 $\overline{\alpha}\subset\overline{S}\times\overline{T}$为 α 的闭包， $\overline{\alpha}^N$ 为其正规化。那么， α 上的模数条件意味着（注意 $\alpha\notin \mathbf{T}^{\mathrm{b}}\mathbf{Cor}(S,T)$

$$S^+|_{\overline{\alpha}^N}+T^-|_{\overline{\alpha}^N}\geq S^-|_{\overline{\alpha}^N}+T^+|_{\overline{\alpha}^N}.$$

设$\underline{g}(\alpha)\subset(\overline{S}\setminus|S^-|)\times(\overline{T}\setminus|T^-|)$为 $\underline{g}(\alpha)$的闭包，且 $\underline{g}(\alpha)^N$ 为其正规化。那么，上述不等式意味着

$$S^+|_{\overline{\underline{g}(\alpha)}^N}\geq T^+|_{\overline{\underline{g}(\alpha)}^N},$$

这表明$\underline{g}(\alpha)\in\mathbf{MCor}(\underline{g}(S),\underline{g}(T))$。

对于任意 $\alpha\in\mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\mathbf{Cor}(S,T)$，我们通过将上述构造线性延拓，定义$\underline{g}(\alpha)\in\mathbf{MCor}(\underline{g}(S),\underline{g}(T))$。

最后，我们检验关联$\alpha\mapsto\underline{g}(\alpha)$与$\mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\mathbf{Cor}$和$\mathbf{MCor}$的复合相容。设 $\beta\in\mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\mathbf{Cor}(T,U)$，其中 U为某些模数三元组。我们要证明$\underline{g}(\beta\circ\alpha)=\underline{g}(\beta)\circ\underline{g}(\alpha)$。回想一下，有限对应的复合是通过代数循环的交积和推前来定义的。它们与限制到开子集相容，这就意味着所需的等式成立。□

命题 2.36. 函子 $\underline{g}$ 是$_{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}$的右伴随。

证明。首先注意，对任意 $T\in\mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}$， 自然包含$j\colon T^{\circ\circ}\to T^{\circ}$定义了 $\mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}$ 中的一个态射 $_{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}\underline{g}(T)\to T$。事实上，注意到 j 可扩张为一个态射 $\overline{T}\setminus|T^-|\to\overline{T}$，容易验证 j的图 Γ_j属于 $\mathbf{TCor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}\underline{g}(T)\ T)$。此外， Γ_j与 $T^{\circ\circ}\times|T^-|$不相交。因此，我们有 $\Gamma_j\in\mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}\underline{g}(T)\ T)$。对于任意 $M\in\mathbf{MCor}$ 和 $T\in\mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}$，考虑阿贝尔群之间的映射

$$\underline{\mathbf{M}}\mathbf{Cor}(M,\underline{g}(T))\simeq\underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}M,{}^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}\underline{g}(T))\xrightarrow{\Gamma_j\circ-}\underline{\mathbf{T}}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}M,T).$$

只需证明这是一个同构。单射性显然。我们证明满射性。设 $V\in\mathbf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathbf{Cor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}M,T)$ 是任意一个整循环。只需证明 $V\in\mathbf{MCor}(M,\underline{g}(T))$。

假设 V处于非常良好位置，蕴含

$$\emptyset=V\cap(|(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}M)^-|\times T^{\circ})=V\cap(M^{\circ}\times|T^-|),$$

其中第一个等式由 $(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi}M)^-=\emptyset$ 得出。因此，我们有$V\in\mathbf{Cor}(M^{\circ},T^{\circ\circ})=\mathbf{Cor}(M^{\circ},\underline{g}(T)^{\circ})$。

接下来我们检验 V 的左适当性。令 $\overline{V} \subset \overline{M} \times \overline{T}$ 为闭包。由于 V 处于优良位置，我们有

$$|(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi} M)^-| \times \overline{T} \supseteq \overline{V} \cap (\overline{M} \times |T^-|).$$

由于按定义 $(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi} M)^- = \varnothing$，上述包含表明 $\overline{V} \cap (\overline{M} \times |T^-|) = \varnothing$。换言之，$\overline{V} \subset \overline{M} \times (\overline{T} \setminus |T^-|) = \overline{M} \times \underline{g}(T)$。这表明 V 的左适当性。

最后，我们检查模数条件。令 $\overline{V}^N \to \overline{V}$ 为正规化。于是，假设 $V \in \mathsf{T}^{\mathrm{vvg}}\mathsf{Cor}(^{\mathrm{vvg}}\underline{\psi} M, T)$ 意味着

$$M^\infty|_{\overline{V}^N} + T^-|_{\overline{V}^N} \geq T^+|_{\overline{V}^N}.$$

将此不等式限制在 $\overline{V} \cap \overline{M} \times (\overline{T} \setminus |T^-|)$ 上，即得结论。 □

备注 2.37. 恒等映射 $(\mathbf{P}^1, \infty, \emptyset) \to (\mathbf{P}^1, \emptyset, \infty)$ 处于非常良好位置，但不处于优良位置；它在命题 $\underline{g}$ 中的函子2.35 下的拟像不满足适当性条件。因此，此函子不能延拓到 $\mathbf{T}^{\mathrm{vg}}\underline{\mathbf{Cor}}$。这促使我们引入“优良位置”的概念。

另一方面，命题2.30 的显然类比在将“非常良好位置”替换为“优良位置”时并不成立。例如，将前一个态射与以下态射$(\mathbf{P}^1, 2\infty, \infty) \to (\mathbf{P}^1, \infty, \emptyset)$ 复合，且其支撑为恒等映射，便得到一个处于优良位置的态射。注意，后者在**TCor** 中是一个同构（见例1.24）。

3. 比较

3.1.与 Ivorra-Yamazaki 的范畴比较。在[7, 4.5], 中，Ivorra 和 Yamazaki 引入了一种与我们迄今所做工作密切相关的箭图（“没有复合的范畴”）；此前，他们已在 [6, 3.2]中引入了一个~~满~~子箭图 MCrv。本小节旨在将我们的理论与他们的理论联系起来。根据[7, Rk17], 他们的箭图无法构成范畴（因为态射无法自然地复合），但这实际上只是一个小问题，我们将对其定义作简单修改以解决这一问题。

定义 3.1。 *Ivorra-Yamazaki* 范畴 IY 定义如下：

> **对象：**三元组 (X, Y, Z)，其中 X 是一个光滑射影连通的 k-簇，且 Y、Z 是 X 上的有效除子，满足$|Y| \cap |Z| = \emptyset$，并且 $(Y + Z)_{\mathrm{red}}$ 是一个简单正规交叉除子。

态射： 从态射 $(X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$ 是一个态射 $f : X \to X'$，满足

(1) 若 $f(X) \subseteq |Y'|$：无条件。（这就是我们修改 [7, 4的5]定义的方式。）(2) 否则：(a) $f(X \setminus |Z|) \subseteq X' \setminus |Z'|$(b) $Y \leq f^*Y'$(c) $Z - Z_{\mathrm{red}} \geq f^*(Z' - Z'_{\mathrm{red}})$。

请注意，在情形 (2) 中，除子 f^*Y'，$f^*(Z' - Z'_{\mathrm{red}})$ 是良定义的（这使条件 (b) 和 (c) 有意义）：第一个显然如此，第二个则由条件 (a) 得出。此外，

引理 3.2。 在定义 *3.1*中，我们总有 $f(|Y|) \subseteq |Y'|$，且条件 *(2) (a)* 在情形 *(1)* 中也成立。

证明。第一点由条件 (2) (b) 推出，第二点由假设 $|Y'| \cap |Z'| = \emptyset$ 推出。□

命题 3.3。IY 是一个范畴。

证明。设 $f : (X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$ 和 $g : (X', Y', Z') \to (X'', Y'', Z'')$ 是 IY 中的两个态射。我们验证复合态射 $gf : X \to X''$ 定义了 IY 中的一个态射。若 $gf(X) \subseteq |Y''|$，则结论成立。若 $gf(X) \not\subseteq |Y''|$，根据引理 3.2，$g(X') \subseteq |Y''|$ 和 $f(X) \subseteq |Y'|$ 都不可能成立。于是，根据引理 3.2，所有拉回都已定义，而 f 和 g 上的模数条件立即推出 gf 上的模数条件。□

注记 3.4. 由引理 3.2可知，满足定义 3.1 中条件 (1) 的态射构成 2-侧理想 **IY**。因此，可以通过对该理想取商来定义商范畴**IY** 。

设 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}} = \mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}} \cap \mathrm{TCor}$。我们要定义一个从 IY 到 $\mathrm{TSm}^{\overline{\mathrm{fin}}}$ 的满嵌入。为此，我们引入：

定义 3.5. 令 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{min}}$ 表示 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 的全子范畴，其对象由满足 $T^{+\,\text{约化}} = F_T := T^+ \times_{\overline{T}} T^-$（参见定义 1.7）且 $|T^+| \cap |T^- - T^{+\,\text{约化}}| = \emptyset$ 的三元组 $(\overline{T}, T^+, T^-)$ 组成；令 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{min,ls}}$ 表示 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{min}}$ 的全子范畴，其中 $\overline{T}$ 是光滑、连通的，且 $(T^+ + T^-)_{\mathrm{red}}$ 是简单正规交叉除子。

注记 3.6。对象 $T \in \mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 属于 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{min}}$ 当且仅当存在一个有效 Cartier 除子 D，其上有 $\overline{T}$，使得 $D \cap T^+ = \emptyset$ 且 $T^- = T^{+\,\text{约化}} + D$。

定理 3.7。 这些赋值

$$\begin{aligned}\kappa : \mathbf{IY} &\to \mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{min,ls}}\\ (X,Y,Z) &\mapsto (X,Z,Y+Z_{\mathrm{red}})\\ \kappa' : \mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{min,ls}} &\to \mathbf{IY}\\ (\overline{T},T^+,T^-) &\mapsto (\overline{T},T^- - T^+_{\mathrm{red}},T^+)\end{aligned}$$

定义互逆的范畴同构。

证明。 显然， κ将 Ob(IY) 映入 Ob(TSm^{fin} 最小, ls)；反过来， κ'在对象上是良定义的。由此显然可知，它们在对象上互为逆映射。剩下要验证它们定义了函子。

我们先讨论 κ。设 (X,Y,Z)、$(X',Y',Z') \in$ IY，且 $f\colon X \to X'$ 是一个态射。我们检验：若 f 在 IY 中定义了一个态射，那么它也定义了一个态射 $\kappa(X,Y,Y) \to \kappa(X',Y',Y')$，也就是说，一个态射

$$(X,Z,Y+Z_{\mathrm{red}}) \to (X',Z',Y'+Z'_{\mathrm{red}})$$

在 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$中。根据条件 (2) (a)（由引理 3.2总是成立），$f(X\setminus Z) \cap |Z'| = \emptyset$，因此 $f(X\setminus Z) \not\subseteq |Y'+Z'_{\mathrm{red}}|$，因为 $|Y'|\cap|Z'| = \emptyset$。因此，只需检验（图） f 满足（1.7）中的模数条件。如果 $f(X) \subseteq |Y'|$，则由引理 1.19即可得证。假设 $f(X) \not\subseteq |Y'|$。于是，我们有

$$Z - Z_{\mathrm{red}} \geq f^*(Z' - Z'_{\mathrm{red}}). \tag{3.1}$$

$$f^*Y' \geq Y, \tag{3.2}$$

不等式（3.1）和（3.2）蕴含

$$(Z - Z_{\mathrm{red}}) + f^*Y' \geq f^*(Z' - Z'_{\mathrm{red}}) + Y, \tag{3.3}$$

这等价于

$$Z + f^*(Y' + Z'_{\mathrm{red}}) \geq Y + Z_{\mathrm{red}} + f^*Z'. \tag{3.4}$$

这表明 f 满足模数条件，正如所需。

为了看出 κ' 也定义了一个函子，现在只需证明$f\colon X \to X'$ 在满足（**IY** ）的任一条件时，定义了 1.7 中的一个态射。注意，条件 (2) (a) 总是成立，因为这意味着 κ（f）保持内部不变。

如果（1.7）的第一个条件成立，即 f（X） $\subseteq |Y' + Z'_{\mathrm{red}}| = |Y'| \coprod |Z'_{\mathrm{red}}|$，那么要么 f（X） $\subseteq |Y'|$，要么 f（X）$\subseteq |Z'_{\mathrm{red}}|$，因为 X 是连通的。第一种情形下，结论立即成立。正如上文所述，第二种情形是不可能的。

若（1.7）的第二个条件，即（3.4），成立，则我们将其替换为等价的（3.3）；条件 $|Y|\cap|Z| = \emptyset$ 和 $|Y'|\cap|Z'| = \emptyset$ 表明

（3.3）蕴含（3.1） + （3.2）。由此可得定义3.1中条件（2）的（b）和（c），证明得证。□

3.2.**Ivorra-Yamazaki 带模数的混合霍奇结构的函子性**。在[7, 4.4 和 4.5], Ivorra 和 Yamazaki 将（某个子箭图的）表示定义为**IY** 到其范畴**MHSM** 带模数的混合霍奇结构的表示。在本小节中，作为其结果的一个略微推广，我们证明 Ivorra-Yamazaki 的带模数混合霍奇结构是**IY**上的预层。为此，只需将其拉回的定义扩展到满足定义3.1的条件 (1) 的态射情形，并证明其与复合相容。

注意，对于任意 $(X, Y, Z) \in \mathbf{IY}$，都有一个自然包含 $\Omega^n_{(X,Y,Z)} \subset j_* \Omega^n_{X\setminus Z^\circ}$。此外，对于 IY 中任意 $f\colon (X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$，所诱导的态射 $f^\circ\colon X \setminus Z \to X' \setminus Z'$ 定义了一个拉回映射 $(f^\circ)^*\colon \Omega^n_{X'\setminus Z'} \to \Omega^n_{X\setminus Z^\circ}$

引理 3.8。设 $f\colon (X, Y, Z) \to (X', Y', Z')$ 是 **IY**中的一个态射，满足 $f(X) \subset Y'$。那么，对任意 $p \geq 0$，复合态射

$$\Omega^n_{(X',Y',Z')} \to j'_* \Omega^n_{X'\setminus Z'} \to f_* j_* \Omega^n_{X\setminus Z}$$

是零映射，其中 $j\colon X \setminus Z \to X$ 和 $j'\colon X' \setminus Z' \to X'$ 是开浸入。换言之，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n_{(X',Y',Z')} & \xrightarrow{0} & f_* \Omega^n_{(X,Y,Z)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^n_{X'\setminus Z'} & \xrightarrow{(f^\circ)^*} & f_* j_* \Omega^n_{X\setminus Z} \end{array}$$

其中竖直箭头是包含映射。

证明。 由伴随性，只需证明复合态射

$$f^* \Omega^n_{(X',Y',Z')} \to f^* j'_* \Omega^n_{X'\setminus Z'} \to j_* \Omega^n_{X\setminus Z}$$

是零映射。由于该问题关于 X' 是扎里斯基局部的，我们不妨假设简单正规交叉除子 $|Y'|$ 由局部参数 $s = s_1^{m_1} \cdots s_r^{m_r}$定义，其中 s_1、……、s_r 是一个正则序列系，且 m_i 是正整数。

由于 X 是整的，且 $f(X) \subset Y'$，态射 f 可经由 $|Y'|$ 的一个带有其约化结构的不可约分支分解，我们将其记为 Y'_1。如有必要，重新编号后，我们可以假设 Y'_1 由 $s_1 = 0$ 定义。根据定义，我们有 $\Omega^n_{(X',Y',Z')} \subset \Omega^n_{(X',Y'_1,Z')} \subset j'_* \Omega^n_{(X'\setminus Z',Y'_1,\emptyset)}$，因此可以假设 $Z' = \varnothing$，并且 Y' 是一个局部参数为 $s = s_1$ 的整光滑除子。

当 $Z'=\varnothing$ 且 Y' 是由 s 参数化的整光滑除子时，我们有

$$\begin{aligned}\Omega^n(X',Y',\varnothing)&=\Omega^n(\log Y'_{\mathrm{red}})\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{O}_{X'}(-Y')\\&=\left(\bigwedge^n\Omega^1(\log Y'_{\mathrm{red}})\right)\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{O}_{X'}(-Y').\end{aligned}$$

注意，$\Omega^1(\log\ Y'_{红色})=\Omega^1_{X'}\oplus\mathcal{O}_{X'}\mathrm{dlog}s$。由此可知，$\bigwedge^n\Omega^1(\log\ Y'_{红色})$ 是一个由 $\Omega^1_{X'}$ 和 $\mathrm{dlog}s$ 的外积生成的自由 $\mathcal{O}_{X'}$- 模；此外，在每个外积中，$\mathrm{dlog}s$ 至多出现一次。因此，$\mathcal{O}_{X'}$-模 $(\bigwedge^n\Omega^1(\log\ Y'_{红色}))\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{O}_{X'}(-Y')=s\cdot(\bigwedge^n\Omega^1(\log Y'_{红色}))$ 由 $s\cdot\Omega^1_{X'}$ 和 $s\mathrm{dlog}s=s\cdot(ds/s)=ds$ 生成。由于根据分解 $X\to Y'\subset X'$，我们有 $f^*s=0=f^*ds$，所以可见，上述生成元在 f 下的拉回均为零。□

根据引理 3.8 可知，对于 IY 中任意态射 f，都存在一个自然拉回 $f^*:H^{n,k}(X',Y',Z')\to H^{n,k}(X,Y,Z)$，它延拓了 [7], 的拉回；而且，如果 $f(X)\subset|Y'|$，那么 $f^*=0$。这很容易推出，f^* 与 IY 中的复合相容，因此 $H^{n,k}(X,Y,Z)$ 是 IY 上的预层。类似的论证表明，H_{add} 也是一个预层（而 H_{inf} 是预层则有一个不同且更简单的理由）。如果我们对 MHSM 的定义理解正确，这就定义了一个函子 $\mathrm{IY}^{\mathrm{op}}\to$ ~~M~~HSM，它经由注 3.4 中的范畴 IY 分解。

注记 3.9。令 $d_1\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 为 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 的全子范畴，由满足 $\dim\overline{T}=1$的那些 T 构成。

（1）该对应

$$(\overline{T},T^+,T^-)\mapsto(\overline{T},T^++T^+_{\mathrm{red}},T^-+T^+_{\mathrm{red}})$$

定义了 $d_1\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$的一个自函子 σ，并配备自然同构 $\sigma\Rightarrow\mathrm{Id}$。该自函子将 $d_1\mathrm{T}^{\emptyset}\mathrm{Sm}^{\mathrm{fin}}$ 映入$d_1\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{min}}$，因此将前一个范畴实现为~~M~~MCrv 的全子范畴，该全子范畴由三元组 (X,Y,Z) 构成，其中 Z 是“处处非既约的”。

(2) $d_1\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 的任意对象都同构于唯一的对象 $(\overline{T},T^+,T^-)$，使得 $\overline{T}$ 是正规的，且 F_T 是既约的。因此，这个范畴太大，无法用来描述 MCrv。

（3）在 [6], 中，Ivorra 和 Yamazaki 使用 $\overline{\mathrm{MC}}$rv 进行一种按照 Nori 的构造—造，他们将其认定为 Laumon 的 1-动机当 k 为数域时。

（4）范畴 MHSM 具有完美对偶，但没有张量结构。能否对其进行修改，使其具有张量结构

可用的，以及 [7] 通过定理 3.7扩张为一个分次 $\otimes$-函子，从 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$?

以下是 TCor 与 IY 之间的两个“交叉融合”思路，试图回答最后一个问题：

D对偶性： 范畴 IY 带有一种与霍奇实现 [7, 18]: 它只是将 (X,Y,Z) 映射为 (X,Z,Y)。通过定理3.7中的函子 κ 和 κ' 进行转换后，可在 $\mathrm{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{min,ls}}$中得到如下结果：

$$(\overline{T},T^+,T^-)\mapsto(\overline{T},T^- - T^+_{\mathrm{red}},T^+ + (T^- - T^+_{\mathrm{red}})_{\mathrm{red}}).$$

（还应按 $\dim \overline{T}$ 进行扭转，但对于模数三元组，扭转的含义需要稍后再说明。）

张量积： 旨在回答上面的问题（3）。范畴 **IY** 没有张量结构，但 **TSm** 根据命题 1.26具有张量结构。我们可以尝试像上面那样将其传递到 **IY** 中，得到相同的公式，即

$$(X,Y,Z)\otimes(X',Y',Z') = (X\times X', Y\times X' + X\times Y', Z\times X' + X\times Z').$$

然而，这个张量积的支集并不不相交，因此它不能定义 IY 中的一个对象。

3.3. 与 Binda 的模数数据比较。 让我们从[1, 定义 2.11] “回顾”模数数据范畴 $\mathrm{MSm}^{\log}$ 的定义：

对象： 三元组 $M=(\overline{M};\ \partial M,\ D_M)$，其中 $\overline{M}\in\mathbf{Sm}$是一个光滑$k$-概形，$\partial M$ 是一个既约严格正规交叉除子，定义在 $\overline{M}$上（可以为空），D_M 是一个有效 Cartier 除子，定义在 $\overline{M}$ 上（允许 $D_M=\emptyset$ 这种情况），并且总除子$(D_M)_{\mathrm{red}}+\partial M$是$\overline{M}$[2]上的严格正规交叉除子。

态射： 给定 M_1,$M_2\in\mathrm{MSm}^{\log}$, 一个 k-态射 $f:\overline{M_1}\to\overline{M_2}$ 若满足以下条件，则称为可容许的 （即定义了一个态射 $M_1\to M_2$）。i) 对于 ∂M_2 的每个不可约分支 $\partial M_{2,\ \imath}$，都有$|f^*(\partial M_{2,\ \imath})|\subseteq|\partial M_1|$。ii) 若 $f(\overline{M}_1)\subseteq|D_{M_2}|$: 无需满足其他条件。iii) 否则： $f^*(D_{M_2})\geq D_{M_1}$作为 $\overline{M}_1$ 上的 Weil 除子。

以下是对这条提醒的一些评论。首先，∂M 既约这一点在 [1], 中是隐含的，因为只用到了它的支撑。在态射的定义中，[1] 缺少情形 ii)，但似乎需要补上，以确保

[2]根据同上引文，注 2.12，这个后续条件并非严格必要。

它们的可复合性，如**IY**中所示。因此，交换 ∂M和 D_M后，态射的条件 i) 与定义 3.1的条件 (2) (a) 相同，后者的第 (c) 部分为空；而条件 i) 与定义 $+$ (2) (a) 的条件 (1)3.1相同。这里必须采用这种条件 ii) 的表述，因为引理3.2 的第二点依赖于 **IY** 中支撑的不相交性，而这在 [1]中并未假设。

话虽如此，令 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{man}}$ 表示 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}$ 的全子范畴，该范畴由满足以下条件的三元组 $(\overline{T},\ T^+,\ T^-)$ 组成：T^+ 是既约的，且 $T^- - T^+$ 是有效 Cartier 除子；再令 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{man,\ ls}}$ 为 $\mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}{}_{\mathrm{man}}$ 的全子范畴，其中 $\overline{T}$ 是光滑、连通的，且 $T^-{}_{\mathrm{red}}$ 是简单正规交叉除子。那么，定理 3.7 的证明可相应地给出范畴之间的两个互为逆的同构

$$\begin{aligned}\kappa : \overline{\mathbf{M}}\mathbf{Sm}_{\log} &\to \mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{man,ls}}\\ (\overline{M}; \partial M, D_M) &\mapsto (\overline{M}, \partial M, D_M + \partial M)\\ \kappa' : \mathbf{TSm}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{man,ls}} &\to \overline{\mathbf{M}}\mathbf{Sm}_{\log}\\ (\overline{T}, T^+, T^-) &\mapsto (\overline{T}, T^+, T^- - T^+).\end{aligned}$$

附录 A. 非有效模数

从概念上说，我们希望将模数三元组 $T = (\overline{T}, T^+, T^-)$ 视为一个模对 $(\overline{T}, T^+ - T^-)$ 的“模型”，其中 $T^+ - T^-$ 是一个不一定有效的卡蒂埃除子。实际上，我们可以定义带有“非有效模数”的模数对范畴，并将其全忠实地嵌入模数三元组范畴中。

定义 A.1。 我们称模数三元组 T 为饱和的，如果 $|T^+ - T^-| = |T^+|$。令 $\mathrm{T}^{\mathrm{sat}}\mathrm{Cor}$ 表示由~~饱~~和模数三元组构成的 TCor 的全~~子~~范畴。

定义 A.2。 一个*ne*-模数对 是满足以下条件的一对 $\mathcal{X} = (\overline{X}, X^\infty)$：
(1) $\overline{X}$ 是有限型分离正规 k-概形；(2) X^∞ 是卡蒂埃除子（不一定有效！）；(3) $\mathcal{X}^\circ := \overline{X} \setminus |X^\infty|$ 是 k-光滑的。

回想一下，按定义，$|X^\infty|$是 $\overline{X}$ 中 X^∞ 不为 0 的轨迹的（闭）补集。

注记 A.3。 “ne”代表“非有效”。注意，总体空间正规的一切模数对都是 ne-模数对。

定义 A.4. 对于 ne-模数对 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$，将 $\mathrm{NCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 定义为由满足以下条件的初等对应生成的自由阿贝尔群

$V \in \mathrm{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Y}^\circ)$：设 $\overline{V} \subset \overline{X} \times \overline{Y}$ 为 V 的闭包，$\overline{V}^N \to \overline{V}$ 为其正规化。设 $p\colon \overline{V}^N \to \overline{X}$ 和 $q\colon \overline{V}^N \to \overline{Y}$ 为自然投影。那么

(1) p 是适当的。

(2) $p^*X^\infty \geq q^*Y^\infty$。

我们称 $\mathrm{NCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 的一个元素为从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的模对应。

（这些条件与 MCor 中的条件相同。）

引理 A.5. 有限对应的复合会诱导模对应的复合。特别地，我们得到一个范畴$\mathbf{NCor}$，其对象为 *ne*-模数对，态射为模对应。此外，存在一个全忠实函子$\mathbf{MCor} \to \mathbf{NCor}$。

证明。复合良定义性的证明与 $\mathbf{MCor}$ [9, 命题 1.2.4 和 1.2.7]中复合的证明完全相同。函子 $\mathbf{MCor} \to \mathbf{NCor}$ 由 $\mathcal{X} = (\overline{X}, X^\infty) \mapsto \mathcal{X}^N := (\overline{X}^N, p^*X^\infty)$给出，其中 $p\colon \overline{X}^N \to \overline{X}$是正规化。注意到 $\mathcal{X}^N \cong \mathcal{X}$ 属于 $\mathbf{MCor}$，根据定义，$\mathbf{NCor}$的全忠实性显然成立。□

（非有效）卡蒂埃除子 D 的拉回的支撑，可能严格小于 D 的支撑的拉回。不过，我们有以下引理。

引理 A.6. 设 $f\colon Y \to X$ 是整概形之间的适当满射态射，且典范态射 $\mathcal{O}_X^* \to f_*\mathcal{O}_Y^*$ 是同构。设 D 是 X 上的卡蒂埃除子。那么，作为集合，有$|f^*D| = f^{-1}(|D|)$。

证明。显然有包含关系 $|f^*D| \subset f^{-1}(|D|)$。我们需要证明 $|f^*D| \supset f^{-1}(|D|)$，也就是说，$f(|f^*D|) \supset |D|$。注意到，由于 f 的真性，$f(|f^*D|) \subset X$ 是闭子集，因此这等价于 D 在开子集 $X \setminus f(|f^*D|)$ 上是平凡的。注意到，f^*D 在$Y \setminus f^{-1}(f(|f^*D|)) \subset Y \setminus |f^*D|$ 上是平凡的。因此，以 $X \setminus f(|f^*D|)$ 替换 X 后，我们归结为 f^*D 是平凡的情形。

假设 f^*D 是平凡的。我们需要证明 D 也平凡。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^* & \longrightarrow & \mathcal{K}_X^* & \longrightarrow & \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \\ 0 & \longrightarrow & f_*\mathcal{O}_Y^* & \longrightarrow & f_*\mathcal{K}_Y^* & \longrightarrow & f_*(\mathcal{K}_Y^*/\mathcal{O}_Y^*) & & \end{array}$$

其中，按假设 a 是一个同构，而 b 是一个单射，它由 f的支配性保证存在。注意，水平序列是正合的，因为 f_* 是左正合的。于是，蛇引理表明 c 是单射，这意味着，若 X 上的一个卡蒂埃除子的拉回在 Y 上平凡，则该除子本身也平凡。□

推论 A.7。设 $f: Y \to X$ 是整概形之间的适当满射态射，且 X 正规。则对于 X上的任意卡蒂埃除子 D，有 $|f^*D| = f^{-1}(|D|)$ 作为集合成立。

证明。由 f的真性，我们知道 $f_*\mathcal{O}_Y$是一个有限 $\mathcal{O}_X$-代数。于是 X 的正规性表明 $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$。特别地，有 $f_*\mathcal{O}_Y^* = \mathcal{O}_X^*$。于是断言由引理 A.6得证。□

命题 A.8。存在一个全忠实函子 $\mathbf{NCor} \to \mathbf{TCor}$，其本质像为$\mathbf{T}^{\mathrm{sat}}\mathbf{Cor}$。换言之，存在范畴$\mathbf{NCor} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathrm{sat}}\mathbf{Cor}$之间的一个等价。

证明。首先如下构造一个函子 $i: \mathrm{NCor} \to \mathrm{TCor}$。设$\mathcal{X} = (\overline{X}, X^\infty)$是一个 ne-模数对。设 $I \subset \mathcal{O}_{\overline{X}}$ 是卡蒂埃除子 X^∞ [4, p 的分母理想。37], 并设 $F \subset \overline{X}$ 是由 I定义的闭子概形。设 $p: \overline{X}' \to \overline{X}$ 是沿着 F对$\overline{X}$ 的爆炸，并设 $E := F \times_{\overline{X}} \overline{X}'$ 是例外除子。置

$$i(\mathcal{X}) := (\overline{X}', p^*X^\infty + 2E, 2E).$$

断言 A.9. $i(\mathcal{X})^\circ = \mathcal{X}^\circ$. 等价地，$|p^*X^\infty + 2E| = p^{-1}(|X^\infty|)$

断言的证明。该等价性由推论 A.7得出。我们证明后一个断言。由推论 $\overline{X}' \setminus E$ A.7，两边相同，因此只需验证

$$|p^*X^\infty + 2E| \cap |E| = p^{-1}(|X^\infty|) \cap |E|.$$

右边等于 $|X^\infty|$，因为 $|E| = p^{-1}(F)$并且 $F \subset |X^\infty|$（作为集合）。左边也等于 $|E|$，因为 $p^*X^\infty + E$ 是有效的，因此 $p^*X^\infty + 2E \supset E$（作为闭子概形）。□

设 $\alpha \in \mathrm{NCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$是一个整模数对应。注意，由上述断言可知，$\mathrm{NCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset \mathrm{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Y}^\circ) = \mathrm{Cor}(i(\mathcal{X})^\circ, i(\mathcal{Y})^\circ)$。于是容易验证，$\alpha$ 属于$\mathrm{TCor}(i(\mathcal{X}), i(\mathcal{Y}))$，且$\mathrm{NCor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathrm{TCor}(i(\mathcal{X}), i(\mathcal{Y}))$ in $\mathrm{Cor}(\mathcal{X}^\circ, \mathcal{Y}^\circ)$。此外，由上述断言的证明可得

$$|i(\mathcal{X})^+ - i(\mathcal{X})^-| = |(p^*X^\infty + 2E) - 2E| = |p^*X^\infty| = |i(\mathcal{X})^+|,$$

这表明 $i(\mathcal{X}) \in \mathrm{T}^{\mathrm{sat}}\mathrm{Cor}$。

剩下要证明的是 $i:\mathrm{NCor}\underline{\ }\to \mathrm{T}^{\mathrm{sat}}\mathrm{Cor}\underline{\ }$ 本质上是满射的。设 T是一个饱和模数三元组，并令 $\mathcal{X}:=(\overline{T},T^+-T^-)$。令$I$为 T^+-T^- 的分母理想，并令 $F\subset\overline{T}$为由 I定义的闭子概形。注意到 $F\subset|T^+-T^-|=|T^+|$，其中等式成立是因为根据假设， T 是饱和的。令 $p:\overline{T}'\to\overline{T}$ 为沿 F 的爆炸，并令 $E=p^{-1}(F)$为例外除子。那么，根据定义，我们有

$$i(\mathcal{X})=(\overline{T}',p^*(T^+-T^-)+2E,2E).$$

于是， p 诱导出三元组态射 $i(\mathcal{X})\to T$，它在内部上是恒等映射（因为 $i(\mathcal{X})^\circ=\mathcal{X}^\circ=\overline{T}\setminus|T^+-T^-|=\overline{T}\setminus|T^+|=T^\circ$）。这个恒等映射也定义了一个逆态射 $T\to i(\mathcal{X})$。事实上， p 的真性保证了左适当性，而注意到 $i(\mathcal{X})^+-i(\mathcal{X})^-=p^*(T^+-T^-)+2E-2E=p^*(T^+-T^-)$，模数条件显然满足。□

参考文献

[1] F. Binda，无 A^1-不变性的动机同伦理论，《数学杂志》295（2020），1475–1519。[2] F. Binda、S. Saito，带模数的相对循环与调节子映射，《朱西厄数学研究所杂志》18（2019），1233–1293。[3] D. Eisenbud、J. Harris，《概形几何》，《数学研究生教材》第197卷，Springer，2000。[4] W. Fulton，《交理论》（第2版），《数学及其边界成果》3（2），Springer，1998。[5] R. Hartshorne，《代数几何》，《数学研究生教材》第52卷，Springer，1977。[6] F. Ivorra、T. Yamazaki，带模数曲线的 Nori 动机与 Laumon 1-动机，《加拿大数学杂志》70（2018），868–897。[7] F. Ivorra、T. Yamazaki，带模数的混合霍奇结构，《朱西厄数学研究所杂志》21（2022），161–195。[8] B. Kahn、H. Miyazaki，带模数动机的 Mayer–Vietoris 三角，https://arxiv.org/abs/1809.05851。[9] B. Kahn、H. Miyazaki、S. Saito、T. Yamazaki，《带模数的动机》，I、II，《代数几何电子期刊》5（2021），文章编号1、2。[10] B. Kahn、H. Miyazaki、S. Saito、T. Yamazaki，《带模数的动机》，III：动机范畴，Ann. of K-theory 7-1（2022），119–178。[11] B. Kahn、S. Saito、T. Yamazaki，互反层（附 Kay Rülling 的两篇附录），《组合数学》152（2016），1851–1898。[12] B. Kahn、S. Saito、T. Yamazaki，互反层，II，《同调、同伦与应用》24（2022），71–91。[13] B. Kahn、R. Sujatha，双有理动机，II：三角双有理动机，IMRN 2017（22），6778–6831。[14] A. Krishna、J. Park，加性高阶 Chow 群的移动引理，《代数数论》6（2012），293–326。

[15] W. Kai带模数代数循环的移动引理与反变性，IMRN **2021**，第1期，475–522。[16] H. Miyazaki带模数的高阶 *Chow* 群的立方不变性，J. Alg. Geometry **28** （2019），339–390。[17] S. Saito、K. Sato，《代数循环与étale 上同调》（日文），Springer 丛书，丸善出版，2012。[18] V. Voevodsky域上的动机的三角范畴，载于《循环、转移与动机上同调理论》，Annals of Math. Studies**143**，普林斯顿大学出版社，2000，188–238。缩略语[EGA4-IV] A. Grothendieck，《代数几何基础：IV. 概形与概形态射的局部研究》（EGA4），第四部分，Publ. math. I.H.É.S. **32** （1967），5–361。[SGA3] M. Demazure、A. Grothendieck，《群概形》，第一卷：群概形的一般性质，新版，Documents mathématiques **7**，SMF，2012。法国国家科学研究中心、索邦大学和巴黎西岱大学，IMJ-PRG，Case 247，4 place Jussieu，75252 巴黎 Cedex 05，法国电子邮件地址：bruno.kahn@imj-prg.fr NTT基础数学研究所，NTT通信科学实验室，NTT公司，3-1 Morinosatowakamiya，Atsugi，神奈川县 243-0124 日本电子邮件地址：hiroyasu.miyazaki.ah@hco.ntt.co.jp