arXiv:2303.02474v1 [cs.DS] 4 Mar 2023

在整数域上优化低维函数*

Daniel Dadush† Arthur L´eonard‡ Lars Rohwedder§Jos´e Verschae¶

摘要

我们研究目标函数为 $g(Wx)+c^{\mathsf{T}}x$ 的盒约束整数规划，其中 g 是一个定义域维数为 m 的“复杂”函数。这里假设我们有 $n \gg m$ 个变量，且 $W \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 是一个整数矩阵，其系数的绝对值至多为 Δ。我们仅需作出一个温和的假设：当除 m 个变量外的所有变量都固定时，可以高效地优化目标函数。基于此，我们为该问题设计了一种算法，运行时间为 $n^m(m\Delta)^{O(m^2)}$。此外，在若干特殊情形下，我们可以避免出现 n^m 项，尤其是在 $c=0$ 时。

我们的方法可应用于多种场景，并推广了近期的若干结果。一个重要应用是定义域维数较低的凸目标函数：在假设 W 显式给出的情况下，我们推导出 Hunkenschr¨oder 等人关于 0-1 超立方体以及尖锐或可分凸 g 的近期结果 [SIOPT'22] 。通过避免直接使用邻近性结果（这些结果仅在 g 可分或尖锐时成立），我们不仅达到了他们的运行时间，还将结果推广到了任意凸函数。对于只能通过预言机访问目标函数且 W 未知的情形，我们进一步证明，他们的邻近性框架可在 $n(m\Delta)^{O(m^2)}$ 时间内实现，而非 $n(m\Delta)^{O(m^3)}$。最后，我们将 Eisenbrand 和 Weismantel 关于少约束整数规划的结果 [SODA'17, TALG'20] 推广至混合整数线性规划情形，其中整数变量仅出现在少数不同的约束中。

1 引言

整数规划在计算机科学、运筹学以及近来的数据科学等众多领域发挥了至关重要的作用。其建模能力

*第四作者部分由 Fondecyt 资助项目编号 1221460 以及数学建模中心（CMM）FB210005（ANID-Chile 的 BASAL 资金）提供资助。

†CWI，阿姆斯特丹，荷兰，dadush@cwi.nl

‡ENS，巴黎，法国，arthur.leonard@ens.psl.eu§马斯特里赫特大学，马斯特里赫特，荷兰，l.rohwedder@maastrichtuniversity.nl

¶智利天主教大学，圣地亚哥，智利，jverschae@uc.cl

使其能够涵盖多种多样的应用场景。然而，其普遍的难解性使得推导出一般性的算法理论颇具挑战，因此研究重点一直是考察具有实际意义的特殊情形。该领域的主要理论成果是 Lenstra [10], 提出的算法及 Kannan [7], 所作的改进，它们表明，只要维数是常数，整数规划就是可处理的。近年来，在其他假设下研究整数规划的高效算法逐渐受到广泛关注。更近期，Eisenbrand 和 Weismantel [4] 针对约束数量为常数且矩阵系数有界的整数规划所做的奠基性工作，推动了改进算法和下界研究的新趋势；例如参见 [6, 9, 2]。

在本文中，我们研究了一个新的通用框架，该框架涵盖并进一步扩展了文献中的许多情形。考虑在高维空间 $\mathbb{Z}^n$ 上优化低维目标函数的问题。形式化地说，该问题定义为

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathsf{T}}x + g(Wx) \\ & \ell_i \le x_i \le u_i && \text{for all } i \in \{1,2,\dots,n\}, \\ & x \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

我们假设 $W \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 的各个元素的绝对值至多为 Δ。这里， W 可以解释为投影到低维空间 $m \ll n$ 的投影矩阵，随后将函数 $g\colon\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 应用于该投影。我们可以将 W 视为从 x 中提取相对较小的一组特征。向量 $\ell \in (\mathbb{Z}\cup\{-\infty\})^n$ 和 $u \in (\mathbb{Z}\cup\{\infty\})^n$ 是任意的变量界，而 c 表示一个线性代价函数。

关键在于，我们对 g 仅作了非常温和的假设，即当除 m 个变量之外的所有变量均已固定时，我们能够求解（1）：给定任意满足 $I\dot\cup J = [n]$ 和 $|I| = m$ 的 $z \in \mathbb{Z}^J$，以及对 J-变量的任意固定值，我们要求

$$\begin{aligned} \min\quad & c_I x + g(W_I x + W_J z) \\ \text{s.t.}\quad & \ell_i \le x_i \le u_i && \text{for all } i \in I, \\ & x \in \mathbb{Z}^I, \end{aligned} \tag{2}$$

可以高效求解。这里， $c_I = (c_i)_{i\in I}$ 是向量 c 限制在I 中各索引上的结果；类似地， W_I （分别为 W_J）是矩阵 W 限制在由 I （分别由 J）索引的列上的结果。直观而言，这一要求是必要的，因为要高效求解非常一般的情形（1），唯一可行的方法就是利用函数 g 是低维的这一点。如果我们甚至无法在 $\mathbb{Z}^n$的低维坐标子空间中对其进行优化，那么就不可能在整个 $\mathbb{Z}^n$上对其进行优化。或许最自然的情形是 g 为凸函数，且可以通过梯度和函数值查询来访问。此时，借助 Lenstra-Kannan 算法 [10, 7]，可以在仅对 m呈指数级、而对其他输入参数呈多项式级的时间内求解（2）。

如果 g 确实是凸的，也可以使用 Lenstra-Kannan 算法在时间 $\Delta^{\Delta^{O(m)}}\cdot\langle\text{input}\rangle^{O(1)}$ 内直接求解 (1)，其中 $\langle\text{input}\rangle$ 表示输入的编码长度。事实上，我们可以合并 W 中具有相同列的变量，

这会将问题的维度降至 $n' = (2\Delta + 1)^m$。注意，目标函数的线性部分未必仍然是线性的，但它仍然是凸的。因此，我们可以应用 Lenstra-Kannan 算法在所声称的运行时间内求解该问题。

这表明，当 Δ 和 m较小时，该问题是可处理的。我们的主要结果是一种避免双指数运行时间的算法。

定理 1. 对于任意函数 g，问题 (1) 可在以下时间内求解

$$n^m \cdot (m\Delta)^{O(m^2)} \cdot Q \ ,$$

其中 Q 是用于 (2) 的预言机的查询时间。特别地，对于凸函数 g，项 Q 可替换为 $\langle \text{input} \rangle^{O(1)}$。

我们注意到，在该定理中，凸情形下 Q 的界可通过使用 Lenstra-Kannan 算法求解低维子问题 (2) 得出。在这种情况下，Lenstra-Kannan 算法运行时间中的 $m^{O(m)}$ 因子可以省略，因为它有上界 $(m\Delta)^{O(m^2)}$。关于 n^m 项，正如下文所述，在一些有意义的具体情形中，它可以降为低阶项。我们还指出，由于整数线性规划的归约（见第 1.1 节）以及该问题的下界 [6]，形如 Δ^m 的项无法避免。

1.1 应用

低维凸函数。本工作的主要 प्रेरे发来自 Hunkenschr¨oder、Pokutta 和 Weismantel [5], 近期的一项研究，他们考虑了如下问题

$$\min_{x \in \{0,1\}^n} g(Wx) \ , \tag{3}$$

其中，$W \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ 的各个分量的绝对值至多为 Δ，$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个“良好”的尖锐函数或可分凸函数，并且算法可以对目标函数 $g(Wx)$进行函数值和梯度评估。他们进一步区分了 W 被显式给出以及 W 对算法未知的情形。假设 g 是可分的，他们在 W 已知时给出了一个 $n(m\Delta)^{O(m^2)}$ 时间算法；在 W 未知且 g 的梯度具有 L-Lipschitz 性[1]时，给出了一个 $n(mL\Delta)^{O(m^3)}$ 时间算法。当 g 适当地“尖锐”时，他们还得到了类似结果，但为简洁起见，我们省略相关表述。

作为定理 1 的直接应用，当 W 已知时，我们将 [5] 的结果推广到任意凸函数。

推论 2. 当已知 W，且 g 是任意凸函数时，问题 (3) 可以在以下时间内求解

$$O(nm) + (m\Delta)^{O(m^2)} \ .$$

[1]他们进一步要求 g 在整数输入上具有整数值梯度。

化归到定理 1 如下：我们首先放弃对 $x \in \{0,1\}^n$ 的限制，转而考虑一般的有界整数变量。然后，由于投影矩阵 W 中具有相同列的任意两个变量都可以合并为一个变量（通过调整盒约束），因此不失一般性地，我们可以假设 $n \leq (2\Delta+1)^m$。

Hunkenschr¨oder 等人 [5] 的研究，主要动机之一是求解某些类型的回归问题。例如，他们研究了一个整数压缩感知问题：给定高维整数信号 $x^* \in \{0,1\}^n$ 的少量 m 线性测量，并希望对其进行（近似）重建。收到的测量具有 $b = Wx^*$的形式，其中 $W \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 是一个未知矩阵，其系数大小至多为 Δ。作为对 x^*的近似，他们在假设只能通过对 $f(x) = \|b - Wx\|^2$进行梯度和函数值查询来间接访问 W的条件下，计算 $\min\{\|b-Wx\|^2 \colon x \in \{0,1\}^n\}$ 的最小化解。

我们稍后会说明，在压缩感知及相关情形中，基本上可以避免因不知道 W 而产生的额外开销。虽然上文重点讨论的是已知 W 的情形，但借助正交技术，我们也可以通过修改 Hunkenschr¨oder 等人的框架，缩短未知 W 情形下的运行时间。关于他们的框架以及我们的相关改进，将在第 4 节中进一步讨论。

混合整数线性规划。Eisenbrand 和 Weismantel [4] 研究了以下形式的整数规划的复杂度

$$\begin{aligned} &\min\ c^{\mathsf{T}}x \\ &\text{s.t. } Ax = b, \\ &\qquad \ell_i \leq x_i \leq u_i \qquad\qquad \text{for all } i \in \{1,\dots,n\}, \\ &\qquad x \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned} \tag{4}$$

具体而言，他们考虑了 A 行数较少的情形，并利用 Steinitz 引理得到了一个运行时间为 $(m\Delta)^{O(m^2)} \cdot n$ 的算法，其中 Δ 是 A 中绝对值的最大值。这启发了针对类似情形的一系列研究，例如参见 [6, 9, 3, 8]。我们的设定是他们工作的推广：取 $A = W$，并令

$$g(Ax) = \begin{cases} 0 & \text{if } Ax = b, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里，子问题 (2) 对应于在 m 维空间中求解整数规划，可以使用 Lenstra-Kannan 完成。或者，也可以将该问题建模为针对某个合适范数最小化凸函数 $g(Ax) = \|Ax - b\|$。此外，我们的模型还将 Eisenbrand 和

Weismantel 的工作推广到了混合整数线性规划。考虑问题

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathsf{T}}x + d^{\mathsf{T}}y \\ \text{s.t. } & Ax + By = b, \\ & \ell_i \le\ x_i \le u_i, \qquad\qquad \text{for all } i \in \{1,\dots,n\} \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \\ & y \in P \subseteq \mathbb{R}^h. \end{aligned} \tag{5}$$

这里， P 是一个多面体，可对连续变量施加额外约束。我们可以通过设置 $W = A$ 和

$$g(Ax) = \begin{cases} \min\{d^{\mathsf{T}}y : By = b - Ax, y \in P\} & \text{if this minimum exists,} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

请注意，在这种情况下，预言机问题 (2) 本身构成一个混合整数线性规划，但只有 m 个整数变量；因此可以使用 Lenstra-Kannan 的算法高效求解。

推论 3. 假设 P 可以通过高效分离来处理，则问题 (5) 可以在以下时间内求解

$$n^m \cdot (m\Delta)^{O(m^2)} \cdot \langle \text{input} \rangle^{O(1)} .$$

我们在此强调， Δ 只是对 A的各项取值的界，而不一定是对 B的各项取值的界。与 [4], 中的纯整数情形算法相比，我们的运行时间多出一个 n^m因子，但在某些情形下该因子会消失：例如，当 $c = 0$ 或对所有 i都有 $u_i = \infty$ 时。在这些情形下，我们可以再次合并在 W中具有相同列的变量。据我们所知，唯一另一个将 Eisenbrand 和 Weismantel 的设定扩展到混合整数线性规划的例子，是 Brand、Kouteck´y 和 Ordyniak [2]的研究。他们的设定与我们的设定可以视为相互正交。一方面，他们研究了更一般的有界树深度规划结构，其中具有有界数量约束的整数规划是最简单的特例。另一方面，他们也对连续变量施加这些结构限制（并额外限制其系数），而我们对连续变量的结构及其系数基本不施加任何限制。

为了更好地理解这一点，我们不妨指出，将 Lenstra-Kannan 方法（以直接明了的方式）推广到混合整数线性规划，有一个令人欣喜之处：它兼具固定维数下整数规划的易解性与任意维数下线性规划的易解性，实质上同时推广了二者。另一方面，Eisenbrand 和 Weismantel 的算法关注的是约束数量固定时整数规划的易解性（并补充了 Δ 有界这一必要假设）。与上述推广思路类似，我们的算法将这一性质与（任意）线性规划的易解性结合起来。

少量复杂变量下的整数线性规划。回顾 Eisenbrand 和 Weismantel 研究的整数规划问题 (4)，他们为此给出了一个运行时间为 $(m\Delta)^{O(m^2)} \cdot n$ 的算法（其中 Δ 是 A 中绝对值的最大值）。因此，该算法有意义的参数范围是 m 和 Δ 都非常小的情形。仅当 $m = 1$ 时，这种表述就很容易刻画背包问题；该问题是弱 NP 困难的，因此我们不能指望在仍保持对 n 的多项式依赖的同时，将对 Δ 的依赖降至例如 log(Δ)。另一方面，在 Lenstra-Kannan 方法中，对矩阵系数的依赖关于编码长度是多项式的，也就是说关于 log(Δ) 是多项式的，但对 n 的依赖是指数级的。这两个相当正交的结果可以利用定理 1 结合起来。

推论 4。考虑 (4) 中的整数规划问题，并将 A 的列划分为“简单”列和“复杂”列：简单列的元素绝对值不超过 Δ，复杂列的元素则不受限制。假设复杂列只有 k 个。那么，我们可以在以下时间内求解 (4)：

$$n^m \cdot (m\Delta)^{m^2} \cdot k^{O(k)} \cdot \langle \text{input} \rangle^{O(1)} .$$

为此，我们按如下方式进行。令 S 和 C 分别为简单列和复杂列的索引集，并相应地令 A_S 和 A_C 为矩阵 A 在这些列集上的限制。我们仅在 x_S 上定义问题 (1)，即针对简单列的变量。然后令

$$g(A_S x_S) = \begin{cases} \min\{c_C^{\mathsf{T}} x_C : A_C x_C = b - A_S x_S\} & \text{if this minimum exists,} \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此得到的子问题 (2) 是一个含有 $m + k$ 个变量的整数规划，可以使用 Lenstra-Kannan 求解。值得注意的是，即使在 (4) 中针对复杂列添加任意额外约束，仍然可以用相同方式求解该问题。

可变规模背包问题。Antoniadis 等人 [1] 提出了一种背包问题变体，其中已用容量对应一个非线性成本函数。他们证明，当该函数为凹函数时，该问题可在多项式时间内求解，并为凸函数情形给出一种全多项式时间近似方案。我们的结果可用于为凸函数情形设计一种伪多项式时间算法：该问题可以表示为

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - g\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \Big) : x_i \in \{0, 1, \ldots, u_i\} \text{ for all } i \right\} . \tag{6}$$

其中，p_i 是物品 i 的收益，w_i 是重量，$u_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ 是此类物品数量的上限。类似地，可以直接推广到多维背包问题。

推论 5. 对于凸函数 g，问题 (6) 可以在以下时间内求解

$$(n + w_{\max})^{O(1)}.$$

在这里，预言机问题 (2) 可简化为一次简单的二分搜索。总的来说，我们的结果也适用于具有类似特点的问题：约束并不严格，但会产生一定的惩罚项。

1.2 技术概述

[4] 和 [5] 中针对限制更严格情形的相关结果基于邻近性：先求解问题的连续松弛（即省略整数约束），如果能够证明松弛问题的解与实际问题的解仅相差很小，就可以利用这一点缩小搜索空间。 [4] 中的邻近性定理具体如下。

定理 6（Eisenbrand 和 Weismantel [4]）。设 z 是线性规划的一个最优顶点解

$$\max\left\{c^{\mathsf{T}}x : Ax = b \text{ and } \ell_i \le x_i \le u_i \text{ for all } i\right\},$$

其中 $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 的各项大小至多为 Δ。若存在整数解，则也存在一个最优整数解 x^*，满足

$$\|x^* - z\|_1 \le m(2m\Delta + 1)^m \ .$$

Hunkenschr¨oder 等人 [5] 考虑了连续松弛问题 (3) 的最优解。对于可分凸函数和严格凸函数这两种特殊情形，他们证明了类似的邻近性；这也是其算法中的关键要素。

然而，即使对于一般凸函数，邻近性界也可能非常大，正如 [5] 中的一个例子所示。这给我们的主要结果造成了严重障碍。我们设法克服了这一障碍，同时仍然利用邻近性，只是采用了不同的方式。为便于说明，假设我们能够确定 $b^* = Wx^*$ 的值，其中 x^* 是 (1) 的最优解。这样，通过应用 Eisenbrand 和 Weismantel 的整数线性规划算法 [4]，就能轻松求出 x^*（从而解决我们的问题）。该算法通过计算 $Wx = b^*$ 的连续解 z，再利用定理 6 给出的 $\|z - x^*\|_1$ 有界这一性质来求解。事实上，在我们固定 b^* 的情况下，这一界仍然成立。然而，我们尚不清楚如何计算或猜测 b^*，也不清楚在不知道 b^* 的情况下如何计算 z。

现在考虑每个变量的定义域都是 $\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 的情况，这比有界情形稍简单一些。这里我们可以假设 z 只有 m 个非零分量，并且可以从 n^m 个候选项中猜出它们。我们仍然不知道 b^* 或 z，但显然知道 $n-m$ 零分量上的 z。直观来说，这足以利用邻近性，在 z 的零分量上恢复 x^*。此外，在 z 的非零分量上恢复 x^* 只是一个 m 维问题，我们可以在其中应用预言机问题 (2)。

对于变量定义域任意有界的一般情形，我们还面临另一个障碍：如果尝试推广前面的论证思路，那么 z 中仍然只有 m 个“特殊”变量，也就是在各自任一边界上都不紧的变量。然而，对于其余变量，我们无法立即判断它们等于下界还是上界；如果不知道这一点，就不清楚如何确定这些紧变量上的 x^*。我们通过猜测足够多的对偶信息来克服这一问题，从而可以利用互补松弛推断紧变量取到的是哪个边界。

2 个非负变量

为简化起见，本节首先针对变量定义域 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 证明我们的主要结果，即对于所有 i，$\ell_i = 0$ 和 $u_i = \infty$。考虑 (1) 的最优解 x^*，并定义 $b^* = Wx^*$。此外，设 z 是以下问题的一个最优顶点解：$\min\{c^\mathsf{T}x : \ Wx = b^*, \ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$。我们强调，$z$ 不一定是整数。根据定理 6，以下问题存在一个最优整数解 x'：$\min\{c^\mathsf{T}x : Wx = b^*, \ x \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$，且 $\|x' - z\|_1 \leq O(m\Delta)^m$。不失一般性，我们可以假设 $x' = x^*$。由于 z 是一个顶点解，因此它至少有 $n - m$ 个零分量 T。由此可得

$$\|x^*_T\|_1 = \|x^*_T - z_T\|_1 \leq \|x^* - z\|_1 \leq O(m\Delta)^m \ .$$

因此，

$$\|W_T x^*_T\|_1 \leq m\Delta \cdot \|x^*_T\|_1 \leq O(m\Delta)^{m+1} \ .$$

现在，我们从 n^m 个候选项中猜测 T 中变量的索引，并从 $O(m\Delta)^{(m+1)m}$ 个候选项中猜测 $b^{(T)}$ 的值：$= W_T x^*_T$。现在，只需求解以下问题即可轻松恢复 x^*_T（或一个等价解）：

$$\min\left\{c^\mathsf{T}_T x_T : W_T x_T = b^{(T)} \text{ and } x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in T\right\}.$$

这里我们使用 Eisenbrand 和 Weismantel [4] 的算法，或使用 [6]中的改进算法。其所需时间为 $(m\Delta)^{O(m)} \cdot n$，与上述猜测次数相比微不足道。该算法假设已给出线性规划松弛的一个解，但这仅仅是为了获得一个接近最优解的向量（在 ℓ_1-范数下）。为此，我们也可以直接取 z_T（零向量）。令 L 为不属于 T的索引集合。要恢复 x^*_L，我们需要求解

$$\min\left\{c^\mathsf{T}_L x^*_L + g(W_L x^*_L + W_T x^*_T) : x^*_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in L\right\}.$$

这对应于形式为 (2) 的预言机查询。对于 T和 $b^{(T)}$的每种猜测，我们都以这种方式计算一个解，并返回其中最好的一个。运行时间主要由猜测次数决定，因此为

$$n^m \cdot (m\Delta)^{O(m^2)} \cdot Q \ . \tag{7}$$

事实上，这里的 n^m 项可以省略，因为不失一般性，可以假设 W的任意两列都不相同，因此 $n \leq (2\Delta + 1)^m$。

3 有界变量

再次令 x^* 表示 (1) 的一个最优解，并令 $b^* = Wx^*$。令 z 为以下问题的一个最优解

$$\min\left\{c^\mathsf{T}x : Wx = b^* \text{ and } \ell_i \le x_i \le u_i \text{ for all } i\right\}.$$

我们假设对所有 i，都在 i 个分量上将 c 稍作增广，即加上 ε^i，其中 ε 非常小。这实际上是在解之间实现了字典序的平局裁决规则。这里可以将 ε 视为符号量。注意，这个线性规划的对偶为

$$\max\left\{b^{*\mathsf{T}}y + \ell^\mathsf{T}s^\ell - u^\mathsf{T}s^u : c - W^\mathsf{T}y = s^\ell - s^u \text{ and } s_i^\ell, s_i^u \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}, y \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

设 y、s^ℓ、s^u 是对偶问题的一个最优顶点解。那么存在 m 个线性无关行（W^T）$_i$，且 $s_i^\ell = s_i^u = 0$（否则它就不是顶点解）。我们从 n^m 个候选中猜测这些行，这便完全确定了 y，尤其是 $c - W^\mathsf{T}y$。对于其他 $n-m$ 行，我们可以假设 $(c - W^\mathsf{T}y)_i \neq 0$；这可由加入 ε 的扰动推出。如果对于某个 i，有 $(c - W^\mathsf{T}y)_i > 0$，我们就知道 $s_i^u > 0$；同样，如果 $(c - W^\mathsf{T}y)_i < 0$，那么 $s_i^\ell > 0$。根据互补松弛，我们可以确定这些行对应的 $z_i = u_i$（分别为 $z_i = \ell_i$）。因此，对于 $n-m$ 个变量 T，我们现在已经确定了它在 z 中的取值。令 L 表示其余的 m 个变量。接下来我们采用与上一节类似的方法。同样有

$$\|x_T^* - z_T\|_1 \le O(m\Delta)^m.$$

这意味着

$$\|W_T x_T^* - W_T z_T\|_1 \le m\Delta \cdot \|x_T^*\| \le O(m\Delta)^{m+1}\ .$$

由于我们知道 $W_T z_T$ 的值，因此可以从$O(m\Delta)^{(m+1)m}$ 个候选项中猜测 $b^{(T)} = W_T x_T^*$。然后，我们使用 Eisenbrand 和 Weismantel 的算法恢复 x_T^* [4]（其中可以用 z_T 代替 LP 解），并通过将 (2) 应用于 x_L^*

$$\min\{c_L^\mathsf{T}x_L^* + g(W_L x_L^* + W_T x_T^*) : x_i^* \in \{\ell_i, \ell_i + 1, \ldots, u_i\} \text{ for all } i \in L\}.$$

最后，我们返回针对任意猜测计算出的最佳解。

4 Hunkenschr¨oder 等人 [5] 及相关改进概述

现在，我们将更详细地介绍 Hunkenschr¨oder 等人 [5] 的高层算法，以及他们的框架在未知 W情形下的一些改进。

他们的算法从连续松弛问题 $\min\{g(Wx) : x \in [0,1]^n\}$ 的一个最优解 z 开始，该解至多有 m 个分数分量（容易证明这样的解总是存在）。这里假设 z 由预言机给出。对于他们考虑的情形，例如可分情形，他们证明存在一个“邻近的”最优整数解 x^*，满足 $\|x^* - z\|_1 \le (m\Delta)^{O(m)}$。函数 g 可分，意味着它可以分解为若干函数之和，且每个函数仅依赖于一个维度，即 $g(Wx) = g_1((Wx)_1) + \ldots + g_m((Wx)_m)$。利用邻近性结果，他们猜测 $b^* = Wx^* \in \mathbb{Z}^m$；猜测次数上界为 $(m\Delta)^{O(m^2)}$（忽略一个 n 因子后，这是复杂度中的主导项），并注意到 $\|W(x^* - z)\|_\infty \le (m\Delta)\|x^* - z\|_1$。随后，他们通过求解整数规划 $Wx = b^*, x \in \{0,1\}^n$ 恢复一个最优解。注意，这一版本的算法要求已知 W。

当未知时，他们证明可以用代理矩阵替换，其行对应于算法迄今为止看到的的线性无关梯度。第一个观察是，的梯度是的各行的线性组合。第二个关键观察是，对于，的任意整数解要么是最优解，要么其梯度不在的行空间内；在这种情况下，我们可以向中添加一行。因此，最多迭代猜测过程次，用替换，就能找到最优解。在这种情况下，复杂度的激增源于无法控制中出现的系数。事实上，这正是他们要求具有-Lipschitz 梯度，并且在整数输入上具有整数梯度的原因。

我们指出，这一思路可以更高效地实现，而无需承受 W' 中较差的参数。首先，我们注意到集合的基数

$$B_N = \{W'x : x \in \{0,1\}^n, \|\lfloor z \rfloor - x\|_1 \le N\}$$

可以仅用 N 和 W 的参数来界定。这是因为 W' 的每一行都是 W 中各行的线性组合。因此，$Wx = Wx'$ 蕴含 $W'x = W'x'$，进而有 $|B_N| \le O(N\Delta)^m$。接下来，注意到 B_N 可以在关于 n 和 $|B_N|$ 的多项式时间内枚举：这可由对 n 的归纳法得出。为此，对所有 $n' \le n+1$，我们定义

$$B_N^{(n')} = \{W'x : x \in \{0,1\}^n, \|\lfloor z \rfloor - x\|_1 \le N, \text{ and } x_i = \lfloor z_i \rfloor \text{ for all } i \ge n'\},$$

其中 $B_N^{(n+1)} = B_N$。现在，我们使用 $B_{N'}^1 = \{W'\lfloor z \rfloor\}$ 和递推关系，迭代生成集合 $B^{(n')}{}_{N'}$

$$B_{N'}^{(n'+1)} = \begin{cases} B_{N'}^{(n')} \cup (B_{N'-1}^{(n')} + W'_{n'}) & \text{if } \lfloor z_{n'} \rfloor = 0, \\ B_{N'}^{(n')} \cup (B_{N'-1}^{(n')} - W'_{n'}) & \text{if } \lfloor z_{n'} \rfloor = 1. \end{cases}$$

这里，$W'_{n'}$ 是 W'的第 n'列。我们注意到，$B^{(n')}{}_{N'-1}$ 中的每个向量都由某个 x 生成，当且仅当 $x_{n'} = 0$ $\lfloor z_{n'} \rfloor = 0$。因此，在添加（分别是

移除）$W'_{n'}$ 时，又存在一个合法的 x 生成该向量（此时 $\|\lfloor z \rfloor - x\|_1$增加了 1）。

与 Hunkenschr¨oder 等人的算法类似，我们现在从 W' 开始，其中仅有单行 $\nabla f(\lfloor z \rfloor)$。随后，对于 B_N 的每个元素，我们考虑相应的整数解 x （请注意，这样的 x 可以在上述递推中轻松恢复），并检查 $\nabla f(x)$ 与 W'的各行是否线性无关。若是，则将该梯度作为新行加入 W'。我们至多重复 m 次迭代，直到不再加入新行。然后返回在此过程中见到的最佳解x^* 。

定理 7。设 $g\colon \mathbb{R}^m \to R$为一个凸函数，设 $f(x) := g(Wx)$ 可通过函数值与梯度预言机访问，其中 $W \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ 是一个各项绝对值至多为 Δ的未知矩阵。则，给定连续松弛 $\min\{f(x) : x \in [0,1]^n\}$ 的一个最优解z，且该解至多有 m 个分数项，可以在时间 $n(N\Delta)^{O(m)}$内计算出一个最优整数解。这里N 是在所有最优整数解 x^*中 $\|z - x^*\|_1$ 的最小值。特别地，当 g 为可分凸时，运行时间变为 $n(m\Delta)^{O(m^2)}$。

5 结论与开放问题

本文证明，Hunkenschr¨oder 等人 [5] 提出的在投影上优化低维函数这一任务，即使在远比最初设想更一般的情形下，仍然是可处理的。这也为整数优化中的其他研究方向搭建了桥梁，例如少约束整数规划 [4]。

我们的主要结果留下了一些关于问题 (1) 的算法复杂度的问题，或者说，关于 g 为凸函数这一核心情形的问题。如前所述，鉴于已知的条件下界，我们无法期望在运行时间中避开 Δ^m 这一项。然而，是否必须包含 n^m 这一项或 m^2 这一指数，则不那么明了。

Eisenbrand 和 Weismantel [4],提出的整数规划算法是我们这一设定的一个特例（见应用），它不需要 n^m 这一项；在许多情况下，我们也可以通过合并 W中的重复列来避开这一项。若能在一般情形下，或至少在凸情形下去掉这一项，那就再好不过了。

关于 m^2 指数，已有一个源自 [4] 的著名难题。在该问题中，Eisenbrand 和 Weismantel 针对没有变量上界的情形，提出了指数为 $O(m)$ 的改进算法，取代了 $O(m^2)$；但在有变量界时，他们需要 $O(m^2)$。这是否不可避免仍不清楚。对于我们的问题，即使没有变量上界，我们的算法也需要指数 $O(m^2)$。事实上，这个指数在多个环节都会出现：猜测支撑时（假设 $n \approx \Delta^m$），以及猜测紧变量 $b^{(T)}$ 的投影时。

参考文献

[1] Antonios Antoniadis、Chien-Chung Huang、Sebastian Ott 和 Jos´e Ver- schae。《当你必须购买背包时，如何装入物品》。载于 MFCS 会议论文集，第 62–73 页，2013 年。[2] Cornelius Brand、Martin Kouteck´y 和 Sebastian Ordyniak。《针对树深度较小的混合整数线性规划的参数化算法》。载于 AAAI 会议论文集，第 12249–12257 页，2021 年。[3] Jana Cslovjecsek、Friedrich Eisenbrand、Christoph Hunkenschr¨oder、Lars Rohwedder 和 Robert Weismantel。《强多项式时间和近线性时间内的块结构整数规划与线性规划》。载于 SODA 会议论文集，第 1666–1681 页，2021 年。[4] Friedrich Eisenbrand 和 Robert Weismantel。《利用 Steinitz 引理得到的整数规划邻近性结果与更快算法》。ACM 算法汇刊，16(1):5:1–5:14，2020 年。[5] Christoph Hunkenschr¨oder、Sebastian Pokutta 和 Robert Weismantel。《在高维立方体上优化低维凸函数》。SIAM 优化杂志，2022 年。即将刊出。[6] Klaus Jansen 和 Lars Rohwedder。《整数规划、差异与卷积》。运筹研究数学，2022 年。即将刊出。[7] Ravi Kannan。《整数规划及相关格问题的改进算法》。载于 STOC 会议论文集，第 193–206 页，1983 年。[8] Kim-Manuel Klein。《关于两阶段随机整数规划的复杂度》。Math. Program.，192(1):319–337，2022 年。[9] Dusan Knop、Michal Pilipczuk 和 Marcin Wrochna。《约束数量较少的整数线性规划的紧复杂度下界》。ACM 计算理论汇刊，12(3):19:1–19:19，2020 年。[10] Hendrik W. Lenstra Jr.《变量数量固定时的整数规划》。运筹研究数学，8(4):538–548，1983 年。