arXiv:2303.02477v1 [math.GT] 4 Mar 2023

把手体中双曲链环的复合性质

Colin Adams 和 Daniel Santiago

摘要。我们研究把手体中的纽结和链环，其补空间为双曲空间，并考虑类似复合的运算。将两个此类开把手体的补空间沿分离的二次穿孔圆盘切开，使所得的四个把手体各自具有正亏格，再沿其边界上的二次穿孔圆盘将一对部分粘合起来，我们证明所得结果仍为双曲的。这与三维球面中任意一对纽结的复合形成对照，因为这种复合永远不会是双曲的。当两个二次穿孔圆盘都位于同一个把手体中，并将所得部分沿其边界上的二次穿孔圆盘副本与自身粘合时，也可得到类似结果。我们还介绍这些结果在带桩链环中的应用。

1. 引言

若紧致可定向三维流形 M 的流形 M' 是从 M 中削去所有环面边界并用球填补所有球面边界后得到的，且该流形具有有限体积双曲度量，使所有剩余边界分支均为全测地，则称 M 为 tg-双曲。对于把手体 H 中的链环 L ，若从 H 中去除 L 的开正则邻域所得补空间为 tg-双曲，则称这一对 (H, L) 为 *tg*-双曲的 。根据 Mostow–Prasad刚性定理，这种双曲度量仅取决于补空间 $H \setminus L$ 的同胚类型，因此我们可以为 (H, L) 定义双曲体积；该体积在 H 中对 L 作环境同痕时保持不变。

W. Thurston 的工作表明，紧致三维流形是 tg-双曲的，当且仅当其中不含真嵌入的本质圆盘、球面、环带或环面。如果一个曲面不是边界平行的，并且是不可压缩且边界不可压缩的，则称其为本质的。

把手体中补空间为 tg-双曲的纽结和链环示例见于 [1], [7], [8], [9], 和 [12]。在 [5], 中提供了大量此类示例。 [11]中的结果也可用于生成更多示例。

2020 数学主题分类。57K10,57K32.关键词和短语。

双曲链环，把手体。1

设 L_1 和 L_2 是把手体 H_1 和 H_2 中的两个链环，其亏格分别为 g_1 和 g_2。正如我们可以对 3-球面中的两个链环进行复合一样，我们也希望定义把手体中这些链环的复合。

为此，令 $D_1 \subset H_1, D_2 \subset H_2$ 为被 L_1, L_2 分别两次打孔的真嵌入圆盘，它们将球 B_1 和 B_2 与 H_1和 H_2 分隔开，使得 $B_1 \cap L_1$ 和 $B_2 \cap L_2$ 是平凡弧。去掉这些球后得到两个把手体 $H_1' \subset H_1$ 和 $H_2' \subset H_2$。令 $L_1' = H_1' \cap L_1$ 和 $L_2' = H_2' \cap L_2$。沿着 D_1 和 D_2，通过 ϕ将 H_1' 与 H_2' 粘合。由于 ϕ 将 L_1' 中弧的端点映到 L_2'中弧的端点，因此得到把手体中的一个链环，记作 $(H_1', L_1', D_1) \oplus_\phi (H_2', L_2', D_2)$，位于 H_3 中，如图1所示。

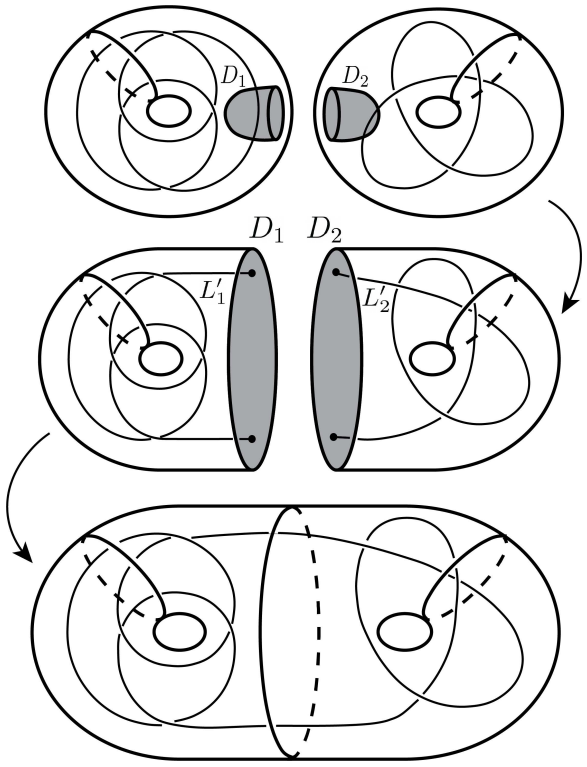

图1. 形成链环（H_1', L_1', D_1）$\oplus_\phi$（H_2', L_2', D_2）

.

与通常的链环复合不同，链环/把手体对 $(H_1', L_1', D_1) \oplus_\phi (H_2', L_2', D_2)$ 高度依赖于 D_1, D_2, 以及 ϕ。此外，虽然在 S^3 中复合链环永远不会得到双曲链环，但 $(H_1', L_1', D_1) \oplus_\phi (H_2', L_2', D_2)$ 可以是 tg-双曲的。

然而，即使 $H_1 \setminus L_1$ 和 $H_2 \setminus L_2$ 都是 tg-双曲的，$(H_1', L_1', D_1) \oplus_\phi (H_2', L_2', D_2)$ 也不一定是 tg-双曲的。事实上，总可以选取圆盘 D_1 和 D_2，使得至少一个圆盘是“打结的”，并且与 $(H_1', L_1', D_1) \oplus_\phi (H_2', L_2', D_2)$ 相关联的链环补空间中存在一个本质环面，如图2所示。

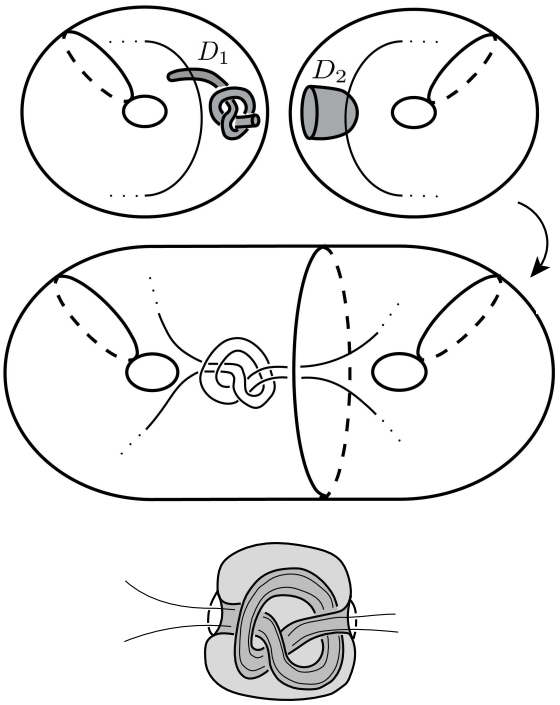

图2。通过选择 D_1，D_2 中的一个使其“打结”，可以在补空间 $H_3 \setminus L_3$ 中构造一个本质环面，它将一个结外部与最后一幅图中出现的形式的 H_3 分隔开来。

在第2节中，我们提供了一种避免“打结圆盘”问题的方法。在定理 2.1 中，我们证明：如果沿圆盘切开的两个把手体/链环对，分别表现为更高亏格的 tg-双曲把手体/链环对的子流形，那么原始把手体/链环对的复合也是 tg-双曲的。我们还展示了这一结果的一个类似版本：在单个把手体中沿两个分离的两次穿孔圆盘切开，再通过两次打孔圆盘之间的同胚，将所得流形与自身粘合。

在第3节中，我们讨论应用。如前所述， [5] 和 [11] 提供了许多把手体中的 tg-双曲链环示例，而我们在此处的构造可应用于这些示例，从而生成更多示例。此外，这些结果还可应用于 [3], 中介绍的带桩链环；这类链环对应于在补区域中放置孤立极点的链环投影，链环弧段无法越过这些极点。这些链环等价于把手体中的链环。

我们也可以考虑将其应用于结弧。文献 [4], 中对平面纽结为何称为双曲的定义，是根据把手体中相应的纽结为 tg-双曲来给出的。因此，这里的结果可以用于扩展已知的双曲平面纽结实例。

除了研究把手体中的纽结之外，也有关于加厚曲面中链环双曲性的研究，例如 [2] 和[11]。在这种情形下，复合相关的问题也已有探讨，例如 [6]。将那里采用的方法转用于我们的情形，可以避开打结圆盘的问题，并使把手体中的 tg-双曲链环复合后仍为 tg-双曲，而不要求它们像上文所述那样是子流形。也就是说，我们可以取一条测地线 g ，使其从把手体的表面延伸至链环。随后，取g的一个正则邻域（包括其在链环上的端点），便得到一个真嵌入的二次挖孔圆盘；它不可能打结，因此复合后仍能得到把手体中的 tg-双曲链环。不过，这里不再详述证明。

1.1. **致谢**。 特别感谢2022年夏季威廉姆斯学院 SMALL REU 项目纽结理论研究小组的其他成员，包括 Alexandra Bonat、MayaChande、Maxwell Jiang、Zachary Romrell、Benjamin Shapiro 和 Dora Woodruff。若没有与他们进行的许多富有帮助的讨论，本文便不会问世。

2. 主要结果的证明

对于光滑流形 M 中的任意子流形 S，我们将 $N(S)$ 记为 S 在 M 中的一个闭正则邻域，将 $N(S)$ 记为 $N(S)$ 的内部。对于空间 X，我们用 $|X|$ 表示 X 的连通分支数。

设 H_1、H_2 是两个包含链环 L_1 和 L_2 的把手体，且 $H_1 \setminus L_1$ 和 $H_2 \setminus L_2$ 是 tg- 双曲的。设 E_1 和 E_2 分别是 H_1 和 H_2 中的真嵌入圆盘，它们将 H_1 和 H_2 分别分割成把手体 H_1,1 、 H_1,2 和 H_2,1 、 H_2,2，其亏格分别为 g_1,1 、 g_1,2 和 g_2,1、g_2,2，其中所有亏格

均至少为1。此外，假设 E_1 和 E_2 分别被 L_1 和 L_2 两次打孔。令 $L_{i,j} = L_i \cap H_{i,j}$。

我们将相应的分离曲面记为 $M_{i,j} = H_{i,j} \setminus N(L_{i,j})$，并将 $F_i = E_i \setminus N(L_i)$ 记为相应的分离曲面。由于我们最终只关注 $M_{1,1}$ 和 $M_{2,2}$，为方便起见，我们通常省略额外的下标，分别将 $M_{1,1}$ 和 $M_{2,2}$ 写作 M_1 和 M_2。

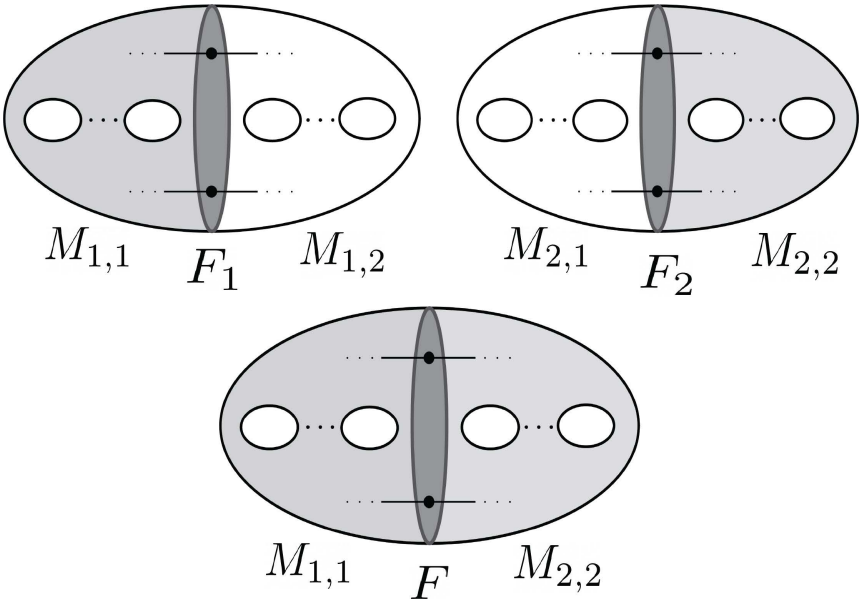

图3。链环 L_1、L_2 分别位于 H_1、H_2 中，以及把手体 H 中的链环 L。

沿保向同胚 ϕ：$F_1 \to F_2$ 将 ∂E_1 映射到 ∂E_2 并将 $\partial F_1 \cap \partial N(L_1, 1)$ 映射到 $\partial F_2 \cap \partial N(L_2, 2)$，把 H_1、1粘合到 H_2、2，得到一个记作 $(H_1, 1, L_1, 1, E_1) \oplus_\phi (H_2, 2, L_2, 2, E_2)$ 的流形/链环对；它是一个亏格为 $g_{1,1} + g_{2,2}$ 的把手体 H，其中包含链环 L。该链环由沿端点粘合 L_1、1和 L_2、2形成，如图3所示。令 H_L 为 H 中 $N(L)$ 的补集。我们将 F_1 和 F_2 在 H_L 中的像记为 F，并将 F 所对应的 H 中的分离圆盘记为 E。

L 中有一个连通分支，我们记作 K，它被 F 切成两条弧 K_1 和 K_2，这两条弧分别位于 $H_{1,1}$ 和 $H_{2,2}$ 中。我们将 $\partial N(K)$ 记作 T_K。我们将 T_K 中分别对应于弧 K_1 和 K_2 的子环带记作 A_{K_1} 和 A_{K_2}。除非另有说明，双曲流形均假定为 tg-双曲流形。

定理 2.1。 设 L_1 和 L_2 是分别位于 H_1 和 H_2 中的链环，且 $H_1 \setminus L_1$ 和$H_2 \setminus L_2$ 均为 *tg*-双曲的，其中 $E_1 \subset H_1$ 和 $E_2 \subset H_2$ 是二次穿孔圆盘，分别将 H_1 和 H_2 分离成把手体，且这些把手体的亏格均为正。若 ϕ : $E_1 \to E_2$ 是一个将 ∂E_1 映射到 ∂E_2 且将穿孔映射到穿孔的同胚，则 $(H, L) = (H_{1,1}, L_{1,1}, E_1) \oplus_\phi (H_{2,2}, L_{2,2}, E_2)$是 *tg*-双曲的。

为证明定理 2.1，只需证明：由于 $H_1 \setminus N(L_1)$ 和$H_2 \setminus N(L_2)$不含本质圆盘、球面、环带和环面，因此 $H \setminus N(L)$ 也不含这些曲面。本节余下部分将通过一系列引理排除这四类本质曲面。

引理 2.2。 曲面 F、 F_1、 F_2 在 H_L中是不可压缩且边界不可压缩的。

证明。 我们证明 F 是不可压缩且边界不可压缩的。同样的论证可立即应用于 F_1 和 F_2，因为我们只用到M_1 和 M_2 分别是双曲流形 $H_1 \setminus N(L_1)$ 和$H_2 \setminus N(L_2)$ 的子流形这一事实。

假设 F 是可压缩的。那么存在一个非平凡圆$C \subset F$，它在 M_1 或 M_2中围成一个圆盘 D'。假设 $D' \subset M_1$，并令D 为 E 中由 C围成的圆盘。假设 D 被L穿孔一次。那么球面 $D \cup D'$（经推移使交点变为横截的）被 K_1穿孔一次，这就产生矛盾。再假设 D 被 L穿孔两次。那么 K_1 包含在 H_1中由 $D \cup D'$ 围成的三维球内，因此可通过固定 K_1端点的同痕，将 K_1 推入 E 的一个邻域；于是 M_1 含有一个本质圆盘，其边界位于 ∂H 中且与 ∂E同痕，这与 $H_1 \setminus N(L_1)$ 是双曲流形相矛盾。若 $D' \subset M_2$，也可得到类似矛盾，因为 $H_2 \setminus N(L_2)$ 是双曲流形。

接下来，假设 F 是边界可压缩的。那么存在一条非平凡弧 $\alpha \subset F$，它与一条弧 $\beta \subset \partial H_L$ 共同围成一个圆盘 D，该圆盘位于 M_1 或M_2 中，并且满足 $D \cap F = \alpha$。假设 $D \subset M_1$。分两种情况。

情形 1：弧 β 位于 A_{K_1} 中。如果 β 在 A_{K_1} 中是平凡的，那么我们可以对 D 作同痕，使得 $\partial D \subset F$，从而得到一个关于 F 的压缩圆盘，这就产生了矛盾。如果 β 在 A_{K_1} 中是非平凡的，那么 K_1 与 F 中的一条弧共同围成 M_1 中的一个圆盘。因此，我们可以通过固定 K_1 的端点的同痕，将 K_1 推到 H_L 中的 F 上，这意味着 M_1 含有一个本质圆盘，其

°在 ∂H_L 中与 ∂E 边界同位，这与 $H_1 \setminus N(L_1)$ 是 tg-双曲的相矛盾。

情形 2： 弧 β 位于 ∂H中。假设 D 在$H_{1,\ 1}$中是分离的。那么 D将 M_1 分成两个区域，每个区域都包含 K_1的一个端点。由于 K_1 是连通的，这就产生了矛盾。

假设 D 在$H_{1,\ 1}$中不是分离的。弧 α 将环带 A与 F分隔开，使得 $A^* = A \cup D$ 是在 H_L 中的一个真嵌入环带，其一个边界分支是 T_K 上的一条子午线，另一个边界分支是∂H上的一条子午线。由于 D 在 $H_{1,\ 1}$中不是分离的， $\partial A^* \cap \partial H$ 在 ∂H中是非平凡的，因此 A^* 是 M_1中的一个本质环带，这与 $H_1 \setminus N$（L_1）是双曲的矛盾。

°由于 $H_2 \setminus N$（L_2）是双曲的，如果$D \subset M_2$，我们也会得到类似的矛盾，因此 F 是边界不可压缩的。□

引理 2.3。 流形 H_L 是不可约的。

证明。 假设 H_L 包含一个本质球面 S。首先假设$S \cap F = \emptyset$。那么 $S \subset M_1$或 $S \subset M_2$，这意味着 $H_1 \setminus \mathring{N}$（$L_1$）或 $H_2 \setminus N$（L_2）中的一个包含本质球面，矛盾。

接下来假设 $S \cap F \neq \emptyset$。我们假设 $|S \cap F|$ 在 H_L的所有本质球面中是最小的。 $S \cap F$ 中的一个最内层圆 C 在 S 上围成一个圆盘 D，该圆盘位于 S 中，并且 $D \cap F = C$。由于 F 是不可压缩的， C 在 F中围成一个圆盘 D'。于是我们可以将 $D \cup D'$ 视为$H_{1,\ 1}$或$H_{2,\ 2}$中的一个球面；根据最后一种情形，它必须在 H_L中围成一个球。这样我们就可以将 D' 穿过F推进，从而减小 $|S \cap F|$，这与极小性矛盾。

□

引理 2.4. 流形 H_L 是边界不可约的。

证明。 假设 ∂H_L 有一个压缩圆盘 D'。首先假设 $\partial D' \subset \partial N(L)$。由于把手体位于 S^3 中，我们只需考虑圆盘边界是 $N(L)$ 的某个环面分支的经线的情形。于是， L 的对应分支在 H 中围成一个圆盘，且该圆盘不与 L 的其他分支相交。取该圆盘与该分支之并的正则邻域的边界，可知 H_L 包含一个本质球面，而我们此前已经排除了这种情况。

现在假设 $\partial D' \subset \partial H$。如果 $D' \cap F = \emptyset$，那么 M_1 或 M_2 中分别有一个压缩圆盘，位于$\partial H_{1,\ 1}$ 或$\partial H_{2,\ 2}$ 中，这与° °所述的 $H_1 \setminus N(L_1)$ 和 $H_2 \setminus N(L_2)$ 是双曲的相矛盾。因此，我们可以假设

$D' \cap F \neq \emptyset$，并进一步假设 $|D' \cap F|$ 是 ∂H_L的所有压缩圆盘中最小的。由 F的不可压缩性可知， $A \cap F$的元素全都是弧。根据 $|D' \cap F|$ 的极小性， D' 中的 $D' \cap F$的一条最外层弧在 F中必定是非平凡的，否则通过手术，我们就能找到 ∂H_L 的一个压缩圆盘 D''，使得 $|D'' \cap F| < |D' \cap F|$。这为 F提供了一个边界压缩，矛盾。□

引理 2.5。 流形 H_L 不包含本质环带 A，其满足$A \cap F = \emptyset$。

证明。 假设 H_L 包含这样的环带，并且不妨设 $A \subset M_1$。我们可以将 A 视为 $H_1 \setminus N$（L_1）中的一个正常嵌入环带 A，我们将证明它是本质的 $H_1 \setminus N$（L_1），这与其为 tg-双曲的性质矛盾。

假设 A 在 $H_1 \setminus N$（L_1）中是可压缩的。于是，一条非平凡的简单闭曲线 $\gamma \subset A$ 在 $H_1 \setminus N$（L_1）中围成一个圆盘 D。我们假设 $|D \cap F_1|$ 在 $H_1 \setminus N$（L_1）中是 A的所有压缩圆盘中最小的。注意到 $D \cap F_1$ 的分支都是圆。如果 $D \cap F_1 = \emptyset$，则 $D \subset M_1$，这意味着 A 在 H_L中是可压缩的，矛盾。如果 $D \cap F_1 \neq \emptyset$，由 F_1的不可压缩性， $D \cap F_1$ 在 D 中的一条最内层圆在F_1中是平凡的，因此由 H_L的不可约性，我们可以通过同痕化简 $|D \cap F_1|$，这与极小性矛盾。

因此，A 在 $H_1 \setminus N$中是边界可压缩的（L_1）。（注意，如果 A 与边界平行，那么它就是边界可压缩的。）因此， A 的两个边界分支必定位于 ∂H_L的同一个连通分支上。我们考虑两种情形。

情形 1： 环带 A 的两个边界分支都位于 ∂H上。假设 A在 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中边界可压缩。于是， A中的一条非平凡弧与一同和 ∂H_1 中的一条弧围成一个圆盘 D，位于 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中。我们假设 $|D \cap F_1|$是 A的所有边界压缩圆盘中最小的。如果 $D \cap F_1 = \emptyset$，则 $D \subset M_1$，这意味着 A 在 H_L中边界可压缩，矛盾。如果 $|D \cap F_1| \neq \emptyset$，由 F_1 的不可压缩性和极小性可知，$D \cap F_1$ 的各个分支都是弧。 D 中的一条最外层弧在 F_1中必定是非平凡的，否则我们可以找到 D' 的一个边界压缩圆盘 A，位于 $H_1 \setminus N(L_1)$中，且 $|D' \cap F_1| < |D \cap F_1|$，矛盾。但这样我们就得到 F_1 在 H_L中的一个边界压缩圆盘，这与引理 2.2 矛盾。

情形 2: 环带 A 的两个边界分支都位于 ∂N上（L）。首先假设连通分支 ∂A 位于 ∂N（L）的同一个环面分支上

M_1，并且 A 在 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中边界可压缩。一条非平凡弧在 A 中与 $\partial N(L_1)$ 中的一条弧共同围成一个圆盘 D，位于 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中。注意到 $D \cap F_1$ 的各个分支都是圆，因此重复情形 1 中的极小性论证可知，A 在 H_L中边界可压缩，矛盾。

接下来，假设 ∂A 的连通分支都在 T_K 中。由于 $A \cap F = \emptyset$，∂A 的两个连通分支都是 T_K 中的（1，0）曲线。假设 A 在 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中是边界可压缩的，那么 A 中的一条非平凡弧 α 与一条弧 $\beta \subset T_K$ 围成 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中的一个圆盘 D。同样，选取 D，使得 $|D \cap F_1|$ 是最小的。

如果 $\beta \cap F = \emptyset$，那么 $|D \cap F_1|$ 的连通分支是圆，因此通过重复情形 1 中的极小性论证，并得到 H_L 中 A 的边界压缩，我们便得到矛盾。如果 $\beta \cap F \neq \emptyset$，那么$\beta$ 与 $\partial N(L_1) \cap M_{1,2}$ 至少相交于一条弧。因此，D 必定与 F 至少相交于一条弧。在 D 上选取一条最外层弧，我们得到$D \cap M_{1,2}$ 中的一个圆盘，其边界由两条弧组成：一条是 F 中的非平凡弧，另一条位于 $\partial N(L_1) \cap M_{1,2}$ 中。这与F_1 的边界不可压缩性矛盾。

□

引理 2.6. 流形 H_L 不包含本质环带。

证明。 假设 H_L 包含一个本质环带 A。我们假设 $|A \cap F|$在 H_L的所有本质环带中是最小的。根据引理 2.5，我们可以假设 $A \cap F \neq \emptyset$。共有三种情形。

情形 1： 环带 A 在 ∂H中有边界分支 $\partial_1 A, \partial_2 A$ 。根据极小性，以及 F的不可压缩性和边界不可压缩性，$A \cap F$ 的各个连通分支要么全是 A 和 F 中的非平凡圆，要么全是 A 和 F中的非平凡弧。

(1a) $A \cap F$的各个连通分支全是 A和 F中的非平凡圆。那么在同痕意义下，边界分支 $\partial_1 A, \partial_2 A$ 与 F不相交。假设 ∂A的某个连通分支（例如 $\partial_1 A$）位于 M_1中。那么 $A \cap F$ 中的一个圆 C 与 $\partial_1 A$ 一起在 M_1 中围成一个环带 $A^* \subset A$，使得 $A^* \cap F = C$。

令 D 表示 E 中由 C 围成的圆盘。假设 D 被 L 穿孔一次。那么 H_L 包含一个真嵌入的一次穿孔圆盘 $D \cup A^*$，将其从 E 推开后，可在 M_1 中得到一个本质环带，这与引理 2.5 矛盾。

假设 D 被 L 两次穿孔。那么我们可以沿着 E 将 C 滑出至 ∂H。因此，我们得到一个完全包含在 M_1 中的环带 A^{**} 。

因此， A^{**} 是 M_1 中的正常嵌入环带。由于 $\partial_1 A$， C 在 A 中均非平凡，所以它是不可压缩的。因此，根据引理 2.5，它在 H_L 中边界可压缩，且两条边界曲线都位于 ∂H_1 上。

对 A^{**} 进行边界压缩后，得到一个边界位于 ∂H_1 上的圆盘。如果该圆盘的边界在 H_1 上是平凡的——当 A^{**} 的两条边界在 ∂H_1 上平行时便是如此——那么我们可以用该圆盘和 ∂H_1 上的另一个圆盘构成一个球面。 H_L 的不可约性意味着我们随后可以对 A 作同痕，以减少其与 F 的交点数，这就产生了矛盾。

如果该圆盘的边界在 H_1 上是非平凡的，就会与 H_L 的边界不可约性矛盾。

(1b) $A \cap F$ 的各连通分支在 A 和 F 中都是非平凡弧。于是 A 被 F 切割成 M_1 和 M_2 中的圆盘，其边界由 F 中一对相对边和 ∂H 中一对相对边组成。令 $D_1 \subset M_1$ 为其中一个这样的圆盘。令 $R \subset F$ 为一个矩形，使得 R 的一对相对边是 $D_1 \cap F$ 的连通分支，而另外两边是 ∂E 中互不相交的曲线。那么 $D_1 \cup R$ 要么是 H_L 中真嵌入的 Möbius 带 ¨ Q ，要么是真嵌入环带 $A_1 \subset M_1$ 。

我们先考虑它是环带的情形，并断言它在H_L中是本质的。由 $|A \cap F|$ 的极小性可知， A_1 不可压缩，否则我们可以将 D_1 穿过 F推过去。

假设 A_1 在 H_L中边界可压缩。那么，一条非平凡弧$\alpha \subset A_1$ 与一条弧 $\beta \subset \partial H$围成 H_L 中的一个圆盘 D 。我们假设，在 H_L中， $|D \cap F|$是 A_1 所有边界压缩圆盘中最小的。由 F的极小性和不可压缩性可知， $D \cap F$ 的各个连通分支都是弧。经过同痕，我们可以假设 $\alpha \subset D_1$ 或 $\alpha \subset R$。在前一种情形下，D 给出 A的边界压缩，矛盾。现在假设 $\alpha \subset F$。若 D 与 F 的交集不包含一条不同于 α的弧，则 D给出 F的边界压缩，矛盾。若 $D \cap F \neq \emptyset$，则 $D \cap F$ 在 D 中的一条最外层弧在 F 中是非平凡的；否则，通过手术，我们就能找到一个沿着α、满足 $|D' \cap F| < |D \cap F|$的 A_1 的边界压缩圆盘 D' 。这将给出 F的边界压缩，矛盾。若 A_1 在 H_L中边界平行，则它将边界可压缩，因此 A_1 是包含于 M_1中的 H_L 内的本质环带，这与引理 2.5矛盾。

现在假设 $D_1 \cup R$ 是一个莫¨比乌斯带 Q。那么， Q 的正则邻域的边界是一个环带 A_2。它无法在 Q 的正则邻域内压缩，因为那里是一个实心环面，而A_2 的边界同痕于实心环面的核心曲线的两倍。它也无法向 Q 的正则邻域外压缩，因为其任一连通分支

的环带边界都与环带的核心曲线相链，这是由莫¨比乌斯带的扭转造成的。如果核心曲线围成一个圆盘，该圆盘就不会与环带的边界曲线相交，这与相链关系矛盾。基于与 A_1 相同的理由，它也是边界不可压缩的，这同样与引理 2.5 矛盾。

情形 2： 环带 A 的边界分支为 $\partial_1 A$ 和 $\partial_2 A$，位于 $\partial N(L)$ 上。分为两种情形。

(2a) $\partial_1 A$ 和 $\partial_2 A$ 都位于环面分支 $T_{K_{1,i}}$ 和 $T_{K_{2,j}}$ 上，其中$T_{K_{1,i}}$ 是 $\partial N(L)$ 的一个环面分支，完全包含于 M_1 中；$T_{K_{2,j}}$是 $\partial N(L)$ 的一个环面分支，完全包含于 M_2 中。根据 $|A \cap F|$ 的极小性以及 F 的不可压缩性， $A \cap F$ 的各个分支都是在 A 和 F 中均非平凡的圆。 $A \cap F$ 中的圆 C 在 A 中界定一个子环带 A^*，其满足 $\partial_1 A$，且 $A^* \cap F = C$；由于 C 和 $\partial_1 A$ 在 A 中均非平凡，因此该环带不可压缩。

设 $A^* \subset M_1$。令 D 表示 E 中由 C围成的圆盘。若 D 一次穿孔，我们可以将其与 A^*合并，于是 H_L 在 M_1 中包含一个本质环带，其一个边界分支位于$T_{K_{1,\ i}}$另一个边界分支位于 T_K。若 D 两次穿孔，我们可以将环带 $F \setminus D$ 粘接到 A^* 上，从而得到一个在 H_L 中本质且包含于M_1 的环带，其一个边界分支位于$T_{K_{1,\ i}}$另一个边界分支位于 ∂H。这两种情形都与引理 2.5 矛盾。若 $A^* \subset M_2$，我们也会得到类似的矛盾。

(2b) 环带 A 至少有一个边界分支 $\partial_1 A$ 位于 K上。首先假设 $\partial_1 A$ 是 T_K中的一条（1，0）曲线。那么 $\partial_2 A$ 要么是 T_K 中的一条（1，0）曲线，要么位于某个$T_{K_{1,\ i}}$或$T_{K_{2,\ j}}$中。由 $|A \cap F|$ 的极小性以及 F的不可压缩性， $A \cap F$ 的各个分支都是在 A 和 F中非平凡的圆。 $A \cap F$ 中的一条圆 C 围成 A 的一个子环带 A^*，其中 $\partial_1 A$满足 $A^* \cap F = C$。注意，由于 C 和 $\partial_1 A$ 在 A中是非平凡的， A^* 是不可压缩的。

不失一般性，假设 $A^* \subset M_1$。令 D 表示 E 中由 C围成的圆盘。先假设 D 是一次穿孔的。于是，通过将 D 粘合到 A^*上，我们得到一个新的环带 A'^*，其两条边界现在都是 T_K上的子午线。根据引理 2.5，我们可以将 A'^* 视为 M_1中的一个正常嵌入环带，它在 H_L 中边界可压缩。

根据 H_L的不可约性，该环带必定是边界平行的。若它平行于 H_L的 M_1 侧边界，则我们可以利用这一点对 A作同痕

使其沿 T_K 移动，并减少它与 F的交曲线数量，这与极小性矛盾。它不可能平行于另一侧的边界，因为把手体的边界就在那一侧。

如果 D 被穿孔两次，那么 H_L 在 M_1中包含一个本质环带，其一个边界分支位于 T_K 上，另一个边界分支位于 ∂H上。这与引理 2.5 矛盾。

接下来，假设 $\partial_1 A$ 是 T_K 中的一条带有 $|q| > 0$的（p，q）曲线。如果 $\partial_2 A \subset T_K$，那么 $A \cap F$ 的所有分支都是 A中的非平凡弧。如果 $A \cap F$ 中有一条最内层弧在 F中是平凡的，那么 A 边界可压缩，这与其本质性矛盾。

因此，$A \cap F$ 中的所有弧都是非平凡的，并且在 F上彼此平行。$A \cap M_1$ 的每个分支都是一个圆盘，其边界由四条弧组成，其中两条位于 ∂N（K）中，另两条位于 F中。设 D 是其中一个。其边界上位于 F 中的两条弧从 F 中切出一个圆盘 D'，该圆盘边界上也有两条弧位于 ∂N（K）中。于是$D \cup D'$要么是一个真嵌入的 M¨obius 带 Q，要么是一个环带 A'。我们先考虑环带的情形。

如果 A' 可压缩，那么我们可以将压缩圆盘与 A' 的一半结合起来，得到一个边界由两条弧组成的圆盘，其中一条弧位于 F 中，另一条位于 ∂N 中（K）。但这与 F 的边界不可压缩性矛盾。

如果 A' 可由圆盘 D'' 边界压缩，我们可以令位于 $D'' \cap A'$ 中的弧也位于 $D' \subset F$ 中，从而得到对 F 的边界压缩。因此，A' 是一个不与 F 相交的本质环带。因此，A' 的存在与引理 2.5 矛盾。

如果 $D \cup D'$ 是一个莫比乌斯带 Q，那么 Q 的边界必定是 T_K 上的一条子午线，因为它完全包含在 M_1 中，而且它不可能是平凡的；否则，我们就会得到一个嵌入 M_1 中的射影平面，而我们可以将其嵌入 S^3 中，这就产生了矛盾。

Q 的正则邻域的边界是一个环带 A''。它向内不可压缩，因为 Q 的正则邻域是一个实心环面，而环带的核心曲线绕实心环面的核心曲线两圈。它向外不可压缩，因为其边界是 T_K上的子午曲线。它是边界不可压缩的，因为任何边界压缩都会产生 F的边界压缩，这就导致矛盾。因此，同样，存在一个避开 F的本质环带 A''，与引理 2.5 矛盾。

假设 $\partial_2 A$ 位于某个 $T_{K_1, i}$ 中。那么 $A \cap F$ 中必定存在一条交弧，它从 A 中截出一个圆盘，其一条边界位于 F，另一条边界位于 ∂N（K_2）。我们可以通过 H_L 中固定 K_2 端点的同痕，将 K_2 推到 E 上。这说明 H_L 中包含一个压缩

圆盘，其边界在 ∂H 中与 ∂E 同痕。如果 $\partial_2 A$ 位于某个 $T_{K_{2,j}}$ 中，也会得到类似的矛盾。

情形 3： 环带 A 的一个边界分支 $\partial_1 A$ 位于 $\partial N(L)$ 上，另一个边界分支 $\partial_2 A$ 位于 ∂H 上。

设 J 是 L 的连通分支，其正则邻域的边界与 A 相交。那么 $A \cup \partial N(J)$ 的正则邻域边界是一个环带 A'，其两个边界都在 ∂H中。A' 的边界是在 H 边界上的两条平行非平凡曲线，它们也平行于 ∂H 上 A 的一个边界。因此 A' 必定不可压缩。

若 A' 边界可压缩，则对环带 A' 进行边界压缩，得到一个圆盘 D''，其边界位于 ∂H中。根据 H_L 的边界不可约性，D'' 的边界必定在 ∂H 中是平凡的。边界压缩对 $\partial A'$ 的影响，是沿着一条连接两条曲线的弧对它们进行手术。沿着一条不在两条曲线之间环带内的弧，对亏格至少为二的曲面上的两条非平凡平行曲线进行手术，会得到一条非平凡曲线。因此，边界压缩不能朝向那一侧。于是，边界压缩必定朝向环带在 ∂H 中、被这两条曲线共同界定的一侧。但这一侧是一个缺少核心曲线 J 的实心环面，因此无法朝这一侧进行边界压缩。所以 A' 是 H_L 中的一个本质环带，其两个边界都位于 ∂H 上，这与情形 1 矛盾。

□

引理 2.7。 流形 H_L 不含本质环面。

证明。 假设 H_L 含有一个本质环面 $\mathcal{T}$。我们假定 $|\mathcal{T} \cap F|$在 H_L的所有本质环面中是最小的。

首先假设 $\mathcal{T} \cap F = \emptyset$。那么 $\mathcal{T} \subset M_1$ 或 $\mathcal{T} \subset M_2$。为方便起见，我们假设 $\mathcal{T} \subset M_1$。于是可以将 $\mathcal{T}$ 视为 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中的一个环面$\mathcal{T}$，并将证明它是本质的。

假设 $\mathcal{T}$ 在 H_1 中与边界平行。$\mathcal{T}$ 必定平行于 $\partial N(L_1)$ 的某个连通分支。若它与某个连通分支 J边界平行，那么$\mathcal{T}$必定将一个实心环面与 H_1 分隔开，而 H_1 以 J 为其核心曲线。由于 F 位于 $\mathcal{T}$的与 H 所在侧相对的一侧，实心环面也不可能与 F_1 相交。因此，实心环面和 J 都在 M_1中，而 T 在 H_L中边界平行，这与我们的假设矛盾。

假设 $\mathcal{T}$ 在 H_1 中是可压缩的。$\mathcal{T}$ 界定了一个圆盘 D，位于 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中。我们假设 $|D \cap F_1|$ 在其中是最小的

$\mathcal{T}$ 在 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中的所有压缩圆盘。注意，$D \cap F$ 的连通分支是圆。

如果 $D \cap F_1 = \emptyset$，那么 $D \subset M_1$，这意味着 $\mathcal{T}$在H_L中是可压缩的，矛盾。如果 $D \cap F_1 \neq \emptyset$，由 F的不可压缩性，$D \cap F_1$ 在 D 中的最内层圆在 F_1中是平凡的，因此由 H_L的不可约性，我们可以通过同痕化简—$|D \cap F_1|$，这与极小性矛盾。由此可知，$\mathcal{T}$在 $H_1 \setminus N(L_1)$ 中是本质的，这与 $H_1 \setminus N(L_1)$ 是双曲的相矛盾。由于 $H_2 \setminus N(L_2)$ 是双曲的，如果$\mathcal{T} \subset M_2$，我们同样会得到矛盾。

接下来假设 $\mathcal{T} \cap F \neq \emptyset$。由 $|\mathcal{T} \cap F|$ 的极小性和 F 的不可压缩性，$\mathcal{T} \cap F$ 的分支是圆，它们在 $\mathcal{T}$ 和 F 中都是非平凡的。

设 A_C 是 $M_1 \cap \mathcal{T}$ 的一个连通分支，它是一个环带，边界是 $F \cap \mathcal{T}$ 中的两个圆。我们声称，A_C 的边界是两个不相交的圆 C_1 和 C_2，它们围成的圆盘在 E 中被 L 穿孔一次。反设不然。那么，两个圆 C_1, $C_2 \subset A_C \cap F$围成圆盘D_1，$D_2 \subset E$，使得 $D_2 \subset D_1$。如果 D_2 被 L 穿孔一次，而 D_1 被 L 穿孔两次，那么我们可以将 D_2 和稍微移动过的 D_1 粘合到 A_C 上，从而得到 H 中的一个球面，它被 L 穿孔三次。因此，D_1, D_2 都被 L穿孔一次或两次。

假设 D_1 和 D_2 都被穿孔两次。将 $F \setminus D_i$ 中的环带添加到 A_C 后，我们得到一个边界位于 ∂H 中的环带 A'_C。根据引理 2.6 证明中情形 1 的证明所用的相同推理，A'_C 在 M_1 中边界可压缩，并且我们可以将 A_C 穿过 F 推动，以减少$|A \cap F|$，这与极小性矛盾。

假设 D_1 和 D_2 都各有一个穿孔。圆 C_1 和 C_2围成一个环带$A_{C,\ F}$位于 F 中，且不被 L穿孔。

将带孔圆盘 D_1 和 D_2 粘合到 A_C上，并将 D_1部分稍稍滑离 F，我们得到一个新的环带A_C，其边界位于 A_{K_1}上。此环带$A_C \subset M_1$ 真嵌入于 H_L 中，且具有 $\partial A_C \subset T_K$。A_C 的边界是 T_K 上的子午线，它们围成一个环带$A'_{C,\ F} \subset A_{K_1}$，该环带由$A_{C,\ F}$在 M_1中经同痕得到。注意，A_C在 H_L 中不可压缩，因为 A_C 不可压缩，因此根据引理 2.5，它在 H_L中边界可压缩。于是，A_C 中的一条非平凡弧 α 在 H_L中与一条弧 $\beta \subset T_K$围成一个圆盘 D_β。

如果 β 不是 $A'_{C,F}$ 中的非平凡弧，那么它与 A_{K_2} 相交于一条非平凡弧。此时，D_β 就成为环面 $A_C \cup (T_K \setminus A'_{C,F}$ 的压缩圆盘。沿该圆盘压缩会在 H_L 中得到一个球面，将 K 与 ∂H 分隔开，这与 H_L 的不可约性矛盾。

如果 β 不是 $A'_{C,F}$ 中的非平凡弧，那么圆盘 D_β 位于 M_1 中被 A_C 与 H_L 分隔开的区域内。因此，我们可以通过同痕推移 D_β，从而得到 A_C 在 M_1 中的边界压缩圆盘；于是 A_C 在 M_1 中边界可压缩，且与边界平行（因为 M_1 中的边界压缩弧是 $A_{C,F}$ 中的非平凡弧），并且我们可以将它穿过 F 推移，以减少 $|A \cap F|$，这就产生了矛盾。

若 $A_C \subset M_2$，我们将得到类似的矛盾。因此，我们可以假设 A_C 的边界是两个不相交的圆，它们在被 L 一次穿孔的 E 中界定不相交圆盘。

如果在 M_1 中有多于一个这样的环带，并且在 M_2 中有一个这样的环带，那么当我们沿着 $\mathcal{T}$ 的一条经线前进、依次沿这些环带移动时，它们在穿过 F 时必然一个套在另一个里面地循环，环面将永远无法闭合。因此，在 F 的每一侧各只有一个，并且 $\mathcal{T}$ 被切成两个不可压缩的（因为 $\mathcal{T} \cap F$ 的元素在 $\mathcal{T}$ 中是非平凡的）环带 $\mathcal{A}_1 \subset M_1, \mathcal{A}_2 \subset M_2$。

如果我们将带孔圆盘 D_1 和 D_2 粘合到 $\mathcal{A}_1$ 上，就得到一个不可压缩的环带；根据引理 2.6，它必定与 $\partial N(K)$ 边界平行。对 $\mathcal{A}_2$ 也同样成立，这意味着环面 $\mathcal{T}$ 与边界平行，这与其为本质的相矛盾。

□

定理 2.1 很容易适用的一种情形是当 $H_1 = H_2$，且 $L_1 = L_2$时。参见图 4。

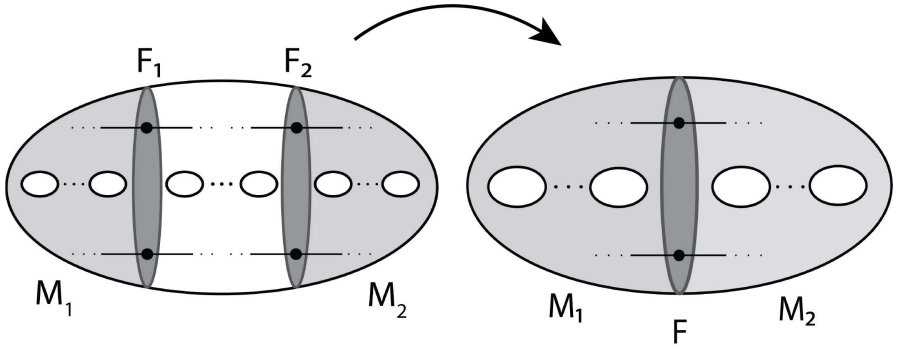

图 4. 将定理 2.1 应用于同一个把手体中的两个部分。

推论 2.8。 设(H, L) 是一个 *tg*-双曲把手体/链环对。设 E_1 和 E_2 是 H中的两个互不相交的两次穿孔的分隔圆盘。沿这两个圆盘切开后，边界上含有两个圆盘的那一部分可以

舍弃后，假设这两个部分均为正亏格，则可沿边界上的一个圆盘将它们粘合在一起，所得的把手体/链环对将是 *tg*-双曲的。

注意，被移除的中间部分不必具有正亏格。因此，我们可以从把手体中的一个 tg-双曲链环移除适当的缠结，同时仍保持 tg-双曲性。由此，为了判定把手体中一个链环的 tg-双曲性，可以移除所有这样的缠结；如果所得的简化链环由于存在本质球面、圆盘、环带或环面而不是 tg-双曲的，那么原链环也不可能是 tg-双曲的。

定理 2.1 的证明思路可推广到另一种情形：我们沿圆盘 E_1 和 E_2 将一个把手体切分为三部分，并沿着 E_1 和 E_2的副本将其中一部分与其自身粘合。

设 L_1 是把手体 H_1 中的一个链环，且 (H_1, L_1) 是 tg-双曲的。设 E_1 和 E_2 是 H_1 中的两个非平凡分离圆盘，它们各自被 L_1两次穿孔，并且共同将一个亏格为 g_1,2 的把手体 H_1,2 与两个不相交的、亏格分别为 g_1,1、g_1,3 的把手体 H_1,1、H_1,3 分离，其中所有这些亏格均为正。令 M_1,$_i = H_1$,$_i \setminus N(L_1)$ $F_i = E_i \setminus N(L_1)$。令$L_1$,$_2 = L_1 \cap H_1$,2。

通过保向同胚 ϕ 粘合 $\partial M_{1,2}$ 的子集 F_1, F_2，其中 $F_1 \to F_2$ 将 ∂E_1 映到 ∂E_2，并将 $\partial F_1 \cap \partial N(L_1)$ 映到 $\partial F_2 \cap \partial N(L_2)$，可得到把手体 H 中的链环补空间 $H_L = H \setminus N(L)$，其亏格为 $g_{1,2} + 1$，如图 5 所示。我们将 F_1 和 F_2 在 H_L 中的像记为 F。

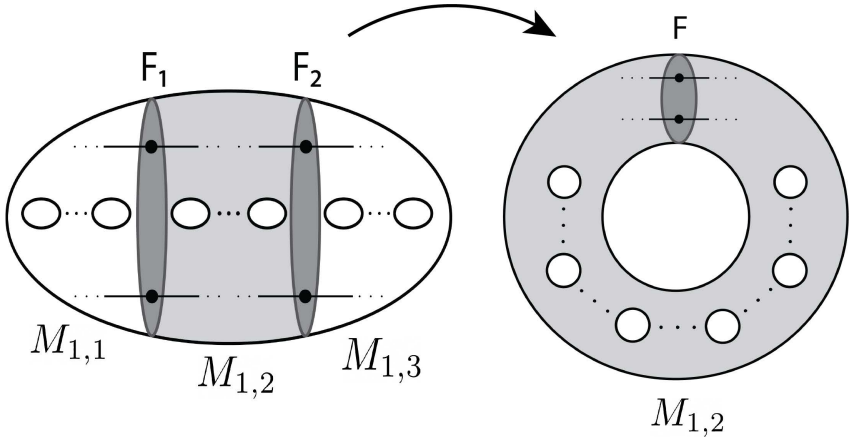

图 5. 通过同胚将 M 自身粘合 $F_1 \to F_2$。

定理 2.9. 假设 $H_1 \setminus L_1$ 是 *tg*-双曲的，且 $E_1 \cap L_1 = E_1 \cap K, E_2 \cap L_1 = E_2 \cap K'$，其中 K 和 K' 是 L_1 的两个不同连通分支，则 H_L 是 *tg*-双曲的。

定理 2.9 可由与定理 2.1 相同的论证推出。也就是说，曲面 $F, F_1,$ 和 F_2 均不可压缩且边界不可压缩，我们可以据此得出与引理 2.2–2.7 中类似的矛盾。必须要求 E_1 和 E_2 上的穿孔分别对应于 L 的两个不同连通分支 K 和 K'，才能确保一个边界位于 ∂H 中的环带（它与 F 相交于非平凡弧）被切割成圆盘，且这些圆盘的两条相对边位于 F中。若没有这一条件，结论一般并不成立，如图 6 所示。

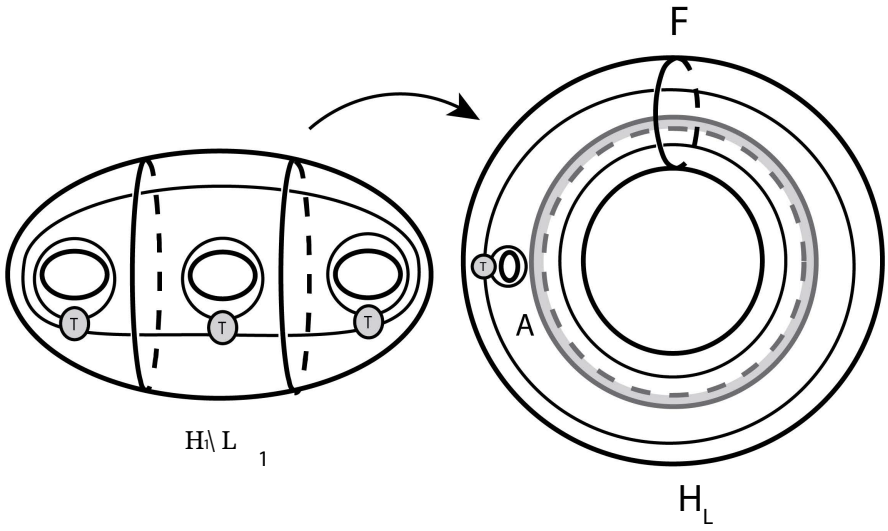

图 6. 去掉关于 E_1, E_2 上穿孔的条件后，定理 2.9 的一个反例。这里的 T是一个交错缠结，可以选择使其满足 [5] 中定理 1.6 的条件（该定理将在下一节出现），从而使 $H_1 \setminus L_1$ 为 tg-双曲的。切割并粘合后，H_L 包含一个如图所示（垂直于页面）的本质环带 A，其边界位于 ∂H 中；该环带与 F 相交于一条非平凡弧，并将链环的一个连通分支分隔开。

3. 应用

3.1. 带桩链环。 把手体中的链环与 [3] 中定义的带桩链环理论直接相关。（这些链环也称为隧道链环，如

[10] 所述；或者称为星标链环，如 N. G¨ug¨umc¨u 和 L. Kauffman 尚未发表的研究中所述。）本节中我们只讨论 S^2 中的带桩链环。带桩链环是一个二元组 $(L_D, \{p_i\}_{1\le i\le n})$，由链环图 $L_D \subset S^2$ 和一组有限个 $\{p_i\}_{1\le i\le n}$ 孤立极点构成；这些极点是互不相同的点 $p_1, \dots, p_n \in S^2$，且每个 p_i 都位于 $S^2 \setminus L_D$ 的一个连通分支中。带桩链环视为在不让链环弧段越过 $\{p_i\}_{1\le i\le n}$ 中元素的前提下，经过 Reidemeister 变换后等价。一条带桩链环按如下方式确定一个亏格为 $n-1$ 的把手体中的链环。选取开圆盘 $D_1, \dots, D_n \subset S^2 \setminus L_D$，分别包含 $p_1, \dots, p_n$，并满足 $D_i \cap D_j = \emptyset$（对 $i \neq j$）。那么 $D_L := S^2 \setminus (\cup_{i=1}^n D_i)$ 是一个挖孔圆盘的闭包，而 L_D 确定了把手体 $D_L \times [0,1]$ 中的一条链环 L_D，如图 7 所示。若 $(D_L \times [0,1], L_D)$ 按第 1 节的定义是双曲的，则带桩链环 $(L_D, \{p_i\}_{1\le i\le n})$ 称为 tg-双曲。

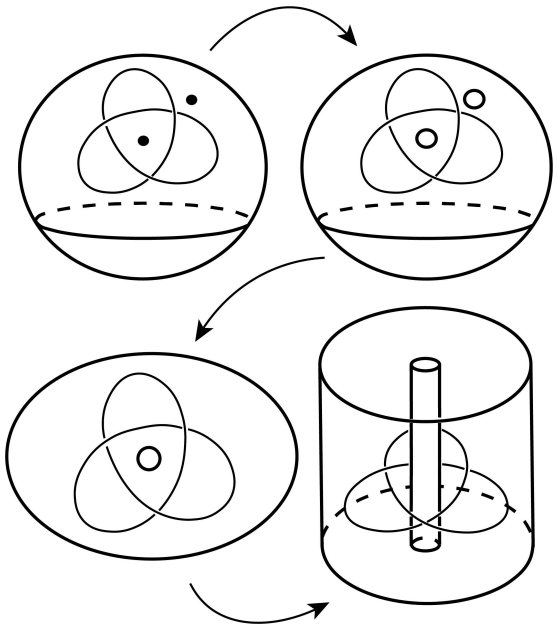

图 7. 一个带桩链环 $L_D \subset S^2$，其含有 n 个桩，确定了亏格为 $n-1$ 的把手体中的链环 L_D。

给定一个带桩链环 $(L_D, \{p_i\}_{1\le i\le n})$，任意简单闭合曲线 $\gamma\colon [0,1] \to S^2$ 满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = p_i$ 的真嵌入弧 $a_\gamma \subset S^2 \setminus (\cup_{i=1}^n D_i)$，其中 $\partial a_\gamma \subset \partial D_i$，因此在 $D_L \times [0,1]$ 中得到一个真分离圆盘 $a_\gamma \times [0,1]$，如图 8 所示。如果 γ 与 L_D 相交两次，该圆盘可能来自满足定理 2.1 条件的粘合操作，因此定理 2.1 提供了一种方法，可以通过检查一个复杂的带桩链环是否

是双曲的：检查它是否被 γ 切开为若干块，而这些块来自双曲系桩链环。

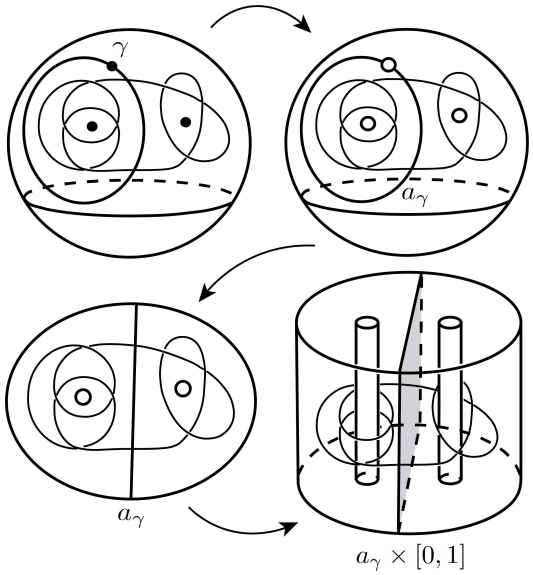

图 8. 以系桩纽结的一个极点为基点的简单闭合曲线 γ 确定了相应把手体中的一个分离圆盘。

3.2. **交替链环**。 要证明把手体中的一个链环（H， L）是 tg-双曲的，只需证明 H 可以赋予一种乘积结构$H \cong F \times [0,1]$，其中 F 是一个圆盘被穿孔非零次后的闭包，并且 L 到曲面 $F \times \{1/2\}$ 上的投影是交错的，并满足以下条件。

定理 3.1（定理 1.6 见 [5]）。 设 F 为一个具有非空边界且不是圆盘的投影曲面，并设 $L \subset F \times I$ 为一个具有连通、约化、交错投影图 π（L） $\subset F \times \{1/2\}$ 且至少有一个交叉的链环。设 $M =$（$F \times I$）$\setminus N$（L）。则当且仅当满足以下四个条件时， M 是 *tg-* 双曲的：

（*i*） $\pi(L)$ 在 $F \times \{1/2\}$上是弱素的；（*ii*）$(F \times \{1/2\}) \setminus \pi(L)$的每个补区域的内部，要么是开圆盘，要么是开环带；（*iii*）若$(F \times \{1/2\}) \setminus \pi(L)$ 的区域 R_1 和 R_2 共用一条边，则其中至少一个是圆盘；（*iv*）不存在 F 中的简单闭曲线 α，它与 $\pi(L)$ 恰好在一个非空的交叉集合处相交，并且对于每个这样的交叉，

α 平分该交叉，并且在该交叉处相接的两个相对补区域中、在该交叉附近不与 α 相交的那两个区域均为环带。

所谓弱素，是指投影曲面上不存在这样的简单闭曲线：它与链环相交两次，并且围成一个包含交叉的圆盘。请注意，这些条件都很容易通过投影来检验。

按照第2节中的记号，这提供了一种简单的方法来证明 (H_1, L_1) 和 (H_2, L_2) 是 tg-双曲的。请注意，当 L_1, L_2 都是交错的，且 K_1, K_2 粘合在一起后使 K 成为交错的时，定理 2.1 给出了预期的结果。特别是，定理 2.1 可应用于将交错块粘合到非交错块这一一般情形。

例如，对于图9中的任意弱素交错缠结 T（交叉数为 0 或 1 的缠结，以及水平二边形序列除外，因为它们不满足定理的条件），我们都可以构造块 M_T。然后，若取把手体中任意其他正亏格双曲结，并用一个二次穿孔圆盘将其分成两个正亏格块，就可以将所得的任一块与块 M_T 粘合，同时仍得到 tg-双曲把手体/链环对。

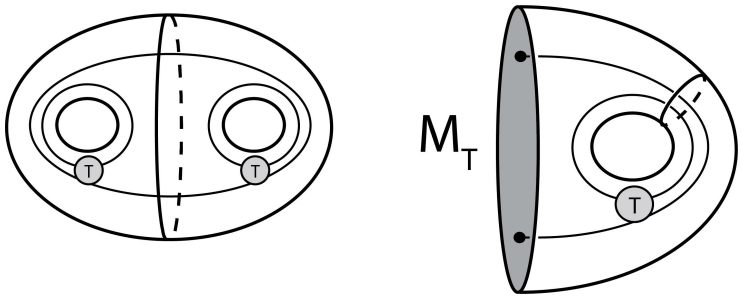

图9. 如果 T 是满足简单限制条件的交替缠结，则图示的亏格2握手体/链环对是 tg-双曲的，因此我们可以将 M_T 与来自另一个双曲把手体/链环对的任意其他部分粘合，从而得到另一个 tg-双曲把手体/链环对。

3.3. **平面纽结**。 结弧是纽结的一种变体，由线段的投影定义，并视 Reidemeister 变换为等价；同时禁止链环弧段从线段端点上方或下方穿过。当投影曲面是平面时，我们称该结弧为平面纽结。在 [4], 中，给出了平面纽结的两种双曲性定义。第一种称为平面反射加倍映射，它将结弧关联到一个三亏格把手体中的链环。如果链环补空间是 tg-双曲的，则称该结弧在反射加倍映射下是双曲的。第二种

称为平面粘合映射，它将结弧关联到一个二亏格把手体中的链环。同样，如果链环补空间是 tg-双曲的，则称该结弧在粘合映射下是双曲的。 [4] 中的命题 2.5 证明，平面纽结在反射加倍映射下的双曲性蕴含其在粘合映射下的双曲性，但反之则不成立。此外，反射加倍映射下的体积始终不小于粘合映射下的体积。定理 2.1 与 [5] 中的结果相结合，可以给出许多在这两种构造之一之下为双曲的平面纽结实例。

参考文献

[1] C. Adams。双曲结补空间中的拟福克斯曲面。*J. Austr. Math.Soc.*，55:116–131，1993。[2]C. Adams、C. Albors-Riera、B. Haddock、Z. Li、D. Nishida、B. Reinoso 和 L. Wang。加厚曲面中的链环的双曲性。*Topology and its Applications*，256(1):262–278，2019。[3] C. Adams、A. Bonat、M. Chande、J. Chen、M. Jiang、Z. Romrell、D. Santiago、B. Shapiro 和 D. Woodruff。结弧与空间图的推广。*ArXiv2209.01922*，2022。[4] C. Adams、A. Bonat、M. Chande、J. Chen、M. Jiang、Z. Romrell、D. Santiago、B. Shapiro 和 D. Woodruff。双曲结弧。*ArXiv2209.04556*，2022。[5] C. Adams 和 J. Chen。带边界投影曲面上的交替链环。*preprint*，2023。[6] C. Adams 和 A. Simons。虚结复合的 tg-双曲性。*ArXiv:2110.09859 revised version*，2021。[7]K. Baker 和 N. Hoffman。三维流形中的例外手术。*ArXiv2101.12259v2*，2021。[8] R. Frigerio。S^3中的一个双曲图补空间无穷族。*J. KnotTheory Ramifications*，14(4):479–496，2005。[9] R. Frigerio、B. Martelli 和 C. Petronio。具有测地边界的小双曲三维流形。*Experiment. Math.*，13(2):171–184，2004。[10] J. Goldman 和 L. Kauffman。纽结、缠结与电网络。*Advances inMathematics*，14:267–306，1993。[11] J.A. Howie 和 J. Purcell。曲面上的交替链环的几何。*Trans. Amer.Math. Soc.*，373:2349–2397，2020。[12] R. Qiu 和 S. Wang。把手体中的简单小结。*Topology and its Applica-tions*，144:211–227，2004。

数学系，威廉姆斯学院，威廉斯敦，马萨诸塞州 01267电子邮箱地址：cadams@williams.edu

数学系，麻省理工学院，剑桥，马萨诸塞州 02139电子邮箱地址：dsantiag@mit.edu