arXiv:2303.02493v1 [math.GR] 4 Mar 2023

具有本原自同构群的正则地图

ˇ Gareth A. Jones 和 Martin Macaj

摘要。我们对自同构群为 G、且在其顶点上忠实且本原作用的正则地图 $\mathcal{M}$ 进行了分类。作为置换群，G 必须属于几乎单群型或仿射型，并且具有二面体点稳定子。我们证明，所有这类几乎单群，即除少数群 $PSL_2(q)$、$PGL_2(q)$ 和 Sz(q) 之外的所有群，都源自正则地图，而这些地图始终是不可定向的。在仿射情形中，这些地图 $\mathcal{M}$ 成对出现，构成可定向与不可定向的佩特里对偶对。我们给出与每个群相关联的地图数量，以及它们的亏格和扩展型。其中一部分工作建立在第一作者此前关于广义 Paley 地图的研究，以及 Jajcay、Li、ˇSir´aˇn 和 Wang 最近关于具有拟本原自同构群的地图的研究之上。本文附录中列出了这些地图的数据表。

1. 引言

在 [11] 中，第一作者分类了这样的可定向正则映射：其保向自同构群 $\mathrm{Aut}^+\mathcal{M}$ 在顶点上具有本原且忠实的作用 $\mathcal{M}$ 。它们是广义帕利映射，即由 Lim 和 Praeger 在 [15]中引入的广义帕利图的凯莱映射。这些映射中出现的自同构群是素数幂 q 下 $A\Gamma L_1(q)$ 的子群，因此它们都是可解群，并且具有易于描述的结构。放宽忠实作用这一条件，只会得到这些映射的正则循环覆盖，且在顶点处分歧，所以相应的群仍然是可解群。

我们的目标是为具有类似性质的（完全）正则地图 $\mathcal{M}$证明类似的结果，其中（完全）自同构群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$ 在顶点上具有本原作用。奥南–斯科特定理根据有限本原置换群的正规结构，将其划分为少数几种类型。在这一特定情形中，一个顶点的稳定子是 G 的一个二面体极大子群 D。现在，唯一允许二面体点稳定子的奥南–斯科特类型，是由仿射群和几乎单群组成的类型。因此，我们首先考察这两种类型中哪些本原群具有二面体点稳定子。在几乎单简单情形中，Li 的一个结果 [13] 表明，除了 q 的少数几个较小值外，唯一的可能性是射影群 $PSL_2(q)$ 和 $PGL_2(q)$，以及铃木群 Sz(q)（见定理 4.2）；而在仿射情形中，这等价于寻找二面体群在素域上的不可约表示（见第 7 节）。

当且仅当 G 由对合 r_0, r_1 和 r_2 生成，且满足 $D = \langle r_1, r_2\rangle$ 和 $r_0r_2 = r_2r_0$ 时，G 的这一作用才是某个正则地图的自同构群（见第 2 节）。所有这些几乎单群 G 都满足此条件；仿射群则在 $|G|$ 可被 4 整除时满足此条件，等价地说，顶点数与度数并非同时为奇数。在几乎单简单情形下

2010年数学主题分类。主要分类：05C10；次要分类：20B15、20B25。关键词和短语：正则地图、自同构群、本原、几乎单群、仿射群。

所有地图都是不可定向的（见定理 4.3）；在仿射情形下，可定向和不可定向地图均会出现，并以佩特里对偶对的形式成对出现，其中前者是广义 Paley 地图，或由它们构成的手性对的连接（定理 7.1）。与可定向正则映射一样，放宽顶点上的忠实作用条件，只会得到这些地图的正则循环分歧覆盖（见第 11 节）。

对于所有情形，我们都给出公式，用以枚举与给定群 G 相关的正则地图 $\mathcal{M}$；更准确地说，是与 G 的给定作用相关的正则地图，因为其中一些群有两个二面体极大子群共轭类。我们在第 6 节说明如何确定这些地图的可定向性、扩展型和亏格，并在第 6 节和第 9 节中给出几乎单群和仿射群的示例，其中相关参数取较小值。对于较小的情形以及某些无限族，这些性质可以手工求得；但在一些规模较大的情形中，我们使用了 GAP [8] 来完成这项工作。我们还通过将较小群和地图的结果与使用 MAGMA 得到的 Conder 正则地图目录 [2], 进行比较，验证了我们的结果；该目录涵盖的亏格范围分别达到可定向地图的 301 和不可定向地图的 602。

我们的一些结果与 Jajcay、Li、Sir´aˇn 和 Wang [9] 关于自同构群在顶点上拟本原作用的正则地图和可定向正则地图的研究有所重叠。拟本原群的范围远比本原群广，尤其是在几乎单群的情形下；在这种情况下，他们的结果必然仅涉及部分情形，而假设本原性则能得到更具体的结果。在仿射群的情形下，我们的方法和结果与他们相似，但我们还能提供有关地图的额外信息；这建立在第一作者早期工作的基础上 [11] ，将可定向地图实现为广义 Paley 地图，或实现为这类地图的手性对的连接。由于出现的每个仿射群都是一个正则正规子群与顶点的二面体稳定子 D 的半直积，因此每个相应的地图 $\mathcal{M}$ 都是单顶点正则地图$\mathcal{M}$ 的正则覆盖，其自同构群为 $\overline{\mathrm{D}}$；这些商映射 $\mathcal{M}$将在第 10 节中描述。

附录 A 和 B 分别列出了具有几乎单群和仿射自同构群的地图的数据表。本文的精简版（不含附录）已提交发表。

2. 正则地图

群 G 同构于某个正则地图 $\mathcal{M}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$，当且仅当它具有满足以下条件的生成元 $\mathrm{r}_i\,(\mathrm{i}\ = 0, 1, 2)$

$$r_i^2 = 1, \quad r_0 r_2 = r_2 r_0. \tag{1}$$

给定 $\mathcal{M}$，其重心细分将底层曲面三角剖分，而这些生成元 r_i 可实现为三角形各边上的反射，其中三角形对面的顶点或边、面的中点分别对应这些反射。反过来，给定 G 和 r_i，可通过将顶点、边和面分别取为子群 $\langle \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2 \rangle$、$\langle \mathrm{r}_0, \mathrm{r}_2 \rangle$ 和 $\langle \mathrm{r}_0, \mathrm{r}_1 \rangle$ 的陪集来重构 $\mathcal{M}$，其关联关系由非空交集确定。

正则地图 $\mathcal{M}$ 没有边界，当且仅当每个 r_i，1；下文中若无特别说明，我们都将作此假设。（具有非空边界的正则地图全部位于闭圆盘内，易于分类，参见 [12] 或 [14]；唯一一个顶点数多于两个的示例是将一个具有 m 个顶点的圈嵌入

圆盘边界中，并且当且仅当 m 为素数时，该嵌入是顶点本原的。）于是， $\mathcal{M}$ 可定向，当且仅当 G 具有一个指数 2 的子群 G^+，且其中不含生成元 r_i。按照 [4], 的记号， $\mathcal{M}$的类型为 $\{m,n\}$，其中 m 和 n 分别是其面和顶点的公共价数。其扩展型为 $\{m,n\}_l$，其中 l 是其佩特里多边形的长度：这些多边形是闭合的之字形路径，在每个顶点处交替先向左转和先向右转。由黎曼–赫尔维茨公式， $\mathcal{M}$ 的欧拉示性数为

$$\chi = \frac{|G|}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right),$$

并且 $\mathcal{M}$ 的亏格为 $g = 1 - \frac{\chi}{2}$；若其可定向，则为 $2 - \chi$，若不可定向，则为另一种情形。

对偶性将顶点与面互换，等价于将生成元 r_0 与 r_2,互换，从而得到类型为 $\{n, m\}_l$ 且可定向性和亏格相同的正则地图。佩特里对偶性将面与佩特里多边形互换，等价于将 r_0 与 r_0r_2, 互换，从而得到类型为 $\{l, n\}_m$的正则地图；这会保留嵌入图，但可能改变曲面。这两种操作都保留自同构群，而佩特里对偶性还保留该群在顶点上的作用，包括本原性。

为简便起见，除第 11 节中的少数评论外，我们将假设 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{M}$的顶点上忠实作用，因为 Li 和 ˇSir´aˇn 已在 [14]中深入研究了在顶点、边或面上具有非忠实作用的正则地图。这个假设意味着 $\mathcal{M}$ 的度数为 $n > 2$: $n = 1$ 的情形是平凡的；若 $n = 2$，则 $\mathcal{M}$ 是一个含有 m 个顶点和边的圈 C 的嵌入，其中某个 $m \geq 2$，因此通过比较阶数可知，诱导同态 $\mathrm{Aut}\ \mathcal{M} \to \mathrm{Aut}\ C \cong D_m$ 有一个非恒等核。（事实上，度数为 $n = 2$ 的正则地图只有两种：m-圈在球面上的嵌入 $\{m, 2\}$，以及 $\{2m, 2\}$ 在实射影平面上的对跖商；当且仅当 m 为素数时，它们是顶点本原的。）

3. 本原置换群

如果一个置换群所保持的等价关系只有恒等关系和全关系，那么它就是本原的。这等价于点稳定子是极大子群。奥南–斯科特定理（见 [6, 第 4]章）根据有限本原置换群的正规结构，将其划分为少数几类。其中，无论在此处还是一般情况下，最重要的是几乎单群或仿射群。若对于某个非阿贝尔有限单群 T，有 $T \leq G \leq T$ 的自同构群，则群 G 称为几乎单群；T 是 G 的基底。关于单群和几乎单群的全面资料，见 [5, 17]。如果置换群 G 含有一个正则作用的初等阿贝尔正规子群 V，则称 G 为仿射型；此时 V 可视为域 $\mathbb{F}_p$ 上的 d 维向量空间，其中 $|V| = p^d$，p 为素数，并且 $G = V \rtimes G_0 \leq \mathrm{AGL}_d(p)$，其中 G_0，是 $0 \in V$ 的稳定子，通过在 V 上的共轭作用，G 是 $\mathrm{GL}_d(p)$ 的一个子群；此时，当且仅当 G_0 在 V 上不可约地作用时，G 才是本原的。

对于任意正则地图 $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ 中一个顶点在 $G := \mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$ 中的稳定子必须是一个阶为 2n 的二面体群，其中 n 是顶点的度数。我们将只关注顶点数多于两个的正则地图，因为次数至多为 2 的传递置换群显然是本原的。以下结果表明，在奥南–斯科特定理中，允许出现二面体点稳定子的只有几乎单群类和仿射类，因此本文将

允许二面体点稳定子的类别是几乎单群类和仿射类，因此本文将把注意力限制在这两类上。

命题 3.1。如果有限本原置换群 G 的点稳定子 G_α 为二面体群，那么 G 属于仿射型或几乎单型。

证明。（有关本证明的背景，请参见 [6, 第 4]章），我们沿用其中的记号。）由 [6,推论 4.3B], , G 的基底 H 具有形式 $H = T_1 \times \cdots \times T_m$，其中 $T_i \cong T$ 对于 $i = 1, \ldots, m$，且 T 是单群。若 T 是阿贝尔群，则 H 是初等阿贝尔群，而 G 属于仿射型，因此不妨设 T 是非阿贝尔群。若 H 正则作用，则由 [6, 定理 4.7(i)]，G_α 没有非平凡可解正规子群，因此尤其不可能是二面体群。若 H 不正则作用，则由 [6, 定理 4.6A] ，或者 $m = 1$ 且 G 是几乎单群，或者 $m \geq 2$且 G 属于对角型或积型。在后两种情形中，要么 G_α 包含 T 的一个副本（见 [6, 引理 4.5B] 及其后的注释），这对于二面体群是不可能的；要么 $H_\alpha = R_1 \times \cdots \times R_m$，其中 $1 < R_i < T_i$，且每个 $R_i \cong R < T$（见 [6, 定理 4.6A] 的证明）。由于 H_α 包含于二面体群 G_α 中，我们必须有 $m = 2$ 且 $|R| = 2$，于是 $H_\alpha \cong V_4$。现在 H 是 G 中的正规子群，所以 H_α 是 G_α中的正规子群，而后者同构于 D_n，因此 $n = 2$ 或 4。若 $n = 2$，则 $G_\alpha = H_\alpha$，所以 $G = H = T_1 \times T_2$, , 这是非本原的。因此 $n = 4$，从而 $|G : H| = |G_\alpha : H_\alpha| = 2$，并且作为置换群，G 同构于处于积作用下的 $T \wr S_2$。然而，这同样是非本原的，因为没有一个非阿贝尔单群 T 能拥有一个阶为 2 的极大子群 R。□

4. 几乎单群的自同构群

本节将考察正则地图的自同构群，它们在顶点上忠实地作用为几乎单型的本原置换群。Li [13, Lemma 3.1] 已证明如下结论：

引理 4.1. 设 G 是作用在 Ω 上的几乎单本原置换群，其基底为 T（因此 $G \leq T$ 的自同构群）。假设 T 中的点稳定子 T_ω $(\omega \in \Omega)$ 是二面体群。那么 T 是本原的，且以下结论之一成立：

(i) $T \cong PSL_2(q)$，且 $T_\omega \cong D_{(q\pm1)/2}$，其中 q 为奇数；(ii) $T \cong PSL(2, q)$，且 $T_\omega \cong D_{q\pm1}$，其中 q 为偶数；(iii) $T \cong Sz(q)$，且 $T_\omega \cong D_{q-1}$。

这些群 T 的自同构群是众所周知的（例如参见 [5] 或 [17], ）。利用这一点，直接考察 Aut T 中包含 T 的子群，可以精确描述点稳定子为二面体点稳定子的几乎单纯本原置换群 G：

定理 4.2。几乎单群本原群 G 的点稳定子 D 同构于二面体群 D_n，当且仅当以下情形之一成立：

（1）当 $q > 11$ 为奇数时，$G \cong PSL_2(q)$，且 $n = (q - 1)/2$；（2）当 $q > 5$ 为奇数时，$G \cong PGL_2(q)$，且 $n = q - 1$；（3）当 $q = 2^e \geq 4$ 时，$G \cong PSL_2(q) = SL_2(q)$，且 $n = q - 1$；（4）当 $q > 9$ 为奇数时，$G \cong PSL_2(q)$，且 $n = (q + 1)/2$；（5）当 $q > 5$ 为奇数时，$G \cong PGL_2(q)$，且 $n = q + 1$；

（6）当 $q = 2^e \geq 4$ 时，$G \cong PSL_2(q) = SL_2(q)$，且 $n = q + 1$;

（7）当 $q = 2^e$ 且 $e > 1$ 为奇数时，$G \cong Sz(q)$，且 $n = q - 1$。

在每种情形中，对于指定的 n 值，G 的极大子群 $D \cong D_n$ 构成单个共轭类。

请注意，尽管 $PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$，这里列出的所有群 G 彼此均非同构。除 $PGL_2(q)$（q 为奇数）以外，它们全都是单群；后者包含指数 2 的 $PSL_2(q)$。在小 q 被排除的情形中，存在非极大的子群 $D \cong D_n$：例如，在情形（1）中，当 $q = 11$时，每个子群 $D \cong D_5$ 都包含于一个同构于 A_5 的子群中。

显然，如果正则地图 $\mathcal{M}$ 的自同构群 $G = \mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$ 在其顶点上传递地且忠实地作用，那么 G 和顶点稳定子 D 必须属于定理 4.2 中的某种情形。较不明显（而且起初似乎相当令人惊讶）的是，定理 4.2 中的所有 G 与 D 的对子都以这种方式出现。如果记得正则地图的自同构群的特征在于具有满足下列条件的生成元 r_0, r_1 和 r_2 s，这一点就不那么令人意外了。

$$r_i^2 = (r_0 r_2)^2 = 1.$$

我们已经有生成 D 的对合 r_1 和 r_2，因此根据 D 的极大性，只需找出一个属于 r_2 的中心化子 $C_G(r_2)$ 但不属于 D 的对合 r_0。事实上，通过计算这样的对合 r_0，我们将给出定理 4.2 的每种情形 (i)（其中 $i = 1, \ldots, 7$）下 n价正则地图 $\mathcal{M}$ 的同构类数量 $\nu_i(n)$ 的公式。注意到对于所有相关的 n 值，$\nu_i(n) \geq 1$，我们可推出如下结论:

定理 4.3。设 G 为一个几乎单群。

(a) 当且仅当 G 和 n 如定理 4.2 所述时，G 才是一个 n价正则地图 $\mathcal{M}$ 的自同构群，且在其顶点上本原作用。(b) 所有这样的地图 $\mathcal{M}$ 都是不可定向的。(c) 在每种情形 $i = 1, \ldots, 7$ 中，这样的地图 $\mathcal{M}$ 的数量 $\nu_i(q)$ 由下表给出。

情形 i	群	q 模 4	n	$\nu_i(q)$
(1)	$PSL_2(q)$	1	$(q-1)/2$	$(q-5)\phi(n)/8e$
(1)	$PSL_2(q)$	−1	$(q-1)/2$	$(q+1)\phi(n)/8e$
(2)	$PGL_2(q)$	±1	$q-1$	$(q-2)\phi(n)/2e$
(3)	$SL_2(q)$	0	$q-1$	$(q-2)\phi(n)/2e$
(4)	$PSL_2(q)$	1	$(q+1)/2$	$(q-1)\phi(n)/8e$
(4)	$PSL_2(q)$	−1	$(q+1)/2$	$(q-3)\phi(n)/8e$
(5)	$PGL_2(q)$	±1	$q+1$	$(q-2)\phi(n)/2e$
(6)	$SL_2(q)$	0	$q+1$	$(q-2)\phi(n)/2e$
(7)	$Sz(q)$	0	$q-1$	$(q-2)\phi(n)/2e$

接下来的两节将用于证明这一结果。

5. 映射计数

设 G = Aut $\mathcal{M}$，在正则地图 $\mathcal{M}$ 的顶点上忠实地本原作用。设 $\mathcal{O}$为 A := Aut G 在 G 中与 D_n 同构的极大子群上的一个轨道。我们的目标是计算自同构群为 G、顶点稳定子为 D $\in \mathcal{O}$ 的正则地图 $\mathcal{M}$ 的同构类数。对于 n 为奇数和偶数的情形，我们需要采用略有不同的论证。随后，我们将把这一一般枚举方法应用于定理 4.2 的情形 (1) 至 (7) 中的几乎单群 G。

假设 n 为奇数。则每个 D $\in \mathcal{O}$ 都有一个由 n 个对合组成的共轭类，且这些对合都不是中心元。这些对合中生成 D 的有序对 (r_1,r_2) 的数量为 $|\mathrm{Aut}\, D| = n\phi(n)$。若 N :=$N_A$(D) 和 C := C_A(D) 分别是 A 中 D 的正规化子和中心化子，则 N/C 在这些生成对上半正则地作用，产生 $n\phi(n)/|N : C| = n\phi(n)|C|/|N|$ 个轨道，每个轨道的长度为 $|N : C|$。对于这样的生成对，$C_G(r_2)$ 中对合的数量 I 与 r_2无关；这些对合中只有一个（即 r_2）属于 D，因此有 I 个 -1 对合 $r_0 \in G \setminus D$ 与 r_2, 交换，并且其中每一个都与 r_1 和 r_2, 一起生成 G，因而确定一个正则地图 $\mathcal{M}$，其 Aut $\mathcal{M} \cong$ 为 G。由于 C 在这些元素 r_0, 上半正则地作用，因此它在这些元素上有 $(I-1)/|C|$ 个长度为 C 的轨道。这适用于 N 在 D 的生成对 (r_1, r_2) 上的 $n\phi(n)|C|/|N|$ 个轨道中的每一个，因此由轨道 $\mathcal{O}$ 产生的映射同构类数量为

$$\frac{n\phi(n)|C|}{|N|} \cdot \frac{(I-1)}{|C|} = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|}.$$

现在设 n 为偶数。由于我们假设 n $>$ 2，每个 D $\in \mathcal{O}$ 都有唯一的中心对合 z := $(r_1r_2)^{n/2}$，并且根据 D 的极大性，D = C_G(z)。除 z 外，D 中还有 n 个非中心对合，而其中生成 D 的有序对 (r_1, r_2) 的数量为$|\mathrm{Aut}\, D| = n\phi(n)$。若 N := N_A(D) 和 C := C_A(D) 分别是 A 中 D 的集合稳定子和逐点稳定子，则 N/C 在这些生成对上半正则地作用，其轨道数量为 $n\phi(n)/|N : C| = n\phi(n)|C|/|N|$，每个轨道的长度为 $|N : C|$。令 I 表示对于此类元素 r_2，$C_G(r_2)$ 中对合的共同数量；其中三个对合（即 r_2, z 和 r_2 z）属于 D，因此 I -3 个位于 D 外部，并产生自同构群为 G 的地图$\mathcal{M}$。如同 n 为奇数时一样，C 在这些元素 r_0, 上半正则地作用，因此仿照情形 A 的论证可知，由 $\mathcal{O}$ 得到的地图数量为

$$\frac{n\phi(n)|C|}{|N|} \cdot \frac{(I-3)}{|C|} = \frac{n\phi(n)(I-3)}{|N|}.$$

现在假设这 n 个非中心对合 $r_2 \in$ D 在 A 作用下分别属于不同轨道；必然有两个轨道，每个轨道中有 n/2 个。因此，对于 D，有 $n\phi$(n)/2 个有序生成对 r_1,r_2，其中 r_2 分别属于每个轨道。设 I^+ 和 I^- 分别表示这些轨道中对合 r_2 的中心化子 $C_G(r_2)$ 中对合的个数。每种情形下，这些对合中有三个（即 r_2, z 和 r_2z）属于 D，因此其中 $I^{\pm} - 3$ 个不属于 D。由于 C 在这类元素 $r_0 \in G \setminus D$ 上半正则地作用，因此 C 在这些元素上有 $(I-3)/|C|$ 个长度为 C 的轨道。这适用于 N 在 D 的生成对 (r_1,r_2) 上的 $n\phi(n)|C|/2|N|$ 个轨道，因此由轨道 $\mathcal{O}$ 得到的地图数为

$$\frac{n\phi(n)(I^+-3)}{2|N|} + \frac{n\phi(n)(I^--3)}{2|N|} = \frac{n\phi(n)(I^++I^--6)}{2|N|}.$$

6. 几乎单群的映射计数

现在，我们将把上述一般论证应用于几乎单群的各个族，首先讨论 n 为奇数的情形，并从其中较为简单的一类开始。首先，我们需要了解这些群 G 的一些基本事实。

在 $G = PSL_2(q)$ 中，其中 q 是奇素数幂，对于每个 $n = (q \pm 1)/2$，G 中都只有一个共轭类的子群 $D \cong D_n$，且除 $PSL_2(11)$ 中同构于 D_5 的子群外，它们对所有 $q \geq 11$ 都是极大的。D 在 $PGL_2(q)$ 中的正规化子是一个阶为 4n 的二面体群 D^*；$PGL_2(q)$ 包含 G，且 G 在其中的指数为 2。将 D^* 扩张以纳入伽罗瓦群 C_e（对应于 $\mathbb{F}_q$），其中 $q = p^e$，p 为某个素数，便得到 D 在 $A := \mathrm{Aut}\, G = P\Gamma L_2(q)$ 中的正规化子 $N = N_A(D)$，因此 $|N| = 4ne$。G 中所有对合都共轭，其中心化子同构于 $D_{(q\pm1)/2}$；无论取哪一个，其阶都能被 4 整除；该中心化子包含 $I = \frac{1}{2}(q \pm 1) + 1$ 个对合。

在 $G = PGL_2(q)$ 中，q 为奇素数幂，对每个 $n = q \pm 1$，G 中都只有一个子群 $D \cong D_n$ 的共轭类，并且对所有 $q > 5$，它们都是极大子群。G 中有两个对合共轭类，一个包含于 $G^+ := PSL_2(q)$，另一个包含于 $G^- := G \setminus G^+$。对合 $i \in G^+$ 的中心化子 $C_G(i) \cong D_{q-1}$ 或 D_{q+1}，取决于 $q \equiv 1$ 或 -1 模 (4)，也就是说，当 $k = q \pm 1 \equiv 0$ 模 (4) 时，$C_G(i) \cong D_k$；而对合 $i \in G^-$ 的中心化子 $C_G(i) \cong D_{q+1}$ 或 D_{q-1}，取决于 $q \equiv 1$ 或 -1 模 (4)，也就是说，当 $l = q \pm 1 \equiv 2$ 模 (4) 时，$C_G(i) \cong D_l$。由于 k 和 l 都是偶数，$C_G(i)$ 含有 $I^+ = k + 1$ 或 $I^- = l + 1$ 个对合，具体取决于 $i \in G^+$ 与否，其中三个位于 D 中，因此有 $I^\pm - 3 = k - 2$ 或 $l - 2$ 个对合位于 D 之外。我们有 $|N| = 2ne$。

在 $G = SL_2(q)$ 中，对于 $q = 2^e \geq 4$，每个 $n = q \pm 1$ 都有一个唯一的子群 $D \cong D_n$ 共轭类，并且当 $q \geq 4$ 时它们都是极大子群。G 中所有对合都彼此共轭，其中心化子是一个阶为 q、含有 $I = q - 1$ 个对合的初等阿贝尔 2-群 V_q。我们有 $|N| = 2ne$。

在 $G = Sz(q)$ 中（这些群见 [17, §4.2]），对于 $q = 2^e$（$e \geq 3$ 为奇数）且 $n = q - 1$，有一个唯一的子群 $D \cong D_n$ 共轭类，并且对于所有这样的 q，它们都是极大子群。G 中所有对合都彼此共轭，其中心化子是一个阶为 q^2、含有 $I = n = q - 1$ 个对合的 Sylow 2-子群。我们有 $|N| = 2ne$。

现在我们将利用这些信息，给出每种情形（i）中与群 $G = G(q)$ 相关的地图 $\mathcal{M}$ 数量 $\nu_i(q)$ 的一个公式（或多个公式）。我们将简要描述 q 的一些较小取值所对应的地图，并在可能的情况下，在 Conder 正则地图目录 [2] 中标出它们。

在此之前，我们将说明如何确定每个地图的可定向性和类型，从而确定其亏格，以便进行这类描述和识别。利用 G 的显式标准生成元 r_i，可以将 $\mathcal{M}$ 的面度 m 和 Petrie 长度 l 分别计算为元素 r_0r_1 和 $r_0r_1r_2$ 的阶。（在我们的情形中，顶点度已知，即所选的 n 值。）情形 (1) 至 (6) 可以手工完成，但不出所料，铃木群 Sz(q) 在技术上要难处理得多：它们由 4×4 矩阵表示，而非 2×2；并且由于最小的铃木群的阶为 29120，相应的亏格远超 [2] 的范围（最小值为 2290）。可以从 [3] 或 [7] 获得所有自同构群为 $PSL_2(q)$、$PGL_2(q)$ 或 Sz(q) 的正则地图的典范生成元。此外，对于铃木群的情形，以及 q 较大的情形 (1) 至 (6)，可以使用 GAP [8] 等计算工具来获取信息。

情形 (1) 令 G = $PSL_2(q)$，其中 n = (q − 1)/2。若 q ≡ 1 模 (4)，则 n 为偶数，此时得到的正则地图数量为

$$\nu_1(q) = \frac{n\phi(n)(I-3)}{|N|} = \frac{(n-2)\phi(n)}{4e} = \frac{q-5}{8e}\phi\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

例如，如果 q = 13，从而 e = 1，我们得到两个地图；它们出现在 Conder 的普查表 [2] 中，分别是类型 $\{7,6\}_{13}$ 和 $\{13,6\}_7$ 的 Petrie 对偶对 N106.11 和 N142.11。如果 q = 17，从而 n = 8，我们得到六个地图：它们是

- 类型均为 $\{9,8\}_9$的 N325.6，其佩特里对偶为 N325.7，自佩特里对偶地图为 N325.8；
- 类型为 $\{9,8\}_{17}$的 N325.9，以及其类型为 $\{17,8\}_9$的佩特里对偶 N389.5；
- 类型为 $\{17,8\}_{17}$的自佩特里对偶地图 N389.6。

如果 q ≡ −1 mod (4)，从而 n 为奇数，则类似的论证给出

$$\nu_1(q) = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|} = \frac{(n+1)\phi(n)}{4e} = \frac{q+1}{8e}\phi\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

因此，当 q = 19 时，我们得到 15 个映射 $\mathcal{M}$。它们是

- 类型为 $\{3,9\}_9$ 的 N97.1 及其佩特里对偶 N477.6（类型为 $\{9,9\}_3$），后者是自对偶的；
- 类型为 $\{3,9\}_{10}$ 的 N97.2 及其佩特里对偶 N496.3（类型为 $\{10,9\}_3$）；
- 一个类型为 $\{5,9\}_5$ 的自 Petrie 对偶映射 N325.3；
- 类型为 $\{5,9\}_{10}$ 的 N325.4 及其佩特里对偶 N496.4（类型为 $\{10,9\}_5$）；
- 一个对偶对 N477.8（其中一个是自 Petrie 对偶）以及一个自对偶映射 N477.7（其佩特里对偶是第二个映射 N477.8），它们的类型均为 $\{9,9\}_9$
- 一个类型为 $\{9,9\}_{10}$ 的对偶对 N477.9，以及类型为 $\{10,9\}_9$ 的佩特里对偶 N496.5 和 N496.6；
- 一个类型为 $\{10,9\}_{10}$ 的自 Petrie 对偶映射 N496.7。

情形 (2) 设 G = $PGL_2(q)$，其中 n = q − 1，且 q 为奇数。具有 $r_2 \in G^+$ 或 $G \setminus G^+$ 的映射 $\mathcal{M}$ 的总数为

$$\nu_2(q) = \frac{n\phi(n)(k-2)}{4ne} + \frac{n\phi(n)(l-2)}{4ne} = \frac{\phi(n)(k+l-4)}{4e} = \frac{(q-2)\phi(q-1)}{2e}.$$

因为 (k +l)/2 = q。例如，当 q = 7 时，这给出五个映射，其中三个具有 $r_2 \in G^+$，两个具有 $r_2 \in G^-$。由 [2] 可得如下结果：

- 一个类型为 $\{4,6\}_8$ 的 Petrie 对偶对 N16.2，以及类型为 $\{8,6\}_4$ 的 N37.3；
- 一个类型为 $\{6,6\}_8$ 的 Petrie 对偶对 N30.5，以及类型为 $\{8,6\}_6$ 的 N37.4；
- 一个类型为 $\{7,6\}_7$ 的自 Petrie 对偶映射 N34.5。

当 q = 9 时，我们有 7 个映射；它们是

- 一对 Petrie 对偶对：类型为 $\{3,8\}_{10}$ 的 N17.1 和类型为 $\{10,8\}_3$ 的 N101.9；
- 一对 Petrie 对偶对：类型为 $\{4,8\}_5$ 的 N47.2 和类型为 $\{5,8\}_4$ 的 N65.3；
- 一对 Petrie 对偶对：类型为 $\{5,8\}_8$ 的 N65.2 和类型为 $\{8,8\}_5$ 的 N92.5（自对偶）；
- 一个类型为 $\{10,8\}_{10}$ 的自 Petrie 对偶映射 N101.8。

情形（3）设 $G = SL_2(q)$，其中 $q = 2^e \geq 4$，且 $n = q - 1$。则

$$v_3(q) = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|} = \frac{(n-1)\phi(n)}{2e} = \frac{(q-2)\phi(q-1)}{2e}.$$

若 $q = 4$，则有一个地图，即正十二面体的对跖商，它是将彼得森图嵌入实射影平面所得的类型 $\{5,3\}_5$。若 $q = 8$，则得到六个地图：

- 一个类型为 $\{3,7\}_9$ 的 Petrie 对偶对 N8.1，以及一个类型为 $\{9,7\}_3$ 的 N64.3；
- 一个由类型为 $\{7,7\}_9$ 的 N56.5 及其类型为 $\{9,7\}_7$ 的佩特里对偶 N64.4 和 N64.5 组成的对偶对。

若 $q = 16$ 或 32，则分别得到 14 个或 90 个地图。

情形（4）令 $G = PSL_2(q)$，其中 $n = (q+1)/2$。若 $q \equiv 1 \pmod 4$，因此 n 为奇数，则有

$$v_4(q) = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|} = \frac{(n-1)\phi(n)}{4e} = \frac{q-1}{8e}\phi\left(\frac{q+1}{2}\right).$$

例如，如果 $q = 13$，我们会得到九个映射 $\mathcal{M}$。它们在 [2] 中如下所示：

- 类型为 $\{3,7\}_{13}$ 的 N15.1 及其佩特里对偶 N155.5（类型为 $\{13,7\}_3$）；
- 类型为 $\{6,7\}_{13}$ 的 N106.11 及其佩特里对偶 N155.7（类型为 $\{13,7\}_6$）；
- 类型为 $\{13,7\}_{13}$ 的 N155.6（自 Petrie 对偶）；
- 具有三重对称性的 N119.7（即既是自对偶又是自 Petrie 对偶），以及一对对偶映射 N119.5（其中一个是自 Petrie 对偶）和一个自对偶映射 N119.6（其佩特里对偶是 N119.5），它们的类型均为 $\{7,7\}_7$。

如果 $q = 17$，则有 12 个映射。如果 $q \equiv -1 \bmod (4)$，我们有

$$v_4(q) = \frac{n\phi(n)(I-3)}{|N|} = \frac{(n-2)\phi(n)}{4e} = \frac{q-3}{8e}\phi\left(\frac{q+1}{2}\right).$$

例如，若 $q = 11$，我们得到两张地图；它们是类型为$\{5,6\}_6$ 和 $\{6,6\}_5$ 的佩特里对偶对 N46.6 和 N57.4（后者是自对偶的）。若 $q = 19$，我们得到八张地图。

情形 (5) 设 $G = PGL_2(q)$，其中 $n = q+1$，且 q 为奇数。计算与情形 (2) 中 $n = q - 1$ 的计算完全相同，只是在最后我们有

$$v_5(q) = \frac{\phi(n)(k+l-4)}{4e} = \frac{(q-2)\phi(q+1)}{2e}.$$

例如，当 $q = 7$ 时，这给出十张地图，其中六张满足 $r_2 \in G^+$，四张满足 $r_2 \in G^-$。由 [2] 我们得到如下结果：

- 一个类型为 $\{3,8\}_7$ 的佩特里对偶对 N9.1，以及一个类型为 $\{7,8\}_3$的 N41.3，
- 一个类型为 $\{3,8\}_8$ 的佩特里对偶对 N9.2，以及一个类型为 $\{8,8\}_3$ 的 N44.5（自对偶），
- 一个类型为 $\{4,8\}_7$ 的 Petrie 对偶对 N23.2，以及一个类型为 $\{7,8\}_4$ 的 N41.2，
- 一个类型为 $\{4,8\}_6$ 的 Petrie 对偶对 N23.3，以及一个类型为 $\{6,8\}_4$ 的 N37.3，
- 类型为 $\{6,8\}_6$ 的自Petrie对偶映射 N37.4，以及类型为 $\{8,8\}_8$ 的 N44.6（自对偶）。

第一个地图 N9.1 可通过对 Klein 的亏格3四次曲线上的 $\{3,7\}_8$ 类型 Hurwitz映射 R3.1 应用 Wilson 的“相反”运算 DPD = PDP 得到：沿其

边切开地图，然后以相反的方向重新连接这些边。同样，N41.3 可通过对 R3.1 应用三重性运算 PD 得到。

情形（6）设 $G = SL_2(q)$，其中 $q = 2^e \geq 4$，且 $n = q + 1$。则

$$\nu_6(q) = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|} = \frac{(n-3)\phi(n)}{2e} = \frac{(q-2)\phi(q+1)}{2e}.$$

若 $q = 4$，则 $G \cong A_5$，，我们得到两个地图：二十面体的对跖商，其亏格为 1，类型为 $\{3,5\}_5$；以及它的佩特里对偶 N5.3，即大十二面体的对跖商，类型为$\{5,5\}_3$，亏格为 5。若 $q = 8$，则得到六个地图：

- 类型为 $\{3,9\}_7$ 的 N16.1 及其佩特里对偶 N64.3，类型为 $\{7,9\}_3$；
- N64.4 及其佩特里对偶 N64.5，类型为 $\{7,9\}_7$；
- 类型为 $\{9,9\}_9$ 的对偶对 N72.9，它同时也是一个佩特里对偶对。

若 $q = 16$ 或 32，我们得到 28 或 60 个映射。

情形（7）设 $G = Sz(q)$，其中 $q = 2^e$ (e 为奇数，且 $e \geq 3$)，$n = q - 1$。那么

$$\nu_7(q) = \frac{n\phi(n)(I-1)}{|N|} = \frac{(n-1)\phi(n)}{2e} = \frac{(q-2)\phi(q-1)}{2e},$$

与 $n = q - 1$时的 $PGL_2(q)$ 和 $SL_2(q)$ 情形相同。若 $q = 8$，我们得到六个映射，其亏格都太大，无法纳入 [2]。然而，计算机搜索表明，存在一个类型为$\{5,7\}_{13}$、亏格为 2290 的地图，以及其类型为 $\{13,7\}_5$、亏格为 4082 的佩特里对偶；还有一对类型为 $\{7,7\}_7$、亏格为 3122 的地图，它们互为佩特里对偶且同时互为对偶；以及一对类型为 $\{13,7\}_{13}$、亏格为 4082 的地图，它们互为佩特里对偶。（事实上，Sz(8) 有 14 个正则地图，如下表所示；它们均可由上述地图通过对偶性和佩特里对偶得到。我们列出这些地图，但不列出先前讨论的几乎单群所对应的地图，因为铃木群较为复杂，且读者可能不熟悉。）

Type	亏格	映射数
$\{5,7\}_{13}$	2290	1
$\{5,13\}_7$	3250	1
$\{7,5\}_{13}$	2290	1
$\{7,7\}_7$	3122	2
$\{7,13\}_5$	4082	1
$\{7,13\}_{13}$	4082	2
$\{13,5\}_7$	3250	1
$\{13,7\}_5$	4082	1
$\{13,7\}_{13}$	4082	2
$\{13,13\}_7$	5042	2

当 $q = 32$ 时，上述公式给出 90 个映射；在 Sz(32) 的正则地图总数 186 个中，这一结果再次得到了计算机搜索的确认。

在每种情形 $i = 1, \ldots, 7$ 中，对于所有相关的 q 值，我们都有 $\nu_i(q) \geq 1$，因此定理 4.3(a) 和 (c) 的证明至此完成。对于定理 4.3(b)，我们利用以下事实：$\mathcal{M}$ 是可定向的，当且仅当 G 有一个指数 2 的子群 $G = 1$，且每个 r $\nu_i G \geq 1$。

仅当 G 有一个指数 2 的子群 G^+，且每个 $r_i \notin G^+$。对于单群 $PSL_2(q)$ 和 Sz(q)，显然不存在这样的子群。当 $G = PGL_2(q)$ 时，存在唯一的指数 2 子群 G^+，即 $PSL_2(q)$；然而，由于在情形 (2) 和 (5) 中 $\langle r_1 r_2 \rangle = D^+ \not\leq G^+$，生成元 r_1 和 r_2 必定位于 G^+的不同陪集中，因此这些地图仍然全都不可定向。定理 4.3 的证明至此完成。

7. 仿射群及其相关地图

顶点本原地图 $\mathcal{M}$ 的仿射自同构群 G 可以利用第 5 节中提出的方法进行枚举和描述，也可以从 [9]中获取所需信息。不过，对我们而言，使用 [11], 中的结果更为有利，因为这些结果使我们能够将可定向地图 $\mathcal{M}$ 识别为正则广义帕利地图，或识别为广义帕利地图手性对的连接；随后，不可定向地图 $\mathcal{M}$ 便可由它们的佩特里对偶得到。

若 G 是仿射群，由于它在 $\mathcal{M}$的顶点上忠实且本原地作用，顶点集 V 可视为 G 的基底：它是一个阶为 $q = p^d$的初等阿贝尔 p 群，其中 p 为某个素数；等价地说，它是 $\mathbb{F}_p$上的 d 维向量空间。于是 $G = V \rtimes D$，其中 V 通过平移正则作用，而顶点 $0 \in V$ 的稳定子 $G_0 = D = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle \cong D_n$ 在 V 上忠实地作用，是 $GL_d(p)$ 的一个不可约子群。（回顾一下，我们假设 $|V| > 2$。）由于我们假设 $n > 2$, D 中存在唯一一个指数为 2 的循环子群 $D^+ = \langle a \rangle \cong C_n$，它保持 0 周围的局部定向。于是 G 有一个指数为 2 的子群 $V \rtimes D^+$；若 n 为奇数，该子群唯一；若 n 为偶数，则还存在另外两个与 $V \rtimes D_{n/2}$同构的子群。定义 $D^- := D \setminus D^+$ 和 $G^- := G \setminus G^+$，分别表示 D 中 D^+ 的非平凡陪集，以及 G 中 G^+ 的非平凡陪集。

若 r_1 和 r_2 是生成 D 的标准对合，则将 $I(r_2)$ 定义为 $C_G(r_2) \setminus D$ 中对合的集合，并令 $I^\pm(r_2) = I(r_2) \cap G^\pm$。根据 D 的极大性，若 $r_0 \in I(r_2)$，则 $G = \langle r_0, r_1, r_2 \rangle$。由于 $r_0^2 = 1$ 和 $r_0 r_2 = r_2 r_0$, ，这一三元组 $r = (r_i)$ 确定了一个正则地图 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(r)$，其自同构群 Aut $\mathcal{M} \cong G$ 在 V 上本原地作用。若 $r_0 \in I(r_2)$，则 $r_0 r_2 \in I(r_2)$ 也成立，因此三元组 $r' = (r_0 r_2, r_1, r_2)$ 确定了一个正则地图 $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(r')$，即 $\mathcal{M}$ 的佩特里对偶 $P(\mathcal{M})$。

我们有 $r_1, r_2 \in D^- \subset G^-$，而当 n 为偶数时，它们属于 G 中另外两个指数 2 子群的不同陪集。因此，$\mathcal{M}$ 可定向当且仅当 $r_0 \in G^-$。现在，r_0 和 $r_0 r_2$ 属于 G^+ 的不同陪集，因此选择 $r_0 \in I^-$，可得到一个可定向地图 $\mathcal{M}$，记作 $\mathcal{M}^+$；其不可定向的佩特里对偶 $\mathcal{M}'$ 记作 $\mathcal{M}^-$，对应于 $r_0 r_2 \in I^+(r_2)$。因此，这些仿射映射成对构成佩特里对偶对 $\mathcal{M}^\pm$，其中 $\mathcal{M}^+$ 可定向，$\mathcal{M}^-$ 不可定向；所以只需对地图 $\mathcal{M}^+$ 进行分类和描述，因为其余地图 $\mathcal{M}^-$ 很容易由它们的佩特里对偶得到。

每个地图 $\mathcal{M}^+$ 都是可定向正则的，其保向自同构群为 $G^+ = V \rtimes D^+$。由于 D 在 V 上不可约地作用，且 D^+ 是 D 中指数为 2 的正规子群，因此 D^+ 在 V 上的作用只有两种可能：

(A) V 是 D^+ 的不可约模；或者 (B) $V = V_0 \oplus V_1$，其中 V_0 和 V_1 是不可约的 D^+-子模，它们被 $D \setminus D^+$ 的元素互换，且 D^+ 的作用互为逆作用。

在情形 A 中，G^+ 在 V 上本原且忠实地作用。现在，保向自同构群 $\mathrm{Aut}^+\mathcal{M}$ 在顶点上本原且忠实地作用的可定向正则映射 $\mathcal{M}$ 已在 [11] 中分类为广义 Paley 地图（我们很快会给出定义），因此只需确定其中哪些是完全正则的。在情形 B 中，$\mathcal{M}^+$ 是手性对中的可定向正则映射 $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}^+/V_i$ $(i = 0,1)$ 的连接（或最小正则覆盖）；由于商模 $V/V_i \cong V_{1-i}$ 不可约，每个 $\mathcal{M}_i$ 的保向自同构群 $\mathrm{Aut}^+\mathcal{M}_i \cong G^+/V_i \cong V_{1-i} \rtimes D^+$ 都在其顶点上本原且忠实地作用，因此根据 [11]，它也是一个广义 Paley 地图，不过现在它属于一个手性对。

广义 Paley 地图（见 [11]）是有限域$\mathbb{F}_q$的加法群 V 的凯莱映射，其中 $q = p^d$，p 为某个素数，生成集是乘法群 $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ $\mathbb{F}_q$ 的子群 $S \cong C_n$，满足

- $S = -S$（等价地，n 为偶数或 p 为奇数），并且
- S 在 V 上不可约地作用（等价地，$d = \min\{i > 0 \mid p_i \equiv 1 \bmod (n)\}$）。

因此，顶点集 V 就是域 $\mathbb{F}_q$。我们选取循环群 S 的一个生成元 s，并将每个顶点 $v \in V$ 的邻点定义为 $v + s$、$v + s^2, \ldots, v + s^n = v + 1$，按围绕 v 的局部定向依次排列。由此定义出一个可定向正则地图 $\mathcal{M}(s)$，其自同构群 $\mathrm{Aut}^+\mathcal{M}(s) = V \rtimes S \leq \mathrm{AGL}_1(\mathbb{F}_q)$。例如，若 $n = q - 1$，则 $\mathcal{M}(s)$ 是完全图 K_q 的一个比格斯嵌入（见 [1, 10]）；若 $q \equiv 1 \bmod (4)$ 且 $|S| = (q-1)/2$，则该地图嵌入帕雷图 P_q。如 [11] 所示，当且仅当 s 与 s′在由弗罗贝尼乌斯自同构 $t \mapsto t^p$生成的域 $\mathbb{F}_q$的伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q \cong C_d$ 下等价时，$\mathcal{M}(s) \cong \mathcal{M}(s')$；因此，对每一对 n 和 q，都有 $\phi(n)/d$ 个这样的地图，它们在孔操作 H_j 下彼此等价：$s \mapsto s^j$，其中 j 与 n 互素。特别地，$\mathcal{M}(s)$ 的镜像是 $H_{-1}\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(s^{-1})$，因此，当且仅当 s 与 s^{-1} 在 $\mathrm{Gal}\,\mathbb{F}_q$下等价时，$\mathcal{M}(s)$ 才是正则的；也就是说，对某个 e，有 $p^e \equiv -1 \bmod (n)$，且当 d 为偶数时，e 必为 d/2。

因此，在情形 A 中，我们得到 $\phi(n)/d$ 个正则地图 $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}(s)$，它们在孔操作下彼此等价，其中 d 是 p 模 (n) 的乘法阶，且 $p^{d/2} \equiv -1$ 模 (n)。在情形 B 中，对于 $i = 0\,1$，有 $\dim V_i = \frac{1}{2}\dim V$，因此若 $\dim V = d$，则 $\dim V_i = e = d/2$，且映射 V_i是域 $\mathbb{F}_{p^e}$ 上一对广义 Paley 地图的手性对；这样的地图有 $\phi(n)/e$ 个，构成$\phi(n)/2e = \phi(n)/d$ 对手性对。因此（与情形 A 一样），我们得到 $\phi(n)/d$ 个地图 $\mathcal{M}^+$，它们在孔操作下彼此等价；此时 $d = 2e$，而 e 是 p 模 (n) 的乘法阶。对这两种情形作更统一的描述方式是注意到，无论哪种情形，$d = 2e$，其中 e 是 p 在商群 $\mathbb{Z}_n^*/\langle -1\rangle$ 中的阶；区分这两种情形的依据是：情形 A 中 $p^e \equiv -1$ 模 (n)，而情形 B 中 $p^e \equiv 1$ 模 (n)。

在情形 A 中，可以将 $\phi(n)/d$ 解释为分圆多项式 $\Phi_n(t)$ 的模 p 约化的不可约因子数目，其中每个因子的次数均为 d；这些因子给出了 D^+ 的生成元在 V 上可能具有的最小多项式。情形 B 中，$\phi(n)/d = \phi(n)/2e$ 也有类似的解释，此时以 e 代替 d。除以 2 是因为交换直和项 $\mathcal{M}_i$ 所诱导的同构。

这一论证表明，对于给定的 n，p 必须与 n 互素，而 $\mathcal{M}^+$ 和 G 的结构，具体而言 d 的取值以及属于情形 A 还是 B，只取决于 p 模 (n) 的同余类；根据狄利克雷定理，每个同余类都包含无穷多个素数。总之，我们证明了以下结论：

定理 7.1. 若 $\mathcal{M}$ 是度数为 $n > 2$ 的正则地图，且 $G := \mathrm{Aut}\,\mathcal{M}$ 是一个仿射型置换群，在其顶点上本原且忠实地作用，则 $G = V \rtimes D \leq \mathrm{AGL}_d(p)$，其中 V 是一个阶为 $q = p^d$ 的初等阿贝尔群，p 是与 n 互素的某个素数，且当 n 为奇数时 $p = 2$。于是，顶点集可与 V 等同，V 通过平移正则作用；固定顶点 $0 \in V$ 的 G 的子群 $D := G_0 \cong D_n$ 是 $\mathrm{GL}_d(p)$ 的一个子群，在 V 上不可约地作用，其形式如下，其中 D^+ 是 D 中指数为 2 的循环子群，且 $d = 2e$ 为偶数：

（A）p 在模 n 下的乘法阶为 d，且 $p^e \equiv -1$ 模 n，D^+ 在 $V \cong \mathbb{F}_q$ 上作为 $\mathbb{F}_q^*$ 的子群不可约地作用；或者（B）p 在模 n 下的乘法阶为 e，且 V 分解为一个 D^+-模，即 $V_0 \oplus V_1$, ，其中 $D \setminus D^+$ 中的元素交换直和项 $V_i \cong \mathbb{F}_{q'}$ （$q' := \sqrt{q} = p^e$），并且 D^+作为 $\mathbb{F}_{q'}^*$ 的子群在这些直和项上具有互为逆的不可约作用。

在这两种情形中，对于满足上述条件的给定 n 和 q，存在 $\phi(n)/d$ 个地图佩特里对，其中一个地图 $\mathcal{M}^+$ 可定向，另一个地图 $\mathcal{M}^-$ 不可定向。在情形 A $\mathcal{M}^+$，它是一个正则广义帕利地图，嵌入广义 Paley 图 $P_q^{(n)}$；在情形 B，它是一个手性对的连接，该手性对由两个可定向正则广义帕利地图 $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}^+/V_i$ $(i = 0, 1)$ 构成，每个地图都嵌入广义 Paley 图 $P^{(n)}{}_{q'}$。

示例 对于较小的偶数 $n > 2$，满足 -1 是模 (n) 下 p 的幂 p^e 的素数 p，从而得到情形 A；相应的 $d = 2e$ 值如下：

- 对于 $n = 4$、6、8、12，仅有 $p \equiv -1$ 模 (n)，且 $d = 2$;
- 对于 $n = 10$，$p \equiv -1$、± 3 模 (10)，且 $d = 2$、4、4;
- 对于 $n = 14$，$p \equiv -1$、3、5 模 (14)，且 $d = 2$、6、6。

在以下情形中，$p^e \equiv 1$ 模 (n) 时出现情形 B：

- 对于 $n = 4$、6、10，仅有 $p \equiv 1$ 模 (n)，且 $d = 2$;
- 当 $n = 8$、$p \equiv 1, \pm 3 \bmod (8)$ 时，$d = 2, 4, 4$;
- 当 $n = 12$、$p \equiv 1, \pm 5 \bmod (12)$ 时，$d = 2, 4, 4$;
- 当 $n = 14$、$p \equiv 1, -3, -5 \bmod (14)$ 时，$d = 2, 6, 6$.

对于奇数 n，只有素数 $p = 2$ 对应正则地图；当 n 较小时，有：

- 情形 A 出现在 $n = 3, 5, 9, 11, 13$ 且 $d = 2, 4, 6, 10, 12$ 时;
- 情形 B 出现在 $n = 7, 15$ 且 $d = 6, 8$ 时。

备注：V 的可能维数 d 没有上界。例如，若取 $n = 2m$，其中 m 为奇素数，则群 $\mathbb{Z}_n^* \cong C_{m-1}$ 的生成元 c 满足 $c^{(m-1)/2} = -1 \bmod (n)$，因此，素数 $p \equiv c \bmod (n)$ 在情形 A 中有 $d = m - 1$。此外，若选择 $m \equiv -1 \bmod (4)$，则 c^2 的阶为奇数，即 $(m - 1)/2$，因此 -1 不可能是 c^2, 的幂，从而素数 $p \equiv c^2 \bmod (n)$ 在情形 B 中有 $d = m - 1$。然而，对于任意固定的 n，在情形 A 或 B 中，p 模 (n) 的乘法阶 d 或 e 必须整除 $\phi(n)$，因此 d 整除 $2\phi(n)$。

可以通过考察元素 r_0r_1 和 $r_0r_1r_2$ 的阶（如同在几乎单简单情形中那样）、利用 [11], 中关于广义帕利地图的信息，或根据 [9] 中关于仿射群的章节，确定每个映射 $\mathcal{M}^{\pm}$ and $\mathcal{M}_i$ 的扩展型 $\{m, n\}_l$, 从而确定其亏格。由 [11, 引理 2.4], , 阶为 $q = p^d$ 且度数为 $n > 2$ 的广义 Paley 地图具有类型

$\{n, n\}_{2p}$，且亏格为 $1 + \frac{1}{4}q(n - 4)$，除非 $n \equiv 2 \bmod (4)$，在此情形下其类型为 $\{n/2, n\}_{2p}$，亏格为 $1 + \frac{1}{4}q(n - 6)$。这直接适用于情形 A 中的正则地图 $\mathcal{M}^+$。在情形 B 中，以 $q' = \sqrt{q}$ 替换 q，可知手性对映射 $\mathcal{M}_i$ 的类型为 $\{n, n\}_{2p}$，亏格为 $1 + \frac{1}{4}q'(n - 4)$，除非 $n \equiv 2 \bmod (4)$，在此情形下它们的类型为 $\{n/2, n\}_{2p}$，亏格为 $1 + \frac{1}{4}q'(n - 6)$；由于 q'-层覆盖 $\mathcal{M}^+ \to \mathcal{M}_i$ 是非分歧的，故可推出 $\mathcal{M}^+$ 与情形 A 中具有相同的类型和亏格。因此，在任一情形下，$\mathcal{M}^-$ 的亏格均为 $2 + q(np - n - 2p)/2p$，且其类型为 $\{2p, n\}_n$，除非 $n \equiv 2 \bmod (4)$，在此情形下其类型为 $\{2p, n\}_{n/2}$。

8. 仿射地图的对偶性

在仿射情形下，如果 n 为奇数或 $n \equiv 0 \bmod (4)$，那么 $\mathcal{M}^+$ 具有类型 $\{n,n\}_{2p}$，因此存在以下可能性：$\mathcal{M}^+$ 可能是自对偶的，也可能属于一个对偶对。这一问题在 [9] 或 [11], 中尚未考虑，因此我们将在此处处理它。

首先假设 n 为奇数，因此 $p = 2$。给定生成 D 的标准生成元 r_1 和 r_2，我们需要找到对应于地图 $\mathcal{M}^+$的第三个生成元 r_0。由于 $G = V \rtimes D$，我们有 $r_0 = vr$，其中 $v \in V$ 且 $r \in D$。于是，$r_0^2 = 1$ 当且仅当 r 反演 v；r_0 与 r_2 交换，当且仅当 r 与 v 交换；并且 $G = \langle r_0, r_1, r_2 \rangle$ 当且仅当 $v, 1$。由于 n 为奇数且 $p = 2$，这些条件等价于 $r = 1$ 或 r_2 且 $v^r = v, 1$。由于 $\mathcal{M}^+$ 是可定向的，我们要求 $r_0 \in G^-$，因此 $r = r_2$ 且 $v^{r_2} = v, 1$。

现在，当且仅当存在一个固定 r_1、并交换 r_0 和 r_2 的 G 的自同构时，$\mathcal{M}^+$ 是自对偶的。由一个元素 $w \in V$ 的共轭作用可实现这一点，当且仅当 $r_1^w = r_1$ 和 $r_2^w = r_2 v$，或等价地，$w^{r_1} = w$ 和 $w^{r_2} w = v$。取一个由 r_1 固定但不由 r_2, 固定的 $w \in V$，并定义 $v = w^{r_2} w$，则 $v^{r_2} = w w^{r_2} = w^{r_2} w = v$，于是得证。因此，当 n 为奇数时，$\mathcal{M}^+$ 是自对偶的。

现在设 $n \equiv 0 \bmod (4)$，因此 p 为奇数且与 n 互素。于是 V 的阶与指数互素，因此根据扩展的舒尔–扎森豪斯定理，它在 G 中的补群只有一个共轭类。由于面度数为 n，其稳定子也是顶点稳定子 D，因此 G 在 $\mathcal{M}^+$的面上本原作用；等价地，对偶地图 $D(\mathcal{M}^+)$的自同构群 G 也在其顶点上本原作用。由此可知，要么 $\mathcal{M}^+$ 是自对偶的（当 $\phi(n)/d = 1$时必然如此），要么 $\mathcal{M}^+$ 是具有这一性质的一对可定向正则地图中的一个。

为确定会出现上述哪种可能性，我们可以像 n 为奇数时那样论证：$r_0 = vr$（其中 r 将 v 取逆）与 r_2, v、1 和 $r \in D^-$可交换。现在，与 r_2 可交换的元素 $r \in D^-$为 r_2 和 $r_2 z$, 其中 $z := a^{n/2}$ $(a := r_1 r_2)$生成 D 的中心。若取 $r = r_2$，便会发现 r 既将 v 取逆又保持 v 不变，这不可能，因为 v 的阶为 $p > 2$。因此 $r = r_2 z$，所以 $r_0 = v r_2 z$。

地图 $\mathcal{M}^+$ 是自对偶的，当且仅当存在 G 的一个自同构 α，它固定 r_1 并交换 r_0 和 r_2。由于 V 是 G 的特征子群，这样的自同构必定诱导出 $G/V \cong D_n$ 的一个自同构 α，并对 G 的生成元 r_i 的像 r_i 产生相同的作用。由于α 固定 r_1 并交换 r_2 和 $r_2 z$，因此 α 是 D_n 中唯一一个固定 r_1并将 a 映为 az 的自同构。

我们需要确定 D_n 的这个自同构α 能否提升为 G 的一个自同构 α，并满足所需性质，即固定 r_1，并交换 r_2 和 $r_0 = v r_2 z$。当且仅当 D 在 V 上的表示与其和 α（作用于 D）复合所得的表示等价时，这种情况才会发生；

由于 z 在 V（情形 A）或每个 V_i（情形 B）上的表示矩阵为 –I，这等价于 a 的特征值 λ 与 $-\lambda$ 或 $-1/\lambda$伽罗瓦共轭。由于 λ 的阶为 n，我们可知，若 $n \equiv 0 \bmod (4)$，则 $\mathcal{M}^+$ 自对偶当且仅当对某个 i，有 $p^i \equiv_n \frac{n}{2} \pm 1 \bmod (n)$。

9. 小 n 的仿射例子

我们首先考虑 n 的奇数值，因此 $p = 2$，而映射 $\mathcal{M}^+$ 和 $\mathcal{M}^-$ 的亏格分别为 $1 + 2^{d-2}(n-4)$ 和 $2 + 2^{d-2}(n-4)$。

示例 若 $n = 3$，则我们有情形 A，其中 $d = 2$，且 $G \cong \mathbb{F}_4 \rtimes D_3 \cong S_4$。佩特里对偶对 $\mathcal{M}^{\pm}$ 的数量为 $\phi(3)/d = 2/2 = 1$。地图 $\mathcal{M}^+$ 是四面体 $\mathcal{M}^+ = \{3,3\}$，亏格为 0，类型为$\{3,3\}_4$；而 $\mathcal{M}^-$的不可定向亏格为 1，类型为 $\{4,3\}_3$，它是立方体的对跖商。对于每个地图，G 在顶点上都是 4-传递的（因此也是本原的）。

示例 当 $n = 5$ 时，我们有情形 A，其中 $d = 4$ 且 $G \cong \mathbb{F}_{16} \rtimes D_5$。唯一的 Petrie 对偶对由 $\mathcal{M}^+ = $ R5.9（自对偶）和类型为 $\{5,5\}_4$ 的 $\mathcal{M}^- = $ N6.3 组成。

示例 当 $n = 7$ 时，我们有情形 B，其中 $d = 6$ 且 $G \cong (\mathbb{F}_8 \oplus \mathbb{F}_8) \rtimes D_7$。存在唯一的 Petrie 对偶对，由 R49.57（自对偶，类型为 $\{7,7\}_4$ ）和类型为 $\{4,7\}_7$的 N50.5 组成。其中前者是埃德蒙兹嵌入的手性对 C7.2 的连接 $\mathcal{M}_i$ （$i = 1, 2$），该手性对分别是完全图 K_8, 的嵌入，且每个嵌入的自同构群为 $G^+/V_i \cong AGL_1(8) \cong \mathbb{F}_8 \rtimes C_7$。（参见 [10] 关于完全图的可定向正则嵌入。）

示例：若 $n = 9$，则为情形 A，其中 $d = 6$，且 $G \cong \mathbb{F}_{64} \rtimes D_9$。唯一的佩特里对偶对由 $\mathcal{M}^+ = $ R81.125（自对偶），类型为 $\{9,9\}_4$，以及 $\mathcal{M}^- = $ N82.1，类型为 $\{4,9\}_9$，组成。

示例：若 $n = 11$，则为情形 A，其中 $d = 10$，且 $G \cong \mathbb{F}_{1024} \rtimes D_{11}$。唯一的佩特里对偶对为 $\mathcal{M}^+$（自对偶），亏格为 1793、类型为 $\{11,11\}_4$，以及 $\mathcal{M}^-$，亏格为 1794、类型为 $\{4,11\}_{11}$。当 $n \geq 11$ 为奇数时，这些亏格过大，因此这些地图不会出现在 [2] 中。

示例：若 $n = 13$，则为情形 A，其中 $d = 12$，且 $G \cong \mathbb{F}_{4096} \rtimes D_{13}$。存在唯一的佩特里对偶对，即 $\mathcal{M}^+$（自对偶），亏格为 9217、类型为 $\{13,13\}_4$，以及 $\mathcal{M}^-$，亏格为 9218、类型为 $\{4,13\}_{13}$。

示例 当 $n = 15$时，我们有情形 B，其中 $d = 8$且 $G \cong (\mathbb{F}_{16} \oplus \mathbb{F}_{16}) \rtimes D_{15}$。唯一的 Petrie 对偶对是：$\mathcal{M}^+$，亏格为 705，类型为 $\{15,15\}_4$（自对偶）；以及 $\mathcal{M}^-$，亏格为 706，类型为 $\{4,15\}_{15}$。其中第一个是手性对 C45.2 的连接；该手性对由 K_{16}, 的可定向正则嵌入组成，每个嵌入的自同构群为 $AGL_1(16) \cong \mathbb{F}_{16} \rtimes C_{15}$。

在上述每个示例中，佩特里对偶对的数量 $\phi(n)/d$ $\mathcal{M}^{\pm}$ 都等于 1。如果 2 是模 (n) 的原根，也就是群 $\mathbb{Z}_n^*$ 的生成元，那么总会出现这种情况；这一条件意味着 $n = r^i$，其中 r 是素数，且 2 是模 (r) 的原根。事实上，如果 r 是素数且 2 是模 r 的原根[2], ，例如 $r = 3$、5、11 和 13，那么对于所有 i，2 都是模 (r^i) 的原根（见 [16, 引理 1.10(i)]），从而得到无穷多个满足 $\phi(n)/d = 1$ 的 n。阿廷原根猜想断言，2（以及大多数其他整数）对于一组具有正密度的素数是原根。然而，是否存在无穷多个这样的素数仍是一个未解决的问题。

与上述示例不同，当 $n = 17$ 时，有两个佩特里对偶对；以下示例表明，对偶对的数量还可能多得多。

示例 利用欧拉函数的乘法性质可得，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\phi(n) \geq \sqrt{n/2}$。如果 n 是梅森数 $2^e - 1$，那么 2 在模 (n) 下的阶为 e，因此得到下界 $\phi(n)/d = \phi(n)/2e \geq \sqrt{2^e - 1}/4e$，故佩特里对偶对的数量无上界。事实上，如果 $e > 2$，那么 -1 在模 (n) 下不是 2 的幂，因此我们得到情形 B，其中 $G \cong (\mathbb{F}_{2^e} \oplus \mathbb{F}_{2^e}) \rtimes D_n$。每个地图 $\mathcal{M}^+$ 都是一对手性对的连接，这对手性对由 K_{2^e} 的可定向正则嵌入 $\mathcal{M}_i$ 构成，每个嵌入的亏格为 $1 + 2^{e-2}(n-4)$，其自同构群为 $\mathrm{AGL}_1(2^e) \cong \mathbb{F}_{2^e} \rtimes C_n$。例如，如果 $e = 5$ 且 $n = 31$，则有三个亏格分别为 6913 和 6914 的佩特里对偶对 $\mathcal{M}^{\pm}$；这三对手性对 $\mathcal{M}_i$ 是 K_{32} 的可定向正则嵌入 C217.45、C217.46 和 C217.47。

类似地，我们有一个价数为 $n = 2^e + 1$ 的无限族，其广义帕利图具有数量无界的顶点本原正则嵌入。同样地，对于任意奇素数 p，序列 $p^e \pm 1$ 给出了在情形 A 和情形 B 中均具有数量无界的佩特里对偶映射的价数。

示例 若 $n = p_1 \dots p_k$，其中 p_i 是满足 2 不是原根的互异素数（例如 $p_i \equiv \pm 1$ 模 (8)，因为根据欧拉判别法，此时 2 是模 (p) 的平方），则 $\phi(n)/d \geq 2^k$；根据狄利克雷定理，这样的素数 p_i 有无穷多个，因此 Petrie 对偶对的数量没有上界。

现在我们考虑 n 为偶数的示例。在这些情形中，p 可以是任意不整除 n 的素数 .

示例 设 $n = 4$。若 $p \equiv 1$ 模 (4)，则我们处于情形 B，其中 $d = 2$ 且 $G \cong (\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p) \rtimes D_4$,；而若 $p \equiv -1$ 模 (4)，则我们处于情形 A，其中 $d = 2$ 且 $G \cong \mathbb{F}_{p^2} \rtimes D_4$。在任一情形中，佩特里对偶对的数量均为 $\phi(4)/d = 1$。它们是自对偶环面映射 $\mathcal{M}^+ = \{4,4\}_{p,0}$ 及其佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$，后者是一个亏格为 $(p-1)^2 + 1$、类型为 $\{2p,4\}_4$ 的不可定向地图。例如，当 $p = 3$、5、7 或 11 时，$\mathcal{M}^-$ 分别为 N5.2、N17.2、N37.1 或 N101.3。若 $p \equiv 1$ 模 (4)，则 $p = a^2 + b^2$，其中 a、$b > 0$为整数，而 $\mathcal{M}^+$ 是手性对 $\mathcal{M}_i = \{4,4\}_{(a,b)}$ 和 $\{4,4\}_{(b,a)}$ 可定向正则环面地图的连接；若 $p = 5$或 13，则它们是 K_5 或阶为 13、价数为 4 的广义帕利图 $P_{13}^{(4)}$ 的嵌入（参见 [11]，其中介绍了帕雷图和广义帕利图的可定向正则嵌入）。

示例 当 $n = 6$ 时，情况类似。对于满足 $p \equiv \pm 1 \bmod (6)$ 的素数 p，我们分别得到情形 B 或 A。这两个地图分别是环面地图 $\mathcal{M}^+ = \{3,6\}_{p,\,0}$ 及其佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$，后者是一个类型为 $\{2p,6\}_3$、亏格为 $2p^2 - 3p + 2 = 2(p-1)^2 + p$ 的非可定向地图。例如，若 $p = 5$，取 7、11 或 13，则它们分别是 N37.5、N79.2、N211.2 或 N301.2。若 $p \equiv 1 \bmod (6)$，则 $p = a^2 + ab + b^2$ 对于整数 a、$b > 0$，并且 $\mathcal{M}^+$ 是由手性对 $\mathcal{M}_i = \{3,6\}_{(a,b)}$ 和 $\{3,6\}_{(b,a)}$ 构成的连接，这对手性对是可定向正则环面地图；若 $p = 7$ 为 7 或 13，则它们是 K_7 或帕雷图 P_{13} 的嵌入。

示例 令 $n = 8$。若 $p \equiv \pm 1 \bmod (8)$，则分别对应情形 B 或情形 A，其中 $d = 2$，$G \cong (\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p) \rtimes D_8$ 或 $\mathbb{F}_{p^2} \rtimes D_8$,，并有 $\phi(8)/d = 4/2 = 2$ 个佩特里对偶对。每个地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 $p^2 + 1$，类型为 $\{8,8\}_{2p}$；而 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 $3p^2 - 4p + 2$，类型为 $\{2p,8\}_8$。若 $p = 7$，例如，就有一对对偶地图 R50.7，$\mathcal{M}^+$ 类型为 $\{8,8\}_{14}$，其佩特里对偶 N121.3 和 N121.4 的类型为 $\{14,8\}_8$。若 $p = 17$，则有一对对偶地图 R290.6，$\mathcal{M}^+$ 类型为 $\{8,8\}_{34}$，以及

它们的佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$，亏格为 801，类型为 $\{34,8\}_8$；后者的亏格过大，无法出现在 [2]中。在这种情况下，四个商映射 $\mathcal{M}_i$ 构成一对手性对 C18.1，均为类型 $\{8,8\}_{34}$的可定向正则映射，且每个映射都嵌入帕雷图 P_{17}。

若 $p \equiv \pm 3 \bmod (8)$，则属于情形 B，其中 $d = 4$，$G \cong (\mathbb{F}_{p^2} \oplus \mathbb{F}_{p^2}) \rtimes D_8$，且仅有一个佩特里对偶对：$\mathcal{M}^+$，其亏格为 p^4+1，类型为 $\{8,8\}_{2p}$；以及 $\mathcal{M}^-$，其亏格为 $3p^4-4p^3+2$，类型为 $\{2p, 8\}_{8}$。例如，若 $p = 3$，则 $\mathcal{M}^+$ 是类型为 $\{8,8\}_6$的自对偶地图 R82.50，而 $\mathcal{M}^-$ 是其佩特里对偶 N137.3，类型为 $\{6,8\}_8$；$\mathcal{M}^+$ 是由自对偶可定向正则嵌入 K_9构成的手性对 C10.3 的连接。若 $p = 5$，则 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 626，类型为 $\{8,8\}_{10}$；而 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 1377，类型为 $\{10,8\}_8$；$\mathcal{M}^+$ 是由广义 Paley 图 $P_{25}^{(8)}$ 的互为对偶的可定向正则嵌入构成的手性对 C26.1 的连接。

示例 当 $n = 10$时，情况类似。如果 $p \equiv \pm 1 \bmod (10)$，我们分别有情形 B 或 A，其中 $d = 2$，$G \cong (\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p) \rtimes D_{10}$ 或 $\mathbb{F}_{p^2} \rtimes D_{10},$，以及 $\phi(10)/d = 2$ 个佩特里对偶对。每个地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 p^2+1，类型为 $\{5,10\}_{2p}$；而 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 $4p^2-5p+2$，类型为$\{2p,10\}_5$。例如，当 $p = 11$ 时，$\mathcal{M}^+$ 是类型为 $\{5,10\}_{22}$的 R122.3 或 R122.4，而其佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$ 分别是类型为 $\{22,10\}_5$的 N431.2 或 N431.1；地图 $\mathcal{M}^+$ = R122.3 和 R122.4 分别是 K_{11}的可定向正则嵌入中的两个手性对 C12.2 和 C12.1 的连接。如果 $p = 19$，地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 362，类型为 $\{5,10\}_{38}$，而它们的佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$的亏格为 1361，类型为 $\{38,10\}_5$。

若 $p \equiv \pm 3 \bmod (10)$，则为情形 A，其中 $d = 4$，$G \cong \mathbb{F}_{p^4} \rtimes D_{10},$，且有一对佩特里对偶。每个地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 p^4+1，类型为 $\{5,10\}_{2p}$；而 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 $4p^2-5p+2$，类型为 $\{2p,10\}_5$。例如，若 $p = 3$，这些地图是类型为 $\{5,10\}_6$ 的 R82.19 和类型为 $\{6,10\}_5$的 N191.7。若 $p = 7$，则 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 2402，类型为 $\{5,10\}_{14}$；而 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 7891，类型为 $\{14,10\}_5$。

示例 令 $n = 12$。若 $p \equiv \pm 1 \bmod (12)$，则为情形 B 或情形 A，其中 $d = 2$，$G \cong (\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p) \rtimes D_{12}$或 $\mathbb{F}_{p^2} \rtimes D_{12},$，且有 $\phi(12)/d = 2$ 对佩特里对偶。地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 $2p^2+1$，类型为$\{12,12\}_{2p}$；而它们的佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 $5p^2-6p+2$，类型为 $\{2p,12\}_{12}$。例如，若 $p = 11$，则有四个地图，包括一对类型为 $\{12,12\}_{22}$ 的对偶对 R243.16，以及它们的佩特里对偶 N541.6 和 N541.7，类型为 $\{22,12\}_{12}$。（在 [2] 中还可找到一对佩特里对偶 R243.17 和 N541.8，其扩展型和亏格与这四个地图相同。不过，它们的自同构群也是一个半直积 $\mathbb{F}_{11^2} \rtimes D_{12},$，但与另外四个地图的自同构群不同构：它在顶点上有一个本原但非忠实的作用，核的阶为 3，这表明 R243.17 是正则环面地图 $\{4,4\}_{11,\,0}$ 的三重覆盖，且在顶点和面中心处分歧。关于此示例及更多有关非忠实作用的内容，见第 11 节。）若 $p = 13$，则每个地图 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 339，类型为 $\{12,12\}_{26}$；而它们的佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$ 的亏格为 769，类型为 $\{26,12\}_{12}$；这四个商映射 $\mathcal{M}_i$ 是 K_{13}的可定向正则嵌入所构成的两对对偶手性对 C27.7。

若 $p \equiv \pm 5 \bmod (12)$，则属于情形 B，其中 $d = 4$，$G \cong (\mathbb{F}_{p^2} \oplus \mathbb{F}_{p^2}) \rtimes D_{12},$，并有一对佩特里对偶，即 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 $2p^4+1$，类型为 $\{12,12\}_{2p}$；$\mathcal{M}^-$ 的亏格为 $5p^4-6p^3+2$，类型为 $\{2p,\ 12\}_{12}$。若 $p = 5$，则 $\mathcal{M}^+$的亏格为 1251，类型为 $\{12,12\}_{10}$；而 $\mathcal{M}^-$的亏格为 2377，类型为 $\{10,12\}_{12}$。两个商映射 $\mathcal{M}_i$ 构成手性对 C101.31，它们是帕雷图 P_{25}, 的类型为 $\{12,12\}_{10}$ 的可定向正则自对偶嵌入，因此 $\mathcal{M}^+$ 也自对偶。

10. 二面体商映射

在仿射情形中，G 有一个正规子群 V，且 $G := G/V \cong D_n$，因此每个 $\mathcal{M}^{\pm}$ 都是由 V 给出的正则覆盖，覆盖一个正则地图 $\overline{\mathcal{M}} := \mathcal{M}/V$，其自同构群为 G。现在，$\overline{\mathcal{M}}^+$ 的类型为 {m, n}，其中 $m = n/2$ 或 n，取决于 $n \equiv 2 \bmod (4)$ 与否；由于 m 和 n 均与 V 的指数 p 互素，可知 $\mathcal{M}^+$ 与 $\mathcal{M}^+$具有相同的类型 {m, n}，并分别有两个或一个 m 价面。若 n 为偶数，则覆盖 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^+$ 无分歧，因此 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 $g = 1 + (g - 1)/q = n/4$ 或 $(n - 2)/4$；而 $\mathcal{M}^+$ 的亏格为 $g = 1 + q(n - 4)/4$ 或 $1 + q(n - 6)/4$，分别对应 $n \equiv 0 \text{ or } 2 \bmod (4)$；事实上，$\mathcal{M}^+$ 是熟知图形的对偶：将一个 n 边形的相对边粘合，形成一个可定向曲面（$n = 4$和 6 的情形见图1）。

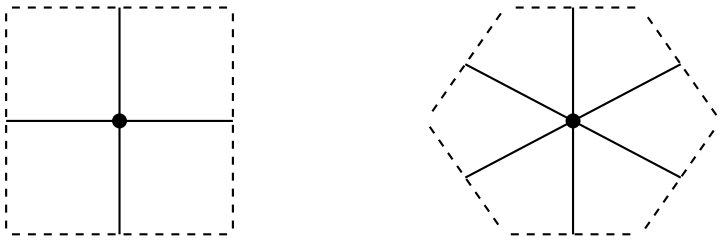

图1。商映射 $\mathcal{M}^+$ 对于 $\overline{n} = 4$ 和 $n = 6$（对边已识别）

如果 n 为奇数，则 $r_0r_2 \in V$，覆盖 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^+$ 在边上分歧，因此 $\mathcal{M}^+$ 是球面上的一个地图，具有一个顶点、一个面和 n 条半边。在佩特里多边形上还存在 p 阶分歧，因此，虽然 $\mathcal{M}^+$ 的扩展型为 $\{m, n\}_{2p}$，但 $\mathcal{M}^+$ 的扩展型为$\{m, n\}_2$。取佩特里对偶可见，$\mathcal{M}^-$ 的扩展型为 $\{2,n\}_m$；当 n 为偶数时，该地图是球面上 n 价沙滩球地图 {2,n} 的对跖商；当 n 为奇数时，它是闭圆盘上的一个地图，中心有一个顶点，并有 n 条半边从该顶点延伸至边界。

由于 V 是一个初等阿贝尔 p 群，可以通过取其模 (p) 同调覆盖（“Macbeath 技巧”）并将覆盖群、同调群 $H_1(\mathcal{M}^+; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{2g}$分解为不可约 D-子模的直和，从而得到 $\phi(n)/d$ 个原始地图 $\mathcal{M}^+$ from$\mathcal{M}^+$。每个地图 $\mathcal{M}^+$ 随后都通过除去除其中一个子模以外的所有子模之和得到。

11. 非忠实作用

自同构群在顶点、边或面上的作用不忠实的正则地图，Li 和 Sir´a˘n 已在 [14], 中进行了详尽研究，因此这里我们只概述一些可能性。

设对于某个正则地图 $\mathcal{M}$，有 $G = \text{Aut}\,\mathcal{M}$，其在顶点上作用本原但不忠实。与前面一样，顶点稳定子 D 是 G 的二面体极大子群，但现在它们的交 K（即该作用的核）非平凡。由于 K 在 G 中正规，因此它在 D 中也正规，所以要么 $K \leq D^+$，要么 n 为偶数且 $K \cong D_{n/2}$。在后一种情形下，r_1 或 r_2 是 K 中的元素，因此 $\mathcal{M}$ 的边界非空；我们排除这种情形。因此可以假设 $K \leq D^+$，于是 $\mathcal{M}$ 是正则地图 $\mathcal{M} = \mathcal{M}/K$ 的正则循环覆盖。后者的自同构

群 $G = G/K$ 在其顶点上作用本原且忠实，因此 $\mathcal{M}$ 和 G 如前所述，或者是几乎单群，或者是仿射群。G 对 K 的共轭作用给出一个同态 $G \to \mathrm{Aut}\, K$。如果 $|K| > 2$，该同态非平凡，因为 r_1 和 r_2 将 K 取逆；现在由于 K 是循环群，Aut K 是阿贝尔群，因此 G 不可能是完美群。

若 G 是几乎单群，则除 $G = \mathrm{PGL}_2(q)$ 且 $q > 5$ 为奇数的情形外，其他情形均可排除（定理 4.2 的情形 (2) 和 (5)）。由于我们已经看到，尽管其标准生成元 r_1 和 r_2 都会反转 D^+，其中一个必定属于 $G^+ = \mathrm{PSL}_2(q)$，即 G 的换位子群，而该子群在 K 上作用平凡，因此这个群也可以排除。这样就只剩下情形 $|K| = 2$，其中 n 为偶数，且 $K = \langle z \rangle$，其中 $z = (r_1 r_2)^{n/2}$，是 D 中的中心对合。

构造此类双覆盖的一种方法是令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}$ 与一个未被 $\mathcal{M}$覆盖的 2-旗映射 $\mathcal{T}$ 相连接，从而使 $G = G \times C_2$。共有七个 2-旗映射 $\mathcal{T}$，对应于 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T} \cong C_2$, 的七个生成三元组 (r_i)；使用其中任一个，都会将 $\mathcal{M}$ 的扩展型 $\{m, n\}_l$ 中的参数 l、m、n 之一、两个或全部三个替换为 $l := \mathrm{lcm}\{l, 2\}$，m 和 n 的替换方式也类似。特别地，七个映射 $\mathcal{T}$ 中有四个满足 $r_1 r_2 \neq 1$，，它们将 n 替换为 n，因此若 n 为奇数，我们便得到一个在顶点上为双射的双覆盖 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$，使顶点的价数加倍。这些映射 $\mathcal{T}$ 都位于闭圆盘上，如图 2 所示，并附有相应的 $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}$ 生成三元组 (r_i)；该群被识别为 $\{\pm 1\}$。

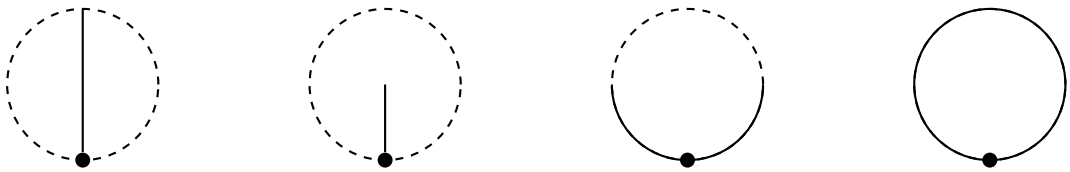

图 2. 四个 2-旗映射 $\mathcal{T}$ with $r_1 r_2 \neq 1$

示例 若 $\mathcal{M}$ 是二十面体的对跖商，类型为 $\{3, 5\}_5$，其本原且忠实的自同构群 $G \cong \mathrm{SL}_2(4) \cong A_5 \cong \mathrm{PSL}_2(5)$（见第 6 节中的情形（6）），那么由此得到的四个双覆盖 $\mathcal{M}$ 是 N6.1 和 N6.2，类型分别为 $\{3, 10\}_{10}$ 和 $\{3, 10\}_5$，在 $\mathcal{M}$ 的六个顶点处分歧；以及 N16.5 和 N16.6，类型分别为 $\{6, 10\}_5$ 和 $\{6, 10\}_{10}$，在六个顶点和十个面中心处分歧。这四个地图的自同构群均为 $G \cong G \times C_2$，它们在各自的六个顶点上作用本原但不忠实。（由连接得到的 $\mathcal{M}$ 的另外三个双覆盖是 N10.4 和 N10.5，类型分别为 $\{6, 5\}_{10}$ 和 $\{6, 5\}_5$，在面中心处分歧；以及二十面体本身，它是一个无分歧覆盖；这些都不是顶点本原的。）对 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}$ 取佩特里对偶，可得到另外四个示例。G 的唯一其他双覆盖是二元二十面体群 $A_5 \cong \mathrm{SL}_2(5)$，但由于它只包含一个对合（生成中心），因此不能产生任何正则地图。

相比之下，仿射群能产生许多示例，构造方法如下。首先取一个仿射群 $G = V \rtimes_\phi D$，它在正则地图$\mathcal{M}$的顶点集 V 上忠实且本原地作用，并具有特定作用 $\phi : D \to \mathrm{Aut}\, V = \mathrm{GL}_d(p)$；然后取一个含有奇数阶正规子群 K 的二面体群 D，使得 $D/K \cong D$，并考虑覆盖群 $G = V \rtimes_\psi D$，其中ψ 是 ϕ 与自然满同态 $D \to D$ 的复合。

示例 令 $\mathcal{M}$ 为某个奇素数 p 对应的环面地图 $\{4,4\}_{(p,0)}$，其自同构群 $G = V \rtimes D$ 为本原且忠实的，其中 $V \cong C_p \times C_p$，$D \cong D_{4o}$。现在取某个奇数 $k > 1$，令 $D \cong D_{4k}$，并令 $G = V \rtimes D$，其中 D 通过自然满同态 $D \to D$（核为 $K \cong C_k$）像 V 上的 D 那样作用于 V。于是，G 是一个顶点本原可定向正则地图 $\mathcal{M}$ 的自同构群，该地图是 $\mathcal{M}$ 的 k 重覆盖，在顶点和面中心处分歧；它是自对偶的，类型为$\{4k, 4k\}_{2p}$，亏格为 $(k-1)p^2 + 1$。G 在顶点（以及面）上的作用的核为 K。例如，若 $k = 3$，则当 $p = 5$、7 和 11 时，我们得到地图 R51.24、R99.23 和 R243.17。

然而，当 $p = k$ 时，有 $\phi(p) = p - 1$ 个这样的顶点本原但非忠实的 $\mathcal{M}$ 覆盖，其中两个是自对偶的，另有 $(p-3)/2$ 个对偶对。它们由一对单值化置换 π_v 和 π_f 的 $(p-1)^2$ 种选择确定，这两个置换分别作用于 $\mathcal{M}$ 的顶点和面上，且各自生成 $K \cong C_k \cong \mathbb{Z}_p$；两个覆盖同构当且仅当它们具有相同的比值 $\rho = \pi_v/\pi_f \in \mathbb{Z}_p$，而对偶性对应于将 ρ 取逆，因此自对偶覆盖就是满足 $\rho = \pm 1$ 的那些覆盖。例如，若 $p = k = 5$，则有自对偶覆盖 R101.41 和 R101.43，以及一对对偶覆盖 R101.42；若 $p = k = 7$，则有自对偶覆盖 R295.55 和 R295.56，以及对偶对 R295.57 和 R295.58。

12. 超地图

超地图几乎在所有方面都与地图相同；顶点稳定子 $D = \langle r_1, r_2 \rangle$ 再次是二面体极大子群，这意味着 G 要么是几乎单群，要么是仿射群。然而，我们失去了关系 $r_0 r_2 = r_2 r_0$，，因此我们不再在 D 中寻找对合 $r_0 \in C_G(D) \setminus D$，而是在 $G \setminus D$ 中寻找它们，这使得超地图的数量远多于地图。关于这一问题的详细论文正在准备中；这里我们只给出几个简单的示例。

示例 在几乎单简单情形（6）中，当 $q = 4$、$n = 5$ 且 $G = \mathrm{SL}_2(4) \cong A_5$ 时，有两个地图和六个真超地图（非地图，按对偶性或三元性取等价类）。后者在 [2] 中列为 NPH6.1（一个超地图，类型为 (5, 3, 3)）、NPH10.2、NPH10.3（各有两个，类型分别为 (5, 3, 5) 和 (5, 5, 3)）以及 NPH14.1（一个，类型为 (5, 5, 5)）。

此外，与地图的情形不同，也存在 n 和 p 均为奇数的仿射例子。这是因为，对于地图而言，当 n 为奇数时，证明 $p = 2$ 需要满足 $(r_0 r_2)^2 = 1$。

示例 对于每个满足 $p > 3$为素数的 p，都存在一个类型为 (3, p, 3)、亏格为 $(p-1)(p-2)/2$ 的可定向正则超地图 $\mathcal{H}$，其中 $G \cong (\mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p) \rtimes D_3$或 $\mathbb{F}_{p^2} \rtimes D_3$，取决于 $p \equiv 1$或 -1模 (3)。如果 $p \equiv 1$模 (3)，那么 $\mathcal{H}$ 是一个手性对的可定向正则超地图 $\mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2)$ 的最小正则覆盖；这些超地图的类型为 (3, p, 3)，亏格为 $(p-1)/2$。例如，当 $p = 7$ 时，它们是定义在克莱因四次曲线上的类型为 (3, 7, 3) 的超地图 CH3.1，其正则覆盖为 RPH15.1。如果 $p = 5$，那么 $\mathcal{H}$ 就是 RPH6.1。

13. 一个有用的同余

我们所讨论的仿射映射及自同构群在结构上分为两种情形，即 A 和 B，具体取决于是否存在某个 e 使得 $p^e \equiv -1$ 模 (n)（参见第 7 节，尤其是定理 7.1）。在这里，我们刻画满足这一条件的 n、p 对。

设 $n_r = r^{e_r}$（r 为素数，$e_r \geq 1$）是 n 的分解中出现的素数幂，且 d_r是 p 模 (n_r) 的乘法阶。那么有如下结论：

命题 13.1. 存在某个 e 使得 $p^e \equiv -1$ 模 (n)，当且仅当所有整除 n 的素数 $r > 2$对应的阶 d_r 具有相同的 2 部分 $2^k \geq 2$；若 $n_2 \geq 2$，则 $p \equiv -1$ 模 (n_2)；且若 $n_2 \geq 4$，则 $k = 1$。

证明很直接，利用以下事实：模 (n_r) 的单位群是循环群，除非 $r = 2$且 $n_2 \geq 8$，此时其形式为 $\langle 5\rangle \times \langle -1\rangle \cong C_{n_2/4} \times C_2$。这里 p 为素数这一条件无关紧要：这些条件仅取决于 p 模 (n) 的同余类。当然，根据狄利克雷定理，$\mathbb{Z}_n^*$ 中的每个同余类都包含无穷多个素数。

14. 致谢

第二作者感谢 APVV 研究资助 APVV-19-0308 以及 VEGA 研究资助 1/0423/20 和 1/0727/22 提供的支持。

参考文献

[1] N. L. Biggs, 《可定向曲面上的完全地图分类》, Rend.Mat.(6) 4 (1971), 645–655.[2]M. D. E. Conder, 《欧拉示性数为 −1 至 −200的正则地图与超地图》, J. Com- bin. Theory Ser. B 99 (2009), 455–459；相关计算数据列表见 http://www.math.auckland.ac.nz/~conder/hypermaps.html. ˇ[3] M. Conder, P. Potoˇcnik, J. Sir´aˇn: 《射影线性群上的正则超图》, J.Aust.Math.Soc.85 (2008), 155–175. doi:10.1017/S1446788708000827[4] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, 《离散群的生成元与关系》, 第 4 版, Springer, 1972.[5] J. H. Conway 等, 《有限群图谱》, Clarendon Press, 牛津, 1985.[6] J. D. Dixon and B. Mortimer, 《置换群》, Springer, 纽约, 1996. ˇ[7] M. Downs 和 G. A. Jones, 《铃木群中的莫比乌斯反演与正则对象的计数》, 载于: J. Sir´aˇn 和 R. Jajcay（编）, 《图、地图与多面体中的对称性》, SIGMAP 2014, Springer 数学与统计学论文集, 第 159 卷, Springer, Cham。 https://doi.org/10.1007/978-3-319-30451-9 5.[8] GAP 小组, 《GAP——群、算法与编程》,- 版本 4.12.2, 2022。（https://www.gap- system.org）。[9] R. Jajcay, C. H. Li, J. ˇSir´aˇn 和 Y. Wang, 《顶点上的拟本原自同构群所作用的正则与可定向正则映射》, Geom.Dedicata203 (2019), 389–418.[10] L. D. James 和 G. A. Jones, 《完全图的正则可定向嵌入》, J. Combin.Theory Ser. B 39 (1985), 353–367.[11] G. A. Jones, 《广义 Paley 映射的刻画与伽罗瓦共轭》, J. Combin. Theory Ser. B 103 (2013), 209–219.[12] G. A. Jones, 《带边界曲面上的高度对称映射》, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Ot- del. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 446 (2016), Kombinatorika i Teoriya Grafov. V, 100–121；转载于 J.Math.Sci.(N.Y.)226 (2017), no. 5, 608–622.[13] C. H. Li, 《完全图的顶点传递嵌入》, J.Combin.TheorySer.B99 (2009), 447–454. ˇ[14] C. H. Li 和 J. Sir´aˇn, 《其群在顶点、边或面上不忠实作用的正则地图》, Europ.J.Com- bin.26 (2005), 521–541.

[15] T K. Lim 和 C. E. Praeger，《广义 Paley 图及其自同构群》，MichiganMath.J.58 (2009) 293–308.
[16] W. Narkiewicz，《素数理论的发展》，Springer-Verlag，柏林／海德堡／纽约，2000.[17] R. A. Wilson，《有限单群》，Springer，伦敦，2009.

15. 附录 A：具有几乎单群的地图数据

这里，对于自同构群 G 为几乎单群的情形 $i = 1, \ldots, 7$，我们给出每个相关素数幂 $q < 50$ 下顶点本原地图 $\mathcal{M}$ 的数量 $\nu_i(q)$，以及它们的最小和最大亏格（参见第 6 节）。

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(1)	13	6	106	142	2
(1)	17	8	325	389	6
(1)	19	9	97	496	15
(1)	23	11	232	991	30
(1)	25	12	847	1327	5
(1)	27	13	1379	1730	14
(1)	29	14	582	2402	18
(1)	31	15	746	2761	32
(1)	37	18	1408	5284	24
(1)	41	20	2011	7331	36
(1)	43	21	2367	8086	66
(1)	47	23	3198	10765	132
(1)	49	24	3677	12301	22

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(2)	7	6	16	37	5
(2)	9	8	17	101	7
(2)	11	10	46	211	18
(2)	13	12	93	379	22
(2)	17	16	257	937	60
(2)	19	18	382	1351	51
(2)	23	22	738	2509	105
(2)	25	24	977	3277	46
(2)	27	26	1262	4187	50
(2)	29	28	1597	5251	162
(2)	31	30	1986	6481	116
(2)	37	36	3517	11287	210
(2)	41	40	4881	15541	312
(2)	43	42	5678	18019	246
(2)	47	46	7522	23737	495
(2)	49	48	8577	27001	188

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(3)	4	3	1	1	1
(3)	8	7	8	64	6
(3)	16	15	206	766	14
(3)	32	31	2202	7162	90

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(4)	11	6	46	57	2
(4)	13	7	15	155	9
(4)	17	9	70	406	12
(4)	19	10	116	515	8
(4)	23	12	255	1014	10
(4)	25	13	352	1352	18
(4)	27	14	1406	1757	6
(4)	29	15	611	2431	28
(4)	31	16	777	2792	28
(4)	37	19	1445	5321	81
(4)	41	21	2052	7372	60
(4)	43	22	2410	8129	50
(4)	47	24	3245	10812	44
(4)	49	25	3726	12350	60

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(5)	7	8	9	44	10
(5)	9	10	26	110	7
(5)	11	12	57	222	18
(5)	13	14	106	392	33
(5)	17	18	274	954	45
(5)	19	20	401	1370	68
(5)	23	24	761	2532	84
(5)	25	26	1002	3302	69
(5)	27	28	1289	4214	50
(5)	29	30	1626	5280	108
(5)	31	32	2017	6512	232
(5)	37	38	3554	11324	315
(5)	41	42	4922	15582	234
(5)	43	44	5721	18062	410
(5)	47	48	7569	23784	360
(5)	49	50	8626	27050	235

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(6)	4	5	1	5	2
(6)	8	9	16	72	6
(6)	16	17	222	782	28
(6)	32	33	2234	7194	60

Case	q	n	最小亏格	最大亏格 $\nu_i(q)$	
(7)	8	7	2290	4082	6
(7)	32	31	4355842	7212802	90

16. 附录 B：具有仿射群的地图数据

前四个表说明了这样一个事实：当自同构群 G 是仿射群时，对于某些无限的（奇数）价数 n 序列，地图 $\mathcal{M}^{\pm}$ 的佩特里对偶对数量 $\phi(n)/d$ 是无界的（参见第 9 节的示例）。

梅森数 $n = 2^e - 1$，$e \geq 3$（情形 B）。

d	e	n	$\phi(n)/d$
6	3	7	1
8	4	15	1
10	5	31	3
12	6	63	3
14	7	127	9
16	8	255	8
18	9	511	24
20	10	1023	30
22	11	2047	88
24	12	4095	72
26	13	8191	315
28	14	16383	378
30	15	32767	900
32	16	65535	1024
34	17	131071	3855
36	18	262143	3888
38	19	524287	13797
40	20	1048575	12000

梅森数 n $= 2^e - 1$, 素数 e ≥ 5 （情形 B）。

d	e	n	ϕ(n)/d
10	5	31	3
14	7	127	9
22	11	2047	88
26	13	8191	315
34	17	131071	3855
38	19	524287	13797
46	23	8388607	178480
58	29	536870911	9203904
62	31	2147483647	34636833
74	37	137438953471	1848954528
82	41	2199023255551	26815350376
86	43	8796093022207	102032294580
94	47	140737488355327	1496238758400
106	53	9007199254740991	84958991520000
118	59	576460752303423487	4885233465012400
122	61	2305843009213693951	18900352534538475
134	67	147573952589676412927	1101298147967495880
142	71	2361183241434822606847	16627977798226714560
146	73	9444732965739290427391	64542566212975464960
158	79	604462909807314587353087	3824290813491610605444

价数 $n = 2^e + 1,\ e \geq 2$ （情形 A）。

d	e	n	ϕ(n)/d
4	2	5	1
6	3	9	1
8	4	17	2
10	5	33	2
12	6	65	4
14	7	129	6
16	8	257	16
18	9	513	18
20	10	1025	40
22	11	2049	62
24	12	4097	160
26	13	8193	210
28	14	16385	448
30	15	32769	660
32	16	65537	2048
34	17	131073	2570
36	18	262145	5184
38	19	524289	9198
40	20	1048577	24672

价数 n $= 2^e + 1$, 素数 e ≥ 3 （情形 A）。

d	e	n	ϕ(n)/d
6	3	9	1
10	5	33	2
14	7	129	6
22	11	2049	62
26	13	8193	210
34	17	131073	2570
38	19	524289	9198
46	23	8388609	121574
58	29	536870913	6066336
62	31	2147483649	23091222
74	37	137438953473	1237491936
82	41	2199023255553	17662837392
86	43	8796093022209	68186767614
94	47	140737488355329	994611225120
106	53	9007199254740993	56119621524864
118	59	576460752303423489	3255603211526400
122	61	2305843009213693953	12600235023025650
134	67	147573952589676412929	734198668907188464
142	71	236118324143482260684 9	1108536713416365696 0
146	73	944473296573929042739 3	4310203292978569502 4

接下来的两张表（第一张因篇幅较长而分为两部分）展示了关于价数 $n \le 50$ 满足 $p = 2$ 且 $p = 3$的可容许地图 $\mathcal{M}^{\pm}$ 的数据。最后一列中的 $\phi(n)/d$ 表示佩特里对偶地图对的数量。

p	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
2	2	1	3	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{3,3\}_4$	0	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,3\}_3$	1		
2	4	2	5	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{5,5\}_4$	5	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,5\}_5$	6		
2	6	3	7	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{7,7\}_4$	49	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,7\}_7$	50		
2	6	3	9	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{9,9\}_4$	81	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,9\}_9$	82		
2	10	5	11	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{11,11\}_4$	1793	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,11\}_{11}$	1794		
2	12	6	13	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{13,13\}_4$	9217	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,13\}_{13}$	9218		
2	8	4	15	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{15,15\}_4$	705	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,15\}_{15}$	706		
2	8	4	17	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{17,17\}_4$	833	yes	2
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,17\}_{17}$	834		
2	18	9	19	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{19,19\}_4$	983041	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,19\}_{19}$	983042		
2	12	6	21	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{21,21\}_4$	17409	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,21\}_{21}$	17410		
2	22	11	23	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{23,23\}_4$	19922945	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,23\}_{23}$	19922946		
2	20	10	25	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{25,25\}_4$	5505025	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,25\}_{25}$	5505026		
2	18	9	27	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{27,27\}_4$	1507329	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,27\}_{27}$	1507330		
2	28	14	29	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{29,29\}_4$	1677721601	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,29\}_{29}$	1677721602		
2	10	5	31	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{31,31\}_4$	6913	yes	3
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,31\}_{31}$	6914		
2	10	5	33	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{33,33\}_4$	7425	yes	2
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,33\}_{33}$	7426		
2	24	12	35	B	$\mathcal{M}^{+}$	$\{35,35\}_4$	130023425	yes	1
					$\mathcal{M}^{-}$	$\{4,35\}_{35}$	130023426		
2	36	18	37	A	$\mathcal{M}^{+}$	$\{37,37\}_4$	566935683073	yes	1

p	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶ϕ(n)/d	
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,37\}_{37}$	566935683074		
2	24	12	39		B	$\mathcal{M}^+$	$\{39,39\}_4$	146800641	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,39\}_{39}$	146800642		
2	20	10	41		A	$\mathcal{M}^+$	$\{41,41\}_4$	9699329	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,41\}_{41}$	9699330		
2	14	7	43		A	$\mathcal{M}^+$	$\{43,43\}_4$	159745	yes	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,43\}_{43}$	159746		
2	24	12	45		B	$\mathcal{M}^+$	$\{45,45\}_4$	171966465	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,45\}_{45}$	171966466		
2	46	23	47		B	$\mathcal{M}^+$	$\{47,47\}_4$	756463999909889	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,47\}_{47}$	756463999909890		
2	42	21	49		B	$\mathcal{M}^+$	$\{49,49\}_4$	49478023249921	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{4,49\}_{49}$	49478023249922		

p	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶	ϕ(n)/d
3	2	1	4	A	$\mathcal{M}^+$	$\{4,4\}_6$	1	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,4\}_4$	5		
3	4	2	8	B	$\mathcal{M}^+$	$\{8,8\}_6$	82	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,8\}_8$	137		
3	4	2	10	A	$\mathcal{M}^+$	$\{5,10\}_6$	82	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,10\}_5$	191		
3	6	3	14	A	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_6$	1459	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,14\}_7$	2675		
3	8	4	16	B	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_6$	19684	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,16\}_{16}$	28433		
3	8	4	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_6$	26245	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,20\}_{20}$	37181		
3	10	5	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_6$	236197	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,22\}_{11}$	373979		
3	6	3	26	B	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_6$	3646	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,26\}_{13}$	5591		
3	6	3	28	A	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_6$	4375	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,28\}_{28}$	6077		
3	16	8	32	B	$\mathcal{M}^+$	$\{32,32\}_6$	301327048	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,32\}_{32}$	416118305		
3	16	8	34	A	$\mathcal{M}^+$	$\{17,34\}_6$	301327048	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,34\}_{17}$	444816119		
3	18	9	38	A	$\mathcal{M}^+$	$\{19,38\}_6$	3099363913	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,38\}_{19}$	4519905707		
3	8	4	40	B	$\mathcal{M}^+$	$\{40,40\}_6$	59050	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,40\}_{40}$	80921		
3	20	10	44	B	$\mathcal{M}^+$	$\{44,44\}_6$	34867844011	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,44\}_{44}$	47652720149		
3	22	11	46	B	$\mathcal{M}^+$	$\{23,46\}_6$	313810596091	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,46\}_{23}$	449795187731		
3	20	10	50	A	$\mathcal{M}^+$	$\{25,50\}_6$	38354628412	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{6,50\}_{25}$	54626288951		

以下表格展示了度数为给定偶数 n = 4, ..., 30 的地图的性质。类型和亏格关于素数 p 的表达式仅取决于 n 和 p 模 n，因此根据狄利克雷定理，每一行都代表一个无限的地图序列。

p 模 n	*d*	*e*	n 情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	4 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{4,4\}_{2p}$	1	yes	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 4\}_4$	$2+p^2(2p-4)/2p$		
3	2	1	4 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{4,4\}_{2p}$	1	yes	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 4\}_4$	$2+p^2(2p-4)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n 情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	6 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{3,6\}_{2p}$	1	no	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 6\}_3$	$2+p^2(4p-6)/2p$		
5	2	1	6 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{3,6\}_{2p}$	1	no	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 6\}_3$	$2+p^2(4p-6)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n 情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	8 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{8,8\}_{2p}$	$1+p^2$	no	2
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 8\}_8$	$2+p^2(6p-8)/2p$		
3	4	2	8 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{8,8\}_{2p}$	$1+p^4$	yes	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 8\}_8$	$2+p^4(6p-8)/2p$		
5	4	2	8 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{8,8\}_{2p}$	$1+p^4$	yes	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 8\}_8$	$2+p^4(6p-8)/2p$		
7	2	1	8 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{8,8\}_{2p}$	$1+p^2$	no	2
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 8\}_8$	$2+p^2(6p-8)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n 情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	10 *B*	$\mathcal{M}^+$	$\{5,10\}_{2p}$	$1+p^2$	no	2
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 10\}_5$	$2+p^2(8p-10)/2p$		
3	4	2	10 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{5,10\}_{2p}$	$1+p^4$	no	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 10\}_5$	$2+p^4(8p-10)/2p$		
7	4	2	10 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{5,10\}_{2p}$	$1+p^4$	no	1
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 10\}_5$	$2+p^4(8p-10)/2p$		
9	2	1	10 *A*	$\mathcal{M}^+$	$\{5,10\}_{2p}$	$1+p^2$	no	2
				$\mathcal{M}^-$	$\{2p, 10\}_5$	$2+p^2(8p-10)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n	情形	map	type	亏格	由对偶 $\phi(n)/d$	
1	2	1	12	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{12,12\}_{2p}$	$1+2p^2$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 12\}_{12}$	$2+p^2(10p-12)/2p$		
5	4	2	12	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{12,12\}_{2p}$	$1+2p^4$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 12\}_{12}$	$2+p^4(10p-12)/2p$		
7	4	2	12	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{12,12\}_{2p}$	$1+2p^4$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 12\}_{12}$	$2+p^4(10p-12)/2p$		
11	2	1	12	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{12,12\}_{2p}$	$1+2p^2$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 12\}_{12}$	$2+p^2(10p-12)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n	情形	map	type	亏格	由对偶 $\phi(n)/d$	
1	2	1	14	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^2$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^2(12p-14)/2p$		
3	6	3	14	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^6(12p-14)/2p$		
5	6	3	14	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^6(12p-14)/2p$		
9	6	3	14	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^6(12p-14)/2p$		
11	6	3	14	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^6(12p-14)/2p$		
13	2	1	14	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{7,14\}_{2p}$	$1+2p^2$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 14\}_{7}$	$2+p^2(12p-14)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n	情形	map	type	亏格	由对偶 $\phi(n)/d$	
1	2	1	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^2(14p-16)/2p$		
3	8	4	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^8(14p-16)/2p$		
5	8	4	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^8(14p-16)/2p$		
7	4	2	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^4(14p-16)/2p$		
9	4	2	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^4(14p-16)/2p$		
11	8	4	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^8(14p-16)/2p$		
13	8	4	16	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^8(14p-16)/2p$		
15	2	1	16	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{16,16\}_{2p}$	$1+3p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 16\}_{16}$	$2+p^2(14p-16)/2p$		

p 模 n	*d*	*e*	n	情形	map	type	亏格	由对偶 $\phi(n)/d$	
1	2	1	18	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^2$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^2(16p-18)/2p$		
5	6	3	18	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^6(16p-18)/2p$		
7	6	3	18	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^6(16p-18)/2p$		
11	6	3	18	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^6(16p-18)/2p$		
13	6	3	18	*B*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^6$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^6(16p-18)/2p$		
17	2	1	18	*A*	$\mathcal{M}^+$	$\{9,18\}_{2p}$	$1+3p^2$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 18\}_{9}$	$2+p^2(16p-18)/2p$		

p 模 n	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^2(18p-20)/2p$		
3	8	4	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^8(18p-20)/2p$		
7	8	4	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^8(18p-20)/2p$		
9	4	2	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^4(18p-20)/2p$		
11	4	2	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^4(18p-20)/2p$		
13	8	4	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^8(18p-20)/2p$		
17	8	4	20	B	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^8$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^8(18p-20)/2p$		
19	2	1	20	A	$\mathcal{M}^+$	$\{20,20\}_{2p}$	$1+4p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 20\}_{20}$	$2+p^2(18p-20)/2p$		

p 模 n	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^2$	no	5
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^2(20p-22)/2p$		
3	10	5	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
5	10	5	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
7	10	5	22	A	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
9	10	5	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
13	10	5	22	A	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
15	10	5	22	B	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
17	10	5	22	A	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
19	10	5	22	A	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^{10}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^{10}(20p-22)/2p$		
21	2	1	22	A	$\mathcal{M}^+$	$\{11,22\}_{2p}$	$1+4p^2$	no	5
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 22\}_{11}$	$2+p^2(20p-22)/2p$		

p 模 n	d	e	n 情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^2(22p-24)/2p$		
5	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
7	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
11	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
13	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	yes	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
17	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
19	4	2	24	B	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^4(22p-24)/2p$		
23	2	1	24	A	$\mathcal{M}^+$	$\{24,24\}_{2p}$	$1+5p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 24\}_{24}$	$2+p^2(22p-24)/2p$		

p 模 n	d	e	n	情形	map	type	亏格	自对偶	$\phi(n)/d$
1	2	1	26	B	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^2$	no	6
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^2(24p-26)/2p$		
3	6	3	26	B	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^6(24p-26)/2p$		
5	4	2	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^4(24p-26)/2p$		
7	12	6	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^{12}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^{12}(24p-26)/2p$		
9	6	3	26	B	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^6(24p-26)/2p$		
11	12	6	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^{12}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^{12}(24p-26)/2p$		
15	12	6	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^{12}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^{12}(24p-26)/2p$		
17	6	3	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^6(24p-26)/2p$		
19	12	6	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^{12}$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^{12}(24p-26)/2p$		
21	4	2	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^4$	no	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^4(24p-26)/2p$		
23	6	3	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^6(24p-26)/2p$		
25	2	1	26	A	$\mathcal{M}^+$	$\{13,26\}_{2p}$	$1+5p^2$	no	6
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 26\}_{13}$	$2+p^2(24p-26)/2p$		

p 模 n	d	e	n	情形	map	type	亏格 由对偶 $\phi(n)/d$		
1	2	1	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^2$	no	6
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^2(26p-28)/2p$		
3	6	3	28	A	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$		
5	12	6	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^{12}(26p-28)/2p$		
9	6	3	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$		
11	12	6	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^{12}(26p-28)/2p$		
13	4	2	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^4$	yes	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^4(26p-28)/2p$		
15	4	2	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^4$	yes	3
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^4(26p-28)/2p$		
17	12	6	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^{12}(26p-28)/2p$		
19	6	3	28	A	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$		
23	12	6	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	yes	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^{12}(26p-28)/2p$		
25	6	3	28	B	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$		
27	2	1	28	A	$\mathcal{M}^+$	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^2$	no	6
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^2(26p-28)/2p$		

p 模 n	d	e	n	情形	map	type	亏格	由对偶 $\phi(n)/d$	
1	2	1	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^2(28p - 30)/2p$		
7	8	4	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^8$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^8(28p - 30)/2p$		
11	4	2	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^4(28p - 30)/2p$		
13	8	4	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^8$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^8(28p - 30)/2p$		
17	8	4	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^8$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^8(28p - 30)/2p$		
19	4	2	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^4$	no	2
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^4(28p - 30)/2p$		
23	8	4	30	B	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^8$	no	1
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^8(28p - 30)/2p$		
29	2	1	30	A	$\mathcal{M}^+$	$\{15, 30\}_{2p}$	$1 + 6p^2$	no	4
					$\mathcal{M}^-$	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2 + p^2(28p - 30)/2p$		

下表每行列出一对 p 和 n 的全部信息，包括 $\mathcal{M}^+$ 的类型和亏格，以及其佩特里对偶 $\mathcal{M}^-$ 的类型和亏格。

p	d	e	n	情形	type	亏格	自对偶	type	亏格	ϕ(n)/d
2	2	1	3	A	$\{3,3\}_4$	0	yes	$\{4,3\}_3$	1	1
2	4	2	5	A	$\{5,5\}_4$	5	yes	$\{4,5\}_5$	6	1
2	6	3	7	B	$\{7,7\}_4$	49	yes	$\{4,7\}_7$	50	1
2	6	3	9	A	$\{9,9\}_4$	81	yes	$\{4,9\}_9$	82	1
2	10	5	11	A	$\{11,11\}_4$	1793	yes	$\{4,11\}_{11}$	1794	1
2	12	6	13	A	$\{13,13\}_4$	9217	yes	$\{4,13\}_{13}$	9218	1
2	8	4	15	B	$\{15,15\}_4$	705	yes	$\{4,15\}_{15}$	706	1
2	8	4	17	A	$\{17,17\}_4$	833	yes	$\{4,17\}_{17}$	834	2
2	18	9	19	A	$\{19,19\}_4$	983041	yes	$\{4,19\}_{19}$	983042	1
2	12	6	21	B	$\{21,21\}_4$	17409	yes	$\{4,21\}_{21}$	17410	1
2	22	11	23	B	$\{23,23\}_4$	19922945	是	$\{4,23\}_{23}$	19922946	1
2	20	10	25	A	$\{25,25\}_4$	5505025	是	$\{4,25\}_{25}$	5505026	1
2	18	9	27	A	$\{27,27\}_4$	1507329	是	$\{4,27\}_{27}$	1507330	1
2	28	14	29	A	$\{29,29\}_4$	1677721601	是	$\{4,29\}_{29}$	1677721602	1
2	10	5	31	B	$\{31,31\}_4$	6913	yes	$\{4,31\}_{31}$	6914	3
2	10	5	33	A	$\{33,33\}_4$	7425	是	$\{4,33\}_{33}$	7426	2
2	24	12	35	B	$\{35,35\}_4$	130023425	是	$\{4,35\}_{35}$	130023426	1
2	36	18	37	A	$\{37,37\}_4$	566935683073	是	$\{4,37\}_{37}$	566935683074	1
2	24	12	39	B	$\{39,39\}_4$	146800641	是	$\{4,39\}_{39}$	146800642	1
2	20	10	41	A	$\{41,41\}_4$	9699329	是	$\{4,41\}_{41}$	9699330	2
2	14	7	43	A	$\{43,43\}_4$	159745	是	$\{4,43\}_{43}$	159746	3
2	24	12	45	B	$\{45,45\}_4$	171966465	是	$\{4,45\}_{45}$	171966466	1
2	46	23	47	B	$\{47,47\}_4$	756463999909889	是	$\{4,47\}_{47}$	756463999909890	1
2	42	21	49	B	$\{49,49\}_4$	49478023249921	是的	$\{4,49\}_{49}$	49478023249922	1

p 模 n	d	e	n	情形	类型	亏格	自对偶	type	亏格	ϕ(n)/d
1	2	1	4	B	$\{4,4\}_{2p}$	1	是	$\{2p,4\}_4$	$2+p^2(2p-4)/2p$	1
3	2	1	4	A	$\{4,4\}_{2p}$	1	是	$\{2p,4\}_4$	$2+p^2(2p-4)/2p$	1

p 模 n	d	e	n	情形	type	亏格	自对偶	type	亏格	ϕ(n)/d
1	2	1	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^2$	无	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^2(26p-28)/2p$	6
3	6	3	28	A	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	无	$\{2p,\ 28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$	2
5	12	6	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^12(26p-28)/2p$	1
9	6	3	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	否	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$	2
11	12	6	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^12(26p-28)/2p$	1
13	4	2	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^4$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^4(26p-28)/2p$	3
15	4	2	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^4$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^4(26p-28)/2p$	3
17	12	6	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^12(26p-28)/2p$	1
19	6	3	28	A	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	否	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$	2
23	12	6	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^{12}$	是	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^12(26p-28)/2p$	1
25	6	3	28	B	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^6$	no	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^6(26p-28)/2p$	2
27	2	1	28	A	$\{28,28\}_{2p}$	$1+6p^2$	no	$\{2p,28\}_{28}$	$2+p^2(26p-28)/2p$	6

p 模 n	d	e	n	情形	type	亏格	自对偶	type	亏格	ϕ(n)/d
1	2	1	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^2$	无	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2+p^2(28p-30)/2p$	4
7	8	4	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^8$	无	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2+p^8(28p-30)/2p$	1
11	4	2	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^4$	无	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2+p^4(28p-30)/2p$	2
13	8	4	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^8$	无	$\{2p,\ 30\}_{15}$	$2+p^8(28p-30)/2p$	1
17	8	4	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^8$	不存在	$\{2p,30\}_{15}$	$2+p^8(28p-30)/2p$	1
19	4	2	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^4$	不存在	$\{2p,30\}_{15}$	$2+p^4(28p-30)/2p$	2
23	8	4	30	B	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^8$	无	$\{2p,30\}_{15}$	$2+p^8(28p-30)/2p$	1
29	2	1	30	A	$\{15,30\}_{2p}$	$1+6p^2$	无	$\{2p,30\}_{15}$	$2+p^2(28p-30)/2p$	4

南安普顿大学数学科学学院，英国南安普顿 SO17 1BJ 电子邮箱：G.A.Jones@maths.soton.ac.uk

斯洛伐克布拉迪斯拉发夸美纽斯大学数学、物理与信息学学院，电子邮箱：
macaj@dcs.fmph.uniba.sk