基于沃尔泰拉级数的非线性系统动力分析广义极点-留数法

曹倩颖[a]，常安腾[b]，杜俊峰[b]，陆林[a,*]

[a]大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室，中国大连 116024[b]中国海洋大学工程学院，中国青岛 266100

arXiv:2303.02494v1 [math.NA] 4 Mar 2023

摘要

以二阶非线性常微分方程为特征的动力系统广泛存在于物理和工程的诸多领域。为求解此类问题，耗时的逐步数值积分法以及基于时域沃尔泰拉级数的卷积法已得到广泛应用。相比之下，本文提出了一种高效的、基于拉普拉斯域沃尔泰拉级数的广义极点-留数法。所提方法包括两个步骤：(1) 采用拉盖尔多项式对沃尔泰拉核进行解耦；(2) 利用极点-留数法解析获得与单个拉盖尔多项式相关的部分响应。与线性系统的传统极点-留数法相比，本文极点-留数法的创新之一在于如何处理高阶极点及其对应的系数。由于所提方法能够导出时域中的显式连续响应函数，因此其效率远高于传统数值方法。不同于传统拉普拉斯域方法，所提方法适用于任意不规则激励。由于在求解过程中可自然获得自然响应、受迫响应和交叉响应，因此能够获得有意义的数学和物理见解。在数值研究中，考察了运动方程已知和运动方程未知的系统。对于每个系统，均研究了具有不同参数的常规激励和复杂非规则激励。通过与四阶龙格–库塔法进行比较，数值研究验证了所提方法具有良好的精度和高效率。

关键词：非线性响应，沃尔泰拉级数，极点，拉盖尔多项式

1. 引言

机械工程和土木工程中所遇到的大多数真实动态系统本质上都是非线性的，并且包含几何非线性、材料中的非线性本构关系或非线性阻力等。 [1]。非线性问题正日益受到工程师和科学家的关注。本文着重解决非线性系统振动问题，即基于留数运算与沃尔泰拉级数的结合，计算非线性振子在任意不规则激励下的瞬态响应。由于沃尔泰拉级数是单值的，本研究的范围限于不存在分岔的非线性行为 [2]。

*通讯作者。电子邮箱：caoqianying@dlut.edu.cn（曹倩颖），changanteng@ouc.edu.cn（常安腾），dujunfeng@ouc.edu.cn（杜俊峰），lulin@dlut.edu.cn（陆林）

为分析非线性振动问题，研究人员进行了广泛研究，并发展出了各种数学方法。常用方法包括时域中的逐步数值积分方法，例如龙格–库塔法。这类方法不仅需要较小的时间步长分辨率才能获得高精度解，而且还容易出现数值不稳定性 [3, 4]。对于时间步长较小的长时响应，时域方法的计算时间成本非常高。沃尔泰拉级数是另一种广泛使用的方法，它是线性系统杜哈梅尔积分的扩展 [5, 6]。沃尔泰拉级数能够再现许多非线性现象，但由于涉及高维卷积积分，其计算非常复杂 [1]。自20世纪80年代以来，沃尔泰拉级数领域取得了重大进展。关于相关主题较为全面的文献综述，读者可参阅文献 [1] 。2017年之后，大多数论文聚焦于沃尔泰拉级数辨识。De Paula和Marques [7] 提出了一种基于时延神经网络的沃尔泰拉核辨识方法。Son和Kim [8] 提出了一种直接估计沃尔泰拉核系数的方法。Dalla Libera等人 [9] 为沃尔泰拉级数辨识引入了两个新的核。Peng等人 [10] 利用测得的响应辨识核函数，并进行了非线性结构损伤检测。只有少数论文致力于简化卷积积分的计算。传统上，沃尔泰拉级数中涉及的卷积积分计算方法分为三个不同的域：时域、频域和拉普拉斯域。基于沃尔泰拉级数的时域方法是指离散时间卷积方法，该方法同样存在计算成本高的问题 [8, 11]。基于沃尔泰拉级数的频域方法和拉普拉斯域方法均包括三个步骤：(1) 将沃尔泰拉级数变换为频域或拉普拉斯域中的代数方程；(2) 通过纯代数运算求解该代数方程；(3) 将步骤(2)中的解变换回时域。许多研究人员采用频域方法计算非线性系统的响应。Billings等人 [12]发展了一种辨识非线性系统广义频率响应函数（GFRFs）的新方法，并随后基于这些广义频率响应函数预测非线性响应。Carassale等人 [13]提出了一种用于非线性桥梁空气动力学和气动弹性的频域方法。Ho等人 [14] 计算了由沃尔泰拉级数建模的非线性阻尼杜芬系统在正弦输入下的输出频域函数。Kim等人 [15, 16] 利用非线性自回归外生输入技术和谐波探测法辨识了高阶频率响应函数。由于采用了快速傅里叶变换算法，这类频域方法的效率远高于时域方法。然而，频域方法不仅受到频率分辨率的限制，还由于使用离散傅里叶变换而存在泄漏问题。此外，频域方法只能计算稳态响应。由初始条件产生的自然响应，以及由系统与激励之间相互作用引起的交叉响应，均会被忽略。相比之下，拉普拉斯域方法能够计算所有响应分量，因为初始条件已纳入计算过程。然而，该方法仅限于对正弦激励和指数激励等简单激励进行解析运算 [17]。

所提方法属于在拉普拉斯域中计算的 Volterra级数法。与传统的拉普拉斯域方法不同，所提方法适用于任意不规则激励。由于所提方法与线性系统的极点-留数法遵循相似的路径 [18], ，因此将所提的非线性系统振动问题求解方法称为广义极点-留数法。Hu 等人 [18] 开发的极点-留数法的核心概念是，可以根据输入和系统传递函数的极点与留数，轻松求得响应的极点与留数，从而获得闭式响应解

。该方法包含三个步骤：(1) 将系统传递函数写成极点-留数形式；(2) 使用 Prony-SS 方法将激励写成极点-留数形式；(3) 根据系统和激励的极点与留数，通过代数运算计算响应的极点与留数。与 Hu 等人 [18], 的方法相比，后者被视为计算线性系统响应的高效工具，而本文提出的广义极点-留数法用于计算非线性系统的响应。所提方法包含两个步骤：(1) 将沃尔泰拉核按拉盖尔多项式进行解耦；(2) 通过极点-留数法解析地求得与单个拉盖尔多项式相关的部分响应。与线性系统的传统极点-留数法相比，广义极点-留数法的一项创新在于如何处理高阶极点及其对应的系数。与泰勒级数类似，沃尔泰拉级数表示是一个无穷级数，需要满足收敛条件才能确保该表示具有意义。由于所提方法基于沃尔泰拉级数，因此只能处理沃尔泰拉级数表示收敛的系统。

本文组织如下。第 2 节采用沃尔泰拉级数对非线性响应进行建模，并利用拉盖尔多项式对沃尔泰拉核函数进行解耦。随后，第 3 节提出了计算显式响应的极点-留数法。第 4 节给出数值研究与讨论。最后，在第 5 节得出结论。

2. 基于沃尔泰拉级数的响应计算

一个非线性振子，其控制运动方程为

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky + z(t, y, \dot{y}) = f(t) \tag{1}$$

其中， $z(t, y, \dot{y})$ 表示任意非线性项； m、 c 和 k 分别为质量、阻尼和线性刚度； $y(t)$、 $\dot{y}(t)$ 和 $\ddot{y}(t)$ 分别为位移、速度和加速度； $f(t)$ 为时变激励。

如果激励 $f(t)$ 的能量是有限的，则在零初始条件（即零位移和零速度）下，非线性响应可表示为沃尔泰拉级数 [1, 19–21]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} y_n(t) \tag{2}$$

其中， N 为沃尔泰拉级数的阶数，且

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^{n} f(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_n \tag{3}$$

在式 3 中， $h_1(\tau)$称为一阶 Volterra 核函数，表示系统的线性行为； $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$（ $n > 1$）为高阶 Volterra 核函数，用于描述系统的非线性行为。 $y(t)$的完整表达式包含无穷级数，随着 n增大，计算 n^{th} 项的工作量会迅速增加。幸运的是，采用前几阶沃尔泰拉级数即可保证响应精度。本文通过数值研究对此进行了证明。

常见的拉盖尔多项式表示为 [8, 22]:

$$l_{p_i}(t) = \sqrt{2a_i} \sum_{k=0}^{p_i} \frac{(-1)^k p_i!}{k![(p_i - k)!]^2} (2a_i t)^{p_i - k} e^{-a_i t} \tag{4}$$

其中， p_i 是拉盖尔多项式的阶数， a_i 是阻尼率。拉盖尔多项式满足如下正交关系：

$$\int_0^\infty l_{p_i}(t)l_{p_j}(t)dt = \delta = \begin{cases} 0\ (p_i \neq p_j) \\ 1\ (p_i = p_j) \end{cases} \tag{5}$$

利用拉盖尔多项式，式 3 中的 Volterra 核函数 $h_n(t_1, \ldots, t_n)$ 可解耦如下 [8, 22]:

$$h_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{p_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{R_n} c_{p_1 \ldots p_n} l_{p_1}(t_1) \ldots l_{p_n}(t_n) \tag{6}$$

其中，系数根据式 5 中的正交关系计算得出 ：

$$c_{p_1 \ldots p_n} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty l_{p_1}(t_1) \ldots l_{p_n}(t_n) h_n(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n \tag{7}$$

将式 6 代入式 3，得到

$$y_n(t) = \sum_{p_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{R_n} c_{p_1 \ldots p_n} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty l_{p_1}(\tau_1) \ldots l_{p_n}(\tau_n) \prod_{i=1}^n f(t - \tau_i) d\tau_i \tag{8}$$

利用拉盖尔多项式解耦沃尔泰拉高阶核函数的上述操作已相当成熟。有关所采用技术的详细信息，请参阅文献 [6, 22] 。在时域中解耦沃尔泰拉高阶核函数后，可将式 8 重新整理为：

$$y_n(t) = \sum_{p_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{R_n} c_{p_1 \ldots p_n} \prod_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^\infty l_{p_i}(\tau_i) f(t - \tau_i) d\tau_i \right] \tag{9}$$

记

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^\infty l_{p_i}(\tau_i) f(t - \tau_i) d\tau_i \tag{10}$$

式 9 可写为

$$y_n(t) = \sum_{p_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{R_n} c_{p_1 \ldots p_n} \prod_{i=1}^n x_i(t) \tag{11}$$

上述结合沃尔泰拉级数与拉盖尔多项式计算非线性响应的过程如图 1 所示。沃尔泰拉核函数 $h_n(t_1, \ldots, t_n)$ 可通过运动方程或测得的输入输出信号获得。为了推导响应的闭式解，我们必须先得到 $x_i(t)$ 的闭式解。下文将使用极点-留数法推导上述 $x_i(t)$ 和 $y_n(t)$ 的闭式解。

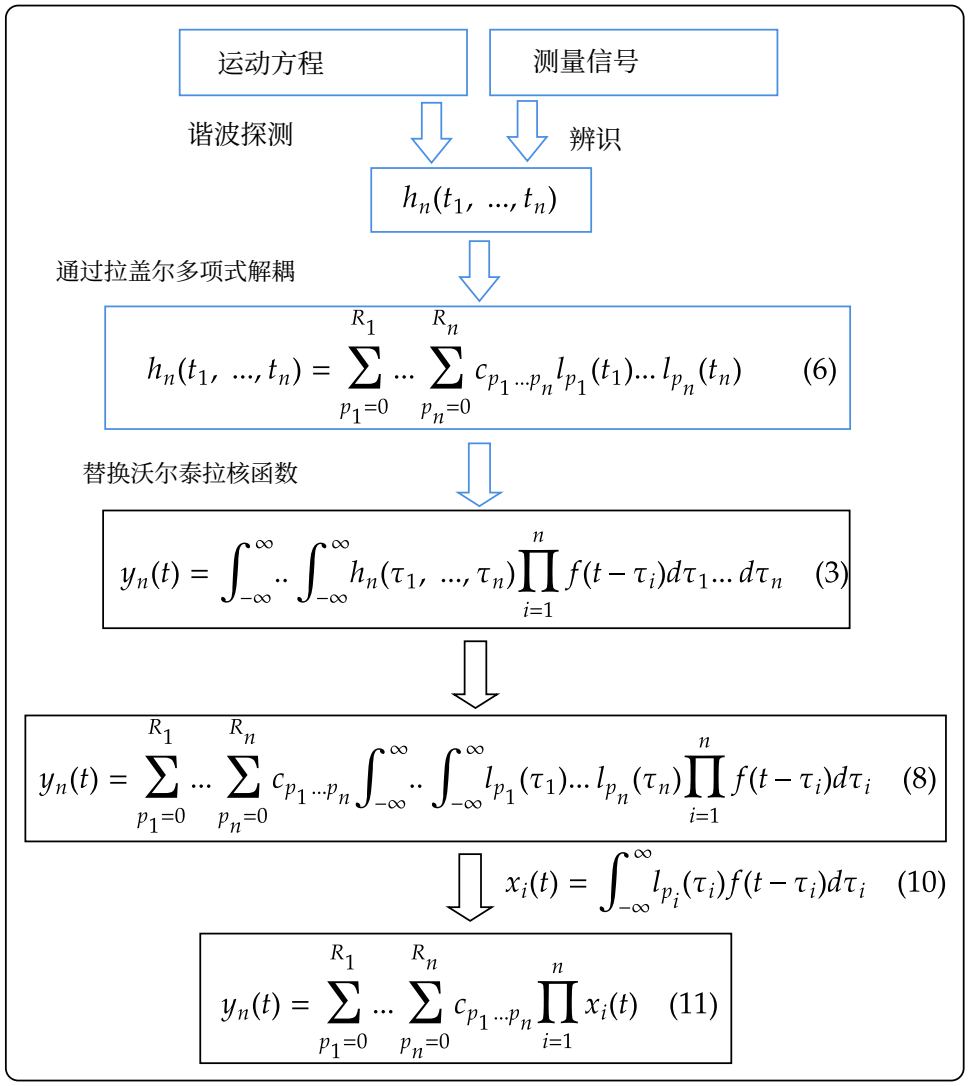


图1：结合沃尔泰拉级数和拉盖尔多项式计算响应的流程

3. 用于计算 $x_i(t)$和 $y_n(t)$的极点-留数法

对公式 10 中的 $x_i(t)$进行拉普拉斯变换，得到

$$\tilde{x}_i(s) = \tilde{l}_{p_i}(s)\tilde{f}(s) \tag{12}$$

其中

$$\tilde{l}_{p_i}(s) = \mathcal{L}[l_{p_i}(t)] = \sum_{k=0}^{p_i} \frac{b_{p_i}(k)}{(s+a_i)^{k+1}} \tag{13}$$

其中

$$b_{p_i}(k) = \frac{(-1)^{p_i-k} p_i! (2a_i)^{k+0.5}}{k!(p_i-k)!} \tag{14}$$

式 13 包含一个单极点和若干高阶极点。对于 $k=0$， $-a_i$ 是一个单极点，$b_{p_i}(0)$ 是对应的系数，即留数。对于 $k>0$， $-a_i$ 是高阶极点， $b_{p_i}(k)$ 是对应的系数。

对于有限持续时间为 T 的不规则激励信号 $f(t)$，始终可以使用复指数信号分解法——Prony- SS [23] 将其近似为极点-留数形式：

$$f(t) = \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \alpha_\ell \, \exp(\lambda_\ell t) \qquad 0 \le t < T \tag{15}$$

其中， N_ℓ 为分量数； α_ℓ 和 λ_ℓ 为常系数，可以是实数，也可以成共轭复数对。定义 $\lambda_\ell = -\delta_\ell + \mathrm{i}\Omega_\ell$，其中 Ω_ℓ 为激励频率， δ_ℓ 为 ℓ^{th} 分量的阻尼因子。记 $\alpha_\ell = A_\ell e^{\mathrm{i}\theta_\ell}$，其中 A_ℓ 为幅值， θ_ℓ 为以弧度表示的正弦初相位。对式 15 进行拉普拉斯变换，得到

$$\tilde{f}(s) = \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \frac{\alpha_\ell}{s - \lambda_\ell} \tag{16}$$

值得注意的是，Prony-SS 方法的概念与主成分法相似。平滑激励通常只需几项即可实现良好的近似。对于较大的不规则载荷，增加项数可获得更好的近似。

将式 13 和式 16 代入式 12，得到

$$\tilde{x}_i(s) = \left[\sum_{k=0}^{p_i} \frac{b_{p_i}(k)}{(s + a_i)^{k+1}} \right] \left(\sum_{\ell=1}^{N_\ell} \frac{\alpha_\ell}{s - \lambda_\ell} \right) \tag{17}$$

将 $\tilde{x}_i(s)$表示为其极点-留数形式 [17, 24] ，得到

$$\tilde{x}_i(s) = \sum_{k=0}^{p_i} \frac{\beta_{p_i,k}}{(s + a_i)^{k+1}} + \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \frac{\gamma_{p_i,\ell}}{s - \lambda_\ell} \tag{18}$$

其中， λ_ℓ 为单极点，相应的留数可由下式轻易求得

$$\gamma_{p_i,\ell} = \lim_{s \to \lambda_\ell} (s - \lambda_\ell) \tilde{x}_i(s) = \sum_{k=0}^{p_i} \frac{\alpha_\ell b_{p_i}(k)}{(\lambda_\ell + a_i)^{k+1}} \tag{19}$$

and $-a_i$ 为高阶极点，相应的系数首先推导如下 ：

$$\beta_{p_i,k} = \lim_{s \to -a} \frac{1}{(p_i - k)!} \frac{d^{p_i - k}}{ds^{p_i - k}} \left[(s + a_i)^{p_i + 1} \tilde{x}_i(s) \right] = \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \sum_{q=1}^{p_i - k + 1} \frac{(-1)^{q-1} \alpha_\ell b_{p_i}(k + q - 1)}{(-a_i - \lambda_\ell)^q} \tag{20}$$

对式 18 进行拉普拉斯逆变换，可得闭式解：

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{p_i} \frac{\beta_{p_i,k}}{k!} t^k e^{-a_i t} + \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \gamma_{p_i,\ell} e^{\lambda_\ell t} \tag{21}$$

将公式11和21代入公式2，得到

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{p_1=0}^{R_1} \cdots \sum_{p_n=0}^{R_n} c_{p_1 \ldots p_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p_i} \frac{\beta_{p_i,k}}{k!} t^k e^{-a_i t} + \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \gamma_{p_i,\ell} e^{\lambda_\ell t} \right) \tag{22}$$

从理论上讲，所提方法适用于任意阶沃尔泰拉级数的非线性响应闭式解的推导。在实际工程中，通常只有前几阶响应占主导地位。通过设置 $N=2$，公式22可简化为三个分量：

$$y(t)=y_s(t)+y_c(t)+y_f(t) \tag{23}$$

其中，自然响应仅与系统极点有关，可表示为

$$y_s(t)=\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{k=0}^{p_1}\frac{c_{p_1}\beta_{p_1,k}}{k!}t^k e^{-a_1 t}+\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}\sum_{k=0}^{p_1}\sum_{m=0}^{p_2}\frac{c_{p_1p_2}\beta_{p_1,k}\beta_{p_2,m}}{k!m!}t^{(k+m)}e^{-(a_1+a_2)t} \tag{24}$$

交叉响应与系统极点和激励极点均有关，可表示为

$$\begin{aligned}y_c(t)=&\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}\sum_{k=0}^{p_1}\sum_{j=1}^{N_\ell}\frac{c_{p_1p_2}\beta_{p_1,k}\gamma_{p_2,j}t^k}{k!}e^{(-a_1+\lambda_j)t}\\&+\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}\sum_{m=0}^{p_2}\sum_{\ell=1}^{N_\ell}\frac{c_{p_1p_2}\beta_{p_2,m}\gamma_{p_1,\ell}t^m}{m!}e^{(-a_2+\lambda_\ell)t}\end{aligned} \tag{25}$$

受迫响应仅与激励极点有关，可表示为

$$y_f(t)=\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{\ell=1}^{N_\ell}c_{p_1}\gamma_{p_1,\ell}e^{\lambda_\ell t}+\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}\sum_{\ell=1}^{N_\ell}\sum_{j=1}^{N_\ell}c_{p_1p_2}\gamma_{p_1,\ell}\gamma_{p_2,j}e^{(\lambda_\ell+\lambda_j)t} \tag{26}$$

式 26 中的第一项是由激励频率（即极点 λ_ℓ的虚部）决定的一阶受迫响应。第二项对应二阶非线性受迫响应，其中包括由$\lambda_\ell+\lambda_j$决定的和频响应和差频响应。式 26 直接揭示了激励频率协同作用可能引发的非线性振动。

特别地，考虑正弦激励 $f(t)=\sin\omega_r t$，它可表示为 $f(t)=\gamma e^{\lambda t}+\gamma^* e^{\lambda^* t}$，其中 $\gamma=-0.5\mathrm{i}$ 和 $\lambda=\mathrm{i}\omega_r$。将这些值代入式 26，可将式 26 的第二项简化为

$$y_{f_2}(t)=\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}0.5c_{p_1p_2}-\sum_{p_1=0}^{R_1}\sum_{p_2=0}^{R_2}0.5c_{p_1p_2}\cos 2\omega_r t \tag{27}$$

其中，第一项为差频响应，第二项为和频响应。

4. 数值研究

在实际工程中，有些系统具有精确的运动方程。此外，由于非线性动力学行为复杂且系统参数不确定，有些系统难以构建其运动方程。为简便起见，本文将运动方程已知的系统称为已知系统，将运动方程未知的系统称为未知系统。本节将介绍两项数值研究。第一项研究使用一个已知的非线性振子验证所提方法，第二项研究则展示所提方法在未知系统中的适用性。在数值研究中，单位制均采用米–千克–秒（MKS）制；为简洁起见，省略各物理量的具体单位。

4.1. 一个已知的非线性系统

本研究选取一个如下形式的非线性振子:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3 = f(t) \tag{28}$$

其中，质量为 $m = 1$，阻尼为 $c = 1$，线性刚度为 $k_1 = 10$，二次刚度为 $k_2 = 20$，三次刚度为 $k_3 = 20$。该案例曾在一篇已发表的文章中研究过 [15]。系统的线性固有频率为 $\omega_0 = \sqrt{k_1/m} = 3.16$，阻尼比为$\zeta = c/(2m\omega_0) = 15.8\%$。这类振子在许多工程问题中都会出现，例如大型容器之间狭窄间隙中的流体共振模型 [25]。在该模型中，$k_1 y$ 表示流体的线性恢复力，而 $k_2 y^2$ 和 $k_3 y^3$ 分别表示流体的二次和三次非线性恢复力。

4.1.1. 沃尔泰拉核函数

通常，系统总响应主要由前几个阶次的响应构成。因此，公式22中的沃尔泰拉级数阶数取为3，即 $N = 3$。为了根据公式22计算前三阶响应，需要知道前三阶沃尔泰拉核函数。由于沃尔泰拉核函数与相应的频率响应函数之间满足特定的傅里叶变换对，我们可以先直接根据式28写出频率响应函数的前三阶形式。然后，通过傅里叶逆变换得到沃尔泰拉核函数。基于谐波探测算法 [26, 27], ，线性频率响应函数（LFRF）$H_1(\omega)$、二次频率响应函数（QFRF） $H_2(\omega_1,\ \omega_2)$ 以及三次频率响应函数（CFRF） $H_3(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ 可解析地表示为:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + \mathrm{i}c\omega + k_1},\ -\infty < \omega < \infty \tag{29}$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -k_2 H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_1(\omega_1 + \omega_2),\ -\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned} H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\Big\{ &\frac{k_2}{3}\left[H_1(\omega_1)H_2(\omega_2,\omega_3) + H_1(\omega_2)H_2(\omega_1,\omega_3) + H_1(\omega_3)H_2(\omega_1,\omega_2)\right] \\ &+ k_3 H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)H_1(\omega_3)\Big\} H_1(\omega_1+\omega_2+\omega_3),\ -\infty < \omega_1, \omega_2, \omega_3 < \infty \end{aligned} \tag{31}$$

图2–5分别展示了 $H_1(\omega)$、 $H_2(\omega_1,\omega_2)$和 $H_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$，与参考文献 [15]中的结果吻合良好。如预期所示，图2中 $H_1(\omega)$的模在接近线性固有频率 ω_0处达到峰值，且随着频率增加，相位角从0单调递减至-π 。图3展示了和频QFRF，其中能量沿 $\omega_1+\omega_2 \approx \omega_0$线汇聚。因此，当双音激励的和频等于线性共振频率时，二阶响应可能达到最大值。此外，沿$\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_0$ 线的那些激励频率对可能因二阶非线性效应而产生不可忽略的振动幅值。对于图3(b)中的差频QFRF，能量沿两条主要线汇聚，即 $\omega_1 \approx \omega_0$ 和 $\omega_2 \approx \omega_0$。图4和图5分别展示了 $H_3(\omega,\omega,\omega)$和 $H_3(\omega,\omega,-\omega)$的模，它们分别是和频CFRF和差频CFRF的对角项。 $H_3(\omega,\omega,\omega)$的模在接近 $\omega \approx \omega_0/3$ 和 ω_0处达到峰值，而 $H_3(\omega,\omega,-\omega)$的模在接近$\omega \approx \omega_0$ 处达到峰值，并在 $\omega \approx \omega_0/2$ 附近出现一个小隆起。高阶刚度项可能会放大 $\omega \approx \omega_0/3$ 和 $\omega_0/2$ 处的数值。

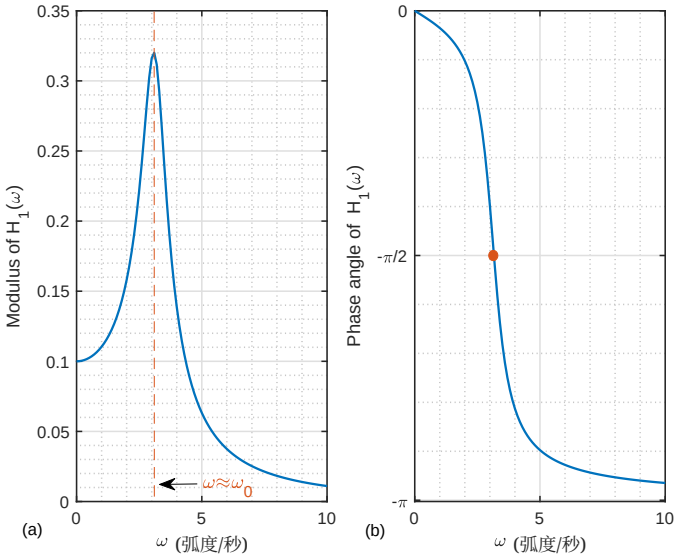


图2：线性频率响应函数：（a） $H_1(\omega)$的模，（b） $H_1(\omega)$的相位角

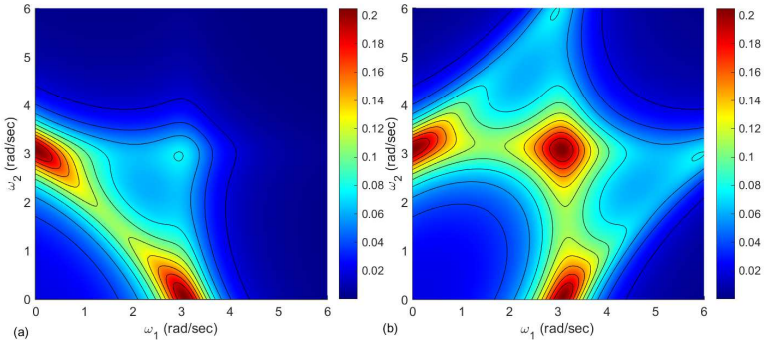


图3：二次频率响应函数的模：（a）和频，（b）差频

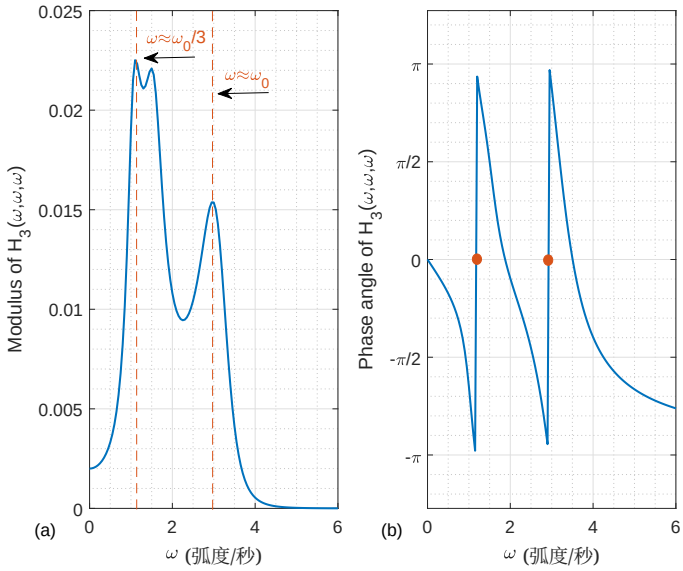


图 4：和频三次频率响应函数的对角项：(a) $H_3(\omega,\omega,\omega)$ 的模，(b) $H_3(\omega,\omega,\omega)$ 的相位角

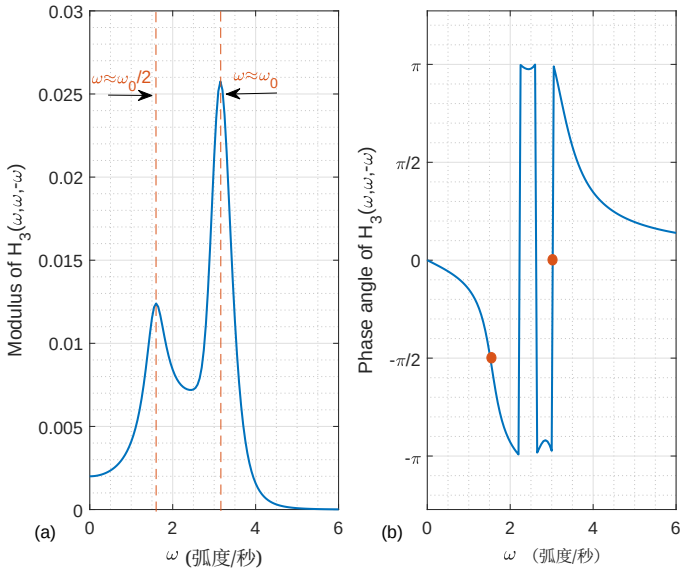


图5：差频三次频率响应函数的对角项：（a） $H_3(\omega,\omega,-\omega)$ 的模，（b） $H_3(\omega,\omega,-\omega)$ 的相位角

对式29–31进行快速傅里叶逆变换，可得到相应的线性脉冲响应函数 $h_1(t)$、二次脉冲响应函数 $h_2(t_1,t_2)$ 和三次脉冲响应函数 $h_3(t_1,t_2,t_3)$。其中， $h_1(t)$ 和 $h_2(t_1,t_2)$ 分别绘于图6和图7， $h_3(t,t,t)$ 则见图8。在数值实现中，采用式29–31，频率间隔为 $\Delta\omega = 0.1$，频率分量数为 $N_n = 1025$，截止频率为 102.4 和 -102.4。使用拉盖尔多项式对沃尔泰拉核函数进行解耦时，需要确定各阶沃尔泰拉核函数的阻尼率以及拉盖尔多项式的数量

（见式4和式6）。在本例中，我们取 $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ 和$R_1 = R_2 = R_3 = 24$，因为当 $R_n > 24$、 $n = 1$、2、3 时，系数 $c_{p_1 \ldots p_n}$ 变得非常小。根据式7，计算得到前三阶沃尔泰拉核函数的系数，如图9和图10所示。为方便起见，图10仅绘出了 $p_3 = 0$ 时的 $c_{p_1 p_2 p_3}$。随着拉盖尔多项式阶数的增加，图9和图10中的系数逐渐减小，这说明前几阶拉盖尔多项式在沃尔泰拉核函数的所有阶数中占主导地位。已知拉盖尔多项式及其对应系数后，利用式6重构沃尔泰拉核函数。为便于比较，图6–8中也绘出了重构的沃尔泰拉核函数。重构结果与解析值吻合良好，验证了分解的准确性。

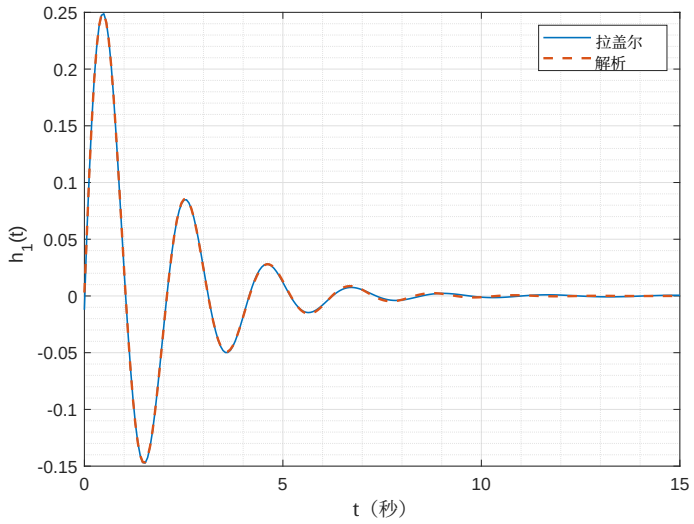


图 6：基于解析方法与拉盖尔多项式重构的 $h_1(t)$ 对比

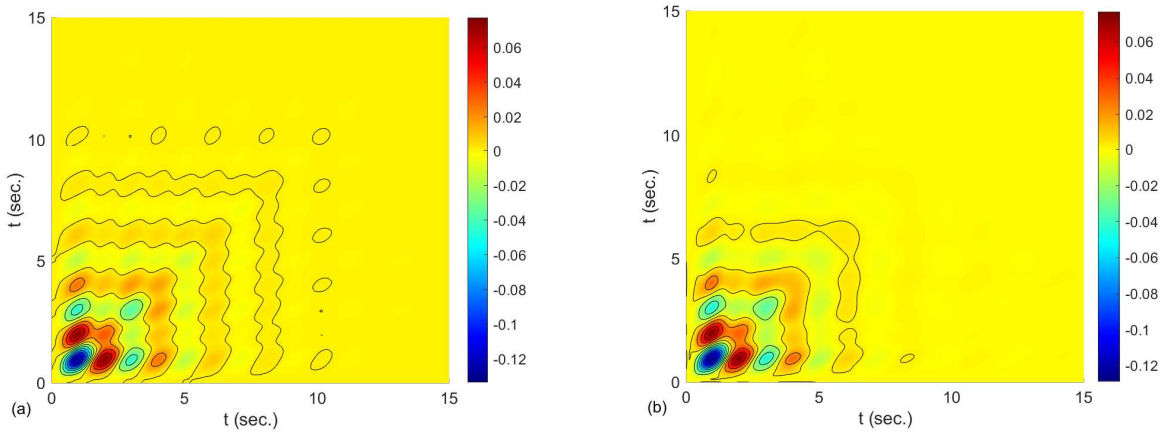


图 7：二阶　沃尔泰拉核函数：$h_2(t_1, t_2)$：（a）解析结果，（b）通过拉盖尔多项式重构

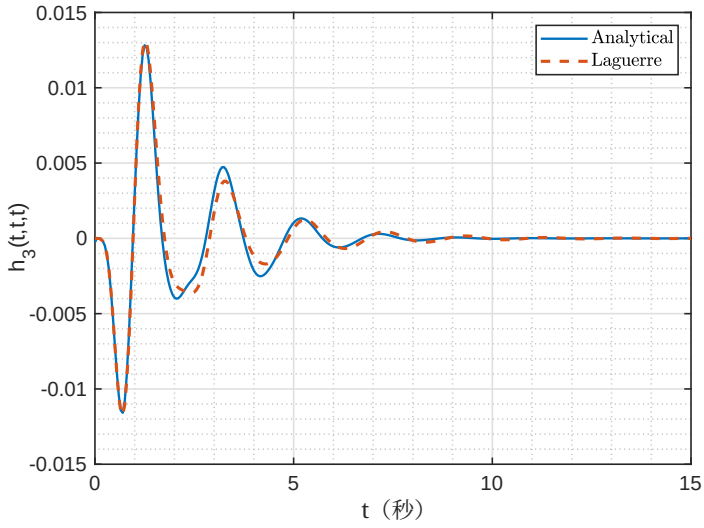


图8：基于解析结果与拉盖尔多项式重构结果的 $h_3(t,t,t)$ 对比

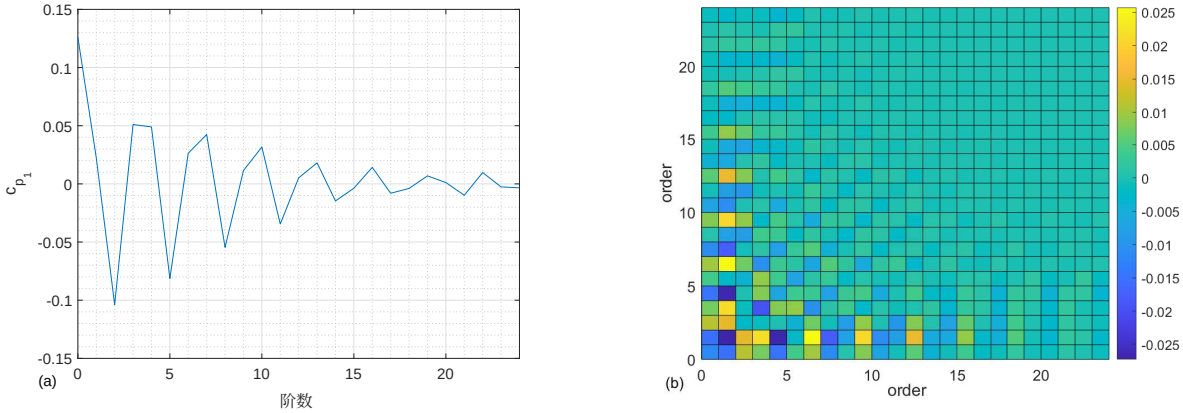


图9：沃尔泰拉核函数前两阶的系数：(a) c_{p_1}，(b) $c_{p_1 p_2}$

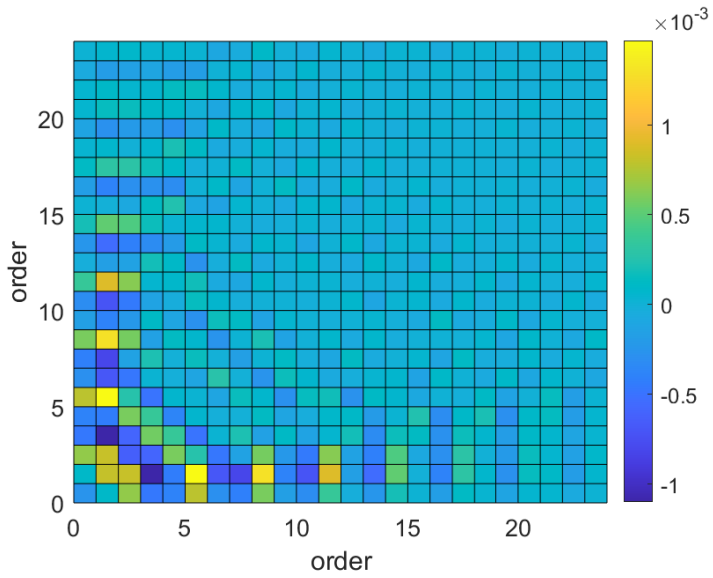


图 10：三阶 Volterra 核函数的系数： $c_{p_1p_2p_3}$ 对于 $p_3 = 0$

4.1.2. 正弦激励

根据式28，我们考虑正弦激励

$$f(t) = A\sin(\Omega t) \tag{32}$$

其中， A 和 Ω 分别为幅值和频率。表 1 展示了 A 和 Ω 的五种情况。情况 1 和情况 2 中的激励频率高于线性固有频率（$\omega_0 \approx 3.16$），情况 3 中的激励频率非常接近 ω_0，而情况 4 和情况 5 中的激励频率低于 ω_0。所有情况的幅值相同。正弦激励的极点为 $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\Omega$，留数为 $\alpha_{1,2} = \mp\mathrm{i}A/2$。不同情况下激励极点和留数的数值列于表 1。

表 1：参　数值、正弦激励的极点和留数　　激励

Case	A	Ω	$\lambda_{1,2}$	$\alpha_{1,2}$
1	1	3π	$\pm 3\pi\mathrm{i}$	0.5
2	1	2π	$\pm 2\pi\mathrm{i}$	0.5
3	1	π	$\pm \pi\mathrm{i}$	0.5
4	1	0.5π	$\pm 0.5\pi\mathrm{i}$	0.5
5	1	0.3π	$\pm 0.3\pi\mathrm{i}$	0.5

将激励的极点和留数以及系统的极点和留数代入公式20和19，分别计算对应于系统极点的响应系数 $\beta_{p_i,\ k}$ 以及对应于激励极点的响应系数 $\gamma_{p_i,\ \ell}$。根据公式22，计算表 1 中各个案例的前三阶响应。图11(a)-15(a)展示了所提方法与四阶龙格–库塔法在 $\Delta t = 10^{-4}$条件下所得响应的对比。对于案例1和2，一阶响应与龙格–库塔法得到的总响应吻合良好，而高阶响应仅略微改善了瞬态部分。对于案例3–5，前三阶响应之和与龙格–库塔法得到的结果吻合良好

解。当响应非线性增强时，需要考虑高阶响应。换句话说，所提方法只需选取少量沃尔泰拉级数项，即可准确计算非线性响应。

图11(b)–15(b)展示了五种情况中三个响应分量的贡献。在每种情况下，一阶响应都是占主导地位的分量，二阶和三阶响应的贡献远小于一阶响应。尤其对于情况1和2，其激励频率远离线性固有频率，二阶和三阶响应接近于零。这可能是因为当频率大于4 rad/s时，QFRF和CFRF趋近于零（见图3–5）。此外，一阶响应的平均值约为零，而二阶响应的平均值始终小于零，这些就是式27中的差频分量。另外，可以清楚地观察到，情况3–5中的二阶响应呈现周期振荡，其周期接近一阶响应周期的一半；这种振荡由激励的和频分量激发（见式27第二部分）。与一阶和二阶响应的稳态解相比，情况3–5中的三阶响应稳态解已不再是单一的规则运动。通过进行快速傅里叶变换，图16展示了这三个三阶响应的频谱。我们发现，这三个三阶响应均由各自的基波分量和三次谐波（三倍频）分量主导。

图17展示了所提方法、四阶龙格–库塔法和卷积法计算案例1中振子响应所需的计算时间。所提方法具有显式解，其计算效率远高于后两种方法，因为后两种方法需要采用较小的时间步长才能获得高精度解。尤其是，随着响应时长增加，所提方法的效率也随之提高。

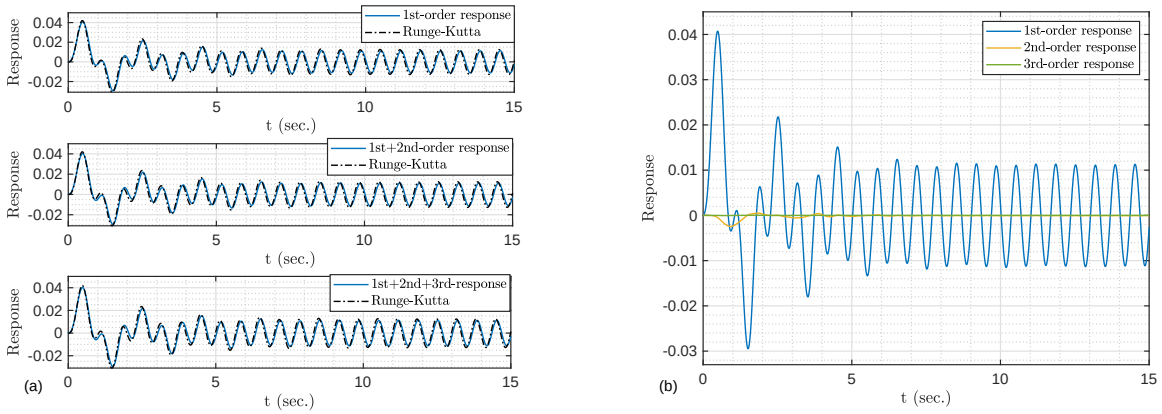


图11：案例1的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

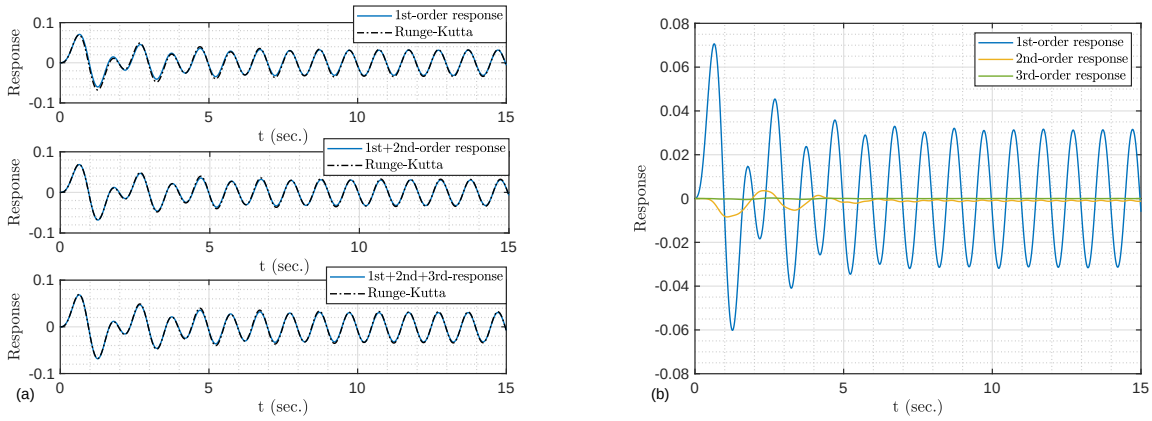


图12：情况2的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

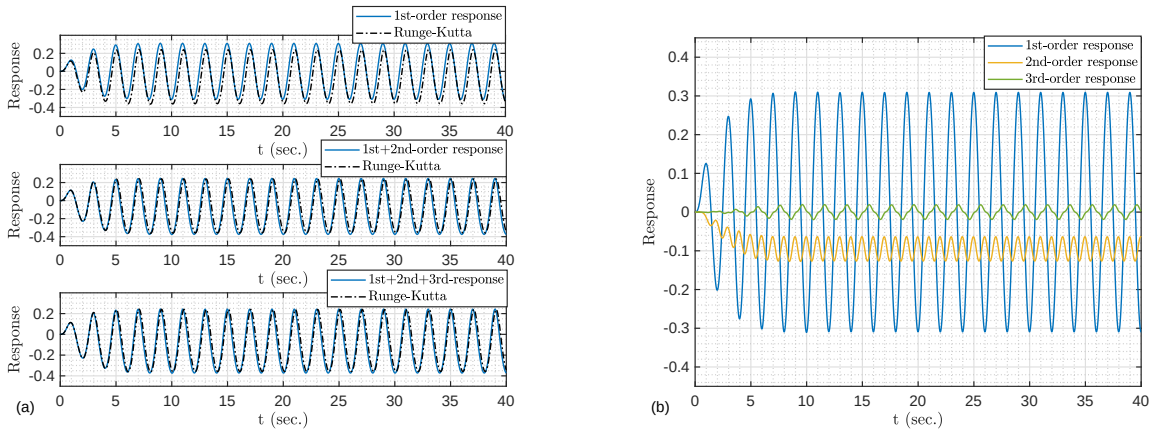


图13：情况3的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

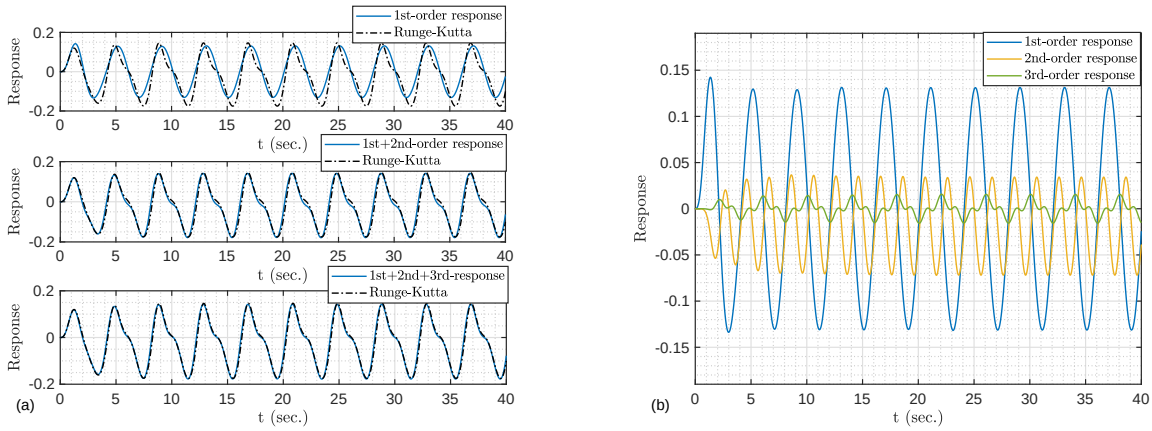


图14：情况4的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

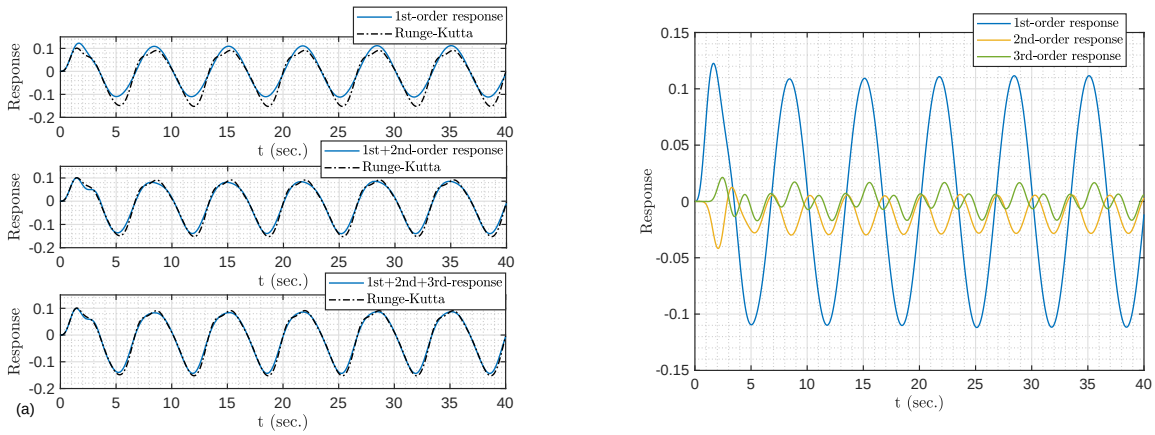


图15：案例5的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

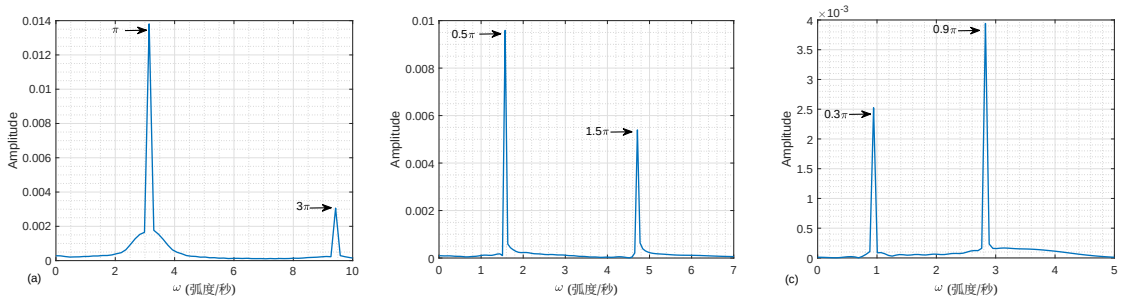


图16：三阶响应的频谱：(a) 情况3，(b) 情况4，(c) 案例5

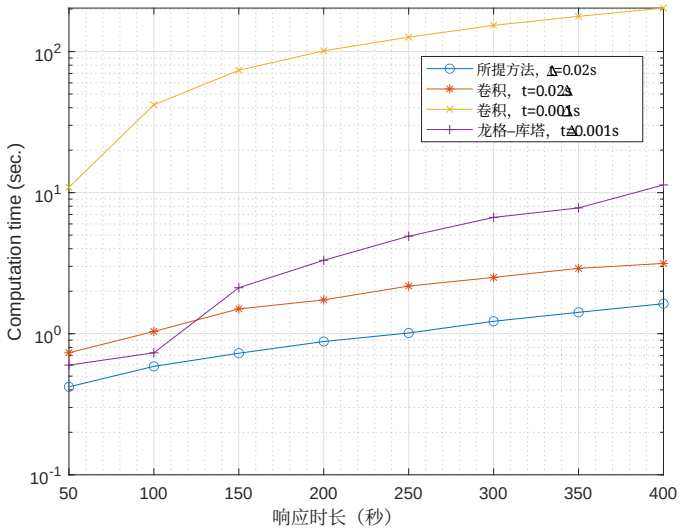


图17：案例1中常规加载下所提方法、四阶–五阶龙格–库塔方法与卷积法的计算效率比较

4.1.3. 不规则激励

在式28中，考虑由若干余弦函数组成的不规则激励

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N_f} A_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) \tag{33}$$

其中，N_f 为余弦分量的数量；A_n、Ω_n 和 θ_n 分别为第 n^{th} 个分量的幅值、频率和相位角。表2列出了这些参数的三种情况。每种情况下，所有分量的幅值均相同，相位角 θ_n 在0和 2π 之间均匀分布，并随机生成。为将激励分解为极点-留数形式，采用了Prony-SS 方法，其概念与主成分法相似。详情请参阅文献 [23] 。表2还显示了各情况下选取的秩。图18对比了这三种情况下的原始激励与重构结果，二者均吻合良好。

表2：不规则激励的参数值

Case	A_n	Ω_n	θ_n	Rank
1	0.2	$[0:1:20]$	均匀随机数	42
2	0.5	$[0:1:20]$	均匀随机数	42
3	0.5	$[0:1:40]$	均匀随机数	82

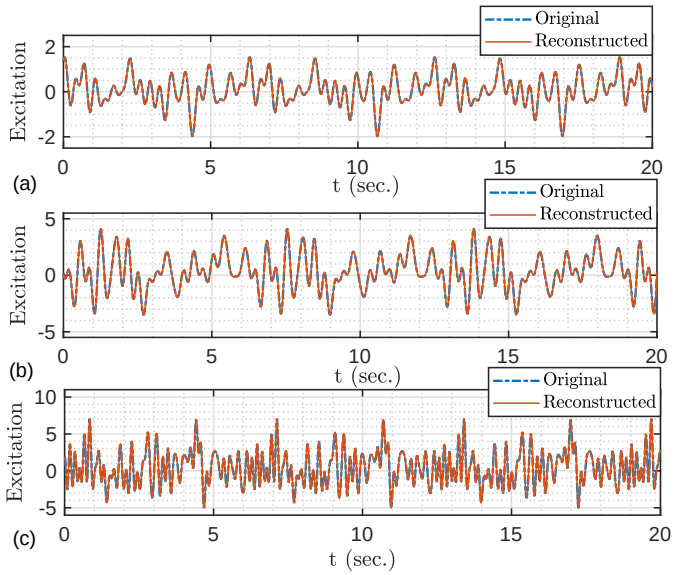


图18：原始激励与重构结果的比较：(a) 案例1，(b) 情况2 (c) 情况3

根据公式22，结合 $N = 3$，计算了系统对表2中不规则激励的非线性响应，结果分别如图19(a)-21(a)所示。此外，图19(a)-21(a)还展示了采用四阶龙格–库塔法计算得到的结果。在所有情况下，前三阶响应之和均与龙格–库塔法得到的结果吻合良好。

各案例中前三阶响应的贡献如图 19(b)–21(b) 所示。类似地，系统振动主要由一阶响应主导。然而，随着激励幅值的增大，二阶和三阶响应的贡献显著增加

以及频率数。此外，当非线性响应的幅值变大时，会出现明显的波谷。这种现象可能由非线性刚度引起。一阶响应无法捕捉这些波谷，而高阶响应则能够成功捕捉。

图22分别绘出了所提方法和四至五阶龙格–库塔方法计算案例1中不规则荷载下振子响应所需的计算时间。当响应时长较短时，四至五阶龙格–库塔方法效率更高；但当响应时长超过约130 s 时，所提方法的效率则高得多。此外，所提方法可得到显式响应解，因此可以直接获得特定时刻 t_p 的响应值，而无需像传统数值方法那样从 0 积分到 t_p。

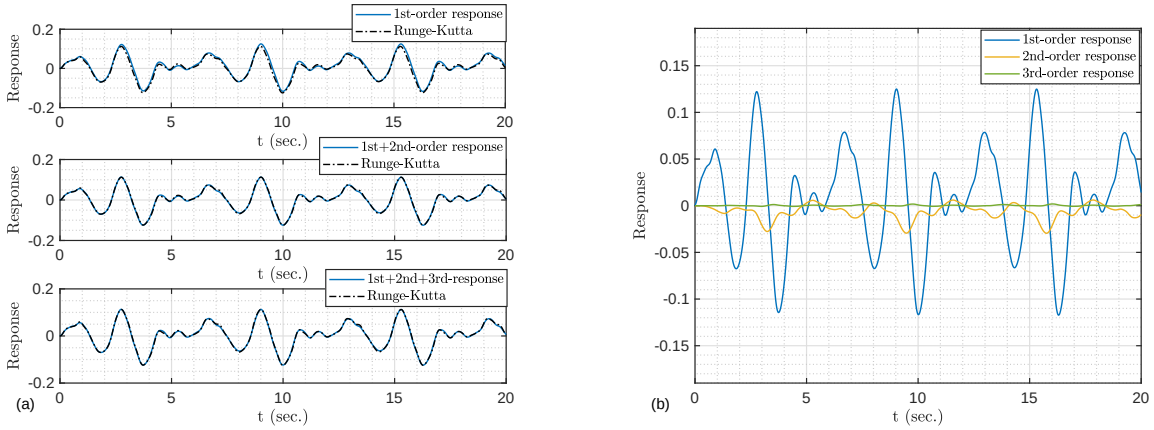


图19：案例1在不规则激励下的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

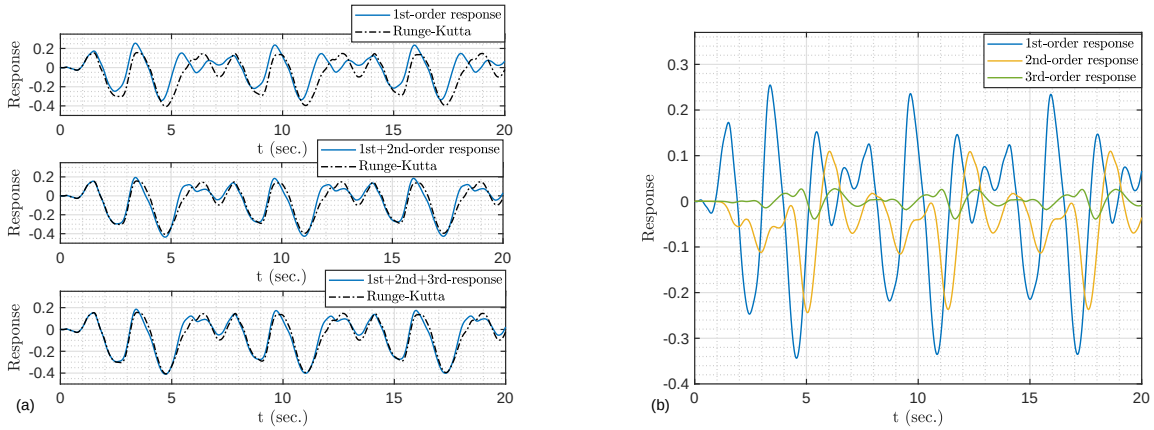


图20：情况2在不规则激励下的响应：(a) 所提方法与龙格–库塔法的比较，(b) 三个分量的贡献

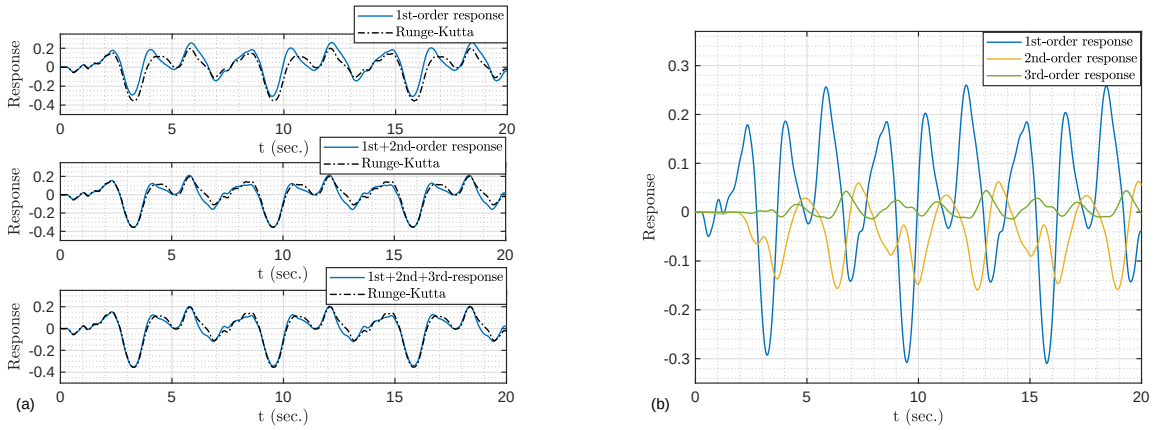


图21：情况3在不规则激励下的响应：（a）所提方法与龙格–库塔法的比较；（b）三个分量的贡献

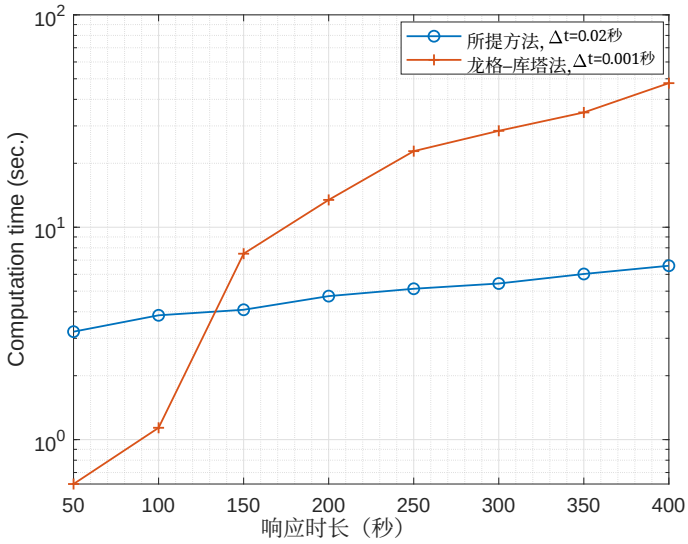


图22：案例1中非规则载荷下所提方法与四至五阶龙格–库塔方法的计算效率比较

4.2. 未知非线性系统

为了检验所提方法对未知非线性系统的适用性，使用已知的输入激励及其对应的响应来识别其沃尔泰拉核函数。已知沃尔泰拉核函数后，我们可以按照第4.1节中的步骤预测系统响应。本研究中，输入激励为功率谱恒定的白噪声$S_0 = 0.001$，对应的响应通过四阶龙格–库塔法求解式28得到，如图23所示。根据第4.1节可知，响应的前两阶之和与总响应吻合良好。本研究中，沃尔泰拉级数的阶数 N 取为 2，拉盖尔多项式的阻尼率为 $a_1 = a_2 = 2$，拉盖尔多项式的数量为 $R_1 = R_2 = 24$。为估计前两阶沃尔泰拉核函数，利用激励数据和响应数据构建矩阵方程。采用最小二乘法 [8] 求解该矩阵方程，得到系数 c_{p_1} 和 $c_{p_1 p_2}$，位于

识别出式8。图24分别绘制了 c_{p_1} 和 $c_{p_1p_2}$，它们与图9中的精确结果吻合良好。随后，根据式6构造前两阶沃尔泰拉核函数。与图6和图7中的精确结果相比，图25中识别出的沃尔泰拉核函数与精确解完全吻合。需要注意的是，选择白噪声激励是为了获得良好的沃尔泰拉核函数，因为它能够激发响应中更多的频率分量。

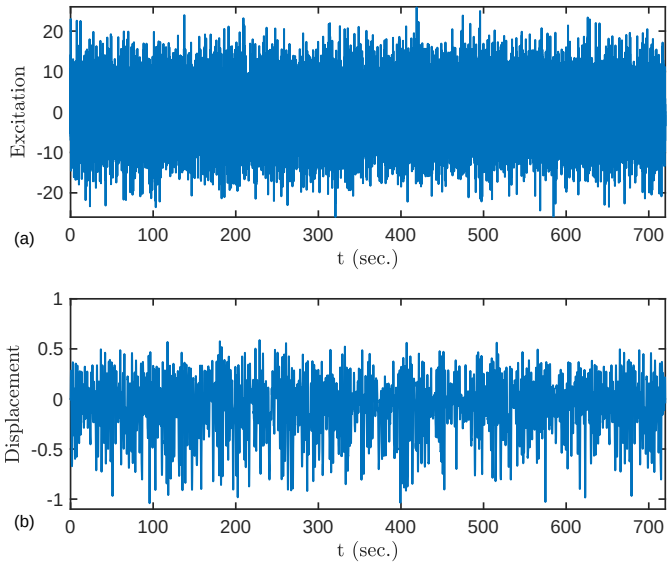


图23：用于识别沃尔泰拉级数的输入–输出数据集：(a) 输入激励，(b) 输出响应

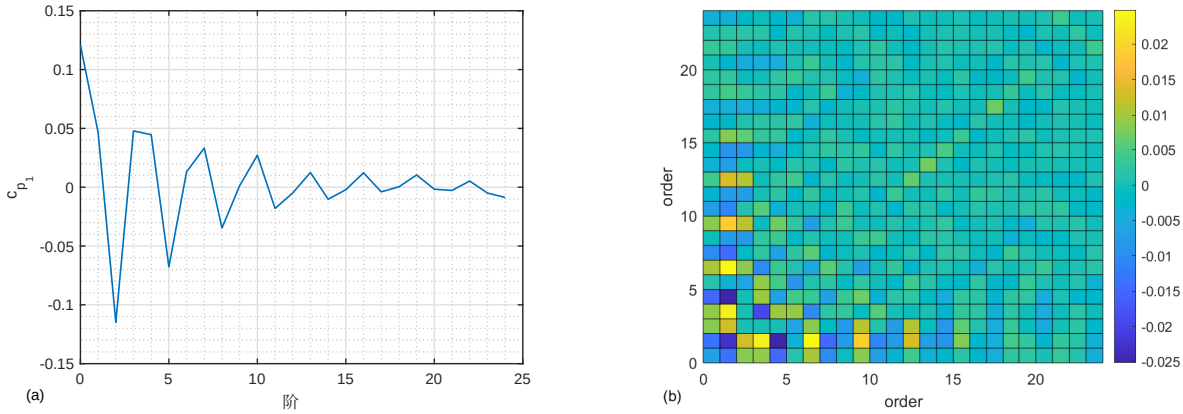


图24：沃尔泰拉级数系数：(a) c_{p_1}，(b) $c_{p_1p_2}$

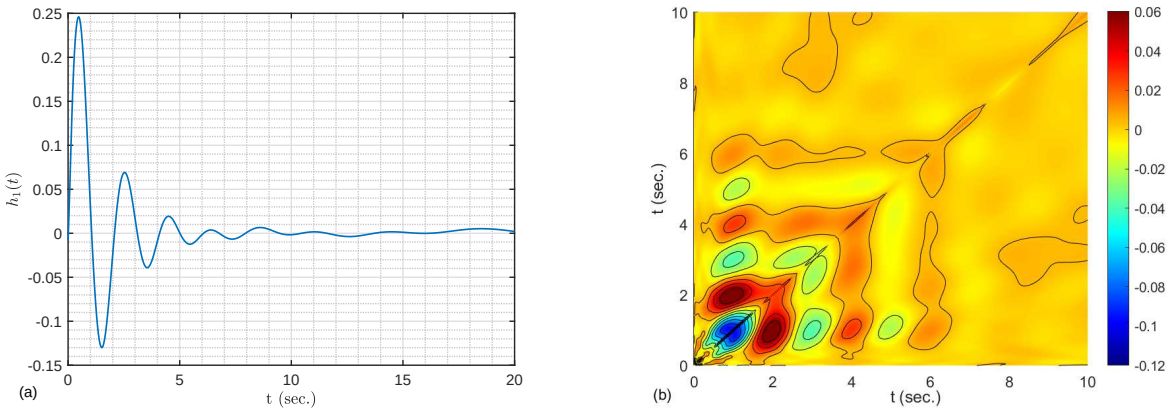


图25：辨识出的沃尔泰拉级数：(a) $h_1(t)$，(b) $h_2(t_1,t_2)$

选择规则激励 $f(t) = \sin(\pi t)$和不规则激励 $f(t) = \sum_{n=1}^{N_f} A_n \cos(\Omega_n t + \theta_n)$作为输入激励，其中 $A_n = 0.3$ 和Ω_n 以1为间隔从0变化至40。图26展示了预测响应以及通过四阶龙格–库塔法得到的结果。在这两种情况下，所提方法都能准确预测系统响应。如式23所示，非线性响应由三项组成：自然响应 $y_s(t)$、受迫响应 $y_f(t)$和交叉响应 $y_c(t)$。这三项各自的响应及其对两种激励的总和分别见图27和图28。如图27和图28所示，一阶响应和二阶响应均包含自然响应 $y_s(t)$和受迫响应 $y_f(t)$，但交叉响应 $y_c(t)$仅存在于二阶响应中。随着 t 变大，由于系统阻尼的作用， $y_s(t)$和 $y_c(t)$均逐渐减弱，而总响应完全由 $y_f(t)$支配。此外，我们注意到这些分量在 $t = 0$ 处呈现一些特征，包括一阶响应的 $y_s(0) = -y_f(0)$，以及二阶响应的 $y_s(0) + y_f(0) = -y_c(0)$，这是由施加的零初始条件所致。

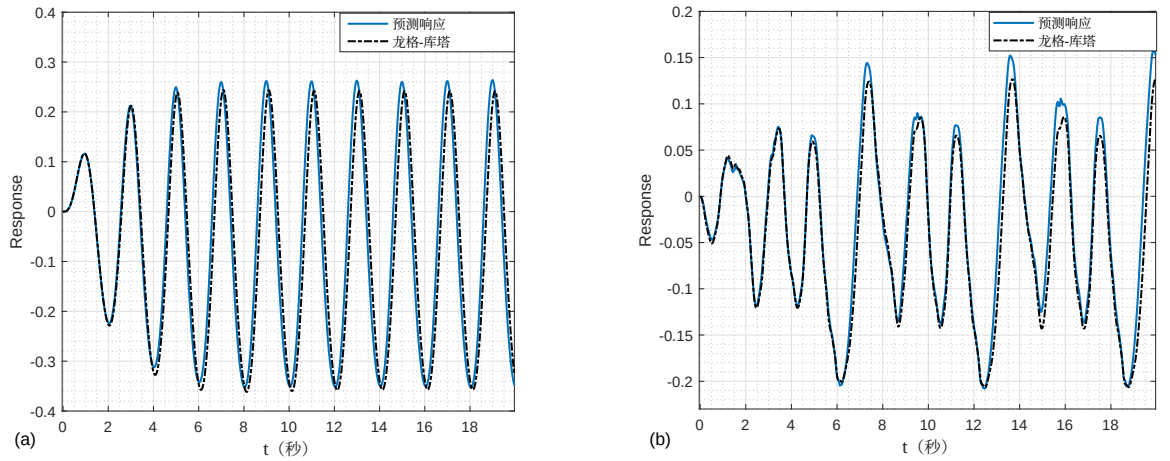


图26：预测结果与数值结果的响应对比：(a) 对规则激励的响应，(b) 对不规则激励的响应

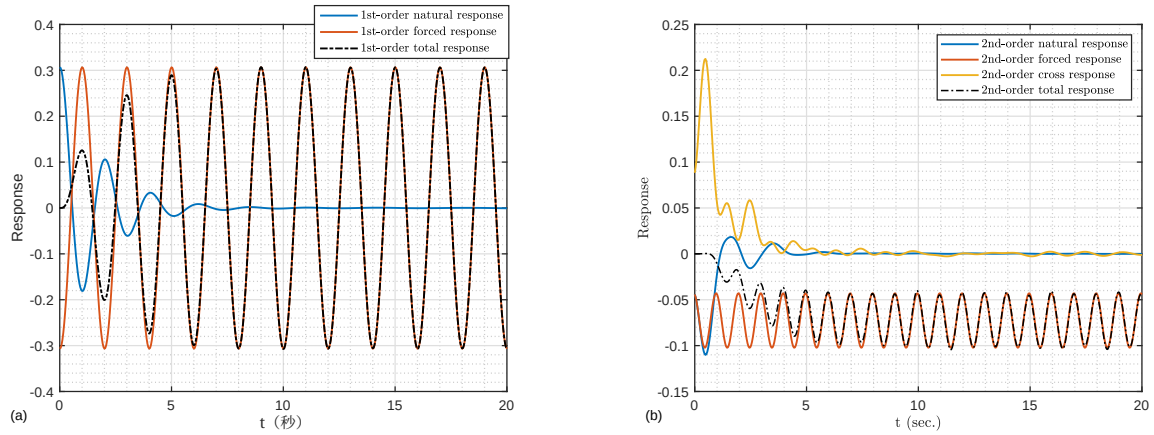


图27：三个分量和总响应：（a）一阶和（b）二阶

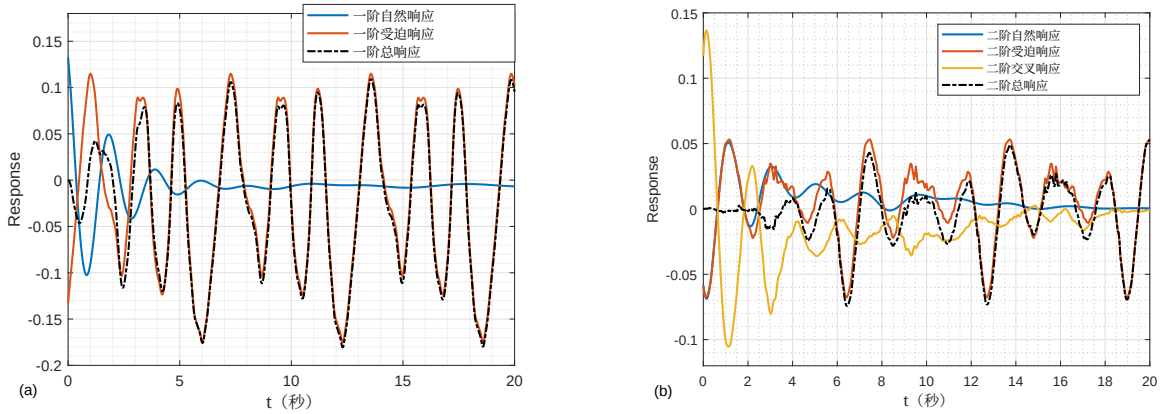


图28：响应分量（a）为一阶响应，（b）为二阶响应 e

5. 结论

针对任意不规则激励，提出了一种高效的广义极点-留数法，用于计算由沃尔泰拉级数描述的非线性动力响应。所提方法的核心是获取沃尔泰拉核函数的极点及其对应系数，进而获取由各阶沃尔泰拉级数描述的各阶响应模型的极点及其对应系数。在获得沃尔泰拉核函数和激励的极点及其对应系数后，其余推导便可采用针对普通线性振子所建立的类似极点-留数法。为获得沃尔泰拉核函数的极点及其对应系数，该方法包括两个步骤：(1) 使用拉盖尔多项式在时间维度上对高阶 Volterra 核函数进行解耦；(2) 在拉普拉斯域中获取拉盖尔多项式的极点及其对应系数。由于所提方法给出了显式、连续的时间响应函数，因此其效率远高于传统数值方法。此外，由于在求解过程中不仅获得了各阶响应，还获得了各阶响应的自然响应、受迫响应和交叉响应，因此能够获得许多有意义的物理和数学洞见。为证明所提方法不仅适用于运动方程已知的系统，也适用于运动方程未知的系统，

开展了两项数值研究。对于每项研究，均考察了具有不同参数的规则激励和复杂非规则激励。通过四阶龙格–库塔法验证了所提方法的效率。本文仅计算了零初始条件下的响应。非零初始条件下的响应将在今后的工作中进行研究。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：52101302 和 52101339）以及中国博士后科学基金会（项目编号：2021M690521）的资助。

代码可用性

支持本研究结论的所有代码均可通过电子邮件向作者索取。

参考文献

参考文献

[1] CM Cheng, ZK Peng, WM Zhang, and G Meng. 基于沃尔泰拉级数的非线性系统建模及其工程应用：最新进展综述。《机械系统与信号处理》, 87:340–364, 2017.[2] K Worden, G Manson, and GR Tomlinson. 多输入沃尔泰拉级数的谐波探测算法。《声音与振动杂志》, 201(1):67–84, 1997.[3] L Meirovitch. 《振动原理与技术》，第1卷。Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1997.[4] A Iserles. 《微分方程数值分析入门》。第44号。Cambridge university press, 2009.[5] V Volterra and ET Whittaker. 《泛函理论及积分方程与积分微分方程理论》。Dover publications, 1959.[6] M Schetzen. 《非线性系统的沃尔泰拉与维纳理论》。1980.[7] NCG De Paula and FD Marques. 使用时延神经网络辨识多变量沃尔泰拉核：非定常气动载荷的应用。《Nonlinear Dynamics》, 97(1):767–780, 2019.[8] JH Son and Y Kim. 利用拉盖尔多项式估计海洋结构动态响应的沃尔泰拉核参数。《Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering》, 142(6), 2020.[9] A Dalla Libera, R Carli, and G Pillonetto. 基于核的方法用于沃尔泰拉级数辨识。《Automatica》, 129:109686, 2021.[10] Z Peng, J Li, H Hao, and C Li. 使用仅输出沃尔泰拉级数模型进行非线性结构损伤检测。《Structural Control and Health Monitoring》, 28(9):e2802, 2021.

[11] J Liu, Y Zhang, and B Yun. 一种预测地面冲击载荷诱发的非线性结构振动的新方法。《声音与振动杂志》, 331(9):2129–2140, 2012.[12] SA Billings and KM Tsang. 非线性系统的谱分析，第一部分：参数化非线性谱分析。《机械系统与信号处理》, 3(4):319–339, 1989.[13] L Carassale, T Wu, and A Kareem. 桥梁的非线性气动与气动弹性分析：频域方法。《工程力学杂志》, 140(8):04014051, 2014.[14] C Ho, ZQ Lang, and SA Billings. 非线性阻尼对杜芬方程影响的频域分析。《机械系统与信号处理》, 45(1):49–67, 2014.[15] Y Kim, JH Kim, and Y Kim. 使用三阶沃尔泰拉模型预测不规则海况下的非线性船舶结构响应时间序列。《流体与结构杂志》, 49:322–337, 2014.[16] Y Kim. 用于预测莫里森载荷作用下细长海洋结构响应的有限记忆二次沃尔泰拉模型。《流体与结构杂志》, 56:75–88, 2015.[17] E Kreyszig. 《高等工程数学》。John Wiley & Sons, 2010.[18] SLJ Hu, F Liu, B Gao, and HJ Li. 用于数值动力分析的极点-留数法。《工程力学杂志》, 142(8):04016045, 2016.[19] S Boyd, LO Chua, and CA Desoer. 沃尔泰拉级数的解析基础。《IMA数学控制与信息杂志》, 1(3):243–282, 1984.[20] S Boyd and LO Chua. 渐消记忆以及用沃尔泰拉级数逼近非线性算子的问题。《IEEE电路与系统汇刊》, 32(11):1150–1161, 1985.[21] WJ Rugh. 《非线性系统理论》。约翰·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，MD, 1981.[22] BW Israelsen and DA Smith. 用于非线性动力系统实用辨识的沃尔泰拉核广义拉盖尔约化。arXiv预印本 arXiv:1410.0741, 2014.[23] SLJ Hu, WL Yang, and HJ Li. 使用复指数模型进行信号分解与重构。《机械系统与信号处理》, 40(2):421–438, 2013.[24] RR Craig and AJ Kurdila. 《结构动力学基础》。John Wiley & Sons, 2006.[25] ZY Song. 多艘驳船之间波浪诱发流体共振的时变非线性动力学。博士论文，大连理工大学，2010.[26] E Bedrosian and SO Rice. 由谐波输入和高斯输入驱动的沃尔泰拉系统（具有记忆的非线性系统）的输出特性。《IEEE会议录》, 59(12):1688–1707, 1971.[27] A Chatterjee. 使用沃尔泰拉级数和多音激励估计杜芬振子的参数。《国际机械科学杂志》, 52(12):1716–1722, 2010.