arXiv:2303.02501v1 [nlin.CD] 4 Mar 2023

广义分数阶映射中的分岔与向混沌的转变，阶数为 $0 < \alpha < 1$

Mark Edelman[a,b,*], Avigayil B. Helman[c], Rasa Smidtaite[d]

[a]叶史瓦大学斯特恩女子学院，列克星敦大道 245 号，纽约，纽约州 10016，美国[b]纽约大学库朗数学科学研究所，默瑟街 251 号，纽约，纽约州 10012，美国[c]哥伦比亚大学工程与应用科学学院，西 120 街 500 号，纽约，纽约州 10027，美国[d]考纳斯理工大学应用数学系，Studentu 50-429，51368，考纳斯，立陶宛

摘要

阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的广义分数阶映射是卷积型 Volterra 差分方程组，其核函数的差分绝对可求和，但核函数级数发散。应用中常用的阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶映射（采用幂律核）和分数阶差分映射（采用下降阶乘核）均属于此类映射。我们推导出了可用于计算广义分数阶映射分岔点的代数方程组。我们计算了分岔点，并绘制了分数阶逻辑斯蒂映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射的分岔图。尽管分数阶映射中单条轨迹向混沌的转变可能表现为分岔级联式行为和零李雅普诺夫指数，但数值模拟结果使我们可以推测，分岔级联式转变向混沌的情景

*通讯作者电子邮箱：edelman@cims.nyu.edu（Mark Edelman）、avigayilhelman34@gmail.com（Avigayil B. Helman）、rasa.smidtaite@ktu.lt（Rasa Smidtaite）

提交至《混沌、孤子与分形》的预印本 2023年3月7日

在广义分数阶映射和常规映射中是相似的，并且广义分数阶费根鲍姆常数 δ_f 与常规费根鲍姆常数 $\delta = 4.669...$ 的值相同。

关键词：分数阶映射、周期点、分岔、分数阶差分 e

1. 引言

在 [1] 中针对阶数为 $\alpha > 1$ 的情形引入，并在 [2] 中扩展到 $\alpha > 0$ 分数阶，且在 [3, 4] 中提出的分数阶差分映射，是卷积型沃尔泰拉差分方程，其核函数分别为幂律核（在分数阶映射中）和下降阶乘核（在分数阶差分映射中）。这些映射最近被应用于密码学 [5] 、生物学 [6], 、经济学 [7], 、通信 [8], 以及控制（多篇论文）领域。研究人员的任务是确定在特定应用中应使用哪些映射，或确定哪一种映射更适合描述某种自然现象。分数阶映射和分数阶差分映射具有许多共同特征，例如分岔级联型轨迹以及向不动点的幂律收敛（例如参见综述 [9, 10]）。它们的性质在很大程度上由其核函数的共同性质决定；这些核函数属于一类离散函数，其级数发散；然而，它们的差分级数属于绝对收敛级数空间 l_1。基于这一原因，在 [11, 12] 中引入了包含分数阶映射和分数阶差分映射的广义分数阶映射。

向混沌转变的普适分岔级联情景广为人知（最受欢迎的参考文献是 Robert May 发表在《Nature》上的文章 [13]）。关于非线性动力学普适性的奠基论文收录于

重印的论文选集中 [14]。从数学上看，常规非线性动力学中的普适性通过费根鲍姆函数和常数来表示（例如，参见 [15, 16]），其基础是对周期点及其分岔的分析。分数阶系统没有分岔点 [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]，因此，无法将相应的分析直接推广到具有渐近幂律记忆的映射。

尽管分数阶映射没有周期点，却有渐近周期点。近期论文 [11, 12, 24, 25] 研究了广义分数阶映射中的渐近周期点和不动点的稳定性。本文利用 [11] 的结果绘制分数阶差分逻辑斯蒂映射的分岔图。我们还推导出用于定义广义分数阶映射中分岔点的方程组，并用它们计算分数阶逻辑斯蒂映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射中的分岔点。我们试图探讨的问题是：普适行为是否会在广义分数阶映射中持续存在？数值结果表明，答案是“是”，而且分数阶费根鲍姆常数 δ 与通常的费根鲍姆常数取值相同。

我们针对不同的阶数 $\alpha \in (0, 1)$，对分数阶逻辑斯蒂映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射进行了数值模拟。本文仅展示阶数为 $\alpha = 0.5$（即两个整数值之间区间的正中间值）时的部分数值结果，以说明我们的发现；这些发现对所有考察的 α 值均成立。

2. 预备知识

阶数为 $0<\alpha<1$ 的广义通用 α 映射族定义如下（见 [11, 12]）：

$$x_n = x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} G^0(x_k) U_\alpha(n-k), \tag{1}$$

其中，$G^0(x) = h^\alpha G_K(x)/\Gamma(\alpha)$，$x_0$ 为初始条件，h 为映射的时间步长，α为映射阶数，$G_K(x)$ 是依赖于参数 K 的非线性函数，$U_\alpha(n) = 0$ 对于 $n \leq 0$，且 $U_\alpha(n) \in \mathbb{D}^0(\mathbb{N}_1)$。空间 $\mathbb{D}^i(\mathbb{N}_1)$ 定义如下（见 [12]）

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^i(\mathbb{N}_1) \;=\; & \{f : |\sum_{k=1}^{\infty} \Delta^i f(k)| > N, \\ & \forall N,\ N \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^{i+1} f(k)| = C,\ C \in \mathbb{R}_+\}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中，前向差分算子 Δ 定义为

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \tag{3}$$

对于任意实数 a，$\mathbb{N}_a = \{a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ ...\}$，以及 $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$。为了推广一维映射

$$x_{n+1} = F_K(x_n) \tag{4}$$

函数 $G_K(x)$ 定义为

$$G_K(x_n) = x_n - F_K(x_n) \tag{5}$$

当 $\alpha = 1$、$h = 1$ 且 $U_1(n) = 1$ 时，收敛到映射方程（4）。

对于 Caputo 分数阶映射，$[1, 2]$,$U_\alpha(n)$ 是幂函数

$$U_\alpha(n) = n^{\alpha-1}. \tag{6}$$

对于 Caputo分数阶差分映射，它们被定义为 Caputo h-差分方程 [3, 4, 26] 的解

$$({}_0\Delta^{\alpha}_{h,*}x)(t) = -G_K(x(t+(\alpha-1)h)), \tag{7}$$

其中 t $\in (h\mathbb{N})_m$，并满足初始条件

$$({}_0\Delta^{k}_{h}x)(0) = c_k, \quad k = 0,1,...,m-1, \quad m = \lceil \alpha \rceil, \tag{8}$$

核函数 Uα(n) 是下降阶乘函数:

$$U_\alpha(n) = (n+\alpha-2)^{(\alpha-1)}, \ U_\alpha(1) = (\alpha-1)^{(\alpha-1)} = \Gamma(\alpha). \tag{9}$$

下降阶乘 $t^{(\alpha)}$ 定义为

$$t^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}, \ t \neq -1,-2,-3.... \tag{10}$$

下降阶乘渐近地呈幂函数形式（参见 [4] 中的公式 (32) 和图 4）：

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)t^{\alpha}} = 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

h-下降阶乘 $t^{(\alpha)}{}_h$ 定义为 [27]

$$t_h^{(\alpha)} = h^{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{t}{h}+1)}{\Gamma(\frac{t}{h}+1-\alpha)} = h^{\alpha}\left(\frac{t}{h}\right)^{(\alpha)}, \ \frac{t}{h} \neq -1,-2,-3,.... \tag{12}$$

广义分数阶映射中的渐近周期-l点由以下方程组定义 [11]

$$x_{l,m+1} - x_{l,m} = S_{1,l}G^0(x_{l,m}) + \sum_{j=1}^{m-1} S_{j+1,l}G^0(x_{l,m-j})$$

$$+ \sum_{j=m}^{l-1} S_{j+1,l}G^0(x_{l,m-j+l}), \ 0 < m < l, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{l} G^0(x_{l,j}) = 0, \tag{14}$$

其中

$$S_{j+1,l}=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[U_{\alpha}(lk+j)-U_{\alpha}(lk+j+1)\Big],\ 0\le j<l. \tag{15}$$

本文将使用以下易于验证的恒等式:

$$\sum_{j=1}^{l}S_{j,l}=0. \tag{16}$$

3. 定义 $\mathrm{T}=2^{n-1}-\mathrm{T}=2^{n}$ 分岔点的方程组

考虑周期为 $\mathrm{l}=2^{n}$ 的一个周期轨道。我们预计，在 $\mathrm{T}=2^{n-1}-\mathrm{T}=2^{n}$ 分岔点附近，差值 $\mathrm{x}_{2^{n},\ i+2^{n-1}}-\mathrm{x}_{2^{n},\ i}$ 会很小。为求得该差值，我们将方程（13）从 $\mathrm{m}=\mathrm{i}$ 求和至 $\mathrm{m}=\mathrm{i}+2^{n-1}-1$，并利用以下变换的结果:

$$\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}(x_{2^{n},m+1}-x_{2^{n},m})=x_{2^{n},i+2^{n-1}}-x_{2^{n},i}; \tag{17}$$

$$\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}\sum_{j=1}^{m-1}S_{j+1,2^{n}}G^{0}(x_{2^{n},m-j})=\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}\sum_{j=1}^{m-1}S_{m-j+1,2^{n}}G^{0}(x_{2^{n},j})$$

$$=\sum_{j=1}^{i-1}G^{0}(x_{2^{n},j})\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}S_{m-j+1,2^{n}}+\sum_{j=i}^{i+2^{n-1}-2}G^{0}(x_{2^{n},j})\sum_{m=j+1}^{i+2^{n-1}-1}S_{m-j+1,2^{n}}; \tag{18}$$

$$\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}\sum_{j=m}^{2^{n}-1}S_{j+1,2^{n}}G^{0}(x_{2^{n},m-j+2^{n}})=\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}\sum_{j=m+1}^{2^{n}}S_{m-j+2^{n}+1,2^{n}}G^{0}(x_{2^{n},j})$$

$$=\sum_{j=i+1}^{i+2^{n-1}}G^{0}(x_{2^{n},j})\sum_{m=i}^{j-1}S_{m-j+2^{n}+1,2^{n}}$$

$$+\sum_{j=i+2^{n-1}+1}^{2^{n}}G^{0}(x_{2^{n},j})\sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1}S_{m-j+2^{n}+1,2^{n}}; \tag{19}$$

$0<i\le 2^{n-1}$.

所得方程组可写为

$$x_{2^n,i+2^{n-1}} - x_{2^n,i} = \sum_{j=i}^{i+2^{n-1}-1} G^0(x_{2^n,j}) S_{1,2^n} + \sum_{j=1}^{i-1} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n}$$
$$+ \sum_{j=i}^{i+2^{n-1}-2} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=j+1}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} + \sum_{j=i+1}^{i+2^{n-1}} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{j-1} S_{m-j+2^n+1,2^n}$$
$$+ \sum_{j=i+2^{n-1}+1}^{2^n} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+2^n+1,2^n}; \tag{20}$$
$0 < i \le 2^{n-1}$.

容易看出，这个公式可以写成

$$x_{2^n,i+2^{n-1}} - x_{2^n,i} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} [G^0(x_{2^n,j}) - G^0(x_{2^n,2^{n-1}+j})] \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n}; \tag{21}$$
$0 < i \le 2^{n-1}$,

其中，系数 $S_{k,\ 2^n}$ 根据公式（15）对 $0 < k \le 2^n$ 定义，并对 $\forall k,\ k \in \mathbb{Z}$ 周期性延拓：

$$S_{k,2^n} = S_{k+2^n,2^n}. \tag{22}$$

事实上，考虑公式（20）右端项中包含相同因子 $G^0(x_{2^n,\ p})$ 的各项。只有第二个求和中包含 $0 < p < i$ 对应的项。它们都可以写成

$$G^0(x_{2^n,p}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n}. \tag{23}$$

只有第一个和第三个求和式包含带有 $p = i$ 的项：

$$G^0(x_{2^n,p}) \Big[S_1 + \sum_{m=i+1}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n} \Big] = G^0(x_{2^n,p}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n}. \tag{24}$$

第一个、第三个和第四个求和式包含带有 $\mathrm{i} < \mathrm{p} \leq \mathrm{i} + 2^{n-1} - 2$ 的项:

$$\begin{aligned} & G^0(x_{2^n,p})\Big[S_1 + \sum_{m=p+1}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n} + \sum_{m=i}^{p-1} S_{m-p+1,2^n}\Big] \\ & = G^0(x_{2^n,p}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n}. \end{aligned} \tag{25}$$

只有第一个和第四个求和式包含带有 $\mathrm{p} = \mathrm{i} + 2^{n-1} - 1$ 的项:

$$G^0(x_{2^n,p})\Big[S_1 + \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-2} S_{m-p+1,2^n}\Big] = G^0(x_{2^n,p}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-p+1,2^n}. \tag{26}$$

显然，当 $\mathrm{p} = \mathrm{i} + 2^{n-1}$ 时，第四个求和式与当 $\mathrm{i} + 2^{n-1} < \mathrm{p} \leq 2^n$ 时的第五个求和式会得到相同的公式（23）。现在我们可以写成

$$\begin{aligned} x_{2^n,i+2^{n-1}} - x_{2^n,i} = & \sum_{j=1}^{2^{n-1}} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} \\ & + \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n};\ 0 < i \leq 2^{n-1}. \end{aligned} \tag{27}$$

经过代换 $\mathrm{p} = \mathrm{j} - 2^{n-1}$ 和 $\mathrm{q} = \mathrm{m} - 2^{n-1}$ 后，最后一个表达式中的第二个求和式可写为

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} G^0(x_{2^n,j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} = \sum_{p=1}^{2^{n-1}} G^0(x_{2^n,2^{n-1}+p}) \sum_{q=i-2^{n-1}}^{i-1} S_{q-p+1,2^n} \\ & = \sum_{p=1}^{2^{n-1}} G^0(x_{2^n,2^{n-1}+p})\Big[\sum_{q=i-2^{n-1}}^{i+2^{n-1}-1} S_{q-p+1,2^n} - \sum_{q=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{q-p+1,2^n}\Big] \\ & = -\sum_{j=1}^{2^{n-1}} G^0(x_{2^n,2^{n-1}+j}) \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n};\ 0 < i \leq 2^{n-1}. \end{aligned} \tag{28}$$

公式（21）的有效性可由公式（27）和（28）推出。

在 T $=2^{n-1}-$ T $=2^{n}$ 分岔点附近， x$_{2^n,\ j+2^{n-1}} \approx$ x$_{2^n,\ j} \approx$ x$_{2^{n-1}bif,\ j}$ 以及差值 x$_{2^n,\ j+2^{n-1}}$ ¯x$_{2^n,\ j}$ 都很小。集合 {x$_{2^{n-1}bif,\ 1}$, x$_{2^{n-1}bif}$2, ..., x$_{2^{n-1}bif\ 2^{n-1}}$} 是分岔点处的 2^{n-1}-周期轨道。在线性近似下，我们可写为

$$G^0(x_{2^n,j+2^{n-1}}) - G^0(x_{2^n,j}) = \frac{dG^0(x)}{dx}\Big|_{x_{2^{n-1}bif,j}} (x_{2^n,j+2^{n-1}} - x_{2^n,j}). \tag{29}$$

在分岔点附近，公式（21）可写为

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \Big[\frac{dG^0(x)}{dx}\Big|_{x_{2^{n-1}bif,j}} \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} + \delta_{i,j}\Big] (x_{2^n,j+2^{n-1}} - x_{2^n,j}) = 0; \tag{30}$$
$$0 < i \le 2^{n-1},$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克符号。线性方程组 Eq. 只有在其系数构成的 2^{n-1} × 2^{n-1} 矩阵 A 的行列式

$$A_{i,j} = \frac{dG^0(x)}{dx}\Big|_{x_{2^{n-1}bif,j}} \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} + \delta_{i,j} \tag{31}$$

等于零时才有非零解：

$$\det(A) = 0. \tag{32}$$

本节结果可总结为一个定理：

定理 3.1。卷积型沃尔泰拉差分方程所表示的非线性一维映射 x$_{n+1}$ =F$_K$(x$_n$) 的分数阶推广中， T $=2^{n-1}-$ T $=2^{n}$ 分岔点、 x$_{2^{n-1}}$bi f, i 的 2^{n-1} 值（其中 $0 <$ i $\le 2^{n-1}$）以及非线性参数 K$_{2^{n-1}}$bi f 的值

$$x_n = x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} G^0(x_k) U_\alpha(n-k), \tag{33}$$

其中 $G^0(x) = h^{\alpha} G_K(x)/\Gamma(\alpha)$，$x_0$ 为初始条件，h 为映射的时间步长，α 为映射阶数，$G_K(x) = x - F_K(x)$，$U_{\alpha}(n) = 0$（当 $n \leq 0$时），$U_{\alpha}(n) \in \mathbb{D}^0(\mathbb{N}_1)$，并且

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^i(\mathbb{N}_1) \;=\; & \{f : |\sum_{k=1}^{\infty} \Delta^i f(k)| > N, \\ & \forall N,\ N \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^{i+1} f(k)| = C,\ C \in \mathbb{R}_+\},\end{aligned} \tag{34}$$

由以下方程组定义

$$x_{2^{n-1}bif,m+1} - x_{2^{n-1}bif,m} = S_{1,2^{n-1}} G^0(x_{2^{n-1}bif,m}) + \sum_{j=1}^{m-1} S_{j+1,2^{n-1}} G^0(x_{2^{n-1}bif,m-j})$$

$$+ \sum_{j=m}^{2^{n-1}-1} S_{j+1,2^{n-1}} G^0(x_{2^{n-1}bif,m-j+2^{n-1}}),\ \ 0 < m < 2^{n-1}, \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} G^0(x_{2^{n-1}bif,j}) = 0, \tag{36}$$

$$\det(A) = 0, \tag{37}$$

其中

$$\begin{aligned}& S_{j+1,l} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[U_{\alpha}(lk + j) - U_{\alpha}(lk + j + 1) \Big],\ \ 0 \leq j < l, \\ & S_{i,l} = S_{i+l,l},\ \ i \in \mathbb{Z},\end{aligned} \tag{38}$$

以及 2^{n-1} 维矩阵 A 的元素为

$$A_{i,j} = \frac{dG^0(x)}{dx}\Big|_{x_{2^{n-1}bif,j}} \sum_{m=i}^{i+2^{n-1}-1} S_{m-j+1,2^n} + \delta_{i,j}\ \ 0 < i, j \leq 2^{n-1}. \tag{39}$$

4. 具有 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶和分数阶差分逻辑斯蒂映射的分岔图与向混沌的转变

在广义分数阶逻辑斯蒂映射中

$$G_K(x) = x - Kx(1-x). \tag{40}$$

我们使用 Mathematica 的牛顿法（精确解）对方程 (13) 和 (14) 进行数值求解，从而绘制了不同 $\alpha \in (0, 1)$ 取值下分数阶差分映射和分数阶逻辑斯蒂映射的分岔图（我们假设 $h = 1$）。图 1 展示了我们对分数阶差分逻辑斯蒂映射在 $\alpha = 0.5$ （该值远离整数 1 和 0）时的计算结果。从图 1b 可以看出，即使在周期为 4（$T = 4$）的点处，精确解与单条轨迹经过 10^5 次迭代后得到的结果之间也已有明显差异。对于 $T > 16$ （图 1b、e、f），单条轨迹经过 10^5 次迭代后得到的结果似乎明显不准确。许多研究各种分数阶差分映射的论文都包含通过单条轨迹迭代得到的分岔图，而且这些论文中的迭代次数都远少于 10^5。

对于各种 $0 < \alpha < 1$ 值，分数阶逻辑斯蒂映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射的分岔图在定性上相同。随着单条轨迹上的迭代次数增加而得到的分岔图（以及迭代次数趋于无穷时的精确分岔图）在许多情况下都显示出逐渐向左移的趋势（见图 1b 和图 1c）。这一现象最初是在 [4] 中通过分数阶标准映射和分数阶差分标准映射的例子发现并解释的（见该文中的图 8）。左移现象的解释基于另一种分数阶映射所特有的现象

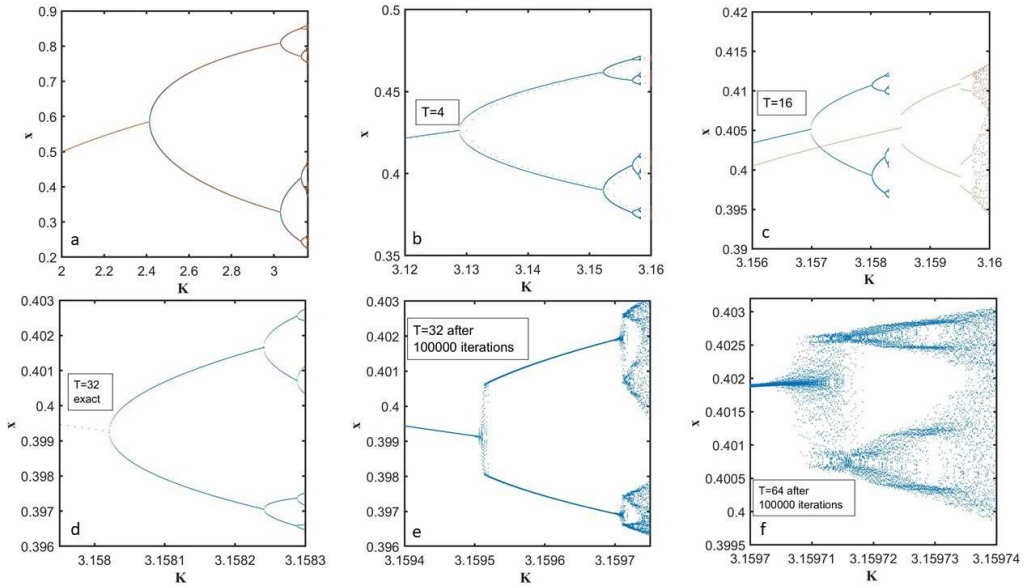


图 1：阶数为 $\alpha = 0.5$ 的 Caputo 分数阶差分逻辑映射的部分分岔图，从 $K = 2$（不动点）到约 $K = 3.16$（T=128 周期点）。在图 a–c 中，稳态线表示方程 (13) 和 (14) 的解（精确解），点表示经过 10^5 次迭代后，单条轨迹上 $x_0 = 0.3$ 的数值计算结果。图 d 表示从左侧 $T = 32$ 到右侧 $T = 128$ 的精确解。图 e 和 f 表示单条轨迹上的计算结果。

和分数阶差分映射中常见的现象：分岔级联型轨迹（CBTT）。[28] 首次以阶数为 $\alpha = 1.65$ 的标准映射为例指出了这一现象（该文中的图 5）。CBTT 出现在周期较高的渐近稳定轨迹中；这些轨迹先收敛到一个不动点，然后沿着分岔级联型情景演化，最终收敛到一个渐近周期循环（例如，见 [6] 中的图 6.6a 和图 6.7a）。即使是混沌轨迹，也可能先收敛到一个不动点或周期轨道（见 [4] 中的图 7，或 [10] 中的图 3）。在分数阶差分映射中，轨迹收敛到不动点遵循

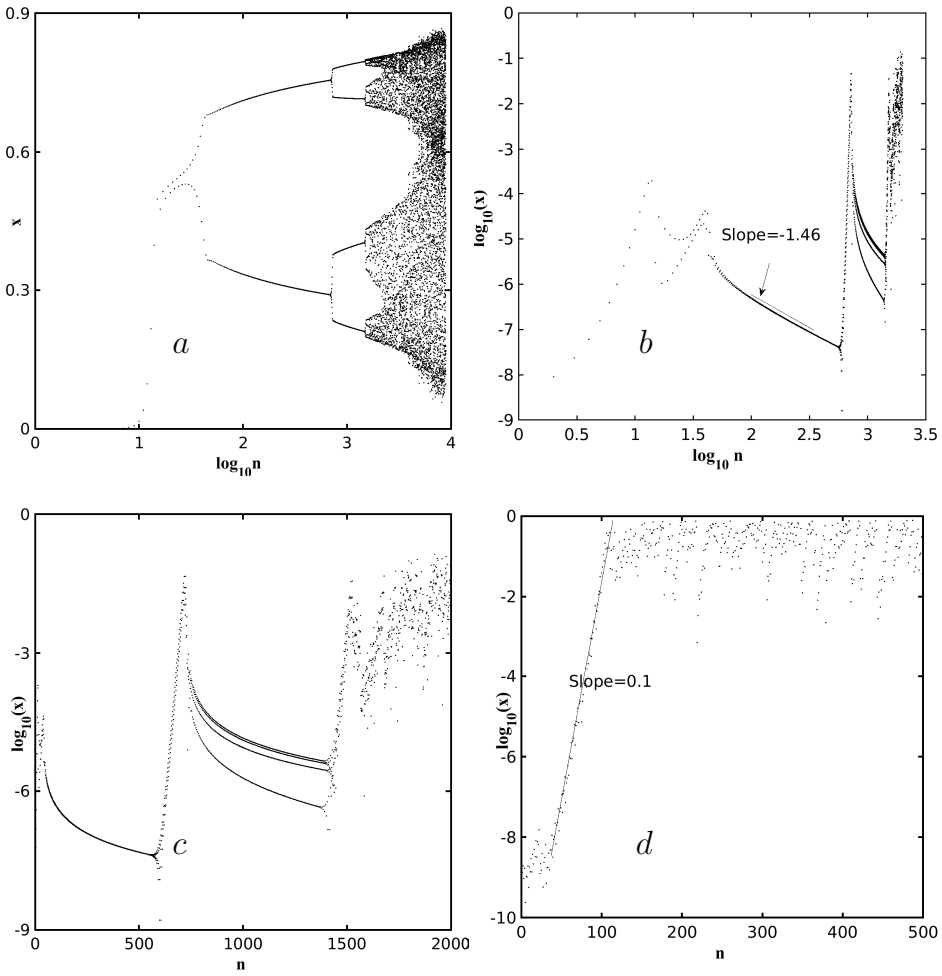


图2：阶数为 $\alpha = 0.2$、K 为 $= 3.3$ 的 Caputo 分数阶差分逻辑映射中向混沌的转变。a. 初始条件为 $x_0 = 10^{-6}$ 时的轨迹 $x = x_n(n)$；b. 初始条件分别为 $x0_{,1} = 10^{-6}$ 和 $x0_{,2} = 10^{-6} + 10^{-9}$ 时，两条轨迹 $x = x_{n,2} - x_{n,1}$ 的偏差双对数图；c. b 中情况下的 $\log_{10}(x)$ 与 n 关系图；d. 初始条件分别为 $x0_{,1} = 0.3$ 和 $x0_{,2} = 0.3 + 10^{-9}$ 时，轨迹偏差的对数与 n 关系图。

幂律 [29]，相应的李雅普诺夫指数等于零。对于混沌轨迹，收敛速率取决于初始条件。在渐近混沌的分数阶系统中，两条初始时彼此接近的轨迹

差分逻辑斯蒂映射（$\alpha = 0.2$ 且 $K = 3.3$）中，如图 2a 所示，轨迹可能根据初始条件呈指数发散，如图 2d 所示，相应的李雅普诺夫指数为正。但两条初始时接近于零的轨迹之间的偏差曲线（图 2b 和图 2c）表明，向混沌的转变经历了一系列幂律收敛，随后出现跃变。

分数阶映射和分数阶差分映射也可能表现出逆向 CBTT，即渐近周期轨迹起始于混沌轨迹或更高周期的轨迹。分数阶映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射中逆向 CBTT 的示例见 [2] 中的图 7 以及 [6]中的图 7.6b 和 6.7c。逆向 CBTT 会导致分岔图向右偏移。相对于对单条轨迹进行有限次迭代后得到的分岔图，分数阶映射/分数阶差分映射的渐近分岔图向左还是向右偏移，取决于映射的类型和所采用的初始条件。

表1展示了周期 2^{n-1} –周期2^n 分岔点的映射参数值：$K_1(n)$（对于常规逻辑斯蒂映射）和 $K_{.5}(n)$（对于阶数为$\alpha = 0.5$的分数阶差分逻辑斯蒂映射）。$n = 1$、2、...、10 和$\alpha = 0.5$ 的结果使用公式 (13) 和 (14) 获得。该表还展示了相应比值 $\delta_1 = \Delta K_1(n-2)/\Delta K_1(n-1) = [K_1(n-1) - K_1(n-2)]/[K_1(n) - K_1(n-1)]$ 以及 $\delta_{.5} = \Delta K_{.5}(n-2)/\Delta K_{.5}(n-1) = [K_{.5}(n-1) - K_{.5}(n-2)]/[K_{.5}(n) - K_{.5}(n-1)]$。表1中的所有结果 $\alpha = 0.5$ 后来均使用定理 3.1（公式 (35)-(37)）计算得到，并且对于 n 的前十个取值，结果完全相同。数值计算使用 Matlab 完成，所得结果的精度高于使用 Mathematica 求解公式 (13) 和 (14) 所得到的相应结果。常规逻辑斯蒂映射的数值可在

n	$K_1(n)$	$K_{.5}(n)$	$\frac{\Delta K_1(n-2)}{\Delta K_1(n-1)}$	$\frac{\Delta K_{.5}(n-2)}{\Delta K_{.5}(n-1)}$	$\delta_1-\delta_F$	$\delta_{.5}-\delta_F$
1	3	2.41421356				
2	3.4494897	3.03150807				
3	3.5440904	3.12880294	4.751446	6.3446	8.2×10^{-2}	1.6754
4	3.5644073	3.15225457	4.656251	4.1487	-1.3×10^{-2}	-.5205
5	3.5687594	3.15698186	4.668242	4.9609	-9.6×10^{-4}	.2917
6	3.5696916	3.15802086	4.668739	4.5499	-4.6×10^{-4}	-.1193
7	3.5698913	3.15824198	4.669132	4.7199	-6.9×10^{-5}	.0507
8	3.5699340	3.15828833	4.669183	4.6496	-1.9×10^{-5}	-.0196
9	3.5699432	3.15829845	4.669195	4.6766	-7×10^{-6}	.0074
10	3.5699451	3.15830062		4.6665		-.0027
11		3.158301084		4.6702		.0010
12		3.158301183		4.6688		-.0004

表1：常规逻辑斯蒂映射和分数阶差分逻辑斯蒂映射中趋近费根鲍姆常数。$K_1(n)$ 是常规逻辑斯蒂映射（$\alpha=1$）中周期 2^{n-1} –周期 2^n 分岔点的映射参数值；$K_{.5}(n)$ 是情形 $\alpha=.5$下的同一组分岔点； $\delta_1=\Delta K_1(n-2)/\Delta K_1(n-1)=[K_1(n-1)-K_1(n-2)]/[K_1(n)-K_1(n-1)]$；$\delta_{.5}$ 是情形 $\alpha=.5$下的相同值； $\delta_F=\delta=4.6692016$。

来自多个来源（例如，参见 [30, 31]）。表中有效数字的位数取决于表格需适应标准期刊版面的要求。关于 $\alpha=1$ 情形的更高精度结果可在互联网上的多个网站查到。$\alpha=0.5$ 阶分数阶逻辑映射的相应结果列于表2。

与常规逻辑斯蒂映射的情况一样，$\delta_{.5}$ 的值围绕费根鲍姆常数振荡，但收敛速度明显更慢。慢收敛

$n(T=2^n)$	$K_{.5}(n)$	$\frac{\Delta K_{.5}(n-2)}{\Delta K_{.5}(n-1)}$	$\delta_{.5}-\delta_F$
1	3.93016668194129		
2	4.88614847910753		
3	5.05712582113625	5.591278	0.922076
4	5.09634066404542	4.360016	-.309186
5	5.10446168317469	4.828808	0.159606
6	5.10622604348767	4.602812	-.066389
7	5.10660170543380	4.696670	0.027469
8	5.10668234310063	4.658641	-.010561
9	5.10669959857451	4.673164	0.003963
10	5.10670329532456	4.667742	-.001460

表2：阶数为 $\alpha=0.5$ 的分数阶逻辑映射：分岔点的映射参数值 $K_{.5}$，以及比值 $\delta_{.5}=\Delta K_{.5}(n-2)/\Delta K_{.5}(n-1)=[K_{.5}(n-1)-K_{.5}(n-2)]/[K_{.5}(n)-K_{.5}(n-1)]$ 收敛至费根鲍姆常数 $\delta_F=\delta=4.6692016$。

这是预期之中的，因为在许多情况下，分数阶映射中的收敛遵循幂律，而常规映射中的收敛则呈指数形式。从作者的角度来看，这些数据提供了充分证据，可以推测费根鲍姆常数 δ存在于分数阶映射和分数阶差分映射中，且其数值与常规映射中的相同。

5. 结论

本文推导了广义分数阶映射中定义分岔点的方程组（式（35）–（39））的系数解析表达式，其中阶数为 $0<\alpha<1$。这些表达式可用于计算渐近分岔

点，适用于多种情况，包括分数阶映射、分数阶差分映射和映射。我们表明，由 [11] 推导出的定义渐近周期点的方程组（式（13）和（14）），能够绘制出比通过单条轨迹迭代得到的分岔图精确得多的分岔图。

根据表1和表2的数据，我们推测，Feigenbaum数δ存在于分数阶映射和分数阶差分映射中，且其数值与常规映射中的相同。这可能是方程组(35)–(39)中对称性和自相似性的结果。我们希望，接下来对这些方程组进行的数学分析能够解释这种对称性。

数据可用性

如有需要，可提供数据。

致谢

第一作者感谢叶史瓦大学2021–2022教师研究基金的支持，感谢纽约大学库朗数学科学研究所的管理部门给予其在库朗开展部分计算工作的机会，并感谢Virginia Donnelly提供技术帮助。

最后一位作者感谢欧洲社会基金通过“科学家、其他研究人员和学生实践研究活动能力发展”措施（项目编号 09.3.3–LMT–K–712–23–0235；编号 09.3.3–LMT–K–712）提供的支持。

参考文献

[1] Tarasov VE、Zaslavsky GM. 冲击系统和离散映射的分数阶方程组. J Phys A 2008年;41:435101.[2] Edelman M. 通用分数阶映射与分岔级联型吸引子. Chaos 2013年;23:033127.[3] Wu G-C、Baleanu D、Zeng S-D. 分数阶正弦映射和标准映射中的离散混沌. Phys Lett A 2014年;378:484–7.[4] Edelman M. Caputo 标准 α族映射：分数阶差分与分数阶. Chaos 2014 年 ;24:023137.[5] Huang L-L 、 Baleanu D 、 Wu G-C 、 Zeng S. 分数阶逻辑映射的新应用. Romanian Journal of Physics 2016年;61(7):1172–1179.[6] Edelman M. 具有幂律记忆的系统演化：我们必须死去吗？（谨以此文纪念 Valentin Afraimovich）。载于：Skiadas CH、Skiadas C 编. 人口健康、老龄化与卫生支出的人口统计学. 65–85，Springer 电子书；2020 年 .[7] Tarasova VV 、 Tarasov VE. 经济模型中的带记忆逻辑斯蒂映射. Chaos, Solitons and Fractals 2017年;95:84–91.[8]Petkeviciute-Gerlach D、Timofejeva I、Ragulskis M. 分数阶差分逻辑斯蒂映射收敛性的计时. Nonlinear Dynamics 2020年;100:3925–35.

[9] Edelman M. 具有幂律记忆的映射：直接介绍与欧拉数、分数阶映射和分数阶差分映射。载于：A. Kochubei

和 Yu. Luchko（编），《分数阶微积分应用手册》第2卷：理论，第47–64页。柏林：De Gruyter；2019年。

[10] Edelman M. 幂律记忆非线性系统动力学。载于：V. E. Tarasov（编），《分数阶微积分及其应用手册》第4卷《物理学中的应用》，第103–132页。柏林：De Gruyter；2019年。

[11] Edelman M. 渐近稳定和混沌分数阶映射中的周期轨道。《非线性动力学》2021年；104：2829–41。

[12]Edelman M、Helman AB. 任意正阶分数阶映射中的渐近周期。《分数阶微积分、应用与分析》2022年；https://doi.org/10.1007/s13540-021-00008-w。

[13] May RM. 具有极其复杂动力学的简单数学模型。《自然》1976年；261：459–67。

[14] Cvitanovic P.《混沌中的普适性》。布里斯托尔和纽约：Adam Hilger；1989年。

[15] Feigenbaum MJ. 一类非线性变换的定量普适性。《统计物理学杂志》1978年；19：25–52。

[16] Feigenbaum MJ. 非线性系统中的普适行为。《Physica D：非线性现象》1983年；7：16–39。[17] Jagan Mohan J. 分数阶纳布拉差分方程的周期解。《Communications in Applied Analysis》2016年；20：585–609。[18] Jagan Mohan J. 分数阶纳布拉差分系统的拟周期解。《分数阶微分演算》2017年；7：339–55。

[19] Area I、Losada J 和 Nieto JJ. 关于周期函数的分数阶导数与原函数。《抽象与应用分析》2014年；2014：392598。

[20] Kaslik E, Sivasundaram S. 分数阶动力系统中周期解的不存在性，以及周期函数的整数阶导数与分数阶导数之间的显著差异。《非线性分析：现实世界应用》2012;13:1489–97。

[21] Tavazoei MS, Haeri M. 时不变分数阶系统中周期解不存在性的证明。《自动化》2009;45:1886–90。

[22] Wang J, Feckan M, Zhou Y. 分数阶微分方程中周期解和渐近周期解的不存在性。《非线性科学与数值模拟通讯》2013年;18:246–56。

[23] Yazdani M, Salarieh H. 时不变分数阶系统中周期解的存在性。《自动化》2011;47:1834–37。

[24] Edelman M. 阶数为 $0 < \alpha < 1$ 的广义分数阶映射中不动点的稳定性。2022 http://arxiv.org/abs/2209.01719。

[25]Edelman M、Helman AB。分数阶差分映射中的渐近周期点、分岔和向混沌的转变。2022 http://arxiv.org/abs/2209.15462。

[26] Chen F、Luo X、Zhou Y。非线性分数阶差分方程的存在性结果。《高级微分方程》2011；2011：713201。

[27] Ferreira RAC，Torres DFM。由变分法产生的分数阶 h-差分方程。《应用分析与离散数学》2011；5：110–21。

[28]Edelman M，Tarasov VE。分数阶标准映射。Phys Lett A 2009；374：279–285。

[29] Anh PT, Babiarz A, Czornik A, Niezabitowski M, Siegmund S：离散线性分数阶方程的渐近性质。波兰科学院通报，技术科学 2019年；67：749–59。[30] Alligood KT, Sauer TD, Yorke JA。《混沌：动力系统导论》。纽约：Springer；1996年。

[31] Sarmah HK, Baishya TK。Logistic 映射的周期区域与混沌区域中的倍周期路径。国际应用数学与统计科学杂志 2013年；2：49–62。