arXiv:2303.02502v1 [math.AP] 4 Mar 2023

分数阶 p-拉普拉斯算子的高阶渐近展开与有限差分格式

F´ELIX DEL TESO、MAR´IA MEDINA 和 PABLO OCHOA

ABSTRACT. 我们提出了分数阶 p-拉普拉斯算子的一种新渐近展开，并对误差进行了精确计算。我们证明，该近似在整个范围 $p \in (1,\infty)$ 和 $s \in (0,1)$ 内均成立，且误差不会随着 $s \to 1^-$ 而退化。在很大范围的 p 下，误差呈超二次阶（远离零梯度点时表现更佳），并且在大多数情形下是最优的。这里的一个主要思路是，分数阶 p-拉普拉斯算子的积分表示中的奇异部分，其行为类似于带有权重修正的局部 p-拉普拉斯算子。因此，我们也重新考察了经典 p-拉普拉斯算子先前的一种渐近展开，其误差阶此前尚不明确。

基于前述结果，我们提出了带有显式权重的分数阶p-拉普拉斯算子的单调有限差分近似，并获得了误差估计。最后，我们为 $\mathbb{R}^d$ 中的相关抛物型问题引入显式有限差分格式，并证明该格式在黏性解框架下稳定、单调且收敛。一个有趣的特点是，稳定性条件会随着初始数据正则性的提高而改善。

CONTENTS

1. 引言2. 主要结果 3. MVP 中的渐近展开与阶数 1
4. 分数阶离散化 p-拉普拉斯算子 5. 抛物型问题的 4
应用 致谢 参考文献 7
18
22
29
29

1. INTRODUCTION

考虑 $J_p:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 给定为 $J_p(\xi):=|\xi|^{p-2}\xi$ 其中 $p>1$。我们将分数阶 p-拉普拉斯算子定义为

$$-(-\Delta)_p^s\phi(x) := P.V.\int_{\mathbb{R}^d} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}},$$

其中 $s\in(0,\ 1)$。分数阶 p-拉普拉斯算子的通常定义会在积分前乘上一个归一化常数（该常数依赖于 p，s和 d）（例如参见 [11]）。这个常数与我们的目的无关，因此为简明起见，我们在定义和结果表述中将其省略。

当 $s\to 1^-$ 时的极限算子（经过适当的常数归一化）称为 p-拉普拉斯算子，定义如下:

$$\Delta_p\phi(x) := \nabla\cdot\left(|\nabla\phi(x)|^{p-2}\nabla\phi(x)\right).$$

本文旨在给出这些算子的高阶渐近展开及误差估计，并对其进行离散化，再将其应用于抛物型问题的研究。

更确切地说，我们首先重新考察2.2中引入的平均值性质 [12, 4]，该性质适用于 p-拉普拉斯算子；我们证明了一致误差估计，在最佳情形下，误差为二次阶（见定理 2.1

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35K10 35K55 35D40 35B05 35R11 65M06 65M12.
Key words and phrases. 分数阶 p-拉普拉斯算子，渐近展开，有限差分，黏性解。

和定理 2.3）。随后，我们利用分数阶 p-拉普拉斯算子的奇异部分表现得类似于加权 p-拉普拉斯算子这一事实，为该算子引入一种新的渐近展开，其收敛阶甚至优于局部情形（见定理 2.1 和定理2.3）。事实上，这些收敛阶会随着 p 而提高，并且在 $s \to 1^-$ 时不会退化（此时可恢复局部情形的收敛阶）。

引入渐近展开后，我们针对由此得到的非线性积分算子采用适当的求积公式，构造了两种单调有限差分离散。两者具有相同的相容阶，其中一种还具有显式权重（即不依赖于计算关于通常没有显式表达式的测度的积分）。从计算角度来看，这是一个优势。

最后，我们利用所有近似算子都满足最大值原理这一事实（即在极大值点处，算子具有确定的符号），在黏性解框架下为相应的非局部抛物型问题引入一种收敛的数值格式。这里一个值得关注的特点是，对于足够正则的初始数据，我们证明该格式在一个非常宽松且与线性情形相容的 CFL 型稳定性条件下稳定。

1.1. **结果概述及其文献背景。** 过去十年来，关于 p-拉普拉斯型算子的渐近展开问题得到了深入研究。该方向上首个已知结果是 Manfredi、Parviainen 和 Rossi 的开创性工作 [27]，其中给出了关于 $\Delta_p^{\mathrm{N}}\phi := |\nabla\phi|^{2-p}\Delta_p\phi$ （即所谓的归一化 p-拉普拉斯）的如下渐近公式，适用于$2 < p \le \infty$:

$$\mathcal{A}_r^p\phi(x) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{p-2}{2(p+d)}\left(\max_{y\in\overline{B_r}}\phi(x+y) + \min_{y\in\overline{B_r}}\phi(x+y)\right) + \frac{d+2}{p+d}\fint_{B_r}\phi(x+y)\,\mathrm{d}y\right).$$

正如 [24, 练习 3.7], 所示，在零梯度点之外，这种近似的阶为 $O(r)$。沿着这一思路， [22], 中还给出了另一种渐近展开，它在情形 $1 < p < 2$ 下也成立，阶为 $O(r)$。

关于 p-拉普拉斯算子的结果归功于 Bucur 和 Squassina [4], 以及 del Teso 和 Lindgren [12]。他们引入了式（2.2）中的渐近展开，并证明这些展开是一致的，但没有给出收敛阶。作为本文结果的对应结果，对于所有 $O(r^{\min\{\gamma,2\}}$，若远离零梯度点且 $\gamma < p-1$，我们得到阶 $p > 1$ （参见定理2.3 和注记2.2，其中讨论了当$p \ge 3$时的最优性）；若 $O(r^{\min\{p-2,2\}}$，则对所有点都成立，阶为 $p \ge 2$ （参见定理 2.1 和注记 2.2，其中讨论了其最优性）。我们的结果也与情形 $p = 2$ 相吻合；在该情形下，自然的渐近展开就是通常的平均值公式，其阶已知为 $O(r^2)$。

对于分数阶 p-拉普拉斯算子 $-(-\Delta)_p^s$，目前唯一已知的渐近展开是 Bucur 和 Squassina 在 [4] 中给出的展开:

$$\mathcal{A}_r^{s,p}\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+(p-2)s}(|y|^2-r^2)^s}. \tag{1.1}$$

作者证明了该近似的收敛阶为 $O(r^{2-2s})$。在 (2.1) 中，我们提出了一种新的渐近展开，相较于 (1.1)，它具有多项改进性质:

- (2.1) 中的测度对每个 $r > 0$ 都有界，而 (1.1) 中的测度则始终无界。
- (2.1) 的相容性在 $p \in (1,2)$ 范围内的非零梯度点处也成立。
- (2.1) 的收敛阶随着 p 而提高。
- (2.1) 的收敛阶不会随着 $s \to 1^-$ 而退化。
- 虽然（1.1）的阶始终低于二次，但在非零梯度点处，若 $p \ge 3/(2-s)$ （尤其是当 $p \ge 3$ 对所有 $s \in (0,1)$）成立，则（2.1）的阶高于二次；而若 $p \ge 4/(2-s)$ 且 $p > 2$（尤其是当 $p \ge 4$ 对所有 $s \in (0,1)$ ）成立，则在每一点都如此。关于最优性，参见注记 2.2 。

当 $p = 2$ 时的分数阶框架尚未在文献中得到明确研究。我们的方法的主要思想在第 3 节中阐述，也同样适用于这种情形。

这里的一个主要思想是，分数阶 p-拉普拉斯算子的积分表示中的奇异部分，其行为类似于带有权重修正的局部 p-拉普拉斯算子。这与 [19, 1] 中提出的思想有关。

文献中已经研究了其他非线性分数阶算子的渐近展开，例如 [4, 10, 25]。

本文的第二部分讨论分数阶 p-拉普拉斯算子的有限差分近似。在局部情形下， Δ_p^{N} 的单调离散化最早由 Oberman 在 [29] 中提出。此后又提出了其他离散化方法（例如参见 [7, 15]）。 $p=\infty$ 情形也已得到研究（例如参见 [28, 5, 26]）。对于 Δ_p，目前唯一已知的有限差分离散由 del Teso 和 Lindgren 在 [12] 中给出（但未给出关于收敛阶的结果）。本文的结果同样适用于这一情形，并给出了收敛阶。

在非局部情形下，本文的结果是针对分数阶 p-拉普拉斯算子的首个有限差分离散化。其他研究提出了分数阶 p-拉普拉斯算子的离散版本（例如参见 [21, 20]），然而，目前尚无与定理 2.6 类似的相容性结果。

当 $p=2$ 时，分数阶框架已在文献中得到广泛研究。Huang 和 Oberman 在 $d=1$ 维中成功建立了一个简化的线性版本，并在 [17]（见 [8]，关于更高维数）中获得了阶数 $O(h^{4-2s})$。Ciaurr 等人在 $d=1$ 维的 [6], 中提出了另一种离散化 $O(h^{2-2s})$，并在 $d=1$维中证明了阶数为 [8] 的收敛。该思想在 O中得到重新研究，在 h^2（ $s\in 0，1$）上无条件地且在任意维数下获得了阶数

在本文的最后一部分，我们利用此前引入的离散化，为抛物型方程提出一种显式数值格式 n

$$\partial_t u+(-\Delta)_p^s u=f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d\times(0,T) \tag{1.2}$$

。特别地，我们证明，对于具有一定 a-H¨lder 正则性的初始条件，该格式在形如以下的稳定性条件下是收敛的

$$h=O(r), \quad \text{and} \quad \tau \lesssim \begin{cases} r^{2s+(s-a)(p-2)} & \text{if} \quad a<\dfrac{sp}{p-1} \\ \dfrac{r^a}{|\log(r)|} & \text{if} \quad a\geq \dfrac{sp}{p-1}, \end{cases}$$

其中 h 和 τ 分别是空间和时间离散化的网格参数。该结果与 $p=2$ 和 $s\in$ （0，1） （例如见 [16, 9]）的结果一致，也与局部情形中针对 $p>2$的问题相符；后者最近由 del Teso 和 Lindgren 在 [14]中提出。问题（1.2）此前已有研究（参见[1, 30, 31, 32]）。关于与分数阶p-Laplacian 相关的 PDE 问题的数值方法，现有文献十分有限。据我们所知，唯一已知的结果是 Borthagaray、Li 和 Nochetto 最近的工作 [3]，其中在有限元框架下处理了 Dirichlet 问题。在该工作中，问题的离散版本用某些插值基函数关于奇异积分的积分表示（通常即使在 $d=1$ 维中也无法显式计算，并且出于计算上的原因需要使用求积公式）。我们方法的主要优势在于，离散化的权重是显式的，无需额外的近似步骤即可直接使用。

记号。 对于 $\rho>0$，我们定义

$$B_\rho(x):=\{y\in\mathbb{R}^d:\,|x-y|<\rho\}, \quad B_\rho:=B_\rho(0).$$

常数 ω_d 表示 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 1 的球的体积。给定开集 Ω $\subset\mathbb{R}^d$，我们考虑

$$C_b^k(\Omega):=\{\phi\in C^k(\Omega):\,|D^\kappa\phi|\in L^\infty(\overline{\Omega}) \text{ for all multiindex } \kappa, |\kappa|=0,1,\dots,k\},$$

配备范数

$$\|\phi\|_{C_b^k(\Omega)}:=\sum_{|\kappa|=0}^{k}\|D^\kappa\phi\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

给定函数 f 和 g，我们回顾一下，若存在 $C>0$ 使得对于所有 x， $f=O(g)$ $|f(x)|\le C|g(x)|$ 。此外，$f=o_g(1)$ 当 $x\to x_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=0.$$

我们称 $f\asymp g$，如果存在常数 C_1， $C_2>0$ 使得

$$C_1 g\le f\le C_2 g.$$

对于 $p>1$,

$$J_p(\xi):=|\xi|^{p-2}\xi,\quad p>1.$$

最后， C 表示一个通用常数，它可能随行而变化。在适用时，我们会添加下标以说明某些参数对哪些量的依赖。

2. Main results

本节介绍文章的主要贡献。

2.1. 渐近展开。 设 $s\in(0,1)$ 且 $p>1$。我们提出如下分数阶 p-拉普拉斯算子的渐近展开：

$$\mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](x):=\frac{(p+d)}{p(1-s)r^{d+sp}}\int_{B_r}J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\,\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r}J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}. \tag{2.1}$$

我们还回顾 p-拉普拉斯算子的两个渐近展开（情形 $s=1$），由 [12] 引入：

$$\mathcal{M}_{r,1}^{p}[\phi](x):=\frac{\kappa_{p,d}}{r^p}\fint_{\partial B_r}J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\,\mathrm{d}\sigma(y),\quad \mathcal{M}_{r,2}^{p}[\phi](x):=\frac{(p+d)\kappa_{p,d}}{d\,r^p}\fint_{B_r}J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\,\mathrm{d}y, \tag{2.2}$$

其中

$$\kappa_{p,d}:=2\left(\fint_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)\right)^{-1}.$$

我们给出两个结果。第一个结果证明了前述展开（局部和非局部）在空间中每一点处的局部一致收敛性，其收敛阶与量

$$\gamma:=\begin{cases}2 & \text{if } p=2 \text{ or } p\ge 4\\ p-2 & \text{if } p\in(2,4).\end{cases} \tag{2.3}$$

结果如下：

定理 2.1。 设 $p\ge 2$ 且 $s\in(0,1)$。设 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $0<R<1$ 满足 $\phi\in C_b^4(B_R(x))$。那么，对于 $r<R/2$ 以及任意满足 γ (2.3) 的

$$\Delta_p\phi=\mathcal{M}_{r,i}^{p}[\phi]+O(r^{\gamma})\quad \textit{uniformly in}\quad B_{R/2}(x)\quad \textit{for}\quad i=1,2. \tag{2.4}$$

如果进一步有 $\phi\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，则

$$-(-\Delta)_p^s\phi=\mathcal{M}_{r}^{s,p}[\phi]+O(r^{\gamma+p(1-s)})\quad \textit{uniformly in}\quad B_{R/2}(x). \tag{2.5}$$

注记 2.2。 定理 2.1 中的结果是最优的。在 $p\in(2,4)$ 的范围内，例如取 $\phi:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$由下式给出 $\phi(x):=\min\{x^2,1\}$(使得 $\nabla\phi(0)=0$)。对于 $s\in(0,1)$，根据标准结果可得

$$|-(-\Delta)_p^s\phi(0)-\mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](0)|=C_{s,p}r^{p-2+p(1-s)}\quad\text{with}\quad C_{s,p}\neq 0\quad\text{if}\quad p>2,$$

并且对于 $j=1,2$,

$$|\Delta_p\phi(0)-\mathcal{M}_{r,i}^{p}[\phi](0)|=C_{p,j}r^{p-2}\quad\text{with}\quad C_{p,j}\neq 0\quad\text{if}\quad p>2.$$

对于 $p\ge 4$，我们考虑 $\varphi(x):=\min\{e^x,2\}$ 并直接计算

$$|\Delta_p\varphi(0)-\mathcal{M}_{r,i}^{p}[\varphi](0)|=C_p r^2+O(r^3)\quad\text{with}\quad C_p\neq 0,$$

并且可以利用泰勒展开看出，当 r 足够小时

$$|-(-\Delta)_p^s\varphi(0)-\mathcal{M}_r^{s,p}[\varphi](0)|=C_{s,p}r^{2+p(1-s)}+O(r^{3+p(1-s)})\quad\text{with}\quad C_{s,p}\neq 0.$$

根据上面的第二个例子，可以合理预期，在远离梯度消失点的范围$p \in (1, 4)$内，收敛性会更好。实际上，如果我们考虑

$$\gamma \in \begin{cases} \{2\} & \text{if } p = 2 \text{ or } p \geq 3, \\ (1, p-1) & \text{if } p \in (2, 3), \\ (0, p-1) & \text{if } p \in (1, 2), \end{cases} \tag{2.6}$$

我们可以证明第二个结果，该结果还涵盖奇异范围 $p \in (1, 2)$。这里给出维数为 $d \geq 2$ 时的结果，因为在维数为 $d = 1$ 时我们可以得到更好的估计。

定理 2.3。设 $d \geq 2$、$p > 1$ 和 $s \in (0, 1)$。设 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$，满足 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，且 $\nabla\phi \neq 0$ 属于 $\overline{B_R(x)}$。考虑

$$R_0 := \frac{\inf_{B_R(x)} |\nabla\phi|}{\sqrt{2}\|D^2\phi\|_{L^\infty(B_R(x))}}. \tag{2.7}$$

˜那么，对于 $r < R :=$ 最小值$\{R_0, R/2\}$ 以及任意满足 (2.6) 的 γ，我们有

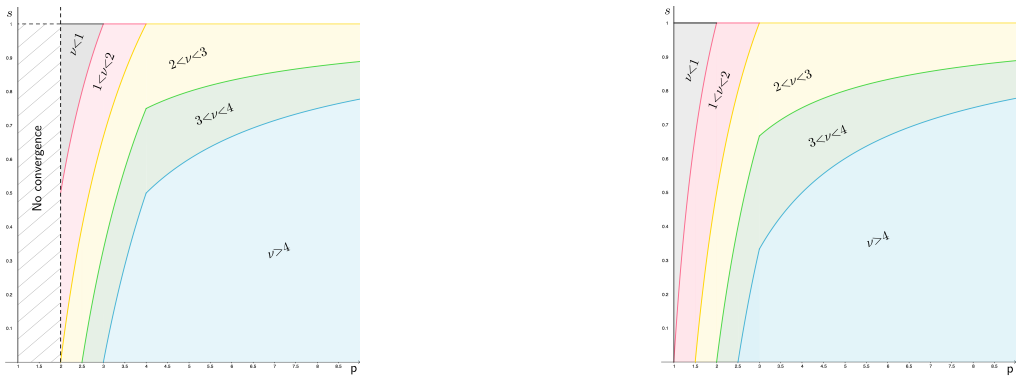
$$\Delta_p\phi = \mathcal{M}_{r,i}^p[\phi] + O(r^\gamma) \quad \textit{uniformly in} \quad B_{\tilde{R}/2}(x) \quad \textit{for} \quad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

如果另外还有 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$，那么

$$-(-\Delta)_p^s\phi = \mathcal{M}_r^{s,p}[\phi] + O(r^{\gamma + p(1-s)}) \quad \textit{uniformly in} \quad B_{\tilde{R}/2}(x). \tag{2.9}$$

注记 2.4。注记 2.2 中的第二个例子对每个 $p \geq 3$ 都成立。由于在该情形下 $\nabla\varphi(0) \neq 0$，因此它还证明了定理 2.3 在 $p \geq 3$ 情形下的最优性。一个有趣的开放问题是，在 $p \in (1, 3)$ 情形下，最优误差是多少。实际上，在维数为 $d = 1$ 时，我们能够证明最优阶（见定理 2.5）。

值得注意的是，随着 p 的变化，我们渐近展开的收敛阶会提高，达到超二次阶甚至更高。我们还观察到，当 $s \to 1^-$ 时，这些收敛阶并不会退化。图 1 展示了整个范围 $s \in (0, 1]$ 和 $p > 1$。



(A) 收敛速率 $\nu = \gamma + p(1-s)$ 根据定理 2.1。

(B) 收敛速率 $\nu = \gamma + p(1-s)$ 根据定理 2.3。

FIGURE 1. 关于 $-(-\Delta)_p^s$ 和 Δ_p 的渐近展开的收敛阶。

最后，我们给出维数 $d = 1$下的结果；根据注记 2.2，此时我们达到了最优收敛阶。值得指出的是，在这种情形下，p-拉普拉斯算子的第一个渐近展开为

$$\mathcal{M}_{r,1}^p[\phi](x) = \frac{J_p(\phi(x+r) - \phi(x)) + J_p(\phi(x-r) - \phi(x))}{r^p}. \tag{2.10}$$

这本身就是 p-拉普拉斯算子的有限差分离散。维数$d=1$ 下的相容性结果如下:

T定理 2.5。 设 $d=1$ 以及定理 *2.3* 中的相同假设和记号 n

$$\Delta_p\phi = \mathcal{M}^p_{r,i}[\phi] + O(r^2) \quad \textit{uniformly in} \quad B_{R/2}(x) \quad \textit{for} \quad i=1,2, \tag{2.11}$$

and

$$-(-\Delta)^s_p\phi = \mathcal{M}^{s,p}_r[\phi] + O(r^{2+p(1-s)}) \quad \textit{uniformly in} \quad B_{R/2}(x).$$

2.2. **离散化**。 文章的第二部分讨论 $\mathcal{M}^{s}、_r{}^{p}$的两种离散化，由此将得到分数阶 p-拉普拉斯算子的离散化。给定 $h>0$，考虑均匀网格 $\mathcal{G}_h := h\mathbb{Z}^d = \{y^h_\alpha := h\alpha : \alpha\in\mathbb{Z}^d\}$以及立方体

$$Q^h_\alpha := y^h_\alpha + \frac{h}{2}[-1,1)^d.$$

为简便起见，我们将省略对 h 的依赖，并记作 y_α 和 Q_α。给定 $r>0$，对于 $i=1$，2，我们定义离散算子:

$$-(-\Delta)^{s,h}_{p,i}\phi(x) := \frac{(p+d)}{p(1-s)}\frac{h^d}{r^{d+sp}}\sum_{y_\alpha\in B_r} J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)) + \sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_r} J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x))W_{\alpha,i}, \tag{2.12}$$

其中

$$W_{\alpha,1} := \int_{Q_\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}, \qquad W_{\alpha,2} := \frac{h^d}{|y_\alpha|^{d+sp}}. \tag{2.13}$$

定理 2.6。 设定理 *2.1*、定理 *2.3* 或定理 *2.5*中的假设成立，并设$h>0$。则存在 $\mu\in$ $(0,1]$，使得对于 r 出现在 （2.12）并满足 $r\asymp h^\mu$, 的情形，我们有

$$(-\Delta)^{s,h}_{p,i}\phi = (-\Delta)^s_p\phi + o_h(1) \quad \textit{as } h\to 0^+, \quad i=1,2,$$

关于 $B_{\tilde{R}/2}(x)$一致。

事实上，我们在上述定理中根据 r 和 h 得到了精确的误差估计，在最佳情形下可达到 $O(h)$ 阶。为使表述简洁，我们将在第4.1小节中陈述这些结果。

定理 $p=2$ 中的情形 2.6 无需涉及渐近展开的中间步骤，因为局部拉普拉斯算子的离散化本身已达到 $O(h^2)$ 阶。这使得分数阶拉普拉斯算子的离散化达到 $O(h^{2+2(1-s)})$ 阶（见 [17, 8]）。

2.3. **应用：用于分数阶柯西问题的显式有限差分格式**。 论文的第三部分旨在应用定理2.6，通过有限差分数值格式的收敛性求解以下抛物型分数阶问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (-\Delta)^s_p u(x,t) = f(x), & (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T) =: Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $T>0$ 和 f， u_0：$\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$。我们对数据作如下假设

$(\mathrm{A}_{u_0,f})$ u_0 和 f 有界，并且在全局上具有指数为 $a\in$ 的H¨older连续性 $(0,1]$。

我们将记作

$$\Lambda_{u_0}(\delta) := L_{u_0}\delta^a \text{ and } \Lambda_f(\delta) := L_f\delta^a$$

其中 L_{u_0}:=的最大值$\{l_{u_0}, \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\}>0$，且 L_f:=的最大值$\{l_f, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\}>0$，其中 l_{u_0}和 l_f分别是 u_0 和 f 的 H¨older 常数。

现在引入权重 $\omega_\alpha = \omega_\alpha(h, r)$，用于 $\alpha \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ 并与我们的离散化相关（2.12）。更准确地说，令

$$\omega_\alpha := \begin{cases} \dfrac{(p+d)}{p(1-s)} \dfrac{h^d}{r^{d+sp}} & \text{if} \quad |y_\alpha| < |r| \\ W_{\alpha,i} & \text{if} \quad |y_\alpha| \geq |r|, \quad \text{for either } i = 1 \text{ or } i = 2. \end{cases} \tag{A_ω}$$

其中 $W_{\alpha,\, i}$ 定义于（2.13）中。最后，我们采用如下记号

$$\mathcal{L}_h \phi(x) := \sum_{\alpha \neq 0} J_p(\phi(x + y_\alpha) - \phi(x)) \omega_\alpha. \tag{2.15}$$

这正是 $-(-\Delta)^{\,s\,h}_{\,p\,i}$，，在（2.12）中给出，适用于 $i = 1$ 或 $i = 2$。

我们将 lso introduce a discretization in time whose mes h 参数 ter i量 $\tau = T/N$, w与 $N \in \mathbb{N}$. T

时间网格记为 $\mathcal{T}_\tau := \{t_j := \tau j\}_{j=0}^N$。

我们对离散参数作如下稳定性型假设:

$$h = O(r), \quad \text{and} \quad \tau \leq K_{s,p,d} \times \begin{cases} r^{2s+(s-a)(p-2)} & \text{if} \quad a < \dfrac{sp}{p-1} \\ \dfrac{r^a}{|\log(r)|} & \text{if} \quad a \geq \dfrac{sp}{p-1} \end{cases} \tag{A_{CFL}}$$

其中

$$K_{s,p,d} := \frac{1}{(p-1)2^p C_{s,p,d} \left(L_{u_0} + T L_f + 3\tilde{K}_2 + 1 \right)^{p-2}}, \tag{2.16}$$

˜其中 $C_{s,\, p,\, d}$ 以及 K_2 分别来自引理 5.1和引理5.5。

注记 2.7。 注意，对于 $a = s$，CFL 条件为 $\tau \lesssim r^{2s}$，这恢复了线性非局部方程的通常稳定性条件（参见 [8]）

与（2.14）对应的有限差分格式定义如下:

$$\begin{cases} U_\alpha^j = U_\alpha^{j-1} + \tau \left(\mathcal{L}_h U_\alpha^{j-1} + f_\alpha \right), & \alpha \in \mathbb{Z}^d, j = 1, ..., N \\ U_\alpha^0 = (u_0)_\alpha, & \alpha \in \mathbb{Z}^d, \end{cases} \tag{2.17}$$

其中 $U_\alpha^j = U(x_\alpha,\ t_j)$，其中 $U\colon\ \mathcal{G}_h \times \mathcal{T}_\tau \to \mathbb{R}$，并且 $(u_0)_\alpha \colon = u_0(x_\alpha)$ $f_\alpha \colon = f(x_\alpha)$。于是，我们有如下结果。

定理 2.8. 设 $p \in (2, \infty)$ 且 $s \in (0, 1)$。假设 (A_ω)、$(A_{u_0, f})$ 和 (A_{CFL}) 成立，并设 U 为（2.17）的解。那么，对于所有序列 $h, \tau \to 0^+$，存在子序列 h_k, τ_k 以及函数 $u \in C_b(Q_T)$，使得对于任意紧集 $K \in Q_T$，我们有

$$\max_{(x_\alpha, t_j) \in K \cap (\mathcal{G}_{h_k} \times \mathcal{T}_{\tau_k})} |U_\alpha^j - u(x_\alpha, t_j)| \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

此外， u 是问题(2.14)的一个黏性解。

关于黏性解的概念，更多详情请参见定义5.1 。关于该数值格式的其他结果将在第5节陈述并证明。特别是，定理2.8 证明了（2.14）的黏性解存在。

3. Asymptotic expansion and orders in the MVP

本节的目标是证明定理2.1、定理2.3 和定理2.5。令 $\phi\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 且 $y \in \mathbb{R}^d$， $y \neq 0$。对于 $p > 1$，定义

$$D_y[\phi](x) := \frac{J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x-y) - \phi(x))}{|y|^p} \tag{3.1}$$

其中 J_p： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 由 $J_p(\xi)$: $=|\xi|^{p-2}\xi$ 给出。策略如下（略去所有常数和近似误差）：

步骤 1. 使用非线性有限差分型算子 (3.1) 得到如下形式的近似

$$|y|^p D_y[\phi](x)\approx|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y.$$

步骤 2. 对该表达式关于分数阶测度积分，得到局部 p-拉普拉斯算子 an

$$\int_{B_r} D_y[\phi](x)\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}}\approx\int_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\approx\Delta_p\phi(x)r^{p(1-s)}.$$

步骤 3. 以类似的方式，

$$\mathcal{M}^p_{r,j}[\phi](x)\approx\frac{1}{r^p}⨍_{B_r} D_y[\phi](x)\,\mathrm{d}y\approx\Delta_p\phi(x).$$

步骤 4. 结合这些信息可得

$$\begin{aligned}-(-\Delta)^s_p\phi(x)&\approx\frac12\int_{B_r} D_y[\phi](x)\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}}+\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\\&\approx\mathcal{M}^p_{r,2}[\phi](x)r^{p(1-s)}+\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\approx\mathcal{M}^{s,p}_r[\phi](x).\end{aligned}$$

由此得到渐近展开，以及定理 p 中给出的分数 2.1-拉普拉斯算子的结果，见定理2.3 和定理2.5。

根据 p 的范围，这些步骤可能较为复杂，也可能相对简单。在 $p\geq 4$ 的情形下，步骤 1 可统一地得到，积分也可直接完成；而在其他情形下，则需要更精细的论证来处理梯度消失的点。为了证明步骤 1–3，我们针对 p 的每个范围分别设置一个小节，并在本节末尾完成步骤 4。 $d=1$ 的情形单独处理。

我们先给出两个辅助结果，以便完成步骤 2 和步骤 3。

引理 3.1。设 $\alpha>-1$、 $d\geq 2$ 和 $\nabla\phi(x)\neq 0$。考虑 $\phi\in C^1_b(B_R(x))$，其中 $x\in\mathbb{R}^d$ 且 $0<r<R<1$。则

$$P.V.⨍_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^\alpha dy\leq\gamma_{d,\alpha}|\nabla\phi(x)|^\alpha,\tag{3.2}$$

并且，对于 $p\in(1,\infty)$ 和 $s\in(0,1)$，我们有

$$P.V.\int_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^\alpha\frac{dy}{|y|^{d-(1-s)p}}\leq\gamma_{s,p,d,\alpha}|\nabla\phi(x)|^\alpha r^{(1-s)p}.$$

证明。A 假设 $\nabla\phi(x)=ce_1$，其中 $c\neq 0$，因此， $|\nabla\phi(x)|=c$。改用极坐标 s:

$$\begin{aligned}I_1:=&⨍_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^\alpha dy=\frac{|c|^\alpha}{\omega_d r^d}\int_{B_r}\frac{|y_1|^\alpha}{|y|^\alpha}dy=\frac{|c|^\alpha}{\omega_d r^d}\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{|\rho\cos(\theta)|^\alpha}{\rho^\alpha}\rho^{d-1}\pi^{d-2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\=&\frac{2\pi^{d-2}|c|^\alpha}{d\omega_d}\int_0^\pi|\cos(\theta)|^\alpha\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

现在令 $\tau=\cos(\theta)$，即 $\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}\tau/\sqrt{1-\tau^2}$，我们得到

$$I_1\leq\frac{2\pi^{d-2}|c|^\alpha}{d\omega_d}\int_0^1\frac{\tau^\alpha}{\sqrt{1-\tau^2}}\,\mathrm{d}\tau\leq\gamma_{d,\alpha}|c|^\alpha$$

以类似的方式，

$$\begin{aligned}I_2:=&\int_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^\alpha\frac{dy}{|y|^{d-(1-s)p}}=|c|^\alpha\int_{B_r}\frac{|y_1|^\alpha}{|y|^{\alpha+d-(1-s)p}}dy\\=&|c|^\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{|\rho\cos(\theta)|^\alpha}{\rho^{\alpha+d-(1-s)p}}\rho^{d-1}\pi^{d-2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\leq\gamma_{s,p,d,\alpha}|c|^\alpha r^{(1-s)p}.\end{aligned}$$

□

引理 3.2。设 $p\in(1,\infty)$、$d\geq 1$和 $s\in(0,1)$。考虑 $\phi\in C_b^2(B_R(x))$，其中存在某些 $x\in\mathbb{R}^d$ 和 $0<R<1$，且满足：当 $p\in(1,2)$ 时，$\nabla\phi(x)\neq 0$。那么，

$$a_{s,p,d}\,P.V.\int_B (p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}=\Delta_p\phi(x)r^{p(1-s)}. \tag{3.3}$$

其中 $a_{s,\ p,\ d}:=\left(\frac{1}{p}\right)^{(1-s)}\int_{\partial B_1}|y_1|^p\mathrm{d}\sigma(y))^{-1}$. 我们还有

$$\begin{aligned} a_{p,d}\fint_{\partial B_r}(p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\mathrm{d}\sigma(y)&=\Delta_p\phi(x)r^p,\\ \frac{(p+d)a_{p,d}}{d}\fint_{B_r}(p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\mathrm{d}y&=\Delta_p\phi(x)r^p, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $a_{p,\ d}:=\left(\fint_{\partial B_1}|y_1|^p\mathrm{d}\sigma(y)\right)^{-1}$。

证明。暂令 $d\geq 2$。若 $p>2$ 且 $\nabla\phi(x)=0$，则该恒等式显然成立，因为（3.3）两边均为零，因此我们考虑情形 $\nabla\phi(x)\neq 0$。不妨设 $\nabla\phi(x)=ce_1$ 对某个$c>0$成立。于是，当 $0<\varepsilon<r$,

$$\begin{aligned} &\int_{B_r\setminus B_\varepsilon}(p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\\ &\qquad=c^{p-2}\int_\varepsilon^r\rho^{-d-sp}(p-1)\int_{\partial B_\rho}|y_1|^{p-2}\left(\sum_{i=1}^d y_i^2D_{ii}\phi(x)\right)\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

此外,

$$(p-1)\int_{\partial B_\rho}|y_1|^{p-2}y_i^2\,\mathrm{d}\sigma(y)=\int_{\partial B_\rho}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)=\rho^{d+p-1}\int_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)\quad\text{for all}\quad i=2,\dots,d,$$

and

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\rho}|y_1|^{p-2}\left(\sum_{i=1}^d y_i^2D_{ii}\phi(x)\right)\mathrm{d}\sigma(y)&=D_{11}\phi(x)\int_{\partial B_\rho}|y_1|^p\sigma(y)+\sum_{i=2}^d D_{ii}\phi(x)\int_{\partial B_\rho}|y_1|^{p-2}y_i^2\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &=\left(D_{11}\phi(x)+\frac{1}{p-1}\sum_{i=2}^d D_{ii}\phi(x)\right)\rho^{d+p-1}\int_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)\\ &=\frac{\rho^{d+p-1}}{p-1}\left(\sum_{i=1}^d D_{ii}\phi(x)+(p-2)D_{11}\phi(x)\right)\int_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y). \end{aligned}$$

最后，我们注意到

$$c^{p-2}\left(\sum_{i=1}^d D_{ii}\phi(x)+(p-2)D_{11}\phi(x)\right)=\Delta_p\phi(x),$$

以获得

$$\begin{aligned} \int_{B_r\setminus B_\varepsilon}(p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}&=\Delta_p\phi(x)\int_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)\int_\varepsilon^r\rho^{-1+p(1-s)}\,\mathrm{d}\rho\\ &=a_{d,p,s}^{-1}\Delta_p\phi(x)r^{p(1-s)}+o_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon\to 0$，我们得到（3.3）。

同理，

$$\begin{aligned}\fint_{B_r}(p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\mathrm{d}y &= \frac{c^{p-2}}{\omega_d r^d}\int_0^r(p-1)\int_{\partial B_\rho}|y_1|^{p-2}\left(\sum_{i=1}^d y_i^2D_{ii}\phi(x)\right)\mathrm{d}\sigma(y)\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{1}{\omega_d r^d}\Delta_p\phi(x)\int_{\partial B_1}|y_1|^p\,\mathrm{d}\sigma(y)\int_0^r\rho^{d+p-1}\,\mathrm{d}\rho\\ &= r^p\frac{d}{p+d}a_{p,d}^{-1}\Delta_p\phi(x).\end{aligned}$$

上述计算在维数为 $d=1$ 时也成立，而且推导更为简单。 □

3.1. 情形 $p\geq 4$。 为证明步骤 1，我们先对 J_p进行三阶泰勒展开；在这种情形下，可以避免出现奇异项。

引理 3.3。 设 $p\geq 4$。考虑某个函数 $\phi\in C_b^4(B_R(x))$，其中 $x\in\mathbb{R}^d$ 且 $0<R<1$。那么，对于任意 $y\in B_{\frac{R}{2}}(0)\setminus\{0\}$，有

$$|D_y[\phi](x)-\frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y|\leq C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})|y|^2.$$

证明。 通过四阶泰勒展开，我们可以写成

$$\phi(x\pm y)-\phi(x)=\underbrace{\pm\nabla\phi(x)\cdot y+\frac{1}{2}y^TD^2\phi(x)y\pm\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}D^\alpha\phi(x)y^\alpha}_{\phi_{13}^\pm(y)}+O(|y|^4)$$

因此

$$|y|^pD_y[\phi](x)=J_p(\phi_{13}^+(y)+O(|y|^4))+J_p(\phi_{13}^-(y)+O(|y|^4)). \tag{3.5}$$

此外，由于 $|\phi_{13}^\pm(y)|=O(|y|)$，

$$J_p(\phi_{13}^\pm(y)+O(|y|^4))=J_p(\phi_{13}^\pm(y))+J_p'(O(|y|))O(|y|^4)=J_p(\phi_{13}^\pm(y))+O(|y|^{p+2}), \tag{3.6}$$

因此，将（3.6）代入（3.5）可得

$$|y|^pD_y[\phi](x)=J_p(\phi_{13}^+(y))+J_p(\phi_{13}^-(y))+O(|y|^{p+2}). \tag{3.7}$$

记

$$\phi_{12}^\pm(y):=\pm\nabla\phi(x)\cdot y+\frac{1}{2}y^TD^2\phi(x)y.$$

进行二阶泰勒展开，可写为

$$\begin{aligned}J_p(\phi_{13}^\pm(y)) &= J_p(\phi_{12}^\pm(y))+J_p'(\phi_{12}^\pm(y))\left(\pm\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}D^\alpha\phi(x)y^\alpha\right)+\frac{1}{2}J_p''\Big(O(|y|)\Big)O(|y|^6)\\ &= J_p(\phi_{12}^\pm(y))+J_p'(\phi_{12}^\pm(y))\left(\pm\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}D^\alpha\phi(x)y^\alpha\right)+O(|y|^{p+3}).\end{aligned}$$

将其代入（3.7）可得

$$|y|^pD_y[\phi](x)=J_p(\phi_{12}^+(y))+J_p(\phi_{12}^-(y))+\frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3}D^\alpha\phi(x)y^\alpha\Big[J_p'(\phi_{12}^+(y))-J_p'(\phi_{12}^-(y))\Big]+O(|y|^{p+2}). \tag{3.8}$$

接下来，我们对 J_p' 进行一阶泰勒展开，得到

$$J_p'(\phi_{12}^+(y))-J_p'(\phi_{12}^-(y))=J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)-J_p'(-\nabla\phi(x)\cdot y)+O(|y|^{p-1})=O(|y|^{p-1}). \tag{3.9}$$

此外，由于 $p \geq 4$,

(3.10)

$$\begin{aligned} J_p(\phi_{12}^+(y)) + J_p(\phi_{12}^-(y)) &= J_p(\nabla\phi(x)\cdot y) + \frac{1}{2}J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)y^T D^2\phi(x)y + \frac{1}{8}J_p''(\nabla\phi(x)\cdot y)(y^T D^2\phi(x)y)^2 \\ &\quad + J_p(-\nabla\phi(x)\cdot y) + \frac{1}{2}J_p'(-\nabla\phi\cdot y)y^T D^2\phi(x)y + \frac{1}{8}J_p''(-\nabla\phi(x)\cdot y)(y^T D^2\phi(x)y)^2 + O(|y|^{p+2}) \\ &= J_p'(\nabla\phi\cdot y)y^T D^2\phi(x)y + O(|y|^{p+2}). \end{aligned}$$

由（3.8）、（3.9）和（3.10），我们得到

$$|y|^p D_y[\phi](x) = (p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y + O(|y|^{p+2}).$$

引理的证明到此结束。 □

请注意，在前面的证明中， $p \geq 4$ 这一事实对于估计泰勒展开中的余项至关重要。

定理 3.4. 设 $p \geq 4$ 和 $s \in (0,1)$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x_0))$，其中 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 且 $0 < R < 1$。那么，对于 $r < R/2$ 和 $x \in B_{R/2}(x_0)$，我们有

$$P.V.\int_{B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2a_{s,p,d}}\Delta_p\phi(x)r^{p(1-s)} + O(r^{2+p(1-s)}), \tag{3.11}$$

其中 $a_{s,p,d}$ 由引理 3.2 给出，并且

$$\mathcal{M}_{r,i}^p[\phi](x) = \Delta_p\phi(x) + O(r^2), \quad i \in \{1,2\}, \tag{3.12}$$

其中误差项关于 x 和 $\mathcal{M}_r^p$ 是一致的，i 由 (2.2) 给出。

证明。 注意，由（3.1）和引理 3.3,

$$\begin{aligned} P.V.\int_{B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} &= \frac{1}{2}P.V.\int_{B_r} D_y[\phi](x)\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}} \\ &= \frac{1}{2}(p-1)\int_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O\left(\int_{B_r}|y|^2\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(p-1)\int_{B_r}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O(r^{2+(1-s)p}). \end{aligned}$$

由引理 3.2 可得（3.11）。恒等式（3.12）也可通过对 B_r 关于测度 $\frac{\mathrm{d}y}{r^p|B_r|}$ 积分，或对 ∂B_r 关于 $\frac{\mathrm{d}\sigma(y)}{r^p|\partial B_r|}$ 积分，以类似方式得到。□

3.2. **情形** $p \in [3,4)$**.** 我们先像在范围 $p \geq 4$ 中那样进行泰勒展开。不过，这个论证只适用于 J_p''，因为幂 $p-4$ 为负，可能会出现奇异项。这给出了一致误差，但如下一条引理所示，在这种情形下误差并非二次误差。为了得到二次误差，我们需要避开零梯度点，而论证也会更加复杂（见引理3.6和定理 3.7）。

引理 3.5。 设 $p \in [3,4)$。考虑一个函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，其中某些 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$。那么，对于任意 $y \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}$，我们有

$$|D_y[\phi](x) - \frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y| \leq C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})|y|^{p-2}.$$

证明。 令我们定义

$$\phi_{23}^{\pm}(y) := \frac{1}{2}y^T D^2\phi(x)y \pm \frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3} D^\alpha\phi(x)y^\alpha, \tag{3.13}$$

并且，给定 $\theta_j \in (0,\ 1)$，

$$\Theta_j^{\pm}(y) := \theta_j(\pm\nabla\phi(x)\cdot y) + (1-\theta_j)\left(\pm\nabla\phi(x)\cdot y + \phi_{23}^{\pm}(y) + O(|y|^4)\right). \tag{3.14}$$

我们对 ϕ 在 x 附近作四阶泰勒展开，然后对 J_p 在 $\nabla\phi(x)\cdot y$ 处作二阶展开，得到

$$\begin{aligned}|y|^p D_y[\phi](x) = {} & J_p(\nabla\phi(x)\cdot y) + J_p(-\nabla\phi(x)\cdot y)\\ & + J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)\cdot(\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4)) + J_p'(-\nabla\phi(x)\cdot y)\cdot(\phi_{23}^{-}(y)+O(|y|^4))\\ & + \frac{1}{2}J_p''(\Theta_1^{+}(y))(\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4))^2 + \frac{1}{2}J_p''(\Theta_2^{-}(y))(\phi_{23}^{-}(y)+O(|y|^4))^2,\end{aligned}$$

对某个 $\theta_1,\ \theta_2 \in (0,\ 1)$。回想一下，$J_p$ 和 J_p' 分别是奇函数和偶函数，我们得到

$$\begin{aligned}|y|^p D_y[\phi](x) = {} & (p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y + O(|y|^{p+2})\\ & + \frac{1}{2}J_p''(\Theta_1^{+}(y))(\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4))^2 + \frac{1}{2}J_p''(\Theta_2^{-}(y))(\phi_{23}^{-}(y)+O(|y|^4))^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

在 (3.15) 中加上并减去以下项

$$\frac{1}{2}J_p''(\pm\nabla\phi(x)\cdot y)\cdot(\phi_{23}^{\pm}(y)+O(|y|^4))^2,$$

我们得到

(3.16)

$$\begin{aligned}|y|^p D_y[\phi](x) = {} & (p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y + O(|y|^{p+2})\\ & + \frac{1}{2}\left[J_p''(\Theta_1^{+}(y)) - J_p''(\nabla\phi(x)\cdot y)\right](\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4))^2 + \frac{1}{2}J_p''(\nabla\phi(x)\cdot y)(\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4))^2\\ & + \frac{1}{2}\left[J_p''(\Theta_2^{-}(y)) - J_p''(\nabla\phi(x)\cdot y)\right](\phi_{23}^{-}(y)+O(|y|^4))^2 + \frac{1}{2}J_p''(-\nabla\phi(x)\cdot y)(\phi_{23}^{-}(y)+O(|y|^4))^2.\end{aligned}$$

由 [2, 引理 2。4] 应用于 J_p'' 当 $p \in (3,\ 4)$，我们得到

$$\left[J_p''(\Theta_1^{+}(y)) - J_p''(\nabla\phi(x)\cdot y)\right](\phi_{23}^{+}(y)+O(|y|^4))^2 = O(|y|^{2(p-3)})\cdot O(|y|^4) = O(|y|^{2p-2}),$$

对于含有 Θ_2^{-} 的项，同理可得。最后，注意到 J_p'' 是奇函数，(3.16) 中其余项的阶为 $O(|y|^{p+3})$。综合所有估计即可得到结论。□

注意到，本引理得到的阶为 $p-2$，当 $p \in [3,4)$ 时并非二次阶。不过，我们可以在某个区域内改进论证（见下一个引理），从而得到二次误差；这足以使补集部分上的积分保持二次阶（见定理 3.7）。

引理 3.6。 设 $p \in [3,4)$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$ 为某些参数，并设 $K_0 := \|D^2\phi\|_{L^\infty(B_R(x))}$。那么，对于区域 $|\nabla\phi(x)\cdot y| > K_0|y|^2$ 中的任意 $y \in B_{\frac{R}{2}}(0)\setminus\{0\}$，有

$$|D_y[\phi](x) - \frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y| \le C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})\Phi\left(\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}\right)|y|^2,$$

其中 $\Phi(\eta) := 1 + (p-3)|\eta|^{p-4}$。

证明。 设 $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，满足 $f(y) \neq 0$ 对 $y \neq 0$ 成立，且 $|g(y)/f(y)| < \frac{1}{2}$。则 –

$$
\begin{aligned}
J_p(f(y)+g(y)) &= J_p(f(y))J_p\left(1+\frac{g(y)}{f(y)}\right)\\
&= J_p(f(y))\left(J_p(1)+J_p'(1)\frac{g(y)}{f(y)}+\frac{J_p''(1)}{2}\left(\frac{g(y)}{f(y)}\right)^2+\frac{J_p'''(\eta)}{3!}\left(\frac{g(y)}{f(y)}\right)^3\right)\\
&= J_p(f(y))+(p-1)|f(y)|^{p-2}g(y)+\frac{(p-1)(p-2)}{2}|f(y)|^{p-2}\frac{g(y)^2}{f(y)}+\frac{J_p'''(\eta)}{3!}|f(y)|^{p-2}\frac{g(y)^3}{f(y)^2}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

其中 $\eta \in B_{\frac{g(y)}{f(y)}}(1) \subset B_{\frac{1}{2}}(1)$，也就是说，$1/2 \le |\eta| \le 1$。现在我们考虑

$$
\phi_1(y) := \nabla\phi(x)\cdot y \quad \text{and} \quad \phi_{24}^{\pm}(y) := \frac{1}{2}y^T D^2\phi(x)y \pm \frac{1}{3!}\sum_{|\alpha|=3} D^\alpha\phi(x)y^\alpha + O(|y|^4).
\tag{3.18}
$$

直接对 $\phi(x \pm y) - \phi(x)$ 应用中值定理，我们得到如下界

$$
|\phi_{24}^{\pm}(y)| \le \frac{1}{2}\|D^2\phi\|_{L^\infty(B_R(x))}|y|^2,
$$

因此，如果 y 属于区域 $|\nabla\phi(x)\cdot y| > K_0|y|^2$，那么

$$
\left|\frac{\phi_{24}^{\pm}(y)}{\phi_1(y)}\right| < \frac{1}{2}.
$$

现在我们使用 $D_y[\phi]$的定义以及（3.17）得到

$$
\begin{aligned}
|y|^p D_y[\phi](x) &= J_p(\phi_1(y)+\phi_{24}^+(y)) + J_p(-\phi_1(y)+\phi_{24}^-(y))\\
&= \underbrace{J_p(\phi_1(y)) + J_p(-\phi_1(y))}_{I_1} + \underbrace{(p-1)|\phi_1(y)|^{p-2}(\phi_{24}^+(y)+\phi_{24}^-(y))}_{I_2}\\
&\quad + \underbrace{\frac{(p-1)(p-2)}{2}|\phi_1(y)|^{p-2}\left(\frac{\phi_{24}^+(y)^2}{\phi_1(y)} - \frac{\phi_{24}^-(y)^2}{\phi_1(y)}\right)}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{3!}|\phi_1(y)|^{p-2}\left(J_p'''(\eta_1)\frac{\phi_{24}^+(y)^3}{\phi_1(y)^2} + J_p'''(\eta_2)\frac{\phi_{24}^-(y)^3}{\phi_1(y)^2}\right)}_{I_4}.
\end{aligned}
$$

由 J_p 的反对称性，我们有 $I_1 = 0$。另一方面，

$$
|I_2 - (p-1)|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y| \le C|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}|y|^4 \le C(p, \|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})|y|^{p+2}.
$$

现在我们估计 I_3。首先，注意到

$$
\begin{aligned}
|\phi_{24}^+(y)^2 - \phi_{24}^-(y)^2| &= |(\phi_{24}^+(y)+\phi_{24}^-(y))(\phi_{24}^+(y)-\phi_{24}^-(y))| \le (|y^T D^2\phi(x)y| + O(|y|^4))(O(|y|^3)+O(|y|^4))\\
&\le C|y|^5,
\end{aligned}
$$

其中我们用到了 $|y| \le 1/2$。于是

$$
|I_3| \le \frac{(p-1)(p-2)}{2}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-3}|y|^{p-3}|\phi_{24}^+(y)^2 - \phi_{24}^-(y)^2| \le C(p, \|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})|y|^{p+2}.
$$

最后，

$$
|I_4| \le C(p-3)|y|^{p-4}|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-4}||y|^2 + |y|^3 + |y|^4|^3 \le C(p-3)|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-4}|y|^{p+2}.
$$

□

结合引理 3.5 和引理 3.6 可知，在远离梯度为零的点处，误差具有二次阶。

定理 3.7。设 $p \in [3,4)$ 和 $s \in (0,1)$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x_0))$，其中 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$，且 $\nabla\phi \neq 0$ 属于 $B_R(x_0)$。设 R_0 定义于 (2.7) 中。那么，对于 $r < \min\{R_0, R/2\}$ 和 $x \in B_{R/2}(x_0)$，有

$$P.V. \int_{B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x)) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2a_{s,p,d}} \Delta_p \phi(x) r^{p(1-s)} + O(r^{2+p(1-s)}) \tag{3.19}$$

其中$a_{s,p,d}$ 见引理 3.2 以及

$$\mathcal{M}_{r,i}^p[\phi](x) = \Delta_p \phi(x) + O(r^2), \quad i \in \{1,2\}, \tag{3.20}$$

其中误差项关于 x 和 $\mathcal{M}_{r,i}^p$ 由 (2.2)给出。

证明。 令 $K_0 := \|D^2\phi\|_{L^\infty(B_R(x))}$。考虑区域

$$\Omega := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : |\nabla\phi(x)\cdot y| > K_0 |y|^2 \right\},$$

并定义

$$\begin{aligned} I_1 &:= P.V. \int_{B_r\cap\Omega} J_p(\phi(x+y)-\phi(x)) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2} P.V. \int_{B_r\cap\Omega} D_y[\phi](x) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-p(1-s)}}, \\ I_2 &:= P.V. \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} J_p(\phi(x+y)-\phi(x)) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2} P.V. \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} D_y[\phi](x) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-p(1-s)}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

根据引理 3.6和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r\cap\Omega} |\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \\ &\quad + r^2 O\left(\int_{B_r\cap\Omega} \left(|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-2} + |\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-3} + (p-3)|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-4} \right) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r\cap\Omega} |\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O(r^{2+(1-s)p}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

根据引理3.5，我们可以估计 I_2 为

$$I_2 = \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} |\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O\left(r^{p-2} \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}} \right). \tag{3.23}$$

不失一般性，我们可以假设 $\nabla\phi(x) = |\nabla\phi(x)|e_1$。因此，要求 $y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ 等价于要求 $|y_1| \le \frac{K_0}{|\nabla\phi(x)|}|y|^2$，其中 y_1 表示 y的第一坐标。利用标准极坐标，可将其改写为 $|\cos\theta| < \frac{K}{|\nabla\phi(x)|} r$，因此

$$\begin{aligned} \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}} &= \pi^{d-2} \int_0^r \int_{\arccos(\frac{K}{|\nabla\phi(x)|}\rho)}^{\pi-\arccos(\frac{K}{|\nabla\phi(x)|}\rho)} \frac{\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho}{\rho^{1-(1-s)p}} \\ &= \pi^{d-2} \int_0^r \left(\pi - 2\arccos\left(\frac{K_0}{|\nabla\phi(x)|}\rho \right) \right) \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{1-(1-s)p}}. \end{aligned}$$

取 $r < R_0$，可以看出

$$\left| \pi - 2\arccos\left(\frac{K_0}{|\nabla\phi(x)|}\rho \right) \right| \le 4\frac{K_0}{|\nabla\phi(x)|}\rho,$$

因此

$$\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d-(1-s)p}} = O\left(\int_0^r \rho^{(1-s)p}\,\mathrm{d}\rho \right) = O(r^{1+(1-s)p}).$$

代入（3.23）可得

$$I_2 = \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} |\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O(r^{p-1+(1-s)p}).$$

利用该估计式、（3.22）和引理 3.2 可得到（3.19）。以类似方式可得到（3.20）。 □

3.3. 情形 $p \in (2,3)$。与前一种情形一样，无论梯度取何值，我们都可以得到阶为 $p-2$ 的一致误差。当梯度不为零时，我们像情形 $p \in (3,4)$ 中那样考虑两个区域，但这次得到的误差小于二次阶。这是由两个事实造成的： J_p''' 在零点附近是奇异的；而且补区域不够小。

引理 3.8。设 $p \in (2,3)$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$。那么，对任意 $y \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}$，我们有

$$|D_y[\phi](x) - \frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y| \le C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})|y|^{p-2}.$$

证明。我们对 ϕ 作四阶泰勒展开，然后分别在 x 和 $\nabla\phi(x)\cdot y$ 处对 J_p 作一阶展开，从而得到

(3.24)
$$\begin{aligned}|y|^p D_y[\phi](x) &= J_p(\phi(x+y)-\phi(x)) + J_p(\phi(x-y)-\phi(x))\\ &= J_p(\nabla\phi(x)\cdot y) + J_p'(\Theta_1^+(y))(\phi_{23}^+(y)+O(|y|^4)) + J_p(-\nabla\phi(x)\cdot y) + J_p'(\Theta_2^-(y))(\phi_{23}^-(y)+O(|y|^4)),\end{aligned}$$

其中， $\Theta_j^\pm$ 和 $\phi_{23}^\pm$ 分别定义于 (3.14) 和 (3.13) 中。由于 J_p 是奇函数，我们消去项 $J_p(\nabla\phi(x)\cdot y)$ 和 $J_p(-\nabla\phi(x)\cdot y)$。在 (3.24) 中，我们加上再减去以下项：

$$J_p'(\pm\nabla\phi(x)\cdot y)(\phi_{23}^\pm(y)+O(|y|^4)),$$

从而得到

$$\begin{aligned}|y|^p D_y[\phi](x) = &\frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y + O(|y|^{p+2})\\ &+\left[J_p'(\Theta_1^+(y)) - J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)\right](\phi_{23}^+(y)+O(|y|^4)) + \left[J_p'(\Theta_2^-(y)) - J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)\right](\phi_{23}^-(y)+O(|y|^4)).\end{aligned}$$

通过对 [2, 引理 2.4], 作略微修改，对于 $p \in (2,3)$，我们得到存在一个常数 $C_p > 0$，使得括号中的项为 $O(|y|^{2(p-1)})$ 阶，结论随之成立。 □

引理 3.9。设 $p \in (2,3)$ 且 $\beta \in (0, p-2)$。考虑某个函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$，并令 $K_0 := \|D^2\phi\|_{L^\infty(B_R(x))}$。那么，对于区域 $|\nabla\phi(x)\cdot y| > K_0|y|^2$ 中的任意 $y \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}$，我们有

$$|D_y[\phi](x) - \frac{(p-1)}{|y|^p}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^T D^2\phi(x)y| \le C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})\Phi\left(\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}\right)|y|^{1+\beta},$$

其中 $\Phi(\eta) := 1 + |\eta|^{p-3} + |\eta|^{p-3-\beta}$。

证明。给定定 f， $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 光滑函数，使得 $f(y) \neq 0$ 对 $y \neq 0$ 成立，且 $|g(y)/f(y)| < 1$，我们有 e

$$\begin{aligned}J_p(f(y)+g(y)) &= J_p(f(y))J_p(1+\frac{g(y)}{f(y)})\\ &= J_p(f(y))\left(J_p(1) + J_p'(1)\frac{g(y)}{f(y)} + \frac{J_p''(1)}{2}\left(\frac{g(y)}{f(y)}\right)^2 + O\left([J_p'']_{C^\beta(B_1\setminus B_{1/2})}\left(\left|\frac{g(y)}{f(y)}\right|\right)^{2+\beta}\right)\right).\end{aligned}$$

考虑 $f := \phi_1$ 以及 $g^\pm := \phi_{23}^\pm$ 如（3.18）所示，证明过程与引理 3.6类似。注意到，由于 $\beta < p-2$，我们有

$$p-3 > p-3-\beta > -1$$

我们可以使用引理 3.1 得出

$$|\phi_1(y)|^{p-3-\beta}O\left(|y|^{4+2\beta}\right) = |\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-3-\beta}|y|^{p-3-\beta}O(|y|^{4+2\beta}) = |\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|}|^{p-3-\beta}O(|y|^{p+1+\beta}).\ \square$$

定理 *3.10.* 设 $p \in (2,3)$、$s \in (0,1)$ 且 $\beta \in (0, p-2)$。考虑某个 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $0 < R < 1$ 下的函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x_0))$，并满足 $\nabla\phi \neq 0$ 属于 $B_R(x_0)$。设 R_0 定义于 (2.7)。那么，对于$r < \min\{R_0, R/2\}$ 和 $x \in B_{R/2}(x_0)$，有

$$P.V. \int_{B_r} J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2a_{s,p,d}} \Delta_p \phi(x) r^{p(1-s)} + O(r^{1+\beta+p(1-s)}) \tag{3.25}$$

其中$a_{s,\ p,\ d}$ 见引理3.2，且

$$\mathcal{M}_{r,i}^p[\phi](x) = \Delta_p \phi(x) + O(r^{1+\beta}), \quad i \in \{1,2\}, \tag{3.26}$$

其中，误差项关于 x 和$\mathcal{M}_r^p$ 、i 是一致的，由（2.2）给出。

证明：我们采用与定理3.7证明中相同的策略。事实上，按照（ I_1 和 I_2 3.21）中的定义，并利用引理3.8 和引理3.9 ，可知

$$I_1 = \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r \cap \Omega} |\nabla\phi(x) \cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O(r^{1+\beta+(1-s)p}),$$

其中 $\beta \in (0,\ p-2)$ 以及

$$I_2 = \frac{1}{2}(p-1) \int_{B_r \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega)} |\nabla\phi(x) \cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + O(r^{p-1+(1-s)p}).$$

I恒等式（3.25）是引理3.2的推论。类似的论证可证明（3.26） . □

3.4. 情形 $p \in (1,\ 2)$。由于我们无法像前面的情形那样进行一般的泰勒展开（我们甚至无法对 J_p 求一次导数），因此本情形更为复杂。不过，我们可以在远离奇异区域的地方给出精确估计。

引理 3.11。设 $p \in (1,\ 2)$，$\beta \in (0,\ p-1)$，并固定 $\eta > 0$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$，其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 且 $0 < R < 1$。那么，对于任意 $y \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\}$，使得 $|\nabla\phi(x) \cdot y| \geq \eta$，我们有

$$|D_y[\phi](x) - \frac{(p-1)}{|y|^p} |\nabla\phi(x) \cdot y|^{p-2} y^T D^2\phi(x) y| \leq C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))}) \Phi(x,y,\phi) |y|^\beta$$

其中

$$\Phi(x,y,\phi) = |\nabla\phi(x) \cdot \frac{y}{|y|} + |y| \frac{y^T}{|y|} D^2\phi(x) \frac{y}{|y|}|^{p-2-\beta} + |\nabla\phi(x) \cdot \frac{y}{|y|}|^{p-2-\beta}. \tag{3.27}$$

证明中我们使用 [12] 的一些思想。

证明。展开 $\phi(x+y)$，容易得到

$$J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) = J_p(\nabla\phi(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2\phi(x) y + O(|y|^3)),$$

并使用 [23,引理 3.4],

$$\begin{aligned} &|J_p(\nabla\phi(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2\phi(x) y + O(|y|^3)) - J_p(\nabla\phi(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2\phi(x) y)| \\ &\qquad \leq C \left(|\nabla\phi(x) \cdot y + y^T D^2\phi(x) y| + |O(|y|^3)| \right)^{p-2} O(|y|^3) \\ &\qquad \leq C \left(|\nabla\phi(x) \cdot \frac{y}{|y|} + |y| \frac{y^T}{|y|} D^2\phi(x) \frac{y}{|y|}| \right)^{p-2} O(|y|^{p+1}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

因此，我们将重点估计项 $J_p(\nabla\phi(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2\phi(x) y)$。由于 $|\nabla\phi(x) \cdot y| \geq \eta$，我们可以对 J_p 进行泰勒展开，从而对于每个 $\beta \in (0,\ p-1)$，

$$\begin{aligned} &|J_p(\nabla\phi(x) \cdot y + \frac{1}{2} y^T D^2\phi(x) y) - J_p(\nabla\phi(x) \cdot y) - J_p'(\nabla\phi(x) \cdot y) y^T D^2\phi(x) y| \\ &\qquad \leq C \left(|\nabla\phi(x) \cdot y + y^T D^2\phi(x) y|^{p-2-\beta} + |\nabla\phi(x) \cdot y|^{p-2-\beta} \right) |y^T D^2\phi(x) y|^{1+\beta} \\ &\qquad \leq C(p,d,\|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))}) \Phi(x,y,\phi) |y|^{p+\beta}, \end{aligned}$$

其中 Φ 由（3.27）给出。对由 J_p（ϕ（$x-y$） $-\phi$（x）产生的项进行类似处理，我们可以得出

$$|y|^p D_y[\phi](x) = J_p'(\nabla\phi(x)\cdot y)y^T D^2\phi(x)y + \Phi(x,y,\phi)O(|y|^\beta) + O(|y|^{3-p}),$$

结论随即得证。 □

定理 3.12。设 $p\in(1,2)$， $s\in(0,1)$ 以及 $\beta\in(0,p-1)$。考虑函数 $\phi\in C_b^4(B_R(x_0))$，其中 $x_0\in\mathbb{R}^d$ 和 $0<R<1$，并且 $\nabla\phi\neq 0$ 于 $B_R(x_0)$中成立。则对于 $r<R/2$ 和 $x\in B_{R/2}(x_0)$，有

$$P.V.\int_{B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = \frac{1}{2a_{s,p,d}}\Delta_p\phi(x)r^{p(1-s)} + O(r^{\beta+p(1-s)}), \tag{3.29}$$

其中$a_{s,\ p,\ d}$ 见引理 3.2，并且

$$\mathcal{M}_{r,i}^p[\phi](x) = \Delta_p\phi(x) + O(r^\beta), \quad i\in\{1,2\}, \tag{3.30}$$

其中误差项关于 x 和 $\mathcal{M}_r^p$ 一致，i 由下式给出：(2.2)。

证明。 固定 $\eta>0$ 并考虑 $\Omega:=\{y\in\mathbb{R}^d:\ |\nabla\phi(x)\cdot y|\le\eta\}$。定义

(3.31)

$$I_1 := P.V.\int_{B_r\cap\Omega} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}, \quad I_2 := P.V.\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}.$$

利用（3.28），根据定义域的对称性以及 J_p 的奇性，我们可以写出

$$\begin{aligned} I_1 = &\underbrace{P.V\int_{B_r\cap\Omega}(J_p(\nabla\phi(x)\cdot y + y^TD^2\phi(x)y) - J_p(\nabla\phi(x)\cdot y))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}}_{I_{11}} \\ &\underbrace{+O\left(\int_{B_r\cap\Omega}\left(|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|} + |y|\frac{y^T}{|y|}D^2\phi(x)\frac{y}{|y|}|\right)^{p-2}\frac{|y|^{p+1}\,\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right)}_{I_{12}}. \end{aligned}$$

通过对奇异测度的 [12,引理 A3] （参照引理3.1）作直接推广，并利用控制收敛定理，可以证明 $I_{12}=o_\eta$（1）。同样，由 [23,引理 3。4], 可得

$$|I_{11}| \le C\int_{B_r\cap\Omega}\left(|\nabla\phi(x)\cdot\frac{y}{|y|} + |y|\frac{y^T}{|y|}D^2\phi(x)\frac{y}{|y|}|\right)^{p-2}\frac{|y|^p\,\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = o_\eta(1).$$

由引理 3.11,

$$\begin{aligned} I_2 = &\frac{1}{2}(p-1)\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \\ &+O\left(\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)}\Phi(x,y,\phi)\,\frac{|y|^{p+\beta}\,\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right), \end{aligned}$$

其中 Φ 由（3.27）给出，且 $\beta\in$（0，$p-1$）。注意，最后一项可以用 B_r中的积分来估计，并再次利用 [12, 引理 A3] 处理最后一个积分，可得

$$\left|I_2 - \frac{1}{2}(p-1)\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right| \le C|y|^{\beta+(1-s)p},$$

其中，最后一个常数与 η 无关。因此

$$\begin{aligned} P.V\int_{B_r} J_p(\phi(x+y)-\phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} = &\frac{1}{2}(p-1)\int_{B_r\cap(\mathbb{R}^d\setminus\Omega)}|\nabla\phi(x)\cdot y|^{p-2}y^TD^2\phi(x)y\,\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \\ &+O(|y|^{\beta+p}) + o_\eta(1). \end{aligned}$$

令 $\eta \to 0$ 并应用引理 3.2 可得 (3.29)。恒等式 (3.30) 可类似地得到。 □

3.5. **维数 $d = 1$ 下的结果**。 首先注意，在这种情形下，

$$\Delta_p \phi(x) = (p-1)|\phi_x(x)|^{p-2}\phi_{xx}(x)$$

并且当 $r > 0$ 时， $D_r[\phi]$ 由式（3.1）定义，恰好是式（ p-拉普拉斯算子在式（2.10）中给出的渐近展开。我们有以下结果。

引理 3.13。 设 $p > 1$。考虑函数 $\phi \in C_b^4(B_R(x))$ ，其中 $x \in \mathbb{R}^d$ 且 $0 < R < 1$ ，并且满足 $\phi_x \neq 0$ 在 $B_R(x)$ 中，令

$$r < R_0 := \frac{\inf_{B_R(x)} |\phi_x|}{\|\phi_{xx}\|_{L^\infty(B_R(x))}}.$$

那么，对于任意 $r < \min\{R_0, R/2\}$ ，有

$$|D_r[\phi](x) - \Delta_p \phi(x)| \leq C(p, d, \|\phi\|_{C_b^4(B_R(x))})(\inf_{B_R(x)} |\phi_x|^{p-4} + 1)r^2.$$

证明。 对于 $p \geq 4$ ，结果正是由引理 3.3 给出的。对于 $p \in (1,4)$，我们沿用引理 3.6 的证明。注意，在这种情形下，梯度不为零这一事实直接意味着$\nabla\phi(x) \cdot y = \phi_x(x)r \neq 0$，因为不存在正交方向。接着取

$$f(r) = \phi_x(x)r$$

and

$$g^{\pm}(r) = \phi_{xx}(x)\frac{r^2}{2} \pm \phi_{xxx}(x)\frac{r^3}{3!} + O(r^4) = \phi_{xx}(\xi_\pm)\frac{r^2}{2}$$

对于某个 $\xi_\pm \in B_r(x)$。有鉴于此，我们注意到

$$\left|\frac{g^{\pm}(r)}{f(r)}\right| \leq \frac{\|\phi_{xx}\|_{L^\infty(B_R(x))}\frac{r^2}{2}}{\inf_{B_r(x)}\{|\phi_x|\}r} < \frac{1}{2}$$

只要 $r < R <$ 下确界$_{B_r(x)}\{|\phi_x|\}/\|\phi_{xx}\|_{L^\infty(B_R(x))}$成立。其余证明逐行遵循引理3.6的证明。 □

3.6. **定理 2.1、定理 2.3和定理 2.5中的渐近展开的证明**。我们从 p-拉普拉斯算子的恒等式开始。注意，式(2.11)已针对定理p 3.4、3.7、3.10和3.12中的每一种取值范围证明。在情形 $p \geq 4$中，式(2.4)包含在定理 3.4中。情形$p \in (2,4)$可通过应用引理 3.5 和 3.8，以类似方式得到。

对于分数阶 p-拉普拉斯算子情形，我们首先将算子拆分为奇异部分和非奇异部分，如下所示

$$-(-\Delta)_p^s \phi(x) = P.V. \int_{B_r} J_p(\phi(x+y) - \phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} J_p(\phi(x+y) - \phi(x))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}.$$

那么 (2.9) 包含在定理 3.4、3.7、3.10 和 3.12中。在 $p \geq 4$ 情形下，(2.5) 已在定理 3.4中得到证明，其余情形可由引理 3.5 和 3.8以同样的方式推导得出。

最后， 关于$\mathcal{M}_{r,1}^p$ 的定理 2.5 恰好就是引理 3.13，其余部分通过与前面相同的积分过程即可得出e.

4. Discretizations of the fractional p-Laplacian

在本节中，我们将证明定理 2.6。我们采用小节 2.2 中的记号。整个本节中，假设 $\phi \in C_b^4(B_R(x)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$， $x \in \mathbb{R}^d$，其中 $R > 0$。我们将分别分析积分区域原点附近和远离原点处离散化/求积的误差。令$r > 0$ 并记

$$A_r(x) := \frac{1}{2}\int_{B_r} (J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x-y) - \phi(x)))\,\mathrm{d}y,$$

and

$$\tilde{A}_r(x) := \frac{1}{2}\int_{\tilde{B}_r} (J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x-y) - \phi(x)))\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$\tilde{B}_r := \bigcup_{y_\alpha \in B_r} Q_\alpha \quad \text{with} \quad Q_\alpha := y_\alpha + \frac{h}{2}[-1,1)^d.$$

另定义

$$\tilde{A}_r^h(x) := h^d \sum_{y_\alpha \in B_r} J_p(\phi(x+y_\alpha) - \phi(x)),$$

这只是（2.12）第一项的一部分。

引理 4.1. 假设 $h \le r/4$。则

$$|A_r(x) - \tilde{A}_r(x)| = O(r^{p+d-1}h),$$

and

$$|\tilde{A}_r(x) - \tilde{A}_r^h(x)| = \begin{cases} O(r^{p-3}h^2 r^d) & \text{if } p > 3, \\ O(r^{p-2}h^2 r^d + h^{p-1}r^d) & \text{if } p \in (2,3], \\ O(h^{p-1}r^d) & \text{if } p \in (1,2). \end{cases}$$

证明. 我们沿用 [13, 定理 1 的证明。1], 但计算精确的渐近阶。实际上，由此可见

$$|A_r(x) - \tilde{A}_r(x)| = O(r^{p+d-1}h).$$

现在估计 $|\tilde{A}_r(x) - \tilde{A}_r^h(x)|$。由于 $h^d = |Q_\alpha|$，我们可以写成

(4.1)

$$|\tilde{A}_r(x) - \tilde{A}_r^h(x)| = \frac{1}{2}\left| \sum_{y_\alpha \in B_r} \int_{Q_0} (J_p(\phi(x+y_\alpha+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x+y_\alpha - y) - \phi(x)) - 2J_p(\phi(x+y_\alpha) - \phi(x)))\,\mathrm{d}y \right|,$$

并且可以看出

$$|J_p(\phi(x+y_\alpha+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x+y_\alpha - y) - \phi(x)) - 2J_p(\phi(x+y_\alpha) - \phi(x))| = \begin{cases} O(r^{p-3}h^2) & \text{if } p > 3, \\ O(r^{p-2}h^2 + h^{p-1}) & \text{if } p \in (2,3], \\ O(h^{p-1}) & \text{if } p \in (1,2). \end{cases}$$

将此结果代入（4.1），并注意到，由于 $h = O(r)$，我们有$\sum_{y_\alpha \in B_r} h^d = |\tilde{B}_r| \le |B_{r+\sqrt{d}h}| = O(r^d)$。□

现在我们来估计远离原点处的误差。定义

$$T_r^s(x) := \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_r} J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}},$$

$$\tilde{T}_r^s(x) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d \setminus \tilde{B}_r} (J_p(\phi(x+y) - \phi(x)) + J_p(\phi(x-y) - \phi(x))) \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}},$$

and

$$\tilde{T}_{r,j}^{s,h}(x) := \sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_r} J_p(\phi(x+y_\alpha) - \phi(x)) W_{\alpha,i}, \quad i = 1,2,$$

其中 $W_{\alpha,\,i}$ 定义见（2.13）。

引理 4.2. 假设 $h \le r/4$。则

$$|T_r^s(x) - \tilde{T}_r^s(x)| = O(hr^{p-1-sp})$$

and

$$|\tilde{T}_r^s(x)-\tilde{T}_{r,1}^{s,h}(x)|=\begin{cases}O(h) & \text{if } p\geq 2 \text{ and } p\geq \frac{2}{1-s},\\ O(hr^{p-2-sp}) & \text{if } p\geq 2 \text{ and } p<\frac{2}{1-s},\\ O(h^{p-1}r^{-sp}) & \text{if } 1<p<2.\end{cases}$$

证明. 与引理 4.1的证明类似，可得

$$|T_r^s(x)-\tilde{T}_r^s(x)|=O(hr^{p-1-sp}).$$

另一方面，我们可以写成

$$|\tilde{T}_r^s(x)-\tilde{T}_{r,1}^{s,h}(x)|=\left|\sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_r}\int_{Q_\alpha}(J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right|.$$

若 $p\geq 2$，利用 ϕ 的正则性和有界性，我们对每个 y_α 以及每个 $y\in Q_\alpha$，有：

$$|J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x))|\leq C|\phi(x+y)-\phi(x+y_\alpha)|\leq C|y-y_\alpha|\leq Ch.$$

因此，我们可以推得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_1}\int_{Q_\alpha}(J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right|\\ &\qquad\leq Ch\sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_1}\int_{Q_\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\leq Ch\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_{1/2}}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\leq Ch.\end{aligned}\tag{4.2}$$

为了估计情形 $y_\alpha\in B_1\setminus B_r$，注意到若 $h\leq r$，则对每个 $y\in(B_1\setminus B_r)\cap Q_\alpha$，存在一个仅依赖于维数的常数 c_0，使得 $|y|\geq c_0h$，因此

$$|\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)|\leq C|y_\alpha|\leq C(|y|+h)\leq C|y|.$$

因此，我们可以使用 [13, 引理 A。1] 来得到

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{y_\alpha\in B_1\setminus B_r}\int_{Q_\alpha}(J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right|\\ &\qquad\leq Ch\sum_{y_\alpha\in B_1\setminus B_r}\int_{Q_\alpha}(|\phi(x+y)-\phi(x)|^{p-2}+|\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)|^{p-2})\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\\ &\qquad\leq Ch\int_{B_{3/2}\setminus B_{r/2}}|y|^{p-2}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\leq Ch(1+r^{p-2-sp}).\end{aligned}\tag{4.3}$$

结合 (4.2) 和 (4.3) 中关于 $p\geq 2$ 的结果可得。

If $p\in$ (1,2) 我们可以利用 H¨older 连续性 J_p，推得对任意 y_α 以及任意 $y\in Q_\alpha$ ，

$$|J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x))|\leq C|\phi(x+y)-\phi(x+y_\alpha)|^{p-1}\leq Ch^{p-1}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_r}\int_{Q_\alpha}(J_p(\phi(x+y)-\phi(x))-J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)))\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\right|\\ &\qquad\leq Ch^{p-1}\sum_{y_\alpha\in\mathbb{R}^d\setminus B_r}\int_{Q_\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\leq Ch^{p-1}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_{r/2}}\frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}}\leq Ch^{p-1}(1+r^{-sp}).\end{aligned}$$

□

现在我们来分析第二种离散化。

引理 4.3。 假设 $h \le \frac{r}{4\sqrt{d}}$。那么

$$|\tilde{T}_r^s(x) - \tilde{T}_{r,2}^{s,h}(x)| = \begin{cases} O(h) & \text{if } p \ge 2 \text{ and } p \ge \frac{2}{1-s}, \\ O(hr^{p-2-sp}) & \text{if } p \ge 2 \text{ and } p < \frac{2}{1-s}, \\ O(h^{p-1}r^{-sp} + hr^{p-2-sp}) & \text{if } 1 < p < 2. \end{cases}$$

证明。由于对每个 α 都有 $h^d = |Q_\alpha|$，我们可以写成

$$\begin{aligned} |\tilde{T}_r^s(x) - \tilde{T}_{r,2}^{s,h}(x)| &= \left| \sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_r} \int_{Q_\alpha} \left(\frac{J_p(\phi(x+y)-\phi(x))}{|y|^{d+sp}} - \frac{J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x))}{|y_\alpha|^{d+sp}} \right) \mathrm{d}y \right. \\ &= \Bigg| \underbrace{\sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_r} \int_{Q_\alpha} \left(\frac{J_p(\phi(x+y)-\phi(x)) - J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x))}{|y|^{d+sp}} \right) \mathrm{d}y}_{I_1} \\ &\quad \left. + \underbrace{\sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_r} \int_{Q_\alpha} J_p(\phi(x+y_\alpha)-\phi(x)) \left(\frac{1}{|y|^{d+sp}} - \frac{1}{|y_\alpha|^{d+sp}} \right) \mathrm{d}y}_{I_2} \right|. \end{aligned}$$

注意 其 I_1 是 $\tilde{T}_r^s(x) - \tilde{T}^{s,h}_{r,1}(x)$，而引理 4.2 给出了该界。我们将 I_2 分为两个区域，

$$I_2 = \underbrace{\sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_1} \int_{Q_\alpha} \cdots}_{I_{21}} + \underbrace{\sum_{y_\alpha \in B_1 \setminus B_r} \int_{Q_\alpha} \cdots}_{I_{22}}$$

注意，若 $y \in Q_\alpha$，则可将其写成 $y = y_\alpha + \frac{h}{2}v$，其中 $|v| < \sqrt{d}$，因此

$$\left| \frac{1}{|y|^{d+sp}} - \frac{1}{|y_\alpha|^{d+sp}} \right| \le C \frac{1}{\min_{z \in Q_\alpha} |z|^{d+sp+1}} |y - y_\alpha| \le C \frac{h}{|y|^{d+sp+1}} \tag{4.4}$$

我们先考虑情形 $y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_1$。利用 ϕ 的有界性以及（4.4），可得

$$|I_{21}| \le C \sum_{y_\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus B_1} \int_{Q_\alpha} \frac{h}{|y|^{d+sp+1}} \mathrm{d}y \le Ch \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{1/2}} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp+1}} \le Ch.$$

同样，利用 $|J_p(\phi(x+y_\alpha) - \phi(x))| \le C(|y|+h)^{p-1} \le C|y|^{p-1}$，以及（4.4），可得

$$|I_{22}| \le Ch \int_{B_{3/2} \setminus B_{r/2}} \frac{|y|^{p-1}}{|y|^{d+1+sp}} \mathrm{d}y \le Ch(1 + r^{p-2-sp}).$$

因此

$$|I_2| = \begin{cases} O(h) & \text{if } p \ge \frac{2}{1-s}, \\ O(hr^{p-2-sp}) & \text{if } p < \frac{2}{1-s}, \end{cases}$$

结论得证。 □

定理 *2.6* 的证明。由定理 2.1、定理 2.3 或定理 2.5 可得

$$\begin{aligned} |(-\Delta)_{p,i}^{s,h}\phi(x) - (-\Delta)_p^s\phi(x)| &\le |(-\Delta)_{p,i}^{s,h}\phi(x) - \mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](x)| + |\mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](x) - (-\Delta)_p^s\phi(x)|, \\ &= |(-\Delta)_{p,i}^{s,h}\phi(x) - \mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](x)| + O(r^{\gamma+p(1-s)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

当 $r \to 0^+$，其中 γ 由（2.6）或（2.3）给出。注意到

$$\begin{aligned} |(-\Delta)_{p,i}^{s,h}\phi(x) - \mathcal{M}_r^{s,p}[\phi](x)| &\le \frac{p+d}{p(1-s)r^{d+sp}} |A_r(x) - \tilde{A}_r^h(x)| + |T_r^s(x) - \tilde{T}_{r,j}^{s,h}(x)| \\ &\le C \left(\frac{1}{r^{d+sp}} |A_r(x) - \tilde{A}_r(x)| + \frac{1}{r^{d+sp}} |\tilde{A}_r(x) - \tilde{A}_r^h(x)| + |T_r^s(x) - \tilde{T}_r^s(x)| + |\tilde{T}_r^s(x) - \tilde{T}_{r,j}^{s,h}(x)| \right), \end{aligned}$$

其中 C 是一个依赖于 d、p 和 s 的正常数。应用引理 4.2和引理 4.3，选取合适的 $r \asymp h^{\mu}$（其中 $\mu \in (0,1]$）。□

4.1. h **和** r**下的精确阶**。我们精确估计

$$E := |(-\Delta)^{s,h}_{p,i}\phi(x) - (-\Delta)^{s}_{p}\phi(x)|$$

根据定理2.1、定理2.3中证明的渐近展开误差。利用定理 $d = 1$ 可以在维数2.5下得到类似结果。

设 γ 由（2.6）或（2.3）给定，并假设 $r \asymp h^{\mu}$，其中 $\mu \in (0,1]$ 作适当选择。我们区分三个范围：

（i）**情形** $p > 3$。我们有

$$E = O(r^{p(1-s)-3}h^2 + r^{\min\{0,p(1-s)-2\}}h + r^{\gamma+p(1-s)})$$

我们注意到：

若 $p(1-s) \geq 2$，则对每个 $\mu \leq 1$ 都有收敛。特别地，取 $\mu = 1$ we g et $E = O(h)$，其计算高效（一阶离散化，见 h）。

若 $p(1-s) < 2$，则对于 $\mu < 1/(2-p(1-s))$，收敛性得以保证。特别地，最优选择 $\mu = \frac{1}{\gamma+2}$ 给出 $E = O(h^{\frac{\gamma+p(1-s)}{\gamma+2}})$，其始终为次线性，但对于所有 $\delta > 0$，至少为 $E = O(h^{\frac{1}{3}-\delta})$。当梯度不为零时，我们得到 $E = O(h^{\frac{1}{2}-\delta})$。

(ii) **情形** $p \in (2,3]$. 此处

$$E = O(h^{p-1}r^{-sp} + r^{\min\{0,p(1-s)-2\}}h + r^{\gamma+p(1-s)})$$

注意：

若 $p(1-s) \geq 2$，则对每个 $\mu < (p-1)/(sp)$ 都有收敛。特别地，选择 $\mu = \frac{1}{\gamma+p(1-s)}$ 可得 $E = O(h)$。

若 $p(1-s) < 2$，则可确保收敛于 $\mu < 1/(2-p(1-s))$。特别地，最优选择 $\mu = \frac{1}{\gamma+2}$ 可得 $E = O(h^{\frac{\gamma+p(1-s)}{\gamma+2}})$。在零梯度点之外，对于所有 $\delta > 0$，其至少为 $E = O(h^{\frac{1}{3}-\delta})$。

(iii) **情形** $p \in (1,2)$。我们得到

$$E = O(h^{p-1}r^{-sp} + r^{\gamma+p(1-s)})$$

当 $\mu < (p-1)/(sp)$ 时，可确保收敛。选择 $\mu = (p-1)/(\gamma+p)$ 可得 $E = O(h^{(p-1)(1-\frac{sp}{\gamma+p})})$。

作为一个说明性示例，我们考虑函数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 由 $\phi(x) = \max\{0,x\}^s$ 给出，并在参数 p 和 s 的某个取值范围内，使用上述离散化进行数值模拟。已知，对于所有 $s \in (0,1)$ 以及所有 $p > 2$，有 $(-\Delta)^{s}_{p}\phi(x) = 0$，对所有 $x > 0$ 均成立（参见引理 3.1]）。进行模拟时，我们将函数 ϕ 截断于足够大的 $|x|$，使截断误差不会影响数值误差。结果见图2。

5. Application to a parabolic problem

本节将给出一种显式有限差分数值格式，用于求解抛物型问题（2.14）的 H¨older 连续数据问题。我们将结合稳定性条件（A_{CFL}），以及相容性结果定理 2.6，证明这些格式收敛到（2.14）的连续黏性解。本节中，我们将沿用第2.2节和第2.3节的记号。

我们首先证明一个关于权重 ω_α 的技术性结果。为此，给定 $\nu > 0$，定义

$$S_\nu(r) := \begin{cases} r^{-sp+\nu} & \text{if} \quad \nu \in (0, sp) \\ |\log(r)| & \text{if} \quad \nu = sp \\ 1 & \text{if} \quad \nu > sp. \end{cases}$$

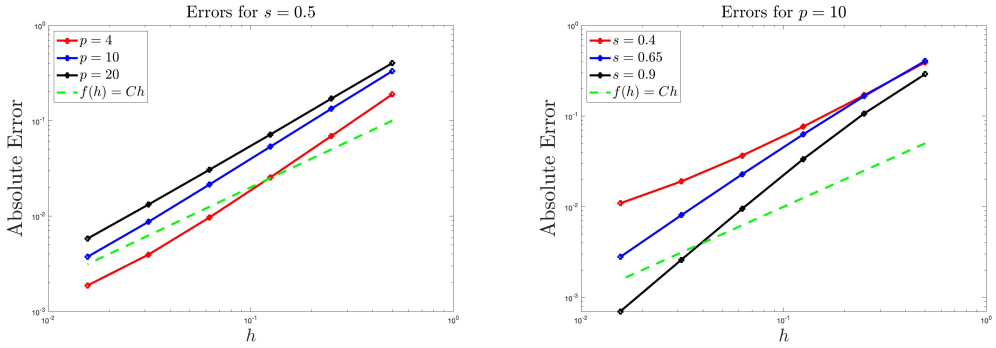


FIGURE 2. $p(1-s) \geq 2$ 和 $p \geq 3$

引理 5.1。 设 $p > 2$， $s \in (0, 1)$ 以及 h， $r \in (0, 1)$ 满足 $h \leq \frac{\sqrt{d}r}{2}$。假设 (A$\omega$)，并令 $\mathcal{L}_h$ 由下式 (2.15)给出。则
(a) 权重是对称且为正的，即 $\omega_\alpha = \omega_{-\alpha} \geq 0$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 均成立。(b) 以下可求和性成立：存在常数 $C_{s,p,d} \geq 1$， 使得

$$\sum_{\alpha \neq 0} \omega_\alpha \leq \frac{C_{s,p,d}}{r^{sp}}, \quad \sum_{|y_\alpha| \geq 1} \omega_\alpha \leq C_{s,p,d} \quad and \quad \sum_{0<|y_\alpha|<1} |y_\alpha|^\nu \omega_\alpha \leq C_{s,p,d} S_\nu(r).$$

证明。 （a）部分由构造可得。我们证明（b）部分中对应于 $W_{\alpha,1}$ 的权重，即

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \dfrac{(p+d)}{p(1-s)} \dfrac{h^d}{r^{d+sp}} & \text{if} \quad |y_\alpha| < |r| \\ \displaystyle\int_{Q_\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} & \text{if} \quad |y_\alpha| \geq |r|. \end{cases}$$

情形 $W_{\alpha,2}$ 的证明类似。回顾估计式

$$\sum_{y_\alpha \in B_r} h^d \leq |B_{r+\sqrt{d}h}| \leq C r^d.$$

那么，

$$\sum_{\alpha \neq 0} \omega_\alpha \leq \frac{C}{r^{d+sp}} \sum_{0<|y_\alpha|<r} h^d + \sum_{|y_\alpha| \geq r} \int_{Q_\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \leq \frac{C}{r^{d+sp}} |B_{r+\sqrt{d}h}| + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{r/2}} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \leq C r^{-sp}.$$

此外，

$$\sum_{|y_\alpha| \geq 1} \omega_\alpha = \sum_{|y_\alpha| \geq 1} \int_{Q_\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{1/2}} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp}} \leq C.$$

为证明最后一部分，我们首先注意到

$$\sum_{0<|y_\alpha|<r} |y_\alpha|^\nu \omega_\alpha = \frac{C}{r^{d+sp}} \sum_{0<|y_\alpha|<r} |y_\alpha|^\nu h^d \leq \frac{C}{r^{d+sp-\nu}} |B_{r+\sqrt{d}h}| \leq C r^{-sp+\nu}.$$

另一方面，我们可以利用存在一个常数 C 使得 $|y_\alpha| \leq C|y|$ 对所有 $y \in Q_\alpha$成立这一事实，得到

$$\sum_{r \leq |y_\alpha|<1} |y_\alpha|^\nu \omega_\alpha \leq C \sum_{r \leq |y_\alpha|<1} \int_{Q_\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp-\nu}} \leq C \int_{B_1 \setminus B_{r/2}} \frac{\mathrm{d}y}{|y|^{d+sp-\nu}}.$$

结论由此得出。 □

下面的结果说明了方程 (2.17) 的解的存在性与唯一性。

引理 5.2. 设 $h,\tau,r\in(0,1)$ 和 $p>2$. 假设 (A_ω) 以及 $(\mathrm{A}_{u_0,f})$成立。则数值格式 (2.17) 存在唯一的解 $U\in l^\infty(\mathcal{G}_h\times\mathcal{T}_\tau)$。

证明。 利用假设（A_ω）以及引理 5.1，我们得到对任意 $\psi\in l^\infty(\mathcal{G}_h)$，以下界成立：

$$|\mathcal{L}_h\psi(x_\alpha)|\le\|\psi\|^{p-1}_{l^\infty(\mathcal{G}_h)}\sum_{\alpha\neq0}\omega_\alpha\le\frac{C}{r^{sp}}\|\psi\|^{p-1}_{l^\infty(\mathcal{G}_h)}. \tag{5.1}$$

由于 u_0 是连续且有界的，因此 $U^0\in l^\infty(\mathcal{G}_h)$。应用（5.1），我们可以求解问题（2.17）以得到 $U^1\in l^\infty(\mathcal{G}_h)$。重复这一过程，我们可以求解该问题，并对任意 $U^j\in l^\infty(\mathcal{G}_h)$ 得到 $j\in\mathbb{N}$。唯一性由构造可得。□

为便于后续引用，我们指出关于假设（$\mathrm{A}_{\mathrm{CFL}}$）的如下关系：

$$\tau S_{a(p-2)}(r)\le K_{s,p,d}. \tag{5.2}$$

其中 $K_{s,\ p,\ d}$ 由（2.16）给出。在下一个引理中，我们陈述 U^j 在空间中的一致有界性和一致连续性。

引理 5.3。 设 h，τ，$r\in(0,\ 1)$ 以及 $p>2$。假设 （A_ω）、（$\mathrm{A}_{u_0,\ f}$）以及 （$\mathrm{A}_{\mathrm{CFL}}$）。设 U 为方程（2.17）的解。则对于每个 $j=0,\ \ldots\ldots,\ N$，我们有

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|U^j_\alpha|\le\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+t_j\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.3}$$

and

$$|U^j_\alpha-U^j_\gamma|\le\Lambda_{u_0}(|x_\alpha-x_\gamma|)+t_j\Lambda_f(|x_\alpha-x_\gamma|)\quad\text{for all}\quad\alpha,\gamma\in\mathbb{Z}^d. \tag{5.4}$$

证明。 有界性和 ¨的 Hölder 连续性 u_0 推出 (5.3) 和 (5.4) 对 $j=0$成立。假设 (5.3) 和 (5.4) 对某个 j成立。那么，

$$\begin{aligned}U^{j+1}_\alpha&=U^j_\alpha+\tau\sum_{\beta\neq0}J_p(U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha)\omega_\beta+\tau f_\alpha\\&=U^j_\alpha\left(1-\tau\sum_{\beta\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta\right)+\tau\sum_{\beta\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}U^j_{\alpha+\beta}\omega_\beta+\tau f_\alpha.\end{aligned} \tag{5.5}$$

注意，由归纳假设和引理 5.1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta&=\sum_{0<|y_\alpha|<1}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta+\sum_{|y_\alpha|\ge1}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta\\&\le2^{p-2}(L_{u_0}+t_jL_f)^{p-2}\left(\sum_{0<|y_\alpha|<1}|y_\beta|^{a(p-2)}\omega_\beta+\sum_{|y_\alpha|\ge1}\omega_\beta\right)\\&\le2^{p-1}C_{s,p,d}(L_{u_0}+TL_f)^{p-2}S_{a(p-2)}(r),\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中 $C_{s,\ p,\ d}$ 来自引理 5.1。然后，由 $(\mathrm{A}_{\mathrm{CFL}})$ 和 (5.2)，

$$1-\tau\sum_{\beta\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta\ge0.$$

这样，由（5.5）可得

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|U^{j+1}_\alpha|&\le\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|U^j_\alpha|\left(1-\tau\sum_{\alpha\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta\right)+\tau\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|U^j_\alpha|\sum_{\alpha\neq0}|U^j_{\alpha+\beta}-U^j_\alpha|^{p-2}\omega_\beta+\tau\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|f_\alpha|\\&=\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|U^j_\alpha|+\tau\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|f_\alpha|\\&\le\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+t_{j+1}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}|f_\alpha|,\end{aligned}$$

这表明对 $j+1$，式（5.3）成立。

证明（5.4）对 $j+1$成立。现在，

$$U_\alpha^{j+1}-U_\gamma^{j+1}=U_\alpha^j-U_\gamma^j+\tau\left[\mathcal{L}_hU_\alpha^j-\mathcal{L}_hU_\gamma^j\right]+\tau(f_\alpha-f_\gamma).$$

注意到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_hU_\alpha^j-\mathcal{L}_hU_\gamma^j&=\sum_{\beta\neq0}\left(J_p(U_{\alpha+\beta}^j-U_\alpha^j)-J_p(U_{\gamma+\beta}^j-U_\gamma^j)\right)\omega_\beta\\&=(p-1)\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}(U_{\alpha+\beta}^j-U_{\gamma+\beta}^j)\omega_\beta-\left(U_\alpha^j-U_\gamma^j\right)(p-1)\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta,\end{aligned}$$

其中 η_β介于 $U_{\alpha+\beta}^j-U_\alpha^j$与 $U_{\gamma+\beta}^j-U_\gamma^j$之间。因此，仿照（5.6）中的推导，

$$\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta\le2^{p-1}C_{s,p,d}(L_{u_0}+TL_f)^{p-2}S_{a(p-2)}(r).$$

因此，由（$\mathrm{A_{CFL}}$）和（5.2），以及归纳假设，得到

$$\begin{aligned}|U_\alpha^{j+1}-U_\gamma^{j+1}|&\le|U_\alpha^j-U_\gamma^j|\left(1-\tau(p-1)\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta\right)\\&\quad+\tau(p-1)\sup_{\beta\in\mathbb{Z}^d}|U_{\alpha+\beta}^j-U_{\gamma+\beta}^j|\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta+\tau|f_\alpha-f_\gamma|\\&\le(\Lambda_{u_0}(|x_\alpha-x_\gamma|)+t_j\Lambda_f(|x_\alpha-x_\gamma|))\left(1-\tau(p-1)\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta\right)\\&\quad+\tau(p-1)(\Lambda_{u_0}(|x_\alpha-x_\gamma|)+t_j\Lambda_f(|x_\alpha-x_\gamma|))\sum_{\beta\neq0}|\eta_\beta|^{p-2}\omega_\beta+\tau\Lambda_f(|f_\alpha-f_\gamma|)\\&=\Lambda_{u_0}(|x_\alpha-x_\gamma|)+t_{j+1}\Lambda_f(|x_\alpha-x_\gamma|),\end{aligned}$$

由此证明得证。 □

我们将格式（2.17）按如下方式在空间上连续延拓：

$$\begin{cases}U^j(x)=U^{j-1}(x)+\tau\left(\mathcal{L}_hU^{j-1}(x)+f(x)\right),\quad x\in\mathbb{R}^d,j=1,\dots,N,\\U^0(x)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{5.7}$$

在下一个结果中，我们证明（5.7）的解关于初始数据的连续依赖性。

引理 5.4。设 $h,\tau,r\in(0、1)$以及 $p>2$。假设 $(\mathrm{A}\omega)$和 $(\mathrm{A_{CFL}})$。令 U,U为对应于数据 $u_0,\tilde{u}_0$和 f,f的（(5.7)解，并满足 $(\mathrm{A}_{u_0,f})$。则，

$$\|U^j-\tilde{U}^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\le\|u_0-\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}+t_j\|f-\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

对于 $j=0,\dots,N$。

证明与引理 5.3完全相同。在下一个结果中，我们给出 U^j随时间变化的两个界：第一个涉及 U^j的时间等度连续性，第二个将用于说明 U^j 是（2.14）的黏性解。

引理 *5.5*。设 $h,\tau,r\in(0,1)$ 以及 $p>2$。假设 $(A\omega)$、$(A_{u_0,f})$ 和 (A_{CFL})。令 U 为（5.7）的解。则存在一个常数 $K>0$，使得对于任意 $k,j\ge0$，

$$\|U^{j+k}-U^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\le\overline{\Lambda}_{u_0,f}(t_k),\tag{5.8}$$

其中

$$\overline{\Lambda}_{u_0,f}(t_k):=\tilde{K}_1t_k^{\frac{a}{2+(1-a)(p-2)}}+\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}t_k,$$

其中 $\tilde{K}_1 := KL^{\frac{2+1-\frac{p}{a}}{()(p-2)u_0}}$。此外，还有

$$\|U^{j+k} - U^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \tilde{\Lambda}_{u_0,f,r}(t_k), \tag{5.9}$$

$$\tilde{\Lambda}_{u_0,f,r}(t_k) := \tilde{K}_2 t_k S_{a(p-1)}(r) + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} t_k,$$

其中 $\tilde{K}_2 := KL_{u_0}^{p-1} C_{s,\ p,\ d}$。

在该引理的证明中，我们将使用以下记号：对于给定的函数 f，我们令 t

$$d_y f(x) := f(x+y) - f(x) \quad \text{and} \quad D_y f(x) := f(x+y) + f(x-y) - 2f(x).$$

证明。我们考虑对 $u_{0,\ \delta}$ 进行光滑化，u_0 通过与标准磨子 ρ_δ，$\delta > 0$卷积得到。令 $(U_\delta)^j$ 为具有初始数据 5.7)$u_{0,\ \delta}$的解。于是，

$$\|(U_\delta)^1 - (U_\delta)^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \tau \|\mathcal{L}_h u_{0,\delta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \tau \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.10}$$

定义 $\tilde{U}_\delta^j := U_\delta^{j+1}$。因此，$\tilde{U}_\delta^j$满足方程 (5.7)，其初始条件为 $\tilde{U}_\delta^0 := U_\delta^1$。因此，根据引理 5.4和 (5.10)，

$$\|U_\delta^{j+1} - U_\delta^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \tau \|\mathcal{L}_h u_{0,\delta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \tau \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

更一般地，对于任意 $k \ge 0$，我们有

$$\|U_\delta^{j+k} - U_\delta^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le (k\tau) \|\mathcal{L}_h u_{0,\delta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + (k\tau) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

此外，

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_h u_{0,\rho}(x)| \le & \frac{1}{2} \sum_{0<|y_\beta|<1} (J_p(d_{y_\beta} u_{0,\delta}(x)) - J_p(-d_{-y_\beta} u_{0,\delta}(x))\omega_\beta + \sum_{|y_\beta|\ge 1} J_p(d_{y_\beta} u_{0,\delta}(x))\omega_\beta \\
\le & C \left(\sum_{0<|y_\beta|<1} \max\left\{|d_{y_\beta} u_{0,\delta}(x)|, |d_{-y_\beta} u_{0,\delta}(x)|\right\}^{p-2} |D_{y_\beta} u_{0,\delta}(x)|\omega_\beta + \|u_{0,\delta}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \sum_{|y_\beta|\ge 1} \omega_\beta \right).
\end{aligned}$$

我们首先证明（5.8）。利用 H¨的高阶正则性 u_0 以及 [14,附录 A]中的以下估计

$$|d_{\pm y_\beta} u_{0,\delta}(x)| \le K L_{u_0} \delta^{a-1} |y_\beta|$$

and

$$|D_{y_\beta} u_{0,\delta}(x)| \le K L_{u_0} \delta^{a-2} |y_\beta|^2, \quad K > 0$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_h u_{0,\delta}(x)| &\le C \left((K L_{u_0} \delta^{a-1})^{p-2} K L_{u_0} \delta^{a-2} \sum_{0<|y_\beta|<1} |y_\beta|^p \omega_\beta + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \sum_{|y_\beta|\ge 1} \omega_\beta \right) \\
&\le C \left(K^{p-1} L_{u_0}^{p-1} \delta^{(a-1)(p-2)+a-2} + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \right) \\
&\le C L_{u_0}^{p-1} \delta^{(a-1)(p-2)+a-2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|U_\delta^{j+k} - U_\delta^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le C L_{u_0}^{p-1} \delta^{(a-1)(p-2)+a-2} t_k + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} t_k.$$

此外，

$$\begin{aligned}
\|U^{j+k} - U^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le \|U^{j+k} - U_\delta^{j+k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|U_\delta^{j+k} - U_\delta^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|U^j - U_\delta^j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\le 2L_{u_0} \delta^a + C L_{u_0}^{p-1} \delta^{(a-1)(p-2)+a-2} t_k + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} t_k.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

取 $\delta = \left(\frac{C}{2L_{u_0}^{2-p}t_k}\right)^{\frac{1}{2+\frac{1}{a}(p-2)}}$ 可得（5.8）。为证明（5.9），我们利用 Hölder 正则性，并对 u_0 得到

$$|\mathcal{L}_h u_{0,\delta}| \le L_{u_0}^{p-1}\left(\sum_{0<|y_\beta|<1}|y_\beta|^{a(p-1)}\omega_\beta + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1}\sum_{|y_\beta|\ge 1}\omega_\beta\right) \le 2L_{u_0}^{p-1}C_{s,p,d}S_{a(p-1)}(r). \tag{5.12}$$

证明的其余部分与之前相同：将（5.12）代入（5.11），并在此处取 $\delta = (L_{u_0}^{p-2}C_{s,\,p,\,d}t_k)^{1/a}$。□

通过连续插值，我们以如下连续方式将格式（5.7）延拓到时间变量上：

$$U(x,t) := \frac{t_{j+1}-t}{\tau}U^j(x) + \frac{t-t_j}{\tau}U^{j+1}(x), \quad \text{if } t\in[t_j,t_{j+1}], \text{ for some } j=0,\dots,N. \tag{5.13}$$

注意，对所有 $t\in[t_j,t_{j+1}]$，都有

$$U(x,t) = U(x,t_j) + (t-t_j)\mathcal{L}_h U(x,t_j) + (t-t_j)f(x). \tag{5.14}$$

因此，原格式（5.4）在任意（x，t）$\in Q_T$中均得以保持。

按照 [14, 命题 3。10], 中的相同论证，可得方程 U （5.13）的解满足：

$$\|U\|_{L^\infty(\overline{Q_T})} \le \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + T\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

并且对任意 z，$x\in\mathbb{R}^d$和 t，$\tilde{t}\in[0,T]$，都有

$$|U(x,t)-U(z,\tilde{t})| \le \Lambda_{u_0}(|x-z|) + T\Lambda_f(|x-z|) + C\overline{\Lambda}_{u_0,f}(|\tilde{t}-t|),$$

其中 $\Lambda_{u_0,\,f}$ 由引理5.5得到。由阿尔泽拉-阿斯科利定理，我们得到格式（5.14）数值解的如下收敛性。

推论 5.6。假设 (A_ω)，($A_{u_0,\,f}$) 以及(A_{CFL})。设 U_h 是格式(5.14)的一列解。那么，存在一个子序列 U_{h_i} 和一个函数 $u\in C_b(Q_T)$，使得

$$U_{h_i}\to u \quad \textit{locally uniformly in } \overline{Q_T} \textit{ as } i\to\infty.$$

为完成定理2.8的证明，我们最后证明函数 u 是一个黏性解。我们回顾一下这个概念。

定义5.1。我们称一个有界的下（分别为上）半连续函数 $u: Q_T\to\mathbb{R}$是方程(2.14)的黏性上解（分别为黏性下解），如果

(a) $u(x,0)\ge u_0(x)$（分别地，$u(x,0)\le u_0(x)$），对所有 $x\in\mathbb{R}^d$；*(b)* 若 $(x_0,t_0)\in Q_T$且 $\varphi\in C_b^4(B_R(x_0)\times(t_0-R,t_0+R))\cap L^\infty(Q_T)$，则对于某个满足以下条件的 $R>0$：$\varphi(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)$且 $\varphi(x,t)\le u(x,t)$（分别地，$\varphi(x,t)\ge u(x,t)$），对所有 $(x,t)\in B_R(x_0)\times(t_0-R,t_0)$，

$$\partial_t\varphi(x_0,t_0) + (-\Delta)_p^s\varphi(x_0,t_0) \ge f(x_0) \quad (resp.,\ \partial_t\varphi(x_0,t_0) + (-\Delta)_p^s\varphi(x_0,t_0)\le f(x_0)).$$

最后，黏性解既是黏性上解，也是黏性下解。

定理的证明 2.8。我们沿用定理 [14, 4.1]。我们首先证明 u 是黏性上解。证明 u 是黏性下解的过程类似。

设 φ 是一个光滑测试函数，且存在某个 (x^*,t^*)，使得对所有 $(x,t)\in B_R(x^*)\times(t^*-R,t^*]$，$(x,t)\ne(x^*,t^*)$，都有 $u(x^*,t^*)=\varphi(x^*,t^*)$ 且 $u(x,t)>\varphi(x,t)$。U_h 到 u 的局部一致收敛意味着存在一个收敛到 (x^*,t^*) 的序列 (x^h,t^h)，使得

$$M_h := \varphi(x^h,t^h) - U_h(x^h,t^h) \ge \varphi(x,t) - U_h(x,t) \quad \text{for all } (x,t)\in B_R(x^h)\times(t^h-R,t^h].$$

根据（5.14），对于 $t_j\in\mathcal{T}_\tau$，

$$U_h(x^h,t^h) = U_h(x^h,t_j) + (t^h-t_j)\sum_{\alpha\ne 0}J_p(U_h(x^h+y_\alpha,t_j)-U_h(x^h,t_j))\omega_\alpha + (t^h-t_j)f(x^h). \tag{5.15}$$

定义 $\tilde{U}_h := U_h + M_h$。那么 $\tilde{U}_h$ 也满足格式（5.15），并且由于 $\tilde{U}_h(x^h,\ t^h) = \varphi(x^h,\ t^h)$，我们得到

$$\varphi(x^h,t^h) = \tilde{U}_h(x^h,t_j) + (t^h - t_j)\sum_{\alpha\neq 0} J_p(\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \tilde{U}_h(x^h,t_j))\omega_\alpha + (t^h-t_j)f(x^h).$$

此外，$\tilde{U}_h \geq \varphi$。接下来，我们将证明可以在上述表达式中用 φ 替换 U_h，从而得到

$$\varphi(x^h,t^h) \geq \varphi(x^h,t_j) + (t^h - t_j)\sum_{\alpha\neq 0} J_p(\varphi(x^h+y_\alpha,t_j) - \varphi_h(x^h,t_j))\omega_\alpha + (t^h-t_j)f(x^h). \tag{5.16}$$

然后，在 $h,\ \tau\to 0$ 处对 (5.16) 取极限，并应用定理 2.6 即可完成证明。因此，我们引入函数

$$g(\xi) := \xi + (t^h - t_j)\sum_{\alpha\neq 0} J_p(\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \xi)\omega_\alpha$$

并证明 g 是非递减的。我们将验证，对于 $\xi\in[\varphi(x^h,\ t_j)\ \tilde{U}_h(x^h,\ t_j)]$.，有 $g'(\xi)\geq 0$。注意，

$$g'(\xi) = 1 - (t^h-t_j)(p-1)\sum_{\alpha\neq 0}|\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \xi|^{p-2}\omega_\alpha.$$

接下来，对于 $\xi\in[\varphi(x^h,\ t_j)\ \tilde{U}_h(x^h,\ t_j)]$，我们有

$$\begin{aligned}
|\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \xi| &\leq |\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \tilde{U}_h(x^h,t_j)| + |\tilde{U}_h(x^h,t_j) - \xi| \\
&\leq |\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \tilde{U}_h(x^h,t_j)| + |\tilde{U}_h(x^h,t_j) - \varphi(x^h,t_j)| \\
&\leq |\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,t_j) - \tilde{U}_h(x^h,t_j)| + |U_h(x^h,t_j) - U_h(x^h,t_h)| + |\varphi(x^h,t^h) - \varphi(x^h,t_j)| \\
&\leq \Lambda_{u_0}(|y_\alpha|) + T\Lambda_f(|y_\alpha|) + 3\tilde{\Lambda}_{u_0,f,r}(\tau) + \tau\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中 $\tilde{\Lambda}_{u_0,\ f,\ r}$ 来自引理 5.5，并且我们用到了 $|t^h - t_j|\leq\tau$。现在我们将证明分为两部分。若 $a < sp/(p-1)$，即 $sp - a(p-1) = sp - a(p-2) - a > 0$，则由（$\mathrm{A_{CFL}}$），

$$\begin{aligned}
&3\tilde{\Lambda}_{u_0,f,r}(\tau) + \tau\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])} \\
&\quad\leq \tau(3\tilde{K}_2 S_{a(p-1)}(r) + 3\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])}) \\
&\quad\leq r^a K_{s,p,d} r^{sp-a(p-1)}(3\tilde{K}_2 S_{a(p-1)}(r) + 3\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])}) \\
&\quad\leq r^a\left(3\tilde{K}_2 + 1\right).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

另一方面，若 $a\geq sp/(p-1)$，则

$$\begin{aligned}
&3\tilde{\Lambda}_{u_0,f,r}(\tau) + \tau\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])} \\
&\quad\leq \tau(3\tilde{K}_2 S_{a(p-1)}(r) + 3\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])}) \\
&\quad\leq r^a K_{s,p,d}\frac{(3\tilde{K}_2 S_{a(p-1)}(r) + 3\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(B_R(x^h)\times[t^*-R,t^*+R])})}{|\log(r)|} \\
&\quad\leq r^a\left(3\tilde{K}_2 + 1\right).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

上述计算对所有 r 足够小的情形都成立，常数 K_2 来自引理5.5。接下来，在 g' 的表达式中，我们将对5.17）和（5.18）（或（5.19））应用估计 $|y_\alpha|<1$，并将在剩余区域内对 $|\tilde{U}_h(x^h+y_\alpha,\ t_j) - \xi|^{p-2}$ 进行一致有界估计。因此，

$$
\begin{aligned}
g'(\xi) \geq 1 - \tau(p-1)\Bigg(& \sum_{0<|y_\alpha|<r} (\Lambda_{u_0}(|y_\alpha|) + T\Lambda_f(|y_\alpha|) + (3\tilde{K}_2+1)r^a)^{p-2}\omega_\alpha \\
& + \sum_{r\leq|y_\alpha|\leq 1} (\Lambda_{u_0}(|y_\alpha|) + T\Lambda_f(|y_\alpha|) + (3\tilde{K}_2+1)r^a)^{p-2}\omega_\alpha \\
& + 2^{p-2}\left(L_{u_0} + TL_f + 1\right)^{p-2} \sum_{|y_\alpha|\geq 1} \omega_\alpha \Bigg) \\
\geq 1 - \tau(p-1)(L_{u_0} + TL_f + 3\tilde{K}_2 + 1)^{p-2} & C_{s,p,d}\left(r^{a(p-2)-sp} + S_{a(p-2)}(r) + 2^{p-2}\right) \\
\geq 1 - \frac{1}{2^{p-1}} & > 0
\end{aligned}
$$

这里我们用到了（5.2）、$\tau r^{a(p-2)-sp} \leq K_s$这一事实，$d$，$p$，并且取 r 足够小。因此，$g' \geq 0$ 在 [φ（x^h，t_j）$\tilde{U}_h$（x^h，t_j）]。证明至此结束。□

Acknowledgements

这三　位作者获得了项目 SI3-PJI-2021-00324 的部分资助，该项目由马德里大学 r-sidad Aut´o 自治区支持。

F. del Teso 获得西班牙政府通过 RYC2020-029589-I. 和由 MICIN/AEI 资助的 PID2021-127105NB-I00 项目提供的支持。本文部分内容基于瑞典研究委员会资助项目（编号 2016-06596）支持的研究成果；当时 F. del Teso 正在瑞典 Djursholm 的 Institut Mittag-Leffler 访问，并参与了 2022 年秋季举办的“非线性偏微分方程的几何 аспект”研究项目。

M. MEDINA 部分获得了项目 PDI2019-110712GB-100（西班牙 MICINN）以及项目 RYC2020-030410-I 的资助。

P. OCHOA 部分获得了 CONICET 的资助。

References

[1] F. Andreu-Vaillo、J. M. Maz´on、J. D. Rossi 和 J. J. Toledo-Melero。《非局部扩散问题》，《数学调查与专著》第 165 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛；西班牙皇家数学学会，马德里，2010 年。[2] B. Barrios 和 M. Medina。分数阶非齐次问题中弱解与黏性解的等价性。《数学年鉴》，381(3-4):1979–2012，2021 年。[3] J. P. Borthagaray、W. Li 和 R. H. Nochetto。Lipschitz 域上的分数阶椭圆问题：正则性与近似。《*arxiv.org/abs/2212.14070*》，2022 年。[4] C. Bucur 和 M. Squassina。分数阶 p-拉普拉斯算子及梯度相关非局部算子的渐近展开。《当代数学通讯》，24(4):论文编号 2150021，共 34 页，2022 年。[5] L. Bungert、J. Calder 和 T. Roith。图上 Lipschitz 学习的统一收敛速率。《*IMA* 数值分析杂志》，2022 年 9 月。drac048。[6] O. Ciaurri、L. Roncal、P. R. Stinga、J. L. Torrea 和 J. L. Varona。非局部离散扩散方程与分数阶离散拉普拉斯算子：正则性及应用。《数学进展》，330:688–738，2018 年。[7] L. Codenotti、M. Lewicka 和 J. Manfredi。双障碍问题的离散近似与拔河博弈的最优停止。《美国数学会汇刊》，369(10):7387–7403，2017 年。[8] F. del Teso、J. Endal 和 E. R. Jakobsen。孔隙介质型非局部（及局部）方程的稳健数值方法。第二部分：格式与实验。《*SIAM* 数值分析杂志》，56(6):3611–3647，2018 年。[9] F. del Teso、J. Endal 和 E. R. Jakobsen。孔隙介质型非局部（及局部）方程的稳健数值方法。第一部分：理论。《*SIAM* 数值分析杂志》，57(5):2266–2299，2019 年。

[10] F. del Teso、J. Endal 和 M. Lewicka。分数阶无穷拉普拉斯算子的渐近展开。《渐近分析》，127(3):201–216，2022 年。[11] F. del Teso、D. G´omez-Castro 和 J. L. V´azquez。分数阶 p-拉普拉斯算子的三种表示：半群、延拓和 Balakrishnan 公式。《分数阶微积分与应用分析》，24(4):966–1002，2021 年。[12] F. del Teso 和 E. Lindgren。变分 p-拉普拉斯算子的平均值公式。《NoDEA 非线性微分方程及其应用》，28(3):论文编号 27，共 33 页，2021 年。[13] F. del Teso 和 E. Lindgren。变分 p-拉普拉斯算子的有限差分法。《科学计算杂志》，90(1):论文编号 67，共 31 页，2022 年。[14] F. del Teso 和 E. Lindgren。抛物型 p-拉普拉斯方程的有限差分格式。《SeMA 杂志》，2022 年。[15] F. del Teso、J. J. Manfredi 和 M. Parviainen。 p-拉普拉斯算子的动态规划原理的收敛性。《高级变分学》，15(2):191–212，2022 年。[16] J. Droniou。分形守恒律的一种数值方法。《数学计算》，79(269):95–124，2010 年。[17] Y. Huang 和 A. Oberman。分数阶拉普拉斯算子的数值方法：有限差分—求积方法。《SIAM 数值分析杂志》，52(6):3056–3084，2014 年。[18] A. Iannizzotto、S. Mosconi 和 M. Squassina。分数阶 p-拉普拉斯算子的全局 H¨older 正则性。《伊比利亚美洲数学评论》，32(4):1353–1392，2016 年。[19] H. Ishii 和 G. Nakamura。一类积分方程及 p-拉普拉斯方程的近似。《变分法与偏微分方程》，37(3-4):485–522，2010 年。[20] C. Ju 和 B. Zhang。通过 Clark 定理研究分数阶离散 p-拉普拉斯方程。《应用数学与计算》，434:127443，2022 年。[21] X. Ju、H. Die 和 M. Xiang。离散分数阶 p-拉普拉斯方程的 Nehari 流形方法。《差分方程进展》，第 559 号论文，共 21 页，2020 年。[22] B. Kawohl、J. Manfredi 和 M. Parviainen。平均意义下非线性偏微分方程的解。《纯粹与应用数学杂志》(9)，97(2):173–188，2012 年。[23] J. Korvenp¨a¨a、T. Kuusi 和 E. Lindgren。分数阶 p-拉普拉斯型方程解的等价性。《纯粹与应用数学杂志》(9)，132:1–26，2019 年。[24] M. Lewicka。《含随机噪声的拔河博弈教程》。Universitext。施普林格，查姆， [2020]©2020。引言与基本构造。[25] M. Lewicka。几何分数阶 p-拉普拉斯算子的含噪声非局部拔河博弈。《差分方程进展》，27(1-2):31–76，2022 年。[26] W. Li 和 A. J. Salgado。归一化无穷拉普拉斯算子及相关方程的收敛方法及其速率，2022 年。[27] J. J. Manfredi、M. Parviainen 和 J. D. Rossi。p-调和函数的渐近平均值刻画。《美国数学会会刊》，138(3):881–889，2010 年。[28] A. M. Oberman。无穷拉普拉斯算子的收敛差分格式：绝对极小 Lipschitz 延拓的构造。《数学计算》，74(251):1217–1230，2005 年。[29] A. M. Oberman。无穷拉普拉斯方程和 p-拉普拉斯方程的有限差分方法。《计算与应用数学杂志》，254:65–80，2013 年。[30] J. L. V´azquez。 $\mathbb{R}^N$中的演化分数阶 p-拉普拉斯方程：基本解与渐近行为。《非线性分析》，199:112034，共 32 页，2020 年。[31] J. L. V´azquez。次线性情形下 $\mathbb{R}^N$ 中的分数阶 p-拉普拉斯演化方程。《变分法与偏微分方程》，60(4):论文编号 140，共 59 页，2021 年。[32] J. L. V´azquez。快速扩散范围内分数阶 p-拉普拉斯方程的增长解。《非线性分析》，214:论文编号 112575，共 35 页，2022 年。

（F. del Teso） Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Ciudad Universitaria deCantoblanco, 28049 Madrid, Spain*Email address*: fdelteso@ucm.es*URL*: https://sites.google.com/view/felixdelteso（M.Medina） Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Ciudad Universitaria de Can-toblanco, 28049 Madrid, Spain*Email address*: maria.medina@uam.es（P. OCHOA） Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo-CONICET, 5500 Mendoza, Argentina*Email address*: pablo.ochoa@ingenieria.uncuyo.edu.ar