arXiv:2303.02520v1 [math.NT] 4 Mar 2023

解析数论中的修正贝塞尔函数

BRUCE C. BERNDT、ATUL DIXIT、RAJAT GUPTA、ALEXANDRU ZAHARESCU

谨以此文纪念 *Richard A. Askey*

摘要。修正贝塞尔函数 $K_\nu(z)$，或简称 K-贝塞尔函数，在解析数论中许多关键领域都有所出现。特别是，它们出现在优美的算术恒等式中。本文综述这些算术恒等式及其在数论中的体现。

1. 第一作者的回忆

我在威斯康星大学攻读博士学位期间结识了 Richard Askey，当时我正在撰写博士论文 [6], ，其中贝塞尔函数发挥着重要作用。我们的友谊始于以下两种情况之一：要么是我就贝塞尔函数向他寻求帮助，要么（更有可能的是）他得知我正在深入研究贝塞尔函数，并想看看我在利用它们做些什么。尽管我无法确切指出自己从 Dick 那里学到了哪些有关贝塞尔函数的具体知识，但我的收获十分丰富；他当然还指引我阅读沃森专著 [81] ，以便进一步学习。总之，我们的友谊始于1965年，也就是我撰写博士论文期间。

我的论文六章中有五章涉及普通贝塞尔函数 $J_\nu(x)$，而第六章则以修正贝塞尔函数 $K_\nu(x)$ 为重点。我发表的第一篇论文刊登于《爱丁堡数学会会刊》，其内容基于我论文第六章中的定理 6.1。在下面这篇综述中，将介绍贝塞尔函数 $K_\nu(x)$ 出现在解析数论或相关分析中的各种情形；定理 7.1 是我论文中定理 6.1 的推广 [6]。

2. 引言

普通贝塞尔函数 $J_\nu(z)$、第二类贝塞尔函数 $Y_\nu(z)$、虚宗量贝塞尔函数 $I_\nu(z)$以及修正贝塞尔函数 $K_\nu(z)$ 分别定义于 [81,第 40, 64, 77, 78]页。

$$J_\nu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z)(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu \notin \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

$$Y_n(z) := \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.3}$$

$$I_\nu(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu+2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.4}$$

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \quad z \in \mathbb{C}, \nu \notin \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$K_n(z) := \lim_{\nu \to n} K_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

如 $z \to \infty$、 $J_\nu(z)$、 $Y_\nu(z)$、 $I_\nu(z)$和 $K_\nu(z)$ 具有如下渐近公式： [81, 第199、202页],

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \tag{2.7}$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin(z - \tfrac{1}{2}\nu\pi - \tfrac{1}{4}\pi) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \tag{2.8}$$

$$I_\nu(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \tag{2.9}$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right). \tag{2.10}$$

$J_\nu(z)$ 和 $K_\nu(z)$ 都出现在解析数论中的若干问题和恒等式中。特别是，正如 (2.7) 中出现的余弦函数所表明的，普通贝塞尔函数出现在涉及圆对称、球对称或柱面对称性的问题中。正如 (2.10) 所示，修正贝塞尔函数的快速衰减表明，它们可能出现在求和公式中，也可能出现于通常会涉及θ函数的情形。正如本文标题所示，本文将关注解析数论中涉及修正贝塞尔函数的问题和恒等式。

在本文中， $\sigma = \mathrm{Re}(s)$。

3. 狄利克雷除数问题

令 $d(n)$ 表示正整数 n的正因子个数。设

$$D(x) := \sum_{n \le x}{}' d(n),$$

其中，求和符号上的撇号 $'$ 表示：如果 x 是整数，则只计入 $\frac{1}{2}d(x)$。从历史上看，修正贝塞尔函数或许最早出现在数论中的实例，是“Voronoĭ 恒等式”；该恒等式最初由 G. F. Voronoĭ [78] 于1904年 证明。对于 $x > 0$，它表示为

$$D(x) = x\left(\log x + 2\gamma - 1\right) + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1/2} M_1(4\pi\sqrt{nx}), \tag{3.1}$$

其中， γ 表示欧拉常数，而 $M_1(z)$ 定义为

$$M_\nu(z) := -Y_\nu(z) - \frac{2}{\pi} K_\nu(z). \tag{3.2}$$

定义“误差项” $\Delta(x)$ 为

$$D(x) = x\left(\log x + 2\gamma - 1\right) + \frac{1}{4} + \Delta(x). \tag{3.3}$$

注意， $\Delta(x)$ 可由 (3.1) 右端的贝塞尔函数级数表示。当 $x \to \infty$ 时，求 $\Delta(x)$ 的数量级是著名的、尚未解决且极其困难的狄利克雷除数问题。人们猜想，对于每个 $\epsilon > 0$,

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}), \qquad x \to \infty.$$

大多数试图求出当 $x \to \infty$ 时 $\Delta(x)$ 上界的方法，本质上都依赖于对 (3.1) 中无穷级数的部分和进行估计。由 (2.8) 和 (2.10) 可知，渐近公式 (2.8) 是估计 $\Delta(x)$ 的关键要素。目前最好的结果归功于 M. N. Huxley [44], ，他证明了

$$\Delta(x) = O(x^{131/416+\epsilon}),$$

对每个 $\epsilon > 0$ 都成立。注意, $\frac{131}{416} = .3149\ldots$。关于狄利克雷除数问题的大量研究综述可见 [18]。

A. Ivi´c [48] 和 S. Egger n´e Endres 与 F. Steiner [36],给出了（3.1）的其他证明。J. Steuding [75]撰写了一篇关于 Voronoĭ 生平与工作的综述文章。

4. 拉马努金失传笔记中的一个恒等式

在与其失传笔记一同发表的一页上 [71, 第 335], 页，拉马努金记录了两个涉及贝塞尔函数双重无穷级数的恒等式。第一个与高斯的经典圆问题 有关，第二个则与狄利克雷除数问题有关。为了陈述拉马努金记录的后一个公式，先定义

$$F(x) = \begin{cases} [x], & \text{if } x \text{ is not an integer,} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{if } x \text{ is an integer,} \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $[x]$ 是 x的整数部分。

定理 4.1。 若 $F(x)$ 由(4.1)定义，则对于 $x > 0$ 和 $0 < \theta < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x}{n}\right)\cos(2\pi n\theta) = \frac{1}{4} - x\log(2\sin(\pi\theta)) + \frac{1}{2}\sqrt{x}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{M_1\left(4\pi\sqrt{m(n+\theta)x}\right)}{\sqrt{m(n+\theta)}} + \frac{M_1\left(4\pi\sqrt{m(n+1-\theta)x}\right)}{\sqrt{m(n+1-\theta)}}\right), \tag{4.2}$$

其中 $M_1(z)$ 由(3.2)定义。

为简便起见，假设 x 不是整数。通过一个初等论证，我们观察到

$$D(x) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n} 1 = \sum_{dj\le x} 1 = \sum_{d\le x}\sum_{1\le j\le x/d} 1 = \sum_{d\le x}\left[\frac{x}{d}\right]. \tag{4.3}$$

在 (4.2) 中令 $\theta = 0$ ，我们看到 (4.2) 的左边是 (4.3) 的推广，而右边则包含了一个二元类比式，其形式类似于 (3.1) 右边的级数。我们猜想拉马努金建立 (4.2) 是为了研究狄利克雷除数问题，但他没有留下任何关于动机或尝试证明的记录。(4.2) 唯一的证明由李俊贤、第一作者和第四作者给出，而且难度很大 [20]。

在 [20], 第一作者、Martino Fassina、Sun Kim 和第四作者的思想基础上 [16], 他们建立了若干恒等式，用贝塞尔函数表示某些三角函数的有限和。我们给出一个例子 [16, 第 6 页，定理 2。4]。

定理 4.2. 设 $M_1(z)$ 由 (3.2) 定义。若 $0 < \theta$、 $\sigma < 1$ 和 $x > 0$, 则

$$\begin{aligned}&{\sum_{nm\le x}}' \cos(2\pi n\theta)\cos(2\pi m\sigma) \\ =&\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x}}{4}\sum_{n,m\ge 0}\left\{\frac{M_1(4\pi\sqrt{(n+\theta)(m+\sigma)x})}{\sqrt{(n+\theta)(m+\sigma)}} + \frac{M_1(4\pi\sqrt{(n+1-\theta)(m+\sigma)x})}{\sqrt{(n+1-\theta)(m+\sigma)}}\right. \\ &\left. + \frac{M_1(4\pi\sqrt{(n+\theta)(m+1-\sigma)x})}{\sqrt{(n+\theta)(m+1-\sigma)}} + \frac{M_1(4\pi\sqrt{(n+1-\theta)(m+1-\sigma)x})}{\sqrt{(n+1-\theta)(m+1-\sigma)}}\right\}.\end{aligned}$$

5. Voronoĭ 求和公式

在他的两篇长篇论文中， [78], Voronoĭ 建立了一个比 (3.1) 更一般的结果，称为 *Voronoĭ* 求和公式。若 $f(x)$ 是一个适当的函数，则 Voronoĭ 证明了

$$\sum_{j=0}^{\infty} d(j)f(j) = \int_0^{\infty} (2\gamma + \log x) f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \int_0^{\infty} f(x) \left\{ K_0(4\pi\sqrt{nx}) - \frac{1}{2}\pi Y_0(4\pi\sqrt{nx}) \right\} dx, \tag{5.1}$$

其中 $Y_0(z)$ 和 $K_0(z)$ 分别由 (2.3) 和 (2.6) 定义，而 γ 表示欧拉常数。可以建立 (5.1) 的其他形式，其中对 $[0, \infty)$ 的求和与积分改为在有限区间上进行。Voronoĭ 求和公式让人联想到泊松求和公式；事实上，已有利用泊松求和公式证明 (5.1) 的方法，例如参见[55] 和 [43]。N.S. Koshliakov [51]于 1929年给出了一个特别简短的 (5.1) 证明。他在一系列论文中应用了 (5.1)。

我们按照 (3.1) 的思路，给出 (5.1) 的一个特例。

K. Soni [74] 以及随后 S. Yakubovich [84, 第 379] 页证明，对于 $y > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ K_0(2\sqrt{yn}) - 2y \frac{\log(4\pi^2 n/y)}{(4\pi^2 n)^2 - y^2} \right\} = \frac{1}{8} \log\left(\frac{4\pi^2}{y}\right) - \frac{\log\sqrt{y}}{y} - \frac{y}{4}. \tag{5.2}$$

然而，这个恒等式最早由 Voronoĭ [78, 式（5）、（6）]建立。它也见于拉马努金遗失的笔记本 [71, 第 254]页。

A另一个特殊情形由 Koshliakov公式给出，稍后将在定理13.2中介绍。

定义广义除数函数 $d_k(n)$如下：

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}, \quad \sigma > 1.$$

特别是， M. Jutila [49], A. Ivi´c [47], 和 X. Li [57] 研究了三元除数问题，即求出下列对象的“误差项”的界：

$$\sum_{n \le x} d_3(n).$$

为研究这个问题， Jutila [49] 提出了（5.1）的一个类比式。

现有文献中已出现许多 Voronoĭ 求和公式的类比和推广，它们是在各种条件下、截然不同的背景中建立的。例如，可参阅以下论文： E. Assing [1]； E. Assing 和 A. Corbett [2]； D. Banerjee、E. M. Baruch 和 D. Bump[3]； D. Banerjee、E. M. Baruch 和 E. Tenetov [4]； B. C. Berndt [10]； S. Bettin 和 J. B. Conrey[21]； A. Corbett [26]； A. Dixit、B. Maji 和 A. Vatwani [33]； D. Goldfeld 和 X. Li [37], [38], [39]； A. Ichino 和 N. Templier [45]； E. M. Kıral 和 F. Zhou [50]； N. S. Koshliakov [52]； A. G. F. Lau- rinˇcikas [56]； T. Meurman [59]； S. D. Miller 和 W. Schmid [62], [60], [61], [62]； S. D. Miller 和 F. Zhou [63]； Z. Qi [69]； N. Templier [77]； C. Nasim [65]； T. Watanabe [79]； T. A. Wong [82]； S. Yakubovich [83], [85]； V. Zacharovas [86]； 以及 F. Zhou [89]。

6. θ 反演公式的一个类似形式

考虑 K. Chandrasekharan 和 R. Narasimhan [23] 研究的一类算术函数。设 $a(n)$ 和 $b(n)$, $1 \le n < \infty$，为两个不全为零的复数序列。令

$$\varphi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\lambda_n^s}, \quad \sigma > \sigma_a; \qquad \psi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\mu_n^s}, \quad \sigma > \sigma_a^*, \tag{6.1}$$

其中， $\sigma = \mathrm{Re}(s)$， $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 是两个正数序列，且各自趋于 ∞；σ_a 和 σ_a^* 分别是 $\varphi(s)$和 $\psi(s)$的（有限）绝对收敛横坐标。假设 $\varphi(s)$和 $\psi(s)$可解析延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$ ，并且在$\mathbb{C}$ 上除有限个极点集合$\mathbf{S}$ 外均为解析函数。设对于某个 $\delta > 0$， $\varphi(s)$和 $\psi(s)$满足如下形式的函数方程

$$\chi(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) = (2\pi)^{s-\delta}\Gamma(\delta - s)\psi(\delta - s). \tag{6.2}$$

Chandrasekharan 和 Narasimhan 证明了，函数方程（6.2）等价于以下“模”关系

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{-\lambda_n x} = \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} b(n)e^{-4\pi^2\mu_n/x} + P(x), \qquad \mathrm{Re}(x) > 0, \tag{6.3}$$

其中

$$P(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} (2\pi)^z \chi(z) x^{-z} dz,$$

其中， $\mathcal{C}$ 是一条或多条包围$\mathbf{S}$中所有点的曲线。

Chandrasekharan 和 Narasimhan 还证明了，(6.2) 和 (6.3) 等价于下述恒等式，该恒等式涉及下方左侧出现的黎斯和。设 $x > 0$ 和 $\rho > 2\sigma_a^* - \delta - \frac{1}{2}$。那么，函数方程 (6.2) 等价于黎斯和 恒等式

$$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)} {\sum_{\lambda_n \le x}}' a(n)(x - \lambda_n)^{\rho} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \left(\frac{x}{\mu_n}\right)^{(\delta+\rho)/2} J_{\delta+\rho}(4\pi\sqrt{\mu_n x}) + Q_{\rho}(x), \tag{6.4}$$

其中，贝塞尔函数 $J_\nu(z)$ 在 (2.1) 中定义，左侧求和符号上的撇号表示：若 $\rho = 0$ 和 $x \in \{\lambda_n\}$，则只计入 $\frac{1}{2}a(x)$。此外， $Q_\rho(x)$ 定义为

$$Q_{\rho}(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\chi(z)(2\pi)^z x^{z+\rho}}{\Gamma(\rho+1+z)} dz, \tag{6.5}$$

其中， $\mathcal{C}$ 是环绕$\mathbf{S}$的一条或多条曲线。

换言之，若 $a(n)$ 和 $b(n)$ 是由满足 (6.2)、(6.3) 或 (6.4) 之一的狄利克雷级数生成的两列算术函数，则其余两个关系也成立。

满足 (6.2) 和 (6.3) 的算术函数 $a(n)$ 和 $b(n)$ 还满足一种“模”关系，其中指数函数大致被修正贝塞尔函数所取代。更准确地说，本文作者证明了以下定理 [14, 定理 4.1]。

定理 6.1。 设 $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ 且 $\mathrm{Re}(c)$,$\mathrm{Re}(r) > 0$。假设下列积分绝对收敛。则，

$$\frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(c^2+\lambda_n)^{(\nu-1)/2}} K_{\nu-1}(4\pi r\sqrt{c^2+\lambda_n})$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{\nu} c^{\nu-\delta-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{(r^2+\mu_n)^{(\delta-\nu+1)/2}} K_{\delta+1-\nu}(4\pi c\sqrt{r^2+\mu_n})$$

$$+\int_0^\infty Q_0(x)(c^2+x)^{-\nu/2}K_\nu(4\pi r\sqrt{c^2+x})dx, \tag{6.6}$$

其中 $Q_0(x)$ 由(6.5)定义。

作者还证明了一个稍微一般化的定理，此处不予列出。第一作者的论文中首次陈述并证明了定理 6.1 [9, pp. 343–344]。利用 Voronoï 求和公式 (5.1) [12], [10,p. 154]，也可以证明定理 6.1。

若令 $\nu = 1/2$ 并应用特殊情形 [81, pp. 79, 80]

$$K_{1/2}(z) = K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}, \tag{6.7}$$

经过一些初等变换，我们得到恒等式

$$\sum_{n=1}^\infty a(n)e^{-4\pi r\sqrt{c^2+\lambda_n}} = 2^{3/2}c^{\delta+1/2}r\sum_{n=1}^\infty \frac{b(n)}{(r^2+\mu_n)^{(\delta+1/2)/2}}K_{\delta+1/2}(4\pi c\sqrt{r^2+\mu_n})$$
$$+ 2\pi r\int_0^\infty Q_0(x)\frac{e^{-4\pi r\sqrt{c^2+x}}}{\sqrt{c^2+x}}dx,$$

这或许可以与 (6.3) 相比较。

模关系 (6.3) 优美的不对称性，也体现于 (6.6) 及我们综述中的其他 K-贝塞尔函数恒等式。

我们给出两个例子来说明 (6.6)。每个例子的详细内容见 [14]。令$r_k(n)$ 表示正整数 n 表示为 k 个平方之和的表示数，其中，项的次序不同或符号不同的表示均视为不同。例如，若 $k = 2$,

$$5 = (\pm2)^2 + (\pm1)^2 = (\pm1)^2 + (\pm2)^2,$$

因此 $r_2(5) = 8$。采用 (6.1) 和 (6.2) 中的记号， $\delta = k/2$ 且 $\lambda_n = \mu_n = n/2$。若进一步定义 $r_k(0) = 1$，并将 ν 替换为 $\nu+1$，则 (6.6) 得到恒等式

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{r_k(n)}{(c^2+n/2)^{\nu/2}}K_\nu(4\pi r\sqrt{c^2+n/2})$$
$$= \frac{1}{r^\nu c^{\nu-k/2}}\sum_{n=0}^\infty \frac{r_k(n)}{(r^2+n/2)^{(k/2-\nu)/2}}K_{k/2-\nu}(4\pi c\sqrt{r^2+n/2}). \tag{6.8}$$

恒等式 (6.8) 最初由第一作者、Y. Lee 和 J. Sohn 证明 [19, 第 39 页，公式 (5.5)]。特殊情形 $k = 2$ 最初由 A. L. Dixon 和 W. L. Ferrar 于 1934年证明 [34, 第 53 页，公式 (4.13)] 。Oberhettinger 和 Soni 还给出了 $k = 2$ 的另一种证明 [66, 第 24] 页。

其次，回顾一下，拉马努金的算术函数 $\tau(n)$ 定义为

$$\sum_{n=1}^\infty \tau(n)q^n := \Delta(z) = q\prod_{n=1}^\infty (1-q^n)^{24}, \tag{6.9}$$

其中 $q = e^{2\pi iz}$ 满足 $z \in \mathbb{H}$，也就是说 $|q| < 1$. 按照 (6.1) 和 (6.2) 的记号， $\lambda_n = \mu_n = n$ 以及$\delta = 12$. 应用定理 6.1 并将 ν替换为 $\nu+1$，我们推得，当 Re(ν)，Re(c)，Re(r) > 0 时，

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{(c^2+n)^{\nu/2}}K_\nu(4\pi r\sqrt{c^2+n}) = \frac{1}{r^\nu c^{\nu-12}}\sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{(r^2+n)^{(12-\nu)/2}}K_{12-\nu}(4\pi c\sqrt{r^2+n}). \tag{6.10}$$

关于 (6.10) 的证明细节，可参见 [14] 或 [19], ，其中首次给出了 (6.10) 的证明。

参考文献 [14] 还给出了 $\sigma_k(n)$ 的 (6.6) 的示例，即:

$$\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k; \tag{6.11}$$

偶本原特征和奇本原特征 $\chi(n)$；以及 $F(n)$，虚二次数域中范数为 n 的整理想的数量。

7. 另一个令人联想到模关系（6.3）的恒等式

下面的定理 7.1 是定理 6.1 的一个类似结论。定理 7.1 及其一个推广已在 [13, 定理 4.1、3.1]中得到证明。

定理 7.1。设 $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ 且 $\mathrm{Re}(s) > 0$。此外，假设 $\delta + \nu + 1 > \sigma_a^* > 0$。设下面右侧的积分绝对收敛。则，

$$\begin{aligned}\frac{2}{s}\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\lambda_n^{(\nu+1)/2} K_{\nu+1}(s\sqrt{\lambda_n}) =& 2^{3\delta+\nu+1} s^{\nu}\pi^{\delta}\Gamma(\delta+\nu+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{(s^2+16\pi^2\mu_n)^{\delta+\nu+1}} \\ &+ \int_0^{\infty} Q_0(x) x^{\nu/2} K_{\nu}(s\sqrt{x})dx,\end{aligned}$$

其中 $Q_0(x)$ 由(6.5)定义。

定理 7.1 的第一个版本由第一作者在 [7, p. 311] 中证明；另见第一作者的另一篇论文 [9, p. 342]。定理 7.1 是通过 [10,p. 154] 中的 Voronoï 求和公式证明的。

请注意，定理 6.1 和定理 7.1 都可以视为涉及赫尔维茨ζ函数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$ 的类似函数的恒等式，其中 $\sigma > 1$ 和 $a > 0$。

仿照上一节中的例子，我们为定理 7.1 给出两个相应的例证。首先，令 $a(n) = r_k(n)$。那么 $\delta = k/2$ 和 $\lambda_n = \mu_n = n/2$。设 $s = 2\pi\sqrt{2\beta}$，其中 $\mathrm{Re}(\sqrt{\beta}) > 0$。那么，当 $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_k(n) n^{(\nu+1)/2} K_{\nu+1}\left(2\pi\sqrt{n\beta}\right) = \frac{\beta^{(\nu+1)/2}\Gamma(\nu+1+k/2)}{2\pi^{k/2+\nu+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_k(n)}{(\beta+n)^{k/2+\nu+1}}. \tag{7.1}$$

恒等式 (7.1) 最早由 A. I. Popov [68, 公式 (6)] 于 1935 年证明。另见 [15, 第 329 页，推论 4。6], 其中 (7.1) 是通过完全不同的方法得到证明的。

令 $k = 2$ 和 $\nu = -1/2$ 如上。令 $s = 2\pi\sqrt{\beta}$，即可恢复定理 7.1 中的记号。于是，当 $\mathrm{Re}(s) > \overline{0}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_2(n) e^{-s\sqrt{n}} = 2\pi s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{(s^2+4\pi^2 n)^{3/2}}, \tag{7.2}$$

采用 Hardy 的记号 [41], , 他利用 (7.2) 为高斯的圆问题中的误差项（类似于 (3.3)）建立了一个下界。（如 [41], 所示，恒等式 (7.2) 也可由拉马努金的一个恒等式推出。）

再举一个定理 7.1 的例子，令 $a(n) = \tau(n)$。因此，我们可以立即推出恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n) n^{(\nu+1)/2} K_{\nu+1}(s\sqrt{n}) = 2^{36+\nu} s^{\nu+1}\pi^{12}\Gamma(13+\nu)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{(s^2+16\pi^2 n)^{\nu+13}}. \tag{7.3}$$

特别地，令 $\nu=-1/2$。那么，由 (7.3) 和 (6.7) 可得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)e^{-s\sqrt{n}}=2^{36}\pi^{23/2}\Gamma\left(\frac{25}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s\tau(n)}{(s^2+16\pi^2n)^{25/2}}. \tag{7.4}$$

恒等式 (7.4) 最初由 Chandrasekharan 和 Narasimhan 提出 [23, 第 16 页，公式 (56)]。

8. First Analogue of the Riesz Sum Identity (6.4)

In 采用记号 (6.1)，假设 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 满足如下形式的函数方程

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}(s+1))\varphi(s)=\Gamma^2(\tfrac{1}{2}(2-s))\psi(1-s). \tag{8.1}$$

对于任意 ν，令

$$G_\nu(x)=Y_\nu(x)+\frac{2}{\pi}e^{\pi i\nu}K_\nu(x). \tag{8.2}$$

以下定理证明见 [9, 定理 5.1，第 333] 页。

定理 8.1。设 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 满足 (8.1)，并令 ρ 表示一个正整数。则对于 $\rho>2\sigma_a^*-\frac{3}{2}$，

$$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}{\sum_{\lambda_n\le x}}'a(n)(x-\lambda_n)^\rho=2^{-\rho}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\left(\frac{x}{\mu_n}\right)^{(\rho+1)/2}G_{\rho+1}(4\sqrt{\mu_n x})+Q_\rho(x), \tag{8.3}$$

其中 $G_{\rho+1}(x)$ 由(8.2)定义，而 $Q_\rho(x)$ 由

$$Q_\rho(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Gamma(z)\psi(z)x^{z+\rho}}{\Gamma(\rho+1+z)}dz,$$

并且 $\mathcal{C}$ 是包含被积函数所有极点的闭曲线。

我们举一个例子，但不明确写出。读者可以很容易地将相应参数代入 (8.3)。令 χ 表示模k的非主奇本原特征。令 $L(s,\chi)$表示相应的狄利克雷 L-函数。这里，

$$\varphi(s)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-(s+1)}L^2(s,\chi).$$

由于 $L(s,\chi)$是整函数，$Q_\rho(x)\equiv 0$。于是 [27, p. 71], $\lambda_n=\mu_m=\pi n/k$,

$$a(n)=\frac{k}{\pi}\sum_{rs=k}\chi(r)\chi(s)\quad\text{and}\quad b(n)=\frac{k}{\pi}\frac{i\sqrt{k}}{G(\chi)}\sum_{rs=k}\overline{\chi}(r)\overline{\chi}(s),$$

而 $G(\chi)$是高斯和

$$G(\chi)=\sum_{j=1}^{k}\chi(j)e^{2\pi ij/k}.$$

9. 里斯求和恒等式 (6.4) 的第二个类比

在记号（6.1）中，设 $\varphi(s)$和 $\psi(s)$满足如下形式的函数方程

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\Gamma(\tfrac{1}{2}(s-p))\varphi(s)=\Gamma(\tfrac{1}{2}(1-s))\Gamma(\tfrac{1}{2}(p+1-s))\psi(p+1-s), \tag{9.1}$$

其中 p 为整数。对于任意 ν 和任意整数 p，定义

$$F_{\nu,p}(x):=\cos(\tfrac{1}{2}(p+1)\pi)J_{p+\nu}(x)-\sin(\tfrac{1}{2}(p+1)\pi)\left\{Y_{p+\nu}(x)-\frac{2}{\pi}e^{\pi i\nu}K_{p+\nu}(x)\right\}. \tag{9.2}$$

类似于 (6.4)，有如下定理 [9, 定理 6.1，第 336] 页。

定理 9.1。 设 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 满足 (9.1)。设 ρ 表示一个正整数，且 $x>0$。则，对任意 $\rho>2\sigma_a^*-p-\frac{3}{2}$，

$$\frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\sum_{\lambda_n\le x}{}'a(n)(x-\lambda_n)^\rho=2^{-\rho}\sum_{n=1}^{\infty}b(n)\left(\frac{x}{\mu_n}\right)^{(\rho+p+1)/2}F_{\rho+1,p}(4\sqrt{\mu_n x})+Q_\rho(x),$$

其中 $F_{\rho+1,\ p}(x)$ 由（9.2）定义， $Q_\rho(x)$ 由

$$Q_\rho(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Gamma(z)\psi(z)x^{z+\rho}}{\Gamma(\rho+1+z)}dz,$$

且 $\mathcal{C}$ 是一条闭曲线，其内部包含被积函数的极点。

与上一节一样，为简洁起见，我们给出一个例子，但不明确写出恒等式。设

$$\varphi(s):=\pi^{-s}\zeta(s)\zeta(s-k),\quad k\ne 0,-1,\quad \sigma>1,k+1,$$

其中 $\zeta(s)$ 表示黎曼ζ函数。在上述定理中，令 $p=k$。则相关参数为

$$\lambda_n=\mu_n=\pi n\quad\text{and}\quad a(n)=b(n)=\sigma_k(n),$$

其中 $\sigma_k(n)$由（6.11）定义。

10. 对数和

采用（6.1）的记号，考虑满足如下形式函数方程的狄利克雷级数 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$:

$$\Gamma^m(s)\varphi(s)=\Gamma^m(\delta-s)\psi(\delta-s),$$

其中 m 是正整数， δ 是正实数。（注意，对于 $m=1$，上述记号与（6.2）中的记号不同。）在 [8], 中，第一位作者建立了一般恒等式 [8, , 第 362, 365] 页，

$$S(a;q):=\frac{1}{q!}\sum_{\lambda_n\le x}{}'a(n)\log^q(x/\lambda_n),\tag{10.1}$$

其中 q 是非负整数，左侧求和符号上的撇号 $'$ 表示，若 $q=0$ 和 $\lambda_n=x$，则只计入 $\frac{1}{2}a(x)$。对于 $q=1$，与（6.4）中一样，一般恒等式（10.1）中会出现普通贝塞尔函数。下面给出一个例子。定义

$$\zeta_k(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_k(n)}{n^s},\quad \sigma>1.$$

Then

$$\sum_{n\le x}r_2(n)\log(x/n)=\pi x-\log x+\zeta_2'(0)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n}J_0(2\pi\sqrt{nx}),\tag{10.2}$$

其中 $\zeta_2'(0)$ 来自 $\zeta_2(s)$ 向整个复平面的解析延拓。Oppenheim 声称他证明了（10.2）左侧的一个恒等式，但并未给出该恒等式。

对于 $q=2$，贝塞尔函数 $K_\nu(x)$ 和 $Y_\nu(x)$ 出现在 (10.1) 的一般恒等式中。我们不提供一般恒等式，而是给出两个特殊情形，即约数函数 $d(n)$ 和 $F(n)$（代数数域中范数为 n 的整理想的个数）。首先，若 γ 再次表示欧拉常数，

$$\sum_{n\le x}d(n)\log(x/n)=x(\log x-2+2\gamma)+\frac{1}{4}\log(4\pi^2x)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\left\{Y_0(4\pi\sqrt{nx})+\frac{2}{\pi}K_0(4\pi\sqrt{nx})\right\},$$

这最初归功于 Oppenheim [67]; 另见 [8,第 371] 页。

其次，令 h 表示 K 的类数，令 Δ 表示 K 的判别式，并令 $\lambda = 2\pi R/(w|\Delta|^{1/2})$，其中 R 是 K 的调节子，而 w 表示 K 中单位根的个数。那么，

$$\sum_{n\le x}F(n)\log(x/n) = \lambda h x+\zeta_K(0)\log x+\zeta_K{}'(0)$$
$$+\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n}\left\{Y_0(4\pi\sqrt{nx/|\Delta|})+\frac{2}{\pi}K_0(4\pi\sqrt{nx/|\Delta|})\right\}, \quad (10.3)$$

其中 $\zeta_K(s)$ 是与二次域 K 相关联的戴德金ζ函数，即

$$\zeta_K(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s},\quad \sigma>1,$$

它可以解析延拓到整个复平面。关于 (10.3) 的证明，见 [8, 第 374] 页。回到定理 4.1，S. Kim 和第一作者在 [17，定理 5.1] 中证明了一个对数类比。首先，令

$$\zeta(s,a):=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s},\quad \mathrm{Re}(s)>1,\ a>0,$$

表示赫尔维茨ζ函数。其次，广义斯蒂尔杰斯常数 $\gamma_n(a)$、$n\ge 0$ 定义为洛朗展开

$$\zeta(s,a)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n(a)(s-1)^n.$$

特别地，$\gamma_0(1)=\gamma$，即欧拉常数。现在我们给出上述来自 [17] 的定理。

定理 10.1。设 $x>0$ 且 $0<\theta<1$。则

$$\sum_{n\le x}\log\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{r|n}\cos(2\pi r\theta)$$
$$=\frac{\log(4\pi^2x)+\gamma}{4}-x\log(2\sin(\pi\theta))-\frac{1}{8}\left(\gamma_0(\theta)+\gamma_0(1-\theta)\right)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{M_0(4\pi\sqrt{m(n+\theta)x})}{m(n+\theta)}+\frac{M_0(4\pi\sqrt{m(n+1-\theta)x})}{m(n+1-\theta)}\right\},$$

其中 $M_0(z)$ 由 (3.2) 定义。

11. 定理 7.1 涉及超几何函数的恒等式

回顾一下，上升阶乘或移位阶乘 $(\alpha)_n$ 定义为

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1),\quad n\ge 1;\qquad (\alpha)_0=1.$$

Let

$${}_2F_1(a,b;c;z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n,\quad |z|<1,$$

表示普通超几何函数。

在 [14], 的记号（6.1）和（6.2）中，作者证明了以下定理。

定理 11.1. 假设$\mathrm{Re}(\nu) > -1$，$\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha}) > \mathrm{Re}(\sqrt{\beta}) \geqslant 0$，且 $\delta + \mathrm{Re}(\nu) + 1 > \sigma_a^* > 0$。设 $Q_\rho(x)$ 由(6.5)定义，贝塞尔函数 $I_\nu(z)$， $K_\nu(z)$ 由(2.4)、(2.5)定义，并假设 $Q_0(0)$ 存在。假设下述右侧的积分绝对收敛。那么，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} a(n) I_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\right) K_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{\lambda_n}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right)\\
=&\frac{2(2\pi)^{-\delta}\Gamma(\nu+\delta+1)}{\Gamma(\nu+2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{\sqrt{4\mu_n+\alpha}\sqrt{4\mu_n+\beta}} \left(\frac{\sqrt{4\mu_n+\alpha}-\sqrt{4\mu_n+\beta}}{\sqrt{4\mu_n+\alpha}+\sqrt{4\mu_n+\beta}}\right)^{\nu+1}\\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{4\mu_n+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{4\mu_n+\beta}}\right)^{2\delta-2} {}_2F_1\left[\nu-\delta+2, 1-\delta; \nu+2; \left(\frac{\sqrt{4\mu_n+\alpha}-\sqrt{4\mu_n+\beta}}{\sqrt{4\mu_n+\alpha}+\sqrt{4\mu_n+\beta}}\right)^2\right]\\
&+\frac{Q_0(0)}{2(\nu+1)}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^{\nu+1} + \int_0^{\infty} Q_0'(x) I_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{x}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\right) K_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{x}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right) dx.
\end{aligned} \tag{11.1}$$

将 (11.1) 两边除以 $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{\nu+1}$，并令 $\alpha \to \beta$，即可得到定理 7.1。详情见 [14]。

在定理 6.1 中令 $a(n) = r_k(n)$。经过大量计算，我们得到恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) I_\nu\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\right) K_\nu\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right)\\
=&-\frac{1}{2\nu}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^{\nu} + \frac{\Gamma(k/2+\nu)}{\pi^{k/2}2^{k-1}\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_k(n)}{\sqrt{n+\alpha}\sqrt{n+\beta}} \left(\frac{\sqrt{n+\alpha}-\sqrt{n+\beta}}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\beta}}\right)^{\nu}\\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{n+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{n+\beta}}\right)^{k-2} {}_2F_1\left[1-\frac{k}{2}+\nu, 1-\frac{k}{2}; \nu+1; \left(\frac{\sqrt{n+\alpha}-\sqrt{n+\beta}}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\beta}}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{11.2}$$

The 恒等式 (11.2) 最初由 Sun Kim 和本文三位作者中的三位在 [15] 中证明。

作为第二个例子，令定理 11.1 中的 $a(n) = \tau(n)$。在这种情况下，对于 $\mathrm{Re}(\nu) > -13/2$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) I_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\right) K_{\nu+1}\left(\pi\sqrt{n}\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right)\\
=&\frac{2(2\pi)^{-12}\Gamma(13+\nu)}{\Gamma(\nu+2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{\sqrt{4n+\alpha}\sqrt{4n+\beta}} \left(\frac{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}{\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta}}\right)^{\nu+1}\\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{4n+\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{4n+\beta}}\right)^{22} {}_2F_1\left[\nu-10, -11; \nu+2; \left(\frac{\sqrt{4n+\alpha}-\sqrt{4n+\beta}}{\sqrt{4n+\alpha}+\sqrt{4n+\beta}}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{11.3}$$

将 $\nu = -1/2$ 代入（11.3），我们推得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} e^{-\pi\sqrt{n}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})} \sinh(\pi\sqrt{n}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}))\\
&= 2\frac{3\cdot 5\cdots 21}{\pi^{11}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\left(\frac{1}{(4n+\beta)^{23/2}} - \frac{1}{(4n+\alpha)^{23/2}}\right).
\end{aligned}$$

12. G. N. Watson 两个定理的推广

黎曼ζ函数 $\zeta(s)$的函数方程为 [35, 第 14]页

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s).$$

将 s 替换为 $2s$，可见它能化为形式 (6.2)，其中 $\delta=1/2, a(n)=b(n)=1$，且 $\lambda_n=\mu_n=n^2/2$。

如 [14, 第 15], 节所示，由黎曼ζ函数得到的定理 11.1 的特殊情形为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4(\nu+1)}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^{\nu+1}+\sum_{n=1}^{\infty}I_{\nu+1}\left(\pi n\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\right)K_{\nu+1}\left(\pi n\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right)\\ =&\frac{\Gamma(\nu+3/2)}{2\sqrt{2\pi}\Gamma(\nu+2)}\frac{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^{\nu+1}}{\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^{\nu+2}}\cdot{}_2F_1\left(\nu+3/2,1/2;\nu+2;\left(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\right)^2\right)\\ &+\frac{\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\alpha}-\sqrt{n^2+\beta}\right)^{\nu+1}}{\left(\sqrt{n^2+\alpha}+\sqrt{n^2+\beta}\right)^{\nu+2}}\cdot{}_2F_1\left[\nu+3/2,1/2;\nu+2;\left(\frac{\sqrt{n^2+\alpha}-\sqrt{n^2+\beta}}{\sqrt{n^2+\alpha}+\sqrt{n^2+\beta}}\right)^2\right],\end{aligned}\tag{12.1}$$

其中 $\mathrm{Re}(\nu)>-1/2$ 且 $\mathrm{Re}(\sqrt{\alpha})>\mathrm{Re}(\sqrt{\beta})>0$。将 (12.1) 两边除以 $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{b})^{\nu+1}$，令 $\alpha\to\beta$，将所得恒等式两边乘以 $2\Gamma(\nu+2)(2\sqrt{\beta})^{\nu+1}$，将 ν 替换为$\nu-1$，并将 β 替换为 $z^2/(4\pi^2)$，再整理可得，当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时，沃森[80, 方程 (4)] 的一个引人注目的恒等式：

$$\frac{1}{2}\Gamma(\nu)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}nz\right)^{\nu}K_{\nu}(nz)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)z^{2\nu}\left\{\frac{1}{z^{2\nu+1}}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z^2+4n^2\pi^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

(12.1) 的另一项推论是沃森的另一个恒等式 [80], [14, 推论 15.2]。当 $\mathrm{Re}(\beta)>0$ 时，

$$2\sum_{n=1}^{\infty}K_0(n\beta)=\pi\left\{\frac{1}{\beta}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2+4\pi^2n^2}}-\frac{1}{2n\pi}\right)\right\}+\gamma+\log\left(\frac{\beta}{2}\right)-\log 2\pi.$$

13. KOSHLIAKOV公式与RAMANUJAN–GUINAND公式

本节讨论 N. S. Koshliakov [51], A. P. Guinand [40], 和拉马努金 [71]的相关结果。Guinand公式大概是这些定理中最著名的。不过，它等价于拉马努金发现的一个公式，该公式见于一份部分手稿中，这份手稿与他的失传笔记一同发表 [71, 第 253, 254] 页。我们采用拉马努金的表述。

定理 13.1。***(Guinand*公式*)*** [71, 第 253]。设 $\sigma_k(n)$ 由 (6.11) 定义，令 $\zeta(s)$ 表示黎曼ζ函数，令 $K_\nu(z)$表示(2.5)中定义的 ν 阶修正贝塞尔函数。若 α 和 β 为正数，且满足 $\alpha\beta=\pi^2$，并且 s 为任意复数，则

$$\begin{aligned}&\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-s}(n)n^{s/2}K_{s/2}(2n\alpha)-\sqrt{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-s}(n)n^{s/2}K_{s/2}(2n\beta)\\ &\quad=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\{\beta^{(1-s)/2}-\alpha^{(1-s)/2}\}+\frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\zeta(-s)\{\beta^{(1+s)/2}-\alpha^{(1+s)/2}\}.\end{aligned}\tag{13.1}$$

恒等式 (13.1) 等价于 A. P. Guinand [40] 于 1955 年建立的一个恒等式，距拉马努金发现它约 35–40 年。由于 (13.1) 被称为*Guinand*公式，我们沿用了这一惯例。它与 SL(2ℤ) 上非全纯艾森斯坦级数的傅里叶展开或 Maass波形式 [58], 密切相关，也与 Selberg 和 Chowla 关于 Epstein ζ 函数 [24],的一项著名结果密切相关；这些内容将在第14节讨论。

Ramanujan–Guinand公式的一个推论是 Koshliakov 于1929年发表的一个著名公式 [51] 。

定理13.2。 ***(Koshliakov*公式*)*** 设 $d(n)$ 表示正整数 n 的正因子个数。那么，若 γ 表示欧拉常数，且 $a>0$,

$$\gamma-\log\left(\frac{4\pi}{a}\right)+4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)K_0(2\pi an)$$
$$=\frac{1}{a}\left(\gamma-\log(4\pi a)+4\sum_{n=1}^{\infty}d(n)K_0\left(\frac{2\pi n}{a}\right)\right). \tag{13.2}$$

Koshliakov 的证明依赖于 Voronoĭ 求和公式（5.1）。然而，Koshliakov公式（13.2）最初也出自拉马努金在上述同一份两页手稿中的工作。从手稿中可以清楚看出，拉马努金是从 Guinand公式，或者更恰当地说，从 Ramanujan–Guinand公式推导出 Koshliakov公式的。后来，K. Soni [74], C. Nasim [65], 和 S. Yakubovich [84, 第 374] 页给出了（13.2）的进一步证明。（13.2）等式两边的另一种表示形式是一个积分，其被积函数包含黎曼 Ξ-函数 [28, 方程（1.12）],，其等价形式实际上可见于 Koshliakov 的另一篇论文 [53, 方程（17）]。（13.2）恒等式应与（5.2）比较。

[71] 的第253页和第254页包含其他几个优美公式。我们选取其中一个作为例子。

定理 13.3 定理（第254页）。若 $a>0$, γ 表示欧拉常数，且 $\sigma_k(n)$ 由(6.11)给出，则 n

$$2\sqrt{a}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-1}(n)\sqrt{n}K_1(4\pi\sqrt{an})$$
$$=-\frac{a^2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{-1}(n)}{n(n+a)}+\frac{a}{2\pi}\left((\log a+\gamma)\zeta(2)+\zeta'(2)\right)+\frac{1}{4\pi}(\log 2a\pi+\gamma)+\frac{1}{48a\pi}.$$

拉马努金仅部分陈述了定理13.3。第一作者、Y. Lee 和 J. Sohn [19]补全了该公式并给出了证明。拉马努金在这两页中的所有论断，都可以在 G. E. Andrews 和第一作者所著的书 [19, 第 3], 章，以及第一作者、Lee 和 Sohn 的上述论文 [19]中找到。Koshliakov公式的一种等价表述由第二作者给出 [28]。

Ramanujan-Guinand公式的推广由第二作者、Kesarwani 和 Moll 得到 [29, 定理 1.4、1.5]。其中包含修正贝塞尔函数 $K_z(x)$的一种新推广，见 [29, 公式（1.3）]。文中还证明了该推广的若干性质。Dixit 和 Kumar 在 [32,公式（1.1.37）]中研究了另一种推广。

14. 肖拉–塞尔伯格公式

1949年，S. Chowla 和 A. Selberg [24] 提出了后来被称为乔拉-塞尔伯格公式的公式。然而，直到18年后 [25]，他们才给出证明。首先，

设 $Q(m,n) = am^2 + bmn + cn^2$ 是一个正定二次型，其中 $a, b,$ 且 c 为实数。埃普斯坦 ζ 函数 $\mathbb{Z}(s,Q)$ 定义为

$$\mathbb{Z}(s,Q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \{Q(m,n)\}^{-s}, \quad \sigma > 1,$$

其中，撇号 $'$ 表示应省略对应于 $(m,\ n) = (0,\ 0)$ 的项。于是，乔拉-塞尔伯格公式可写为

$$\begin{aligned} a^{-s}\Gamma(s)\mathbb{Z}(s,Q) =& 2\Gamma(s)\zeta(2s) + 2k^{1-2s}\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\zeta(2s-1) \\ &+ 8k^{1/2-s}\pi^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}\sigma_{1-2s}(n)\cos(n\pi b/a)K_{s-1/2}(2\pi kn). \end{aligned} \tag{14.1}$$

这里，$\sigma_k(n)$ 定义见 (6.11)，$d = b^2 - 4ac$, $k = |d|/(4a^2)$，$\zeta(s)$ 表示黎曼 ζ 函数，而 $K_\nu(z)$ 按照惯例表示修正贝塞尔函数。

此后，R. A. Rankin [73], 、P. T. Bateman 和 E. Grosswald [5],以及 Y. Motohashi [64]给出了 (14.1) 的证明。本文第一作者则建立了 (14.1) 的一个推广[11]。

15. 实解析艾森斯坦级数

全纯艾森斯坦级数在模形式理论中扮演着核心角色。特别地，对于全模群 $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $k > 2$ 的艾森斯坦级数定义为

$$E_k(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k\gamma, \tag{15.1}$$

其中

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma : n \in \mathbb{N} \right\},$$

斜杠算子 $|_k\gamma$ 定义为

$$(f|_k\gamma)(z) := (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),\ \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ a & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad z \in \mathbb{H}.$$

注意，我们可以将 (15.1) 写成一个双重求和，即

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{-\infty < c,d < \infty \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz+d)^k}. \tag{15.2}$$

对于 $\sigma > 1$ 和 $z = x + iy \in \mathbb{H}$，全模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的实解析艾森斯坦级数定义为

$$E(s,z) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \mathrm{Im}(\gamma z)^s.$$

然而，$E(s,\ z)$ 并不是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的模形式。与（15.2）类似，$E(s,\ z)$ 也可以表示为一个双重求和

$$E(s,z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{-\infty < c,d < \infty \\ (c,d)=1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}.$$

它的模性质和傅里叶展开（我们将在下文给出）可用于证明黎曼ζ函数在直线 Re(*s*) $= 1$ 上不为零；这是素数定理某个证明中的一个关键要素。

对于任意 $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，我们都有模关系 [87],

$$E(s, \gamma z) = E\left(s, \frac{az+b}{cz+d}\right) = E(s, z).$$

$E(s, z)$ 的傅里叶展开可表示为涉及级数 $K_\nu(z)$，namel y,

$$E(s,z) = y^s + \frac{\psi(2s-1)}{\psi(2s)} y^{1-s} + \frac{4\sqrt{y}}{\psi(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(m) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi m y) \cos(2\pi m x), \quad (15.3)$$

其中

$$\psi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

利用（2.10），我们看到 $E(s, z)$ 关于变量 s. 可解析延拓为定义在整个复平面上的亚纯函数ˆ。此外，如果 $E(s, z) = \psi(2s)E(s, z)$，则相关的函数ˆ ˆ方程 $E(s, z) = E(1 - s, z)$ 成立。事实上，注意到

$$\hat{E}(s,z) = \psi(2s) y^s + \psi(2s-1) y^{1-s} + 4\sqrt{y} \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(m) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi m y) \cos(2\pi m x). \quad (15.4)$$

应用函数方程 $\psi(s) = \psi(1 - s)$、 $\sigma_\nu(n) = n^\nu \sigma_{-\nu}(n)$ 以及 $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$[81, 第 79 页，公式（8）] 在（15.4）中，我们得到函数方程

$$\hat{E}(s,z) = \hat{E}(1-s,z). \quad (15.5)$$

由傅里叶展开（15.3）可知， $E(s, \ x + iy)$ 在 $x \to x + 1$ 下保持不变。因此，我们可以写成

$$E(s,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(y) e^{2\pi i m x},$$

其中

$$a_m(y) = \begin{cases} y^s + \dfrac{\psi(2s-1)}{\psi(2s)} y^{1-s}, & \text{if } m = 0, \\ 2\sqrt{y} |m|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(|m|) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |m| y), & \text{if } m \neq 0. \end{cases}$$

我们简要概述著名的克罗内克极限公式，其表达式为

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} E(s,z)\right|_{s=0} = \frac{1}{6} \log(y^6 |\Delta(z)|), \quad (15.6)$$

其中， $\Delta(z)$ 在（6.9）中定义。回顾（15.3），对其关于 s 求导，然后在右侧的级数中应用（6.7），得到

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} E(s,z)\right|_{s=0} = \log y - \frac{\pi}{3} y - \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{2}} \sigma_1(m) e^{-2\pi m y} \cos(2\pi m x). \quad (15.7)$$

另一方面，如果我们使用 $\Delta(z)$的定义，就可以证明

$$\log(y^6 |\Delta(z)|) = 6 \log y + \log(|\Delta(z)|)$$

$$= 6\log(y) - 2\pi y - 24\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{nm}}{m}\right)$$

$$= 6\log(y) - 2\pi y - 24\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{2}}\sigma_1(m)e^{-2\pi my}\cos(2\pi mx). \tag{15.8}$$

因此，由 (15.7) 和 (15.8) 可得 (15.6)。

我们通过给出 Rankin–Selberg 方法中函数方程 (15.5) 的一个应用来结束本节。该方法对于获得与模形式相关的 L 函数的解析延拓非常有帮助。我们简要说明如何通过利用附加于模形式的 ζ 函数，特别是定义于 (6.9) 中的尖点形式 Δ 函数的解析延拓，来获得 Ramanujan 算术函数 $\tau(n)$ 的一个改进界（见 [54,定理 9.10]）。

首先，让我们考虑

$$L(\Delta, s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_{p}\left(1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}\right)^{-1}. \tag{15.9}$$

注意，对于 $\sigma > 13/2$. 现在，如果我们将 (15.9) 写成， $L(s,\ \Delta)$ 是绝对收敛的

$$L(\Delta, s) = \prod_{p}\left((1-\alpha_p p^{-s})(1-\beta_p p^{-s})\right)^{-1},$$

其中 $\alpha_p + \beta_p = \tau(p)$ 和 $\alpha_p\beta_p = p^{11}$，于是我们可以定义，

$$L(\Delta\otimes\Delta, s) := \prod_{p}\left((1-\alpha_p^2 p^{-s})(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})^2(1-\beta_p^2 p^{-s})\right)^{-1}.$$

因此， $L(\Delta\otimes\Delta,\ s) = \zeta(2s-22)\sum_{n=1}^{\infty}\tau^2(n)n^{-s}$。此外， $L(\Delta\otimes\Delta,\ s)$ 可解析延拓为整个复平面上的亚纯函数，并且

$$\hat{L}(\Delta\otimes\Delta, s) := 4(2\pi)^{11-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)L(\Delta\otimes\Delta, s)$$

ˆ ˆ 满足函数方程 $L(\Delta\otimes\Delta,\ s) = L(\Delta\otimes\Delta,\ s-11)$。

ˆ 在 [72], Rankin 将上述思想应用于 $L(\Delta\otimes\Delta,\ s)$，并利用其在 $s = 12$ 处的简单极点，得到上界 $\tau(n) = \mathcal{O}(n^{29/5})$，改进了此前的上界 $\tau(n) = \mathcal{O}(n^6)$。关于模形式理论中 K-贝塞尔函数出现的其他应用，请读者参阅 [54, 第 9 节。5]

16. 贝塞尔函数 $I_\nu(z)$ 或 $Y_\nu(z)$ 出现的应用

回顾一下，虚自变量的贝塞尔函数 $I_\nu(z)$ 出现在定理 11.1 中，而在 (2.2) 中定义的贝塞尔函数 $Y_\nu(z)$ 则集中出现在公式 (3.1) 和 (4.2) 中。最后，我们通过提及两类示例来完成这篇综述，在这些示例中，这些其他贝塞尔函数各自单独出现，并未伴随其同类函数。

首先，从它们的渐近展开式 (2.10) 和 (2.9) 可以看出， $K_\nu(z)$ 和 $I_\nu(z)$ 在解析数论中发挥着截然不同的作用。尤其是，后一类函数在描述分拆函数的增长方面十分重要。设 $p(n)$ 表示正整数 n 的分拆数。例如， $p(5) = 7$，因为 $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$。在 Hardy 和拉马努金关于 $p(n)$ 的渐近公式基础上，H. Rademacher

[70] 找到了 $p(n)$ 的精确公式，即，

$$p(n)=\frac{2\pi}{(24n-1)^{3/4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(n)}{k}I_{3/2}\left(\frac{\pi}{6k}\sqrt{24n-1}\right),$$

其中， $I_{3/2}$ 是修正贝塞尔函数， $A_k(n)$表示定义如下的克罗内克和

$$A_k(n):=\sum_{\substack{0\le h<k\\(h,k)=1}}e^{\pi is(h,k)-2\pi inh/k},$$

并且， $s(h,\ k)$表示定义如下的戴德金和

$$s(h,k):=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k}-\left[\frac{hr}{k}\right]-\frac{1}{2}\right).$$

此外，还有一些涉及 I_ν 的分拆函数渐近公式，例如K. Bringmann、B. Kane、L. Rolen和Z. Tripp [22]，以及J. Iskander、V. Jain和V. Talvola [46]最近发表的论文中就给出了这类公式。

其次，欧拉关于伯努利数 B_{2n}， $n\in\mathbb{N}$与 $\zeta(2n)$之间关系的著名公式见 [76,第5页，公式（1.14）]

$$B_{2n}=\frac{2(-1)^{n+1}(2n)!\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}. \tag{16.1}$$

在一篇精彩的论文中， [88], D. Zagier 得到了这一公式的一个类似结果，其中出现了修正伯努利数

$$B_n^*:=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r}{2r}\frac{B_r}{n+r}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

他在构思一种新的证明时偶然发现了 B_n^*，该证明针对的是作用于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上模形式的海克算子 T_ℓ 的迹的艾希勒–塞尔伯格迹公式。这些数 B_n^* 也满足与 B_n 的性质惊人相似的性质。Zagier 对 (16.1) 的类似结果为 [88, 公式 (10)]

$$\begin{aligned}B_{2n}^*=&-n+\sum_{\ell=1}^{\infty}\left((-1)^n\pi Y_{2n}(4\pi\ell)+\frac{1}{2\sqrt{\ell}}\right)-\frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\\&+\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+4)}}\left(\frac{\sqrt{\ell+4}-\sqrt{\ell}}{2}\right)^{4n},\end{aligned} \tag{16.2}$$

其中 $Y_n(z)$ 由 (2.3) 定义。 [30] 的作者研究了如下定义的 Zagier多项式的性质：

$$B_n^*(x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r}{2r}\frac{B_r(x)}{n+r},\quad n>0,$$

其中 $B_n^*(0)=B_n^*$。这些多项式是伯努利多项式 $B_n(x)$ 的类似物。众所周知， $B_{2n}(x)$ 和 $B_{2n+1}(x)$ 分别具有傅里叶展开 [88, 第 p 页。 5]

$$B_{2n}(x)=2(-1)^{n+1}(2n)!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi mx}{(2\pi m)^{2n}},\quad 0\le x\le 1,n\ge 1, \tag{16.3}$$

$$B_{2n+1}(x)=2(-1)^{n+1}(2n+1)!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi mx}{(2\pi m)^{2n+1}}, \tag{16.4}$$

w这里，最后一个公式在 $0\le x\le 1$ 时适用于 $n>0$，在 $0<x<1$ 时适用于 $n=0$.

[31] 的作者研究了 Zagier多项式对应的 (16.3) 和 (16.4) 的类似公式。下面给出 (16.3) 的一个类似公式， [31,定理 1.2]。

定理 16.1. 令 $0 < x < 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$。定义

$$g(y,r,x) := \frac{(y+1+x-\sqrt{(y-1+x)(y+3+x)}\ )^{2r}}{\sqrt{(y-1+x)(y+3+x)}}.$$

令 $Y_n(z)$ 按 (2.3) 定义，并用 $U_n(x)$ 表示第二类切比雪夫多项式，其定义为

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

于是，

$$\begin{aligned} B^*_{2n}(x) \quad &= \quad (-1)^n \pi \sum_{m=1}^{\infty} Y_{2n}(4\pi m)\cos(2\pi m x) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(U_{2n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + U_{2n-1}\left(\frac{x}{2}\right) + U_{2n-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + U_{2n-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2^{2n+1}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} g(m,n,x) + \sum_{m=1}^{\infty} g(m,n,1-x)\right). \end{aligned}$$

对于 $B^*_{2n+1}(x)$ [31, 定理 1.3]，也存在类似的公式。在定理 16.1 中令 $x \to 1$ ，即可得到 (16.2)。这类似于在后一个公式中代入 $x = 1$，从 (16.3) 得到 (16.1)。

17. 致谢

作者感谢伊利诺伊大学数学图书馆员 Bernadette Braun 和 Becky Burner 帮助获取了参考文献中的若干篇论文。

第一作者感谢西蒙斯基金会慷慨资助。第二作者衷心感谢 SERB（印度政府）提供的 Swarnajayanti Fellowship 项目资助，编号为 SB/SJF/2021-22/08。

参考文献

[1] E. Assing，阿代尔*Voronoĭ*求和与深度方面的GL(2)*L* 函数的次凸性，《国际数论杂志》**17** (2021)，1537–1568。[2] E. Assing和A. Corbett，*Voronoĭ*通过切换尖点进行求和，《数学月刊》**194** (2021)，657–685。[3] D. Banerjee、E. M. Baruch和D. Bump，高斯整数的*Voronoi* 求和公式，《拉马努金杂志》**57** (2022)，253–274。[4] D. Banerjee、E. M. Baruch和E. Tenetov，全实数域上的*Voronoi–Oppenheim* 求和公式，《数论杂志》**199** (2019)，63–97。[5] P. T. Bateman和E. Grosswald，关于爱泼斯坦ζ函数，《算术学报》**9** (1964)，365-373。[6] B. C. Berndt，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式，博士论文，威斯康星大学，1966年。[7] B. C. Berndt，广义狄利克雷级数与*Hecke*函数方程，《爱丁堡数学学会会刊》**15** (1967)，309–313。[8] B. C. Berndt，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式*II*，《美国数学学会汇刊》**137**(1969)，361–374。[9] B. C. Berndt，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式*III*，《美国数学学会汇刊》**146** (1969)，323–348。[10] B. C. Berndt，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式*V*，《美国数学学会汇刊》**160** (1971)，139–156。

[11] B. C. Berndt，涉及一类狄利克雷级数系数的恒等式VI，《美国数学学会汇刊》160 (1971)，157–167。[12] B. C. Berndt，Voronoĭ 求和公式，载于《算术函数理论》，美国密歇根州卡拉马祖，1971年4月，Springer–Verlag，柏林，1972年，第21–36页。[13] B. C. Berndt、A. Dixit、R. Gupta和A. Zaharescu，与满足Hecke函数方程的狄利克雷级数相关的一类恒等式，《美国数学学会会刊》150 (2022)，4785–4799。[14] B. C. Berndt、A. Dixit、R. Gupta和A. Zaharescu，涉及修正贝塞尔函数和一类算术函数的两个一般级数恒等式，《加拿大数学杂志》(2022)，1–31。[15] B. C. Berndt、A. Dixit、S. Kim和A. Zaharescu，平方和与贝塞尔函数乘积，《数学进展》338 (2018)，305–338。[16] B. C. Berndt、M. Fassina、S. Kim和A. Zaharescu，三角级数和贝塞尔级数的平衡导数、恒等式与界，《数学进展》395 (2022)，第40页。[17] B. C. Berndt和S. Kim，贝塞尔函数的对数平均与双重级数，《国际数论杂志》11 (2015)，1535–1556。[18] B. C. Berndt、S. Kim和A. Zaharescu，高斯圆问题与狄利克雷除数问题——仍未解决，《美国数学月刊》125 (2018)，99–114。[19] B. C. Berndt、Y. Lee和J. Sohn，拉马努金失传的笔记中的Koshliakov公式与Guinand公式，载于《数论综述》，K. Alladi编，Springer，纽约，2008年，第21–42页。[20] B. C. Berndt、J. Li和A. Zaharescu，最终问题：拉马努金失传的笔记中的一个恒等式，《伦敦数学学会杂志》100 (2019)，568–591。[21] S. Bettin和J. B. Conrey，周期函数与余切和，《代数与数论》7第1期(2013)，215–242。[22] K. Bringmann、B. Kane、L. Rolen和Z. Tripp，分数分拆以及Chern–Fu–Tang和Heim–Neuhauser的猜想，《美国数学学会汇刊》B辑8 (2021)，615–634。[23] K. Chandrasekharan和R. Narasimhan，Hecke函数方程与算术恒等式，《数学年刊》4 (1961)，1–23。[24] S. Chowla和A. Selberg，关于爱泼斯坦ζ函数(I)，《美国国家科学院院刊》35 (1949)，371–374。[25] S. Chowla和A. Selberg，关于爱泼斯坦ζ函数，《莱因数学杂志》227 (1967)，86–110。[26] A. Corbett，GL¨ı上的Voronoı求和：层与模之间的联合作用，《美国数学杂志》143 (2021)，1361–1395。[27] H. Davenport，《乘法数论》，第三版，Springer-Verlag，纽约，2000年。[28] A. Dixit，涉及黎曼 Ξζ函数的级数变换与积分，《数学分析及其应用杂志》368 (2010)，358–373。[29] A. Dixit、A. Kesarwani和V. H. Moll，广义修正贝塞尔函数与theta变换公式的更高阶类比（附N. M. Temme的附录），《数学分析及其应用杂志》459 (2018)，385–418。[30] A. Dixit、V. H. Moll和C. Vignat，伯努利数的Zagier修正及其多项式扩展。第一部分，《拉马努金杂志》33，379–422 (2014)。[31] A. Dixit、M. L. Glasser、V. Moll和C. Vignat，Zagier多项式的渐近式与精确公式，《数论研究》2 (1) (2016)，26页。[32] A, Dixit和R. Kumar，在广义模关系上叠加theta结构，《数学科学研究》8 (2021)第3期，论文41（83页）。[33] A. Dixit、B. Maji和A. Vatwani，广义约数函数的Voronoĭ求和公式 $\sigma_z^{(k)}(n)$，提交发表（2023）。[34] A. L. Dixon和W. L. Ferrar，关于圆的格点的一些求和(I)，《季刊数学杂志》5 (1934年)，48–63。[35] H. M. Edwards，《黎曼ζ函数》，Academic Press，纽约，1974年。[36] S. Egger n´e Endres和F. Steiner，Voronoĭ求和公式的新证明，《物理学杂志A》44 (2011)，11页。[37] D. Goldfeld和X. Li，GL(n)上的Voronoi公式，《国际数学研究通知》2006，文章编号86295，25页。[38] D. Goldfeld和X. Li，GL(n $\mathbb{R}$ 2008， 2， 144, ,)的39 Voronoi公式，《国际数学研究通知》IMRN，第期，文章编号rnm，页。[39] D. Goldfeld和X. Li，对“GL($n, \mathbb{R}$)的Voronoi公式”的补遗，《国际数学研究通知》IMRN 2008年第2期，文章编号rnm144，39页。《国际数学研究通知》IMRN 2008，文章编号rnn123，1页。[40] A. P. Guinand，关于黎曼 ξζ函数的一些快速收敛级数，《季刊数学杂志》（牛津）6 (1955)，156–160。[41] G .H. Hardy，关于将一个数表示为两个平方数之和，《纯粹与应用数学季刊》46 (1915)，263–283。[42] G. H. Hardy和S. Ramanujan，组合分析中的渐近公式，《伦敦数学学会会刊》2 17 (1918)，75–115。[43] D. A. Hejhal，关于Voronoĭ求和公式的注记，《数学月刊》87 (1979)，1–14。

[44] M. N. Huxley，《指数和与格点。III》，Proc. London Math. Soc. (3) 87 (2003)，第 3 期，591–609。[45] A. Ichino 和 N. Templier，《GL(n) 的 Voronoĭ 公式》，Amer. J. Math. 135 (2013)，65–101。[46] J. Iskander、V. Jain 和 V. Talvola，《分数分拆函数的精确公式》，Res. Number Theory 6 (2020)，第 2 期，论文编号 20。[47] A. Ivić，《三元加性约数问题与 ζ 函数的六阶矩》，载于 G. Greaves、G. Har- man 和 M. Huxley 编，《筛法、指数和及其在数论中的应用》，伦敦数学学会讲义丛书，第 205–244 页，剑桥大学出版社，1997。[48] A. Ivić，《通过拉普拉斯变换得到的 Voronoi 恒等式》，Paul Erdős（1913–1996），Ramanujan J. 2 (1998)，39–45。[49] M. Jutila，《指数和理论中的一种方法》，Tata Institute Lecture Notes 80，Springer，1987。[50] E. M. Kıral 和 F. Zhou，《Voronoi 公式与双重狄利克雷级数》，Algebra Number Theory 10 (2016)，2267–2286。[51] N. S. Koshliakov，《论 Voronoĭ 求和公式》，Mess. Math. 58 (1929年)，30–32。[52] N. S. Koshliakov，《关于一个定积分及其在求和公式理论中的应用》，J. Soc. Phys.- Math. Leningrad 2，第 2 期（1929年），123–130。[53] N. S. Koshliakov，《黎曼函数平方的一些积分表示 Ξ(*t*)》，Dokl. Akad. Nauk SSSR 2 (1934年)，401–405。[54] M. Kurokawa、M. Kurihara 和 T. Saito，《数论 3：岩泽理论与模形式》，数学专著译丛，岩波现代数学丛书，242（2012），226 页。[55] E. Landau，《关于与黎曼ζ函数相关的级数的收敛域》，Math. Ann. 97 (1926)，251–290。[56] A. G. F. Laurinčikas，《Voronoĭ 及其求和公式》（立陶宛语），Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb. 2 (1999)，42–55。[57] X. Li，《三重约数函数的 Voronoi 公式》，载于《自守形式与 L 函数》，Int. Press，Somerville，MA，2014，69–90。[58] H. Maass，《关于一种新型非解析自守函数，以及通过函数方程确定狄利克雷级数》，Math. Ann. 121 (1949年)，141–183。[59] T. Meurman，《Voronoĭ 恒等式的一个简单证明》，Asterisque 209 (1992)，265–274。[60] S. D. Miller 和 W. Schmid，《求和公式：从泊松和 Voronoi 到当代》，载于《非交换调和分析》，Progr. Math.，220，¨ 2004，419 440 Birkhauser Boston，[61] Boston，MA，第 – 页。S. D. Miller 和 W. Schmid，《自守分布、L 函数与 GL(3) 的 Voronoi 求和》，Ann. Math. (2) 164 (2006)，423–488。[62] S. D. Miller 和 W. Schmid，《GL($n,\mathbb{Z}$) 的一般 Voronoi 求和公式》，载于《几何与分析》，Adv. Lect. Math. (ALM)，18，Int. Press，Somerville，MA，2011，173–224。[63] S. D. Miller 和 F. Zhou，《GL(n) 的平衡 Voronoi 公式》，Int. Math. Res. Not. IMRN 2019，第 11 期，3473–3484。[64] Y. Motohashi，《Kronecker 极限公式的新证明》，Proc. Japan Acad. 44 (1968)，614–616。[65] C. Nasim，《论 Voronoi 求和公式》，Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972)，35–45。[66] F. Oberhettinger 和 K. Soni，《关于若干等价于涉及黎曼ζ函数的函数方程的关系》，Math. Z. 127 (1972)，17–34。[67] A. Oppenheim，《数论中的一些恒等式》，Proc. London Math. Soc. (2) 26 (1927)，295–350。[68] A. I. Popov，《含有柱函数的级数》（俄文），C. R. Acad. Sci. URSS 2 (1935)，96–99。[69] Z. Qi，《数域上的 Voronoĭ–Oppenheim 求和公式》，Acta Arith. 204 第 3 期 (2022)，269–285。[70] H. Rademacher，《分拆函数 $p(n)$》，Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937)，241–254。[71] S. Ramanujan，《失传笔记及其他未发表论文》，Narosa，新德里，1988。[72] R. A. Rankin，《对拉马努金函数 $\tau(n)$ 及类似算术函数理论的贡献》，Proc. Cambridge Philos. Soc., 35（1939），351–372。[73] R. A. Rankin，《Epstein ζ 函数的极小问题》，Proc. Glasgow Math. Assoc. 1 (1953)，149–158。[74] K. Soni，《与 Koshliakov公式的推广相关的一些关系》，Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966)，543–551。[75] J. Steuding，《Voronoĭ 对现代数论的贡献》，˘ Siauliai Math. Semin. 2(10) (2007)，67–106。[76] Temme, N.M.:《特殊函数：数学物理经典函数导论》，John Wiley and Sons，纽约（1996）。[77] N. Templier，《GL(2) 的 Voronoĭ 求和》，载于《表示论、自守形式与复几何：向 Wilfried Schmid 致敬》，Int. Press，Somerville，MA，2020，163–196。

[78] G. F. Voronoï, 论超越函数及其在若干级数求和中的应用 *à la sommation de quelques séries*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 21 (1904年), 207–267, 459–533. [79] T. Watanabe，关于 Voronoï 定理的综述，载于《多变量自守形式的几何与分析》，World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012, 334–377.[80] G. N. Watson，某些自互反函数，《牛津数学季刊》2 (1931), 298–309. [81] G. N. Watson，《贝塞尔函数理论》，剑桥大学出版社，第二版，伦敦，1966. [82] T. A. Wong，关于 GL_N 上的平衡 Voronoï 公式，《函数逼近与评论数学》62 (2020), 121–130. [83] S. Yakubovich，涉及 $d_k(n)$ 的一类广义 Voronoi 和 Koshliakov-Ramanujan求和公式，《积分变换与特殊函数》22 (2011), 801–821. [84] S. Yakubovich，Voronoi-Nasim求和公式与指标变换，《积分变换与特殊函数》23 (2012), 369–388.[85] S. Yakubovich，涉及 $\sigma_{i\tau}(n)$ 和指标变换的一种 Voronoi 型求和公式，《积分变换与特殊函数》24 (2013), 98–110. [86] V. Zacharovas，Voronoi 求和公式与置换上的乘法函数，《拉马努金杂志》24 (2011), 289–329.[87] D. Zagier，艾森斯坦级数与黎曼ζ函数，载于《自守形式、表示论与算术》（孟买，1979）10 (1981) 275–301. [88] Zagier, D.: 修正伯努利数，《Nieuw Arch. Wisk.》16, 63–72 (1998). [89] F. Zhou，GL(n) 上的 Voronoi 求和公式，《数论杂志》162 (2016), 483–495.

伊利诺伊大学数学系，美国伊利诺伊州厄巴纳西绿街1409号，邮编61801电子邮件地址：berndt@illinois.edu 印度理工学院甘地讷格尔分校数学系，帕拉杰，甘地讷格尔382355，古吉拉特邦，印度电子邮件地址：adixit@iitgn.ac.in 中央研究院数学研究所，台湾台北罗斯福路四段1号天文数学馆6楼，邮编106319电子邮件地址：rajatgpt@gate.sinica.edu.tw 伊利诺伊大学数学系，美国伊利诺伊州厄巴纳西绿街1409号，邮编61801；罗马尼亚科学院数学研究所，罗马尼亚布加勒斯特RO-70700，邮政信箱1-764电子邮件地址：zaharesc@illinois.edu