arXiv:2303.02526v2 [math.CO] 6 Mar 2025

流动点火的三种情形定理

SARAH BRAUNER、GALEN DORPALEN-BARRY、SELVI KARA、CAROLINE KLIVANS 和 LISA SCHNEIDER

Abstract. 图上的筹码点火是一种离散动力系统，筹码放置在图的顶点上，并通过简单的点火操作进行交换。近期研究试图将图上的筹码点火推广到更高维情形：在此情形中，图被胞腔复形所取代，而筹码点火则变为沿复形各面的流重路由。对于这样的系统，自然会提出两个问题：（1）这一发射过程是否终止；（2）如果终止，终止结果是否唯一（即是否具有合流性）。在图的情形下，Bjorner–Lovasz–Shor 已对这些问题给出了确定性答案，他们提出的三种情形能够完全判定给定系统是否会终止。在 Duval–Klivans–Martin 和 Felzenszwalb-Klivans 研究的基础上，我们在一个称为流发射的背景下回答了这些问题，其中胞腔复形是二维的。

1. Introduction

本文探讨流发射，这是筹码点火的一种高维类比。在经典筹码点火中，筹码放置在图的顶点上，并按照图拉普拉斯算子 [10]所规定的局部操作移动到其他顶点。流发射是胞腔复形的一种离散模型，其中沿一维边的流会按照组合拉普拉斯算子的规定，经由二维面分流。高维筹码点火由 [3] 引入，当时的研究重点是代数方面的考量。对流发射动力学性质的研究始于 [4], ，并在本文中继续。考虑以下两个有关流发射中终止性与合流性的基本行为问题：

- 对于哪些初始构型，流发射过程会终止?
- 对于哪些初始构型，流发射过程会唯一地终止?

在图上进行经典筹码点火时，第一个问题的答案由 Bj¨orner、Lovasz 和 Shor 的一个定理给出 [2]。他们的结果将筹码点火行为划分为三个区域。非正式地说，该定理指出：（1）如果筹码数量足够少，则该过程总会终止；（2）如果筹码数量足够多，则该过程永不终止；（3）如果筹码数量处于中间范围，则总能找到一种会终止的构型和一种不会终止的构型。精确表述见定理 6。

在图的情形中，如果一个配置能够终止，它总是唯一地终止，因此第二个问题便无须讨论。然而，在流发射中，并非所有初始构型都能唯一地终止。文献 [4] 指出了一类能够唯一终止的重要情形。此外，作者还猜想，范围大得多的一类相关初始构型也能够唯一地终止。在这项工作的基础上，我们的主要结果揭示了比最初猜想更微妙的行为，从而将流发射终止唯一性的三种情形定理推广开来。

记 K(n r) 为初始构型，称为高度为 n、半径为 r 的脉冲（见第2节） .

定理 1（流动击发的三分区定理）。设 $r, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

(1) 若 $r \leq 1$，则从 K(n, r) 开始发射，最终会唯一地终止于阿兹特克菱形中。
(2) 若 $2 \leq r \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$，则从 K$(n, r)$ 开始发射，(a) 不会唯一地终止，但

(b) 可以终止于阿兹特克菱形中。(3) 若 $r > \lceil \frac{n}{2} \rceil$，则 (a) K$(n, r)$ 不会唯一地终止，且 (b) 若 $r \geq \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$，则从 K$(n, r)$ 开始发射将永远不会终止于阿兹特克菱形中。

筹码点火的其他变体也涉及终止性和唯一性问题。两个值得注意的例子是带标签的筹码点火 [7, 8, 9] 和根系芯片发射 [5, 6]，它们侧重于局部与全局合流性质。我们证明了流发射的若干子系统（包括某些路径发射）具有合流性（即唯一终止性）（推论 9）。

本文其余部分安排如下。第2节介绍流发射的背景。我们在第3节引入沿路径发射的概念，并研究其行为。在第4、5和6节中，我们依次证明定理 1，分别讨论三个情形。最后，我们在第6.3节讨论改进定理 1 中界限所面临的挑战。

致谢。本项目于2021/2022年作为ICERM代数组合数学研究社群的一部分启动。我们感谢ICERM及其组织者（Pamela E. Harris、Susanna Fishel、Rosa Orellana和Stephanie van Willigenburg）给予的大力支持。第一作者获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金和美国国家科学基金会数学科学博士后研究奖学金 DMS- 2303060 的资助。所有作者感谢匿名审稿人指出命题 7，即第3节中的设置通过离散导数等价于直线上的筹码点火。

2. Background

接下来 [4], 我们考虑二维网格复形上的流发射。流配置是为复形的边赋予整数值。从视觉上看，我们将流表示为有向的：正值表示向右和向上，负值表示向左和向下。例如，图1左侧的流配置中，除中心边外，所有边上的流值均为零；中心边的流值为2，并以一支朝下的箭头表示，旁边标注其大小2。

一条边的度是包含该边的二维面的数量。当一条边上的流单位至少达到其度时，该边就可以发射。发射一条边时，会沿着包含它的每个二维胞腔分流一个流单位；图1展示了一个例子。在可视化图中，流值为1的边会带有有向箭头，但我们省略数字1。

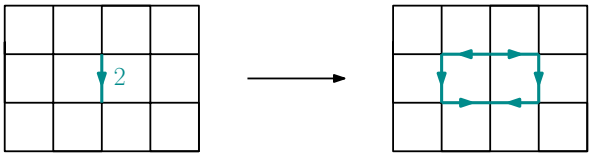


Figure 1. 网格上的流发射示例

流发射过程从一个固定的初始流配置开始。在所有可以点火的边中，选取一条并使其点火。此过程持续进行，直到无法再进行点火操作，或者永远持续下去。如果无法进行流点火操作，则该流配置是稳定的。给定一个固定的初始构型，我们关注能否达到稳定构型，以及该稳定构型是否唯一。如果对于每个顶点 v，流入 v 的流量等于流出 v 的流量，则该流配置是守恒的。

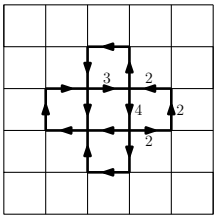
定理2（[4, 命题2，定理 4]）。设 K 为一个流配置。

- 如果存在一个顶点 v 满足

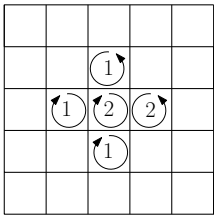
$$|\mathsf{inflow}(v) - \mathsf{outflow}(v)| > 4,$$

  那么流发射永远不会终止。
- 如果 K 是守恒的，那么流发射经过有限步后终止。

此外，守恒的流配置由面表示诱导而来。流配置的面表示，是为复形的二维胞腔赋予整数值。直观地说，流以有向形式表示：正值表示顺时针方向，负值表示逆时针方向，见下图。



(A) 边表示



(B) 面表示

此后，我们假设构型是守恒的，因此可以使用面表示进行分析。给定这样的构型 K，我们用 K$_f$表示面 f 的权重。面配置的支撑是权重非零的面 f 所构成的集合。在网格中，面 f与面 g之间的距离记作 dist(f, g)，即曼哈顿距离。例如，dist(f, f) $= 0$；如果 f和g 是邻面，也就是说它们共享一条边，那么 dist(f, g) $= 1$。

前文所述的流发射规则可以转换为面上的发射规则。设 K 是一个构型，且 f、g 是网格中的两个面，其权重分别为 K$_f$ 和 K$_g$。如果 K$_f \geq$ K$_g + 2$，那么将面 f 朝面 g 进行一次面点火，会得到一个新构型 K′，其权重为 K′$_f$ = K$_f - 1$ 和 K′$_g$ = K$_g + 1$。如果上下文已明确接收面 g，我们通常就简称为对面 f进行点火。

例3。下面展示了三种面配置。第二幅图（b）是由第一幅图（a）将权重为 2 的面向右点火得到的。最后一幅图（c）是由（a）将权重为 3 的面向左点火得到的。

	3	
1	2	

(a)

	3	
1	1	1

(b)

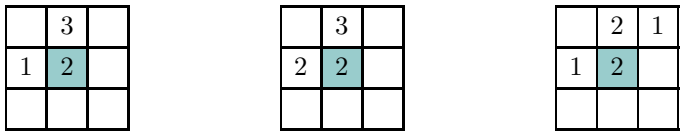
1	2	
1	2	

(c)

我们考虑一种称为带标记面的面点火的变体。固定一个标记面f_0 和一个整数 n，即 f_0的权重。标记面同时充当源和汇，但不具备二者的某些性质。在 f_0之外，我们使用通常的面点火规则；但当点火操作进入或离开 f_0 时，按以下方式调整规则：如果 f 与 f_0 相邻且权重为 K$_f < n$，我们可以从 f_0 向 f点火。另一方面，如果 K$_f > n$，我们可以从 f 向 f_0点火。如果 K$_f = n$，则不能在 f_0 和 f之间点火。值得注意的是，对于任意构型 K，K$_{f_0}$ 的值不会因点火而改变。例4展示了具有指定面的面点火操作。

例4. 下图展示了网格复形上的三种配置，其中有一个标记面（阴影部分）。要从第一种配置（a）得到第二种配置（b），我们将标记面向左发射。只有因为发射的是标记面，这次发射才被允许。在第二幅图（b）中，

涉及的两个面的数值相同，因此我们不能将标记面向左发射。第三幅图（c）是从第二种配置（b）通过将顶部中间方框向右发射得到的。



(a) (b) (c)

构型 K 的（总）权重是 K 中非零面权重之和 :

$$\mathrm{weight}(\mathsf{K}) := \sum_f \mathsf{K}_f$$

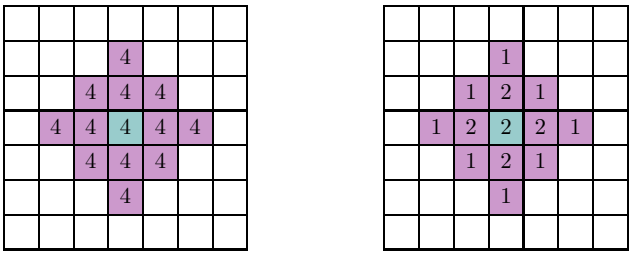
而 K 的支撑半径为 $\mathsf{len}(\mathsf{K}) := \max\{\mathsf{dist}(f, f_0) : \mathsf{K}_f \neq 0\}$.

有两个构型将在我们的分析中发挥重要作用。第一个构型是阿兹特克菱形，其面 f 具有以下权重

$$\mathrm{Az}(n)_f := \max\{n - \mathrm{dist}(f_0, f) + 1, 0\} \quad \text{for all faces } f \neq f_0\,,$$

且 $\mathsf{Az}(n)_{f_0} = n$。

第二个构型是高度为 n 、半径为 r的脉冲，我们记作 $\mathsf{K}(n, r)$。在边表示中，$\mathsf{K}(n, r)$可以描述为一个以 f_0为中心、半径为 r 的简单闭曲线，其上有n 流单位沿顺时针方向流动。在面表示中，$\mathsf{K}(n, r)$是满足以下条件的构型：若 $\mathsf{dist}(f_0, f) \leq r$，则 $\mathsf{K}(n, r)_f = n$；否则 $\mathsf{K}(n, r)_f = 0$。下方展示了 K(4, 2) 和 Az(2) 的示例。在边表示中，K(4, 2) 是一条沿线有 4 个流单位的闭曲线，而 Az(2) 在以指定面为中心的离散 ℓ_1-球内的每条边上都有 1 个流单位。



脉冲 K(4, 2) 阿兹特克菱形 Az(2)

这两种构型之所以重要，源于以下定理；它在流发射的背景下证明了合流行为的首个实例。

定理 5（[4, 定理 9]）。在 K(n,0) 上进行的任何一系列流点火操作都会终止于 Az(n).

流发射的三种状态定理（定理 1）更全面地描述了标记面周围初始构型可能出现的行为，尤其指出，脉冲基本上是唯一能产生合流系统的初始构型。

为了提供背景并进行比较，在继续证明流发射定理之前，我们先给出图上的筹码点火定理的精确表述。

定理 6（[2, 定理 3.3]: 图上的筹码点火的三个区间）。设 G 为一个具有 n 个顶点和 m 条边的有限连通图。设 c 为一个总共有 N 个筹码的构型。那么

(1) 如果 $N < m$ ，那么筹码点火过程经过有限次发射后终止。

(2) 如果 $m \le N \le 2m-n$，那么存在一个能够稳定化的初始构型，也存在一个不能稳定化的初始构型。(3) 如果 $N > 2m-n$，那么筹码点火过程永远不会稳定化。

3. Path-Firing

路径 $\mathcal{P}$ 是连续面 $\mathcal{P} = (f_1, \ldots, f_k)$ 的集合，满足对于 $2 \le i \le k$，$\mathrm{dist}(f_{i-1}, f_i) = 1$。仅涉及 $\mathcal{P}$ 各面的流发射过程称为路径发射。若每个 f_i 的值为 $\max\{0, n - \mathrm{dist}(f_0, f_i) + 1\}$，则称路径为标准路径。换言之，标准路径是指 f 的权重与 $\mathrm{Az}(n)_f$ 相匹配的路径。

设 R 是 $\mathcal{P}$ 上的一个路径配置，且 R 的面权重构成弱递减序列 $\mathrm{R}_1 \ge \cdots \ge \mathrm{R}_k$。沿路径 $\mathcal{P}$ 对 R 进行路径发射所得到的构型称为中间路径配置；如果没有更多路径发射操作可执行，则称该构型为路径稳定。注意，任何中间路径配置的面权重始终构成弱递减序列。这意味着，从面 f_i 进行发射时，只能朝向面 f_{i+1}——换言之，沿着 $\mathcal{P}$ 的发射只能朝一个方向进行。

事实证明，路径发射等价于沿直线进行图上的筹码点火，这一过程已在 [1] 中得到研究；另见 [10, 第 5] 章。因此，我们可以运用图上的筹码点火的标准结果来研究路径发射。建立这一联系的关键是离散导数这一概念，定义如下。感谢一位匿名审稿人指出这一联系。

设 R 是如上所示路径 $\mathcal{P}$ 上的一个路径配置。记 $d(\mathrm{R}) = (d_1, \ldots, d_k)$ 为 R 的离散导数，其中 $d_k = \mathrm{R}_k$ 且 $d_i = \mathrm{R}_i - \mathrm{R}_{i+1}$，对 $i = 1, \ldots, k$ 均成立。
考虑构型 $\mathrm{R}' = (\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_i - 1, \mathrm{R}_{i+1} + 1, \ldots, \mathrm{R}_k)$，它是从 R 出发，朝面 f_{i+1} 的方向从面 f_i 进行发射后得到的。则 R' 的离散导数为

$$d(\mathrm{R}') = \begin{cases} (d_1, \ldots, d_{i-1} + 1, d_i - 2, d_{i+1} + 1, \ldots, d_k) & \text{if } i > 1, \\ (d_1 - 2, d_2 + 1, d_3, \ldots, d_k) & \text{if } i = 1. \end{cases} \tag{1}$$

注意，通过求部分和可以从离散导数还原 R：权重 R_i 为

$$\mathrm{R}_i = \sum_{j=i}^{k} d_j.$$

由此得到以下结论，该结论可由公式 (1) 立即推出。

命题 7. 沿着 $\mathcal{P}$ 对 R 进行路径发射，等价于在顶点为 $v_0, v_1, \ldots, v_k$ 的直线上进行筹码点火；其中，对于任意 $0 \le i \le k$，顶点 v_i 有 d_i 个筹码，而顶点 v_0 是汇顶点（没有筹码）。

例 8. 对于固定整数 ℓ，考虑路径配置 $\mathrm{R}(\ell)$，其中对所有 $1 \le i \le \ell$，$\mathrm{R}(\ell)_i = n$。那么，$\mathrm{R}(\ell)$ 的离散导数 $d(\mathrm{R}(\ell)) = (d_0, d_1, \cdots)$

$$d(\mathrm{R}(\ell)) = (0, \cdots, 0, n, 0, \cdots 0)$$

对应的图形配置对所有 $i \ne \ell$. 都有 $d_\ell = n$ 和 $d_i = 0$。图上的筹码点火的这一特殊情形在 [1] 中有所研究，其最终构型已有充分了解（见推论 9）。

我们的最终目标是理解在 $\mathrm{K}(n, r)$ 上通过流发射得到的配置。为此，我们将首先分析沿 $\mathrm{K}(n, r)$ 的单行进行的路径发射，这一概念已在例 8 中隐含引入。明确地，对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，定义

$$\mathcal{P}(\ell) := (f_1 \ldots, f_{\ell + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}),$$

以及 $\mathcal{P}(\ell)$ 上的构型 $\mathsf{R}(\ell)$：

$$\mathsf{R}(\ell) := \underbrace{(n, n, \dots, n}_{\ell \text{ times}}, 0, 0, \dots).$$

由于 $\mathcal{P}(\ell)$ 不包含 f_0，沿 $\mathcal{P}(\ell)$ 发射时，筹码数量保持不变。$\mathsf{R}(\ell)$ 的离散导数为

$$d(\ell) := \underbrace{(0, 0, \dots, 0}_{\ell-1 \text{ times}}, n, 0, 0, \dots).$$

根据命题 7，在初始构型为 $\mathsf{R}(\ell)$ 的路径上进行流发射，与在一条含有 $\ell + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 个顶点（等价地，$\ell + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 条边）的直线上进行图式筹码点火相同，其中第一个顶点是汇。

上述情境中的筹码点火将根据 [10, 定理 2.5.2]，终止，但我们可以利用 [1, 定理 1] 更精确地描述其终止行为。下文将这一行为转换回流发射的表述，以便在第 5.2 节中应用。

推论 9（[1, 定理 1]）。对于任意 $\ell \geq 0$，沿 $\mathcal{P}(\ell)$ 通向 $\mathsf{R}(\ell)$ 的路径唯一终止。令 R° 为此终止构型，并令 S_ℓ 为从 $\mathsf{R}(\ell)$ 得到 R° 的过程中发生发射的面的集合。那么

- *If* $\ell > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ *then* $S_\ell = \{f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_{r-1}\}$,
- *If* $\ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, *then* $S_\ell = \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$,

其中 $k = \ell - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 并且令 $r = \mathsf{len}(\mathsf{R}^\circ)$。此外，如果 $\ell \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$，那么 $\mathsf{len}(\mathsf{R}^\circ) = \ell + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。

例如，当 $\ell \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时，我们计算推论 9 中与配置 R° 对应的离散导数 $d(\mathsf{R}^\circ)$：

$$d(\mathsf{R}^\circ) = \begin{cases} \underbrace{(1, 1, \dots, 1}_{\ell + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ times}}, 0, \dots) & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \underbrace{(1, 1, \dots, 1}_{\ell-1 \text{ times}}, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\frac{n}{2} \text{ times}}, 0, \dots) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{2}$$

如上所述，$d(\mathsf{R}^\circ)$ 完全决定了 R°。当 $\ell > \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时，确定 $d(\mathsf{R}^\circ)$ 更为简单，且 [1]中给出了明确结果。

除了描述 $\mathsf{R}(\ell)$ 的终止性行为外，命题 7 还使我们能够更全面地理解中间路径配置。下面的引理 10 表明，离散导数的各项不可能“过于频繁地”取零，除非它一开始就是如此。我们省略证明，因为它与 [1, 引理 1] 的证明类似。

引理 10. 设 R 是路径 $\mathcal{P}$ 上的一个路径配置，其面权重构成一个弱递减序列。设 R' 是通过对 R 进行路径发射得到的中间路径配置。令 $d(\mathsf{R}') = (d_0, \cdots, d_k, \cdots)$ 表示 R' 的离散导数。那么

(a) 如果 $d_i = d_{i+1} = 0$，面 f_i、f_{i+1} 和 f_{i+2} 从未发射；并且 (b) 如果 $d_i = d_j = 0$ 对于 $i+1 < j$，而 $d_\ell = 1$ 对于 $i < \ell < j$，那么面 f_i、f_{i+1}、f_j 和 f_{j+1} 从未发射。

引理 10 大幅限制了沿着 $\mathcal{P}$ 进行路径发射时可能出现的构型类型，之后在第 6.1 节中会用到这一点。

4. The first regime

定理 1（第 1 部分）。若 $r \le 1$，则从 K(n, r) 发射最终会唯一地终止于阿兹特克菱形 Az(n)。

我们用于证明一个构型可以在 Az(n) 中终止的方法（例如区间 1 和 2），依赖于找到 K(n, r) 的一个不会“违反”阿兹特克菱形的中间构型。如果某个面 f 满足 $\mathrm{K}_f > \mathrm{Az}(n)_f$，则称构型 K 违反阿兹特克菱形 Az($n$)。找到这样的构型后，根据引理 11，我们可以得出初始构型 K(n, r) 可以在 Az(n) 中终止。

引理 11. 设 K 是一个满足 $\mathrm{K}_{f_0} = n$ 的构型。如果对于所有面 f，都有 $\mathrm{K}_f \le \mathrm{Az}(n)_f$，那么存在一系列点火操作将 K 变为 Az($n$)。

证明。这一证明的核心来自两个观察。

(1) 设 f、g 是相邻面，且 g 到 f_0 的距离严格大于 g 到 f_0 的距离，因此 dist(f_0, f) $+ 1$ =dist(f_0, g)。如果 $K_f = \mathrm{Az}(n)_f$ 且 $K_g < \mathrm{Az}(n)_g$，那么 $K_g \le K_f - 2$，因此我们可以从 f 向 g 进行点火操作。(2) 如果 g 与 f_0 相邻，且 $K_g < \mathrm{Az}(n)_g$，那么 $K_g \le n - 1$，我们可以从 f_0 向 g 进行点火操作。

设 g 是一个面，使得 $K_g < \mathrm{Az}(n)_g$，但所有严格更靠近 f_0 的面都满足 $K_f = \mathrm{Az}(n)_f$。

如果 g 与 f_0 相邻，那么根据上面的 (2)，我们可以从 f_0 向 g 进行翻转。如果 g 不与 f_0 相邻，那么存在某个面 f 与 g 相邻，并且严格更靠近 f_0；根据 (1)，我们可以从 f 向 g 进行翻转。重复此过程，直到对于所有面 g 都有 K_g =$\mathrm{Az}(n)_g$。□

命题 12。如果 $r \le 1$，那么 K(n, r) 在阿兹特克菱形中唯一终止。

证明。 $r = 0$ 情形已在 [4, 定理 9] 中证明。如果 $r = 1$，那么 K(n,1) 是由 K(n, 0) 得到的一个中间构型，并且根据 [4, 定理 9]，它在 Az(n) 处唯一终止。□

我们将在下一节看到，尽管阿兹特克菱形中有更多构型可以终止，但一般来说，这种终止并不唯一。

5. The Second Regime

定理1（第2a部分）。如果 $2 \le r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$，则在 K($n, r$) 上进行流发射不会唯一终止。

为证明这一点，我们将说明存在 (i) 一列发射，其终止于 Az(n)，以及 (ii) 一列发射，其终止于一个不同于 Az(n) 的构型。

接下来，我们将用 K(n, r) 来陈述区域 2 的结果。不过，定理 1(2) 中的两个论断对权重为 n 的闭曲线也普遍成立：该闭曲线严格包含 K(n, 1)，且包含于 K(n, r) 内，其中 $2 \le r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$。

5.1. 第二区间：终止结果偏离阿兹特克菱形。本节的目标是说明，当 $2 \le r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时，构型 K(n, r) 不一定会在阿兹特克菱形中终止。

引理 13. 设 K 为任意构型，f 和 g 为相邻面，且

$$\mathrm{dist}(f_0, f) < \mathrm{dist}(f_0, g) < n\,.$$

如果 f 违反阿兹特克菱形而 g 没有，那么可以从 f 向 g发射。在得到的构型 K′ 中，如果 $\mathrm{K}_f > \mathrm{Az}(n)_f + 1$，那么 K'_f 将违反阿兹特克菱形；如果 K_g =$\mathrm{Az}(n)_g$，那么 K'_g 将违反阿兹特克菱形。

*Pro*的。要证明引理的第一部分，我们需要证明 $\mathsf{K}_f - \mathsf{K}_g \geq 2$。回想一下 t

$$\mathrm{Az}(n) = \max\{n - \mathrm{dist}(f_0, f) + 1, 0\}.$$

Since 距离$(f_0, f) <$距离$(f_0, g) < n$，我们有阿兹$(n)_g <$阿兹$(n)_f$。由于它们相邻 t,

$$\mathrm{Az}(n)_f - \mathrm{Az}(n)_g = 1.$$

Thus

$$\mathsf{K}_f \geq \mathrm{Az}(n)_f + 1 = \mathrm{Az}(n)_g + 2.$$

另一方面，由于 K_g 不违反阿兹特克菱形，$\mathsf{K}_g \leq$阿兹$(n)_g$。因此

$$\mathsf{K}_f \geq \mathsf{K}_g + 2$$

如所需。通过检查可清楚看出该断言的第二部分。 □

引理 14（洪泛引理）。设 f 是一个面，使得 $\mathsf{K}_f >$ 阿兹$(n)_f > 0$。则存在构型 K'，它可通过流点火操作从 K 到达，并且存在一个面 g，使得

- 距离$(f_0, g) = 1 +$距离(f_0, f)，并且
- $\mathsf{K}'_g >$Az$(n)_g$。

证明。我们按照引理的陈述，明确构造 K'。令 V 为构型 K 中违反阿兹特克菱形的面集。取 $f \in V$ 为距 f_0最远的面。根据 f的最大性，对于 f的每个满足 dist$(f_0, g) = 1 +$dist(f_0, f) 的邻面 g，它都不违反阿兹特克菱形。选取这样一个邻面 g，以及一条路径 $\mathcal{P} = (f_0, f_1, \cdots, f_\ell = g)$，使其不经过 f。

我们声称，可以沿着 $\mathcal{P}$ 不断进行 firing，直到 g 违反阿兹特克菱形。分两种情形：

- 情形 I：对于 $1 \leq i \leq \ell$，$\mathcal{P}$ 中没有 f_i 违反阿兹特克菱形。首先沿着 $\mathcal{P}$ 进行 firing，以构造一条标准路径。这总是可行的，因为 f_i 永远不会违反阿兹特克菱形。注意，经过这一过程后，g 的值为 Az$(n)_g$。根据引理 13，我们可以从 f 向 g进行 firing，这意味着随后 g 将违反阿兹特克菱形。
- 情形 II：存在某个 $1 \leq i \leq \ell$，使得 f_i 违反了阿兹特克菱形。选取违反条件且距 f_0 最远的面 f_i。因此，f_{i+1} 不违反 Az(n)，于是根据引理 13，我们可以从 f_i 向 f_{i+1}发射。重复此过程；由于我们处于守恒流设置中，该过程必然终止。终止后，我们要么处于情形 I，要么违反条件的位置已被推至 $\mathcal{P}_\ell = g$。

因此，所得构型 K' 满足 $\mathsf{K}'_g >$Az$(n)_g$，因为 g 违反了阿兹特克菱形。 □

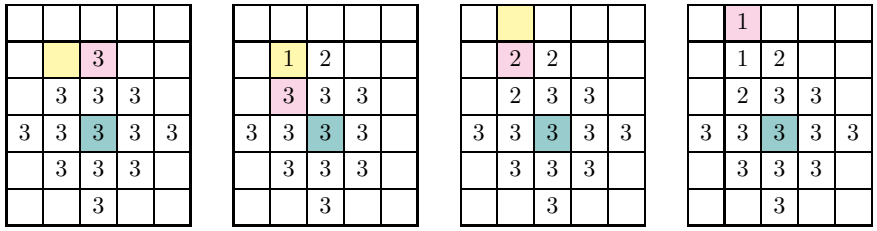
洪泛引理表明，对于满足 r 且 n 足够大的构型 K(n, r)，可以构造一个违反 Az(n) 的终止构型。

定理 1（第 2b 部分）。给定满足 $2 \leq r \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的构型 K(n, r)，存在一个稳定构型 K^*，使得 $\mathsf{K}^* \neq$ Az(n)。

证明。由于 $2 \leq r \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$，至少存在一个违反 Az$(n)$ 的面。令 V 为所有此类面的集合，并选择一个距 f_0 最远的 $f \in V$。由于 f 是最远的，任何满足 dist$(g, f_0) >$dist(f, f_0) 的面 g 都有 $\mathsf{K}_g \leq$ Az$(n)_g$。固定一个满足 dist$(g, f_0) =$dist$(f, f_0) + 1$ 的 g。将洪泛引理（引理 14）应用于 f 和 g，得到一个新的构型 K'，使得某个满足 dist$(g, f_0) >$dist(f, f_0) 的面 g 有 $\mathsf{K}_g >$Az$(n)_g$。

重复此过程，直到违规面 h 满足 dist$(f_0, h) > n$，从而 Az$(n)_h = 0$；注意，根据引理 13，这始终是可能的。将此配置称为 K'。由于 $\mathsf{K}'_h > 0$，在 K' 上进行点火操作绝不会降低 h面的权重，因此在 K' 上点火将得到一个满足 $\mathsf{K}^*_h > 0$的终止构型 K^*。因此，$\mathsf{K}^* \neq$ Az(n)。□

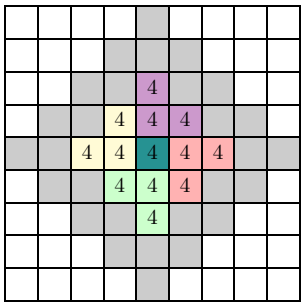
例 15。下面我们画出四个配置。第一个 (a) 是 K(3, 2)，其余三个则由第一个经过连续的点火操作得到。使用引理 14 的记号，对于下面每个配置 K，选取 f 作为 K 中最北端的可点火非零面（以粉色阴影标出），并令 g 为相邻的面（以黄色阴影标出）。使用这些 f 和 g的选取，我们展示洪泛引理的三次迭代过程。



5.2. 第二区间：阿兹特克菱形中的终止性。构造出一个由 K(n, r) 得到且不等于 Az(n) 的稳定构型后，我们现在希望证明，当 $2 \le r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 时，Az(n) 可以作为 K(n, r) 的最终构型出现。我们的目标是证明：

定理1（第2a部分）。给定满足 $2 \le r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 的构型 K(n, r)，存在一个通过对 K(n, r) 进行击发而得到的稳定构型 K^*，使得 $\mathrm{K}^* = \mathrm{Az}(n)$。

证明。将 K(n, r) 和 Az(n) 分成四个象限，如下图所示，以 K(4, 2) 为例。每个象限以不同颜色标示，Az(4) 则以灰色显示在背景中。注意，标记面 f_0 不属于任何一个象限。



不失一般性，我们可以研究一个象限，再利用对称性描述其余象限。考虑 K(n, r) 第一象限中的各行（在上图中以紫色标出），并从上到下计数。令 $\mathcal{P}(\ell)$ 为将该象限的第 ℓ^{th} 行延伸至 Az(n) 边界后得到的路径。于是， $\mathcal{P}(\ell)$ 上相关的构型为

$$\mathrm{R}(\ell) := (\underbrace{n, n, \cdots, n}_{\ell \text{ times}}, 0, \dots).$$

其行为已在第3节中研究。

注意，对于 $\mathcal{P}(\ell)$ 的每个面 f_i， $\mathrm{dist}(f_0, f_i) = r - \ell + i$

$$\mathrm{Az}(n)_{f_i} = n - \mathrm{dist}(f_0, f_i) + 1 = n - r + \ell - i + 1.$$

令 R° 为根据推论 9对 R(ℓ)进行路径发射所得到的唯一路径稳定构型。将推论 9中的离散导数转换为流发射的语言，我们得到 R°_i，即 R°上面 f_i 的值，为

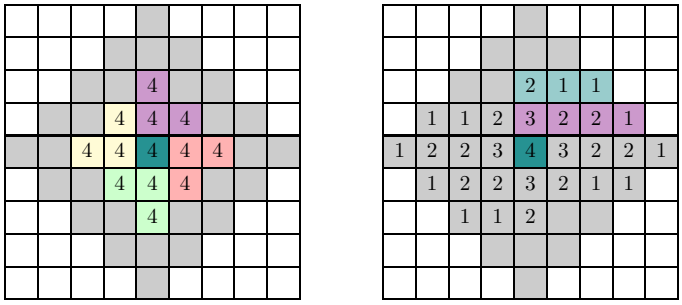
$$\mathrm{R}^\circ_i = \begin{cases} \ell + \lfloor n/2 \rfloor - i & \text{if } n \text{ even and } i < \ell, \\ \ell + \lfloor n/2 \rfloor - i + 1 & \text{else.} \end{cases}$$

由于 $r \le \lceil n/2 \rceil$，可得

$$\mathrm{Az}(n)_{f_i} \ge \lfloor n/2 \rfloor + \ell - i + 1 \ge \mathsf{R}_i^\circ .$$

因此，R_i° 沿着 $\mathcal{P}(\ell)$ 的值不能超过 $\mathrm{Az}(n)_{f_i}$。以类似方式沿所有行对 $\mathsf{K}(n,r)$ 进行点火，便可得到一个不违反 $\mathrm{Az}(n)$ 的构型。因此，根据引理 11，可以执行一系列点火操作，从而得到以 $\mathrm{Az}(n)$ 为稳定构型的结果。□

例 16。下方展示了在四个象限中均进行路径发射后的完整配置。请注意，第二个配置不违反阿兹特克菱形 Az(4)。这意味着我们可以通过点火操作应用引理 11，从第二个配置得到 Az(4)。



6. The Third Regime

最后，我们转向第三种情形。我们首先将在第 6.1 节证明，当 $r > \lceil n/2 \rceil$ 时，$\mathsf{K}(n,r)$ 不可能唯一终止。然后，我们将在第 6.2 节证明，对于 $r > \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$，$\mathsf{K}(n,r)$ 不可能在阿兹特克菱形中终止。

6.1. 非唯一终止性。我们将证明，对于 $r > \lceil n/2 \rceil$，$\mathsf{K}(n,r)$ 不会唯一终止。我们的证明依赖于以两种不同方式分解网格，如下所示：

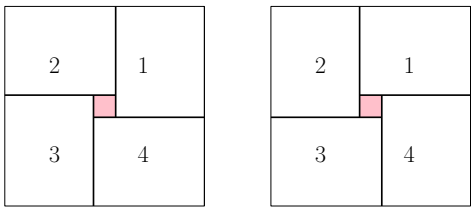


Figure 3. 将网格分解为象限的两种不同方式。

对于 $i = 1,2$，我们将 D_i 称为网格的分解。我们的论证引入了一种算法，该算法在每个象限内以相同的方式进行发射，但使用图 3 中的两种分解会产生两种不同的最终构型。

定理 1（第 3a 部分）。如果 $r > \lceil n/2 \rceil$，那么 $\mathsf{K}(n,r)$ 不会唯一终止。

证明。显然，当 $r \ge 1$ 时，$\mathsf{K}(2,r)$ 不会唯一终止。因此，假设 $n > 2$。为得出矛盾，假设 $\mathsf{K}(n,r)$ 唯一终止。

考虑 $\mathsf{K}(n,r)$ 上的以下流发射算法：

(1) 按照 D_1 或 D_2 中的任一种方式，将 $\mathsf{K}(n,r)$ 划分为四个象限，如图 3 所示；

(2) 在可能的情况下，在每个象限内沿着远离 f_0 的所有水平路径（例如各行）进行路径点火；
(3) 在可能的情况下，在每个象限内沿着远离 f_0 的所有垂直路径（例如各列）进行路径点火；
(4) 返回步骤 (2)。

我们断言，无论是按 D_1 还是按 D_2划分象限，这一过程都会得到一个稳定构型。根据构造，在每个象限内，所得构型都是稳定的。注意，不同象限之间任意两个相邻面，其面值之差至多为一。这是因为这些象限互为反射，面值恰好分别上下（左右）平移一个单位。令 K_i 表示通过上述过程得到的稳定构型，其中象限的选择为 D_i 对应 $i = 1, 2$。

根据假设，$\mathrm{K}(n, r)$ 唯一终止，因此 K_1 和 K_2 的支撑集与面权重均相同。

我们按如下方式标记 K_1 和 K_2 的面权重：首先，用 $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ 标记网格的面，使得 $f_{j,k} \in \mathbb{Z}$ 是面 (j, k) 的面权重。固定编号，使指定面为 $f_{0,0}$，且 (j, k) 向右、向上递增。我们将重点关注 K_i的第一象限，记作 Q_i。将 Q_i 中的面权重均标记为 $a_{j,k}^{(i)} \in \mathbb{Z}_{>0}^2$，其中左下角的面为 $a_{1,1}^{(i)}$，对应 $i = 1, 2$；同样，编号向右、向上递增。

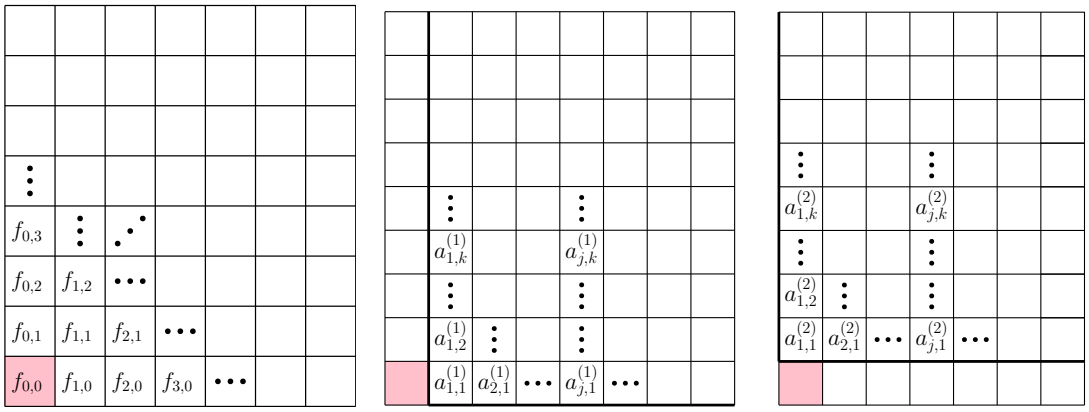


FIGURE 4. 网格的面标记，以及 Q_1 和 Q_2 中的面权（分别）

我们有三点观察：

- 由于构型 Q_1 和 Q_2 是通过相同的发射过程得到的，$a_{(1)\ j,k} = a_{(2)\ j,k}$对所有 $j,k \in \mathbb{Z}_{>0}^2$均成立。换言之，$Q_2$ 是将 Q_1 向上、向左平移 1 得到的；
- 根据 D_1 和 D_2的定义，我们有 $a_{(1)\ 1,1}$ 是 K_1 中 $f_{(1)\ 1,0}$ 的面权，而 $a_{(2)\ 1,1}$ 是 K_2 中 $f_{(2)\ 0,1}$ 的面权；
- 根据假设 $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2$，我们有 $a_{(1)\ j,k} = a_{(2)\ j+1,k-1}$ 对所有 j, k均成立。因此 $a_{(1)\ j,k} = a_{(1)\ j-1,k+1}$对所有 j, k均成立。

将 Q_i 的列从左到右标记为 C_1、C_2、...、C_t，并令 C_j 的长度为 n_j。由上一个观察可知，对于 $j = 1$、...、$t - 1$，必有 $n_{j+1} = n_j - 1$。因此，不失一般性，我们可以将 Q_1 描述如下图5所示：

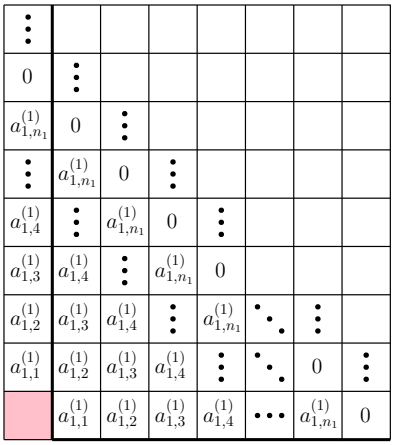


FIGURE 5. Q_1中的面权重

从现在开始，我们专注于 Q_1。为便于记号，令 $a_{1,j} := a^{(1)}_{1,j}$ 对于 $1 \le j \le n_1$。注意，$a_{1,n_1} = 1$ 以及 $n_1 > r$。

令 $r = \lceil n/2 \rceil + k$，其中 $k \ge 1$。由于 $n > 2$，我们有 $r \ge k+2$。考虑 Q_1 第一列中面值为 $a_{1,1}$、$\cdots$、a_{1,n_1}的面 $f_{1,0}$、$\cdots$、f_{1,n_1-1}。

根据推论 9 和发射规则可知，为得到 Q_1，面 $f_{1,k+1}$、.....、f_{1,n_1-2} 均已发射，但在此过程中，为得到 Q_1，面 $f_{1,0}$、.....、$f_{1,k-1}$ 可能已经发射，也可能尚未发射。因此，对于所有 $k+1 \le i \le r+1$，都有 $a_{1,i} \le n-1$。此外，如果 $a_{1,\ell} = n$（换言之，$f_{1,\ell}$ 从未发射），则 $k \ge \ell$。

我们最后的观察是，Q_1 中的面权总和为

$$\sum_{i,j} a_{i,j} = \frac{nr(r+1)}{2} \tag{3}$$

因为在发射过程中面权保持不变，从而得到 Q_1。

假设上述条件均成立，由于 $a_{1,r+1} \le n-1$，有三种情况需要考虑。我们将证明每种情况都会导出矛盾，因此 K(n, r) 不可能唯一终止。

情况 1：假设 $a_{1,r+1} = n-1$。根据引理 10，要么 $a_{1,r} = n$，要么 $a_{1,r-1} = n$。这意味着要么 $k \ge r$，要么 $k \ge r-1$。由于 $r \ge k+2$，这两种情况都不可能。因此，$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2$, 不可能成立，所以在这种情况下 K(n, r) 不可能唯一终止。

情况 2：假设 $a_{1,r+1} = n-2$。那么，与前一种情况一样，根据引理 10，要么 $a_{1,r-1} = n$，要么 $a_{1,r-2} = n$。正如我们在前一种情况中所见，$a_{1,r-1} = n$ 是不可能的。注意，当$a_{1,r-2} = n$时，我们有以下两种情况之一

(i) $(a_{1,r+1}, a_{1,r}, a_{1,r-1}, a_{1,r-2},) = (n-2, n-2, n-1, n)$ or
(ii) $(a_{1,r+1}, a_{1,r}, a_{1,r-1}, a_{1,r-2}) = (n-2, n-1, n-1, n)$.

若 $a_{1,r-2} = n$，则 $k \ge r-2$，这意味着 $r = k+2$。这只会在 $n = 3$ 或 $n = 4$时发生。通过计算 Q_1 中 $n = 3$ 的筹码总数，以及式 (3) 给出的面权总数，我们得到

(i) $\frac{3}{2}k(k+1) + 4k + 7 = \frac{3}{2}(k+2)(k+3)$ or
(ii) $\frac{3}{2}k(k+1) + 5k + 9 = \frac{3}{2}(k+2)(k+3)$

这两者均没有非负整数解。同理，对于 $n = 4$，我们得到

(i) $2k(k+1)+8k+17 = 2(k+2)(k+3)$
或 (ii) $2k(k+1)+9k+97 = 2(k+2)(k+3)$

nei其中有非负整数解。因此，这种情形也不可能 .

情形 3：假设 $a_{1,\ r+1} \le n-3$。

现在我们将从 K(n,r) 构造第三个终止构型 K_3 ，并证明 $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_3$ 不可能。

为了构造 K_3, ，考虑这样一个中间构型：对 K(n,r) 应用证明开头所述的算法，但仅在 D_1 的第一象限内进行。这将得到第一象限中的构型 Q_1 ，以及其他三个象限中的 K(n,r)。

回忆 $r > \lceil n/2 \rceil$，并考虑 Q_1 的（从南向北数的）$(r+1)^{\text{th}}$ 行。将该行上的构型记为 R，其中

$$\mathsf{R} := (a_{1,r+1}, a_{1,r+2}, \cdots, a_{1,n_1}, 0, \cdots).$$

注意，$f_{n_1+1,r}$ 是 R 中第一个权重为 0 的面。

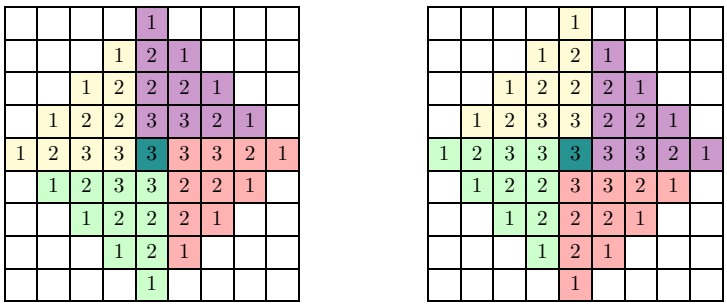
˜令 R 为将 R 向左延伸 Q_1 一个单位所得的构型，即加入面 $f_{0,r}$；这个新面权重为 n，因为第四象限（即西北象限）中尚未有任何面被发射：

$$\tilde{\mathsf{R}} := (n, a_{1,r+1}, a_{1,r+2}, \cdots, a_{1,n_1}, 0, \cdots).$$

˜现在沿着这一行对 R 进行路径点火。由于 $a_{1,r+1} \le n-3$，由引理 10 可知，在对 R 进行
˜路径发射后，$f_{n_1+1,r}$ 的面权非零。将这个中间构型称为 K。

˜最后，我们可以通过 [4, 定理 4]从 K 得到稳定构型 K_3。重要的是，在 K_3 中，面˜$f_{n_1+1,r}$ 的面权非零，因为它在 K 中非零。另一方面，$f_{n_1+1,r}$ 的权重在 K_1中为零。因此 $\mathrm{K}_1 \neq \mathrm{K}_3$, ，所以 K$(n,r)$ 无法唯一终止。□

例 17. 对于 K(3, 3)，下图展示了两种不同的最终构型。我们按照图 3 的方式分解网格，并按照定理 1(3a) 的证明进行点火。



6.2. 区域 制 3：阿兹特克菱形之外的终止性。此后，令 $N = \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$.

定理 1（第 3 部分 b）。若 $r \ge N$，则 K(n,r) 无法在阿兹特克菱形 Az(n) 中终止。

注18. 事实上，对于任何包含 K(N,r) 且权重为 n 的闭曲线，定理 1(3b) 均成立。

证明。只需证明权重(K(n,r)) $>$ 权重(Az(n))。令 K 表示阿兹特克菱形的一个象限。K 的权重为

$$\mathrm{weight}(\mathsf{K}) = (n+n-1+\cdots+1) + (n-1+n-2+\cdots+1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

因此，对所有四个象限及 f_0 求和，可得

$$\text{weight}(\text{Az}(n)) = n + 4\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right) = n + \frac{2}{3}(n)(n+1)(n+2)\,.$$

令 K′ 表示 K(n, r) 的一个象限。K′ 的权重为

$$\text{weight}(\mathsf{K}') = nr + n(r-1) + \cdots 2n + n = n \cdot \frac{r(r+1)}{2}$$

其中，第一个表达式是将该象限每一行中的筹码总数相加得到的。因此，按照类似的逻辑，对所有象限求和并且 f_0，可得

$$\text{weight}(\mathsf{K}(n,r)) = n + 4n \cdot \frac{r(r+1)}{2}.$$

假设 $r \geq \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$，并注意，对于 n 为正整数，$\lceil n/\sqrt{3} \rceil > n/\sqrt{3}$. 因此

$$\text{weight}(\mathsf{K}(n,r)) > \frac{2}{3}\left(n^3 + 3\sqrt{3}n^2 + 6n\right) + n > \frac{2}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right) + n = \text{weight}(\text{Az}(n)). \qquad \square$$

6.3. 界的改进。定理 1(3b) 自然引出了一个问题：当 $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1 > r > \lceil n/2 \rceil$ 时，K(n, r) 是否可能在阿兹特克菱形中终止？下表列出了 $3 \leq n \leq 24$ 时 $r = \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$ 和 $\lceil n/2 \rceil$ 的值，以及使得 weight(K(n, r)) > weight(Az(n)) 成立的 r 的最小值。

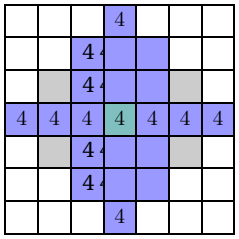
n	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
$\lceil \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} \rceil$	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12
最小 **r**	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	14	14	15
$\lceil \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \rceil + \mathbf{1}$	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15

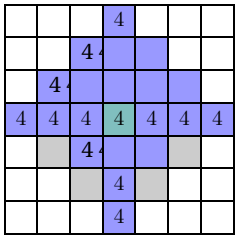
使 weight(K(n, r)) > weight(Az(n)) 成立的 r 的最小值，恰好是 $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$，约占三分之一。因此，在这些情况下，除非采用不同的方法，否则定理 1(3b) 中的界无法改进。另一方面，对于 $n > 8$，$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 与 r 的最小值之间存在差距。这表明，为区域 2 找到更好的上界或许更可行。以下示例表明，改进区域 2 和区域 3 的界可能相当微妙。

(1) 可以找到配置 K(n, r)，其中 $\lceil \frac{n}{2} \rceil < r < \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$，它们能够在 Az$(n)$ 处终止。考虑 $n = 8$ 这种情况；区域 2 和区域 3 之间的区域内唯一的球是 K(8, 5)。首先注意，weight(K(8, 5)) = weight(Az(8))。对于这个初始构型，存在一系列点火操作，最终在 Az(8) 处终止。

(2) 可以找到具有 $\lceil \frac{n}{2} \rceil < r < \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil + 1$ 的配置 K(n, r)，它们无法在 Az(n) 终止。考虑 $n = 4$ 的情况；状态2和状态3之间的区域内唯一的球是 K(4, 3)。从上表可以看出，权重(K(4, 3)) > 权重(Az(4))。因此，K(4, 3) 不可能在 Az(4) 终止。

(3) 可以在 K(n, r) 中找到能够终止于 Az(n) 的配置，即使 K(n, r) 无法做到这一点。假设 $n = 4$。考虑图中左侧包含在 K(4,3) 内的构型：





注意，weight(K) = weight(Az(4))。对于这个初始构型 K，可以找到一系列点火操作，使其最终到达阿兹特克菱形。(4) 可以找到一个满足 weight(K) = weight(Az(n))、但无法终止于 Az(n) 的构型 K。同样，取 $n = 4$，并考虑上图右侧的构型。这个构型无法终止于 Az(4)。

References

[1] Richard Anderson、Lisa Lovász、Peter Shor、Joel Spencer、Éva Tardos 和 Shmuel Winograd。图上的筹码点火博弈。 *European J. Combin.*，12(4):283–291，1991。[2] Anders Björner、László Lovász 和 Peter W. Shor。图上的筹码点火博弈。 *European J. Combin.*，12(4):283–291，1991。[3] Art M. Duval、Caroline J. Klivans 和 Jeremy L. Martin。单纯复形的临界群。 *Ann. Comb.*，17(1):53–70，2013。[4] Pedro Felzenszwalb 和 Caroline Klivans。流量点火过程。 *Journal of Combinatorial Theory Series A*，177:105308，2021。[5] Pavel Galashin、Sam Hopkins、Thomas McConville 和 Alexander Postnikov。根系筹码点火 I：区间点火。 *Mathematische Zeitschrift*，292(3):1337–1385，2019。[6] Pavel Galashin、Sam Hopkins、Thomas McConville 和 Alexander Postnikov。根系筹码点火 II：中心点火。 *International Mathematics Research Notices*，2021(13):10037–10072，2019年6月。[7] Sam Hopkins、Thomas McConville 和 James Propp。通过筹码点火排序。 *Electron. J. Combin.*，24(3):第3.13号论文，20页，2017。[8] Caroline Klivans 和 Patrick Liscio。带标签的筹码点火的合流性。 *Journal of Combinatorial Theory Series A*，186:105542，2022。[9] Caroline Klivans 和 Patrick Liscio。移动与构型偏序集。 *Arxiv preprint*，2022。[10] Caroline J. Klivans。 *The mathematics of chip-firing*。离散数学及其应用（博卡拉顿）。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2019年。

Email address: sarah_brauner@brown.edu

Brown University, Providence, RI, USA

Email address: dorpalen.barry@tamu.edu

Texas A&M University, College Station, TX, USA

Email address: skara@brynmawr.edu

Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA, USA

Email address: caroline_klivans@brown.edu

Brown University, Providence, RI, USA