arXiv:2303.02531v1 [math.DG] 5 Mar 2023

常角零超曲面

Samuel Chable-Naal、Matias Navarro、Didier A. Solis

2023年3月7日

摘要

本文介绍了相对于给定环境向量场的洛伦兹流形常角零超曲面的概念。我们分析了该向量场闭且共形的情形，并由此发现这类零超曲面具有一个典范主方向。我们还给出了一些关于零平均曲率常角零曲面的分类结果。

关键词： *Null hypersurfaces, closed conformal vector fields, constant angle hypersurfaces*

2020年数学主题分类： *53B30, 53A05, 53A10*

1 引言

受特定几何限制的子流形分类，一直是半黎曼几何发展的主要推动力之一。对特定类别环境空间中的全测地、全脐、极小或等参子流形进行刻画，至今仍是活跃的研究领域（详细论述请参见 [7, 9, 12]）。从历史上看，最早受到探索的此类对象包括所谓的常角子流形；其研究可追溯至 J. Bernoulli 关于螺线和恒向线的工作 [38]。

在黎曼情形中，给定黎曼流形$(M,\ \bar{g})$中的一个定向浸入超曲面 M^{-}，以及一个指定的向量场 $V \in\Gamma(TM)$，$V \neq 0$，M 关于 V 的 *angle* θ 定义为

$$\cos\theta = \frac{\bar{g}(V,\mathbf{n})}{|V|}, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{n}$ 是 M的单位法向量场。因此，常角超曲面由 θ的常数性刻画。这一概念可以通过要求式（1）右端的大小沿 M保持常数，直接推广到半黎曼情形。请注意，在某些特定情形下，后一个表达式具有独特的几何意义。例如，在洛伦兹情形中，当 M 为类空且 V 为类时时，它可以解释为双曲余弦 [35]。从几何学角度来看，最有意义的性质出现在

向量场 V 承载某些重要的几何信息的情形中。这类向量场的经典例子包括作为等距变换（Killing场）或共形映射（闭共形场或共圆场）等几何变换的无穷小生成元而出现的向量场。值得一提的是，后一类包括平行、径向和梯度向量场 [27]。

近年来，人们在笛卡尔积 [10, 13, 16, 19], 扭曲积 [15, 22], 空间形式 [20, 28, 30, 34] 以及其他几何上相关的环境空间 [1, 36, 37]中，建立了若干关于常角半黎曼（非退化）超曲面的分类结果。一个值得注意的关系，体现在特殊向量场 V 与常角超曲面 M 的几何之间，并由典范主方向这一概念加以概括：切向分量 $V^{\top} \in \Gamma(TM)$ 是 M [11, 21, 23, 29]的主方向。

我们注意到，上述讨论仅涉及非退化超曲面。然而，在洛伦兹几何和数学相对论中，一些研究最多的子流形——例如事件视界和 Killing视界——却是零的，也就是说，它们是退化的 [26, 25, 40]。尽管零子流形理论对理论物理具有重要意义，直到20世纪80年代，人们才建立起一种研究零子流形的框架，其思路接近经典的黎曼子流形理论。此项工作需要克服的主要困难在于，在洛伦兹几何中，与零超曲面 $M \subset \bar{M}$ 正交的向量场也与其相切。因此，无法将 TM 正交地典范分解为法向分量和切向分量。在 [17] K. Duggal 和 A. Bejancu 奠定了零子流形理论的基础，该理论建立在选择一种附加结构之上，即所谓的屏分布 $S(TM)$。此后，沿着这一思路开展了大量研究（例如参见 [18] 及其中的参考文献）。特别是，广义Robertson-Walker时空中的零超曲面研究至今仍是一个活跃的研究领域 [31]。

2 预备知识

沿用 [17, 18], 的记号，以 $(M, \bar{g})$ 表示一个 $(n+2)$ 维洛伦兹流形，其度量为 $\bar{g}$；以 M 表示浸入于 M 中的一个 $(n+1)$ 维流形，且其退化诱导度量为 g。等价地，存在一个与 M 相切的向量场$\xi \neq 0$，使得

$$g(\xi, X) = 0, \quad \text{for all } X \in \Gamma(TM).$$

由于 $\dim T_pM + \dim T_pM^{\perp} = \dim T_p\bar{M}$，所以每个 $p \in M$ 处的 *radical space* 根基分布（T_pM）$= T_pM \cap T_pM^{\perp}$ 满足

$$\mathrm{rad}(T_pM) = span(\xi_p).$$

radical bundle 根基分布（TM）由下式给出

$$\mathrm{rad}(TM) = \bigcup_{p \in M} \mathrm{rad}(T_pM).$$

screen distribution 在 M 上的一个向量子丛 $S(TM)$ 属于 TM，且满足

$$TM = S(TM) \oplus_{\mathrm{orth}} \mathrm{rad}(TM), \tag{2}$$

因此， $S(TM)$ 是 TM 中 $\mathrm{rad}(TM)$ 的补空间。

注意，由于 $\bar{g}$ 的洛伦兹型，限制在 $S(TM)$ 上的度量是正定的。直观地说，恰当地选择 $S(TM)$，就能使我们将 (M, g) 的几何与 $S(TM)$ 中更熟悉的（黎曼）几何联系起来。下文中， *null hypersurface* 表示一个三元组 $(M, g, S(TM))$。

这一框架中的最后一个主要要素是所谓的 *transversalbundle* $\mathrm{tr}(TM)$，它是唯一满足以下性质的秩为 1 的向量丛：给定 $\xi \in \Gamma(\mathrm{rad}(TM))$，存在唯一的 $N \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$，使得

$$\bar{g}(\xi, N) = 1, \quad \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, X) = 0, \quad \text{for all } X \in \Gamma(S(TM)). \tag{3}$$

因此，我们可以将环境流形的切丛分解为

$$T\bar{M} = TM \oplus \mathrm{tr}(TM). \tag{4}$$

注 2.1. *Notice that even though a choice of screen distribution $S\ TM$ determines the transversal bundle M there is an scaling gauge () for the sections ξ and N satisfying 3 . Indeed if the smooth function* $\mathrm{tr}()(),f: M \to \mathbb{R}$ *never vanishes, then the smooth sections*

$$\xi' = f\xi, \quad N' = \frac{1}{f}N \tag{5}$$

also satisfy (3)。

注记 **2 2** *Let us consider a vector field ζ transversal to M and $\xi \in$ ..* (根基分布( ))
Γ TM
. Then the vector field N_ζ given by

$$N_\zeta = \frac{1}{\bar{g}(\xi, \zeta)} \left(\zeta - \frac{\bar{g}(\zeta, \zeta)}{2\bar{g}(\xi, \zeta)} \xi \right)$$

satisfies $\bar{g}\ N_\zeta\ N_\zeta\ = 0$ and $\bar{g}\ N_\zeta\ \xi$ ζ induces a screen(,) *distribution $S_\zeta\ TM\ = \mathrm{span}\ \xi\ N_\zeta\ ^\perp$ (refer to Eq. 2.1.7 in [18])*[1]*. The* (bo)e=o1 *Thetorisk,kg( ) in the rigging approach to null hypersurface theory [24].*

根据分解式（2）和（4），我们可以引入诱导联络、形状算子和第二基本形式的概念，以及它们之间的基本方程。

Let $(M, \bar{g})$ 和 (的2列维-齐维塔联络给定 $X, Y \in \Gamma(TM)$，我们可以将与分解 (4) 相关的高斯公式和魏因加滕公式写为

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^t_X V, \end{aligned} \tag{6}$$

[1]注意，在这种情况下 $\zeta \in \Gamma(S_\zeta(TM)^\perp)$。

其中 $\nabla_X Y, A_V X \in \Gamma(TM)$，且 $h(X,Y)\nabla^t_X V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$。上述内容分别在 TM 和 $\mathrm{tr}(TM)$ 上诱导出线性联络 ∇ 和 ∇^t。然而请注意，∇ 并非度量联络，尽管它是无挠的。此外，$A_V: \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$，且 h 是 $\mathrm{Hom}^2(TM, TM; \mathrm{tr}(TM))$ 的一个对称截面，并满足

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \bar{g}(h(X,Y),Z) + \bar{g}(Y,h(X,Z)). \tag{7}$$

对所有 $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$。∇、A_V和 h 分别称为 *induced connection*、*shape operator* 和 *second fundamental form of* M。

另一方面，相对于分解式 (2)，我们有关于 TM的另一组高斯-魏因加滕公式:

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h^*(X, PY), \\ \nabla_X U &= -A^*_U X + \nabla^{*t}_X U, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $U \in \Gamma(\mathrm{rad}(TM))$，$P$ 表示将 TM 投影到 $S(TM)$上；∇^* 和 ∇^{*t} 分别是 $S(TM)$和$\mathrm{rad}(TM)$上的联络。这里$A^*_U: \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$以及 $h^* \in \mathrm{Hom}^2(TM, S(TM), \mathrm{rad}(TM))$分别是 $S(TM)$的 *screen shape operator* 和 *screen second fundamental form*。直接计算可知，∇^* 是关于 $\bar{g}|_{S(TM)}$的度量联络。

为便于后文参考，我们列举一些关于零超曲面的标准结果，这些结果将在本文中始终使用。完整证明分别参见 [17] 和 [18], 中的命题 2.1.2 和 2.2.6。

命题 2.3. *Let* $(M, g, S(TM))$ *be a null hypersurface,* $U \in \Gamma$(根基分布(TM)) *and* $V \in \Gamma(\mathrm{tr}(TM))$. *Then*

1. A_V *is* $S(TM)$ *valued.* 2. $A^*_U U = 0$.
3. A^*_ξ *is symmetric with respect to* g.
4. *The following are equivalent:*

- $S(TM)$ *is an integrable distribution.*
- h^* *is symmetric on* $S(TM)$。
- A_V *is symmetric respect to* $g|_{S(TM)}$.

对于 $Y \in \Gamma(TM)$，应用分解式 (2) 和 (4) 可得

$$Y = \overset{*}{Y} + Y_\xi + Y_N \tag{9}$$

其中

$$Y_\xi = \overline{g}(Y,N)\xi, \quad Y_N = \overline{g}(Y,\xi)N$$

且 $\overset{*}{Z}$ 是 Y 在 $S(TM)$ 上的投影。现在，我们将上述关系与 Gauss 和 Weingarten 公式相结合，建立当 $X \in \Gamma(S(TM))$ 时所得到的基本关系。

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \bar{\nabla}_X(\overset{*}{Y} + Y_\xi) + \bar{\nabla}_X Y_N \\ &= \nabla_X(\overset{*}{Y} + Y_\xi) + h(X, \overset{*}{Y} + Y_\xi) - A_{Y_N} X + \nabla^t_X Y_N \\ &= \nabla_X \overset{*}{Y} + \nabla_X Y_\xi + h(X, \overset{*}{Y} + Y_\xi) - A_{Y_N} X + \nabla^t_X Y_N \\ &= \overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{Y} + \overset{*}{h}(X, \overset{*}{Y}) - A^*_{Y_\xi} X + \nabla^{*t}_X Y_\xi + h(X, \overset{*}{Y}) - A_{Y_N} X + \nabla^t_X Y_N. \end{aligned}$$

总之

$$\bar{\nabla}_X Y = \underbrace{\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{Y} - A^*_{Y_\xi} X - A_{Y_N} X}_{\in\Gamma(S(TM))} + \underbrace{\overset{*}{h}(X, \overset{*}{Y}) + \nabla^{*t}_X Y_\xi}_{\in\Gamma(\mathrm{rad}(TM))} + \underbrace{h(X, \overset{*}{Y}) + \nabla^t_X Y_N}_{\in\Gamma(\mathrm{tr}(TM))} \tag{10}$$

注记 2.4. *Notice that when $S(TM)$ is integrable their leaves form a foliation of M by Riemannian manifolds $(\widehat{M}, \hat{g})$. As a consequence of Frobenius theorem in such cases ∇ is torsion free and hence it coincides with the Levi-Civita connection $\widehat{\nabla}$ of each leaf $\widehat{M}$ $\hat{g}$. Moreover, consider the Gauss-Weingarten formulae associated to decomposition $T\bar{M} = S(TM) \oplus S(TM)^\perp$, that is,*

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X(\overset{*}{Y} + Y^\perp) = \widehat{\nabla}_X \overset{*}{Y} + \alpha(X, \overset{*}{Y}) - \widehat{A}_{Y^\perp} X + \nabla^\perp_X Y^\perp, \tag{11}$$

where α, $\widehat{A}_{Y^\perp}$, $\nabla^\perp_X Y^\perp$ are the second fundamental form, shape operator and normal connections of M as a codimension two submanifold immersed in $\bar{M}$ (see [12]). Thus comparing the $S\,TM$ components in Eqs. 10 and 11 leads to

$$\widehat{A}_{Y^\perp} X = A_{Y_\xi} X + A_{Y_N} X, \qquad X \in \Gamma(S(TM)). \tag{12}$$

现在考虑式 (3) 中的零标架 $\{\xi, N\}$，并分别用 B、C 表示与 h 和 h^* 相关的双线性形式。即

$$h(X, Y) = B(X, Y)N, \qquad h^*(X, PY) = C(X, PY)\xi. \tag{13}$$

因此，由方程 (6) 和 (8) 可得

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{g}(h(X, Y), \xi) = g(Y, A^*_\xi X), \\ C(X, Y) &= \bar{g}(h^*(X, PY), N) = g(PY, A_N X), \end{aligned} \tag{14}$$

对所有 X，$Y \in \Gamma(TM)$ 均成立。于是可得

$$B(X, \xi) = 0 \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{15}$$

注意，由于 h 是对称的，根据式 (14)，A_N 关于 g 对称。因此，由命题 2.3 可知，只要 $S(TM)$ 可积，A_ξ 也具有相同性质。

null mean curvature H 是形状算子 A^*_ξ 的迹。根据式 (15)，有

$$H = \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i),$$

其中，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ 表示 $S(TM)$ 中的一个正交标架场。

此外，注意到 $\bar{g}(\nabla^t_X N, \xi) = -\bar{g}(\nabla^{*t}_X \xi, N)$。因此，根据由 τ 定义的一形式，

$$\tau(X) = \bar{g}(\nabla^t_X N, \xi) \tag{16}$$

魏因加滕公式如下：

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \tau(X)V, \quad \nabla_X U = -A^*_U X - \tau(X)U. \tag{17}$$

注 2.5. *Notice that when $\tau \equiv 0$ Eq. (17) looks just like the standard semi-Riemannian (non-degenerate) Weingarten formula for a unit normal vector field. In that sense the vanishing of τ can be interpreted as a normalization that ensures the closest possible analogue to the classical submanifold theory. As it turns out a choice of $\{\xi, N\}$ that yields $\tau \equiv 0$ is always possible if the Ricci tensor R ∇ vanishes (see Prop. 2.1.2 in [18]).*

与线性联络 ∇、∇、∇ 相关的曲率算子 R、R、R，由一系列基本方程相互关联；在非退化情形下，这些方程类似于标准的高斯-科达齐结构方程。我们只给出其中一个将在定理 6.4 中用到的方程，并将其称为 *Codazzi equation of M*。对于所有 X，Y，$Z \in \Gamma(TM)$以及$U \in \Gamma$(根基分布(TM))，均有

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,U) = \bar{g}((\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z),U)$$

因此，一旦零场 $\{\xi, N\}$ 确定，

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,\xi) = (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z) \tag{18}$$

其中，等式 7 可改写为

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = X \cdot B(Y,Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z).$$

半黎曼（非退化）子流形理论中广泛研究的许多重要几何约束，在零情形下也有类似的对应概念。例如，若存在光滑函数 λ，使得 $h(X, Y) = \lambda g\ X\ Y$ $h \equiv 0$ $S\ TM$ *totally umbilical* (，)（分别为 ）成立，则 M 是 *totally umbilical*（分别为*totally geodesic*）。类似地，若存在光滑函数 λ，使得 $h^*(X, Y) = \lambda g\ X\ Y$ $h^* \equiv 0$ (，)（分别为 ）成立，则（ ）是（分别为*totally geodesic*）。用形状算子表示，若 $A^*_\xi PX = \lambda PX$($A^*_\xi \equiv 0$)，则 M是全脐（分别为全测地）；同样，对于所有 $X \in \Gamma(TM)$，若 $A_N X = \lambda PX$($A_N \equiv 0$)，则 $S(TM)$是 *totally umbilical*（分别为 *totally geodesic*）。请注意，所有这些条件，以及零平均曲率（$H \equiv 0$）为零，都不取决于零标架 $\{\xi, N\}$的选择。

作为一个说明性示例，我们来讨论 *generalized Robertson-Walker* 时空的情形，简称 GRW 时空。回顾一下，它们定义为如下形式的洛伦兹翘曲积 $M = -I \times_\varrho F$，其中 (F, g_F) 是一个黎曼流形，而 ϱ 是定义在实区间 I 上的正光滑函数。因此我们有

$$\bar{g} = -\sigma^*(dt^2) + (\varrho \circ \pi)^2 \pi^*(g_F). \tag{19}$$

其中，σ 和 π 分别是 $\bar{M}$ 在 I 和 F上的投影。若纤维 F 是一个具有常截面曲率的黎曼流形，则对扭曲函数作适当选择，可以得到所有洛伦兹空间形式的开集，如下所示：

- 洛伦兹-闵可夫斯基空间：$\mathbb{L}^{n+2} = -\mathbb{R} \times_{\text{恒等}} \mathbb{R}^{n+1}$。
- 德西特空间：$\mathbb{S}^{n+2}_1 = -\mathbb{R} \times_{\text{双曲余弦}} \mathbb{S}^{n+1}$。
- 反德西特空间 $\mathbb{H}^{n+2}_1 = -\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\text{余弦}} \mathbb{H}^{n+1}$。

例 2.6 *Let $f: F \to \mathbb{R}$ be a smooth function such that $|\mathrm{grad} f| = \varrho \circ f$. Thus the graph $M = \{(f(p), p) \mid p \in F\}$ is a degenerate hypersurface in the GRW spacetime $\bar{M} = -I \times_\varrho F$. Further let $S^*(TM)$ be the family of tangent bundles of the level hypersurfaces, $S_t = M \cap (\{t\} \times F)$. Consider now $\xi \in \Gamma(TM)$ and $N \in \Gamma(TM)$ given by*

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_t + \frac{1}{(\varrho \circ f)^2}\overline{gradf}\right), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\partial_t + \frac{1}{(\varrho \circ f)^2}\overline{gradf}\right),$$

where $\overline{gradf}$ denotes the lift of $gradf$ to $\Gamma(T\bar{M})$. In this setting we have that the shape operators of $(M, g, S^*(TM))$ satisfy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(A_N - A_\xi^*) = \frac{\varrho'}{\varrho}P. \tag{20}$$

上述例子为屏拟共形超曲面的概念提供了动机，下一节将对其进行研究。详尽论述见 [33, 32]。

2.1 闭共形向量场

刻画 GRW 时空的一个性质与闭共形向量场的概念有关。回顾一下，若存在光滑函数 $\varphi: M \to \mathbb{R}$使得，则 $Z \in \Gamma(T\bar{M})$ 是 *closed_conformal*——简称 CC——

$$\bar{\nabla}_X Z = \varphi X \tag{21}$$

对所有 $X \in \Gamma(T\bar{M})$ 都成立。事实上，GRW 时空也可描述为具有类时闭共形向量场 [8] 的那些洛伦兹流形。在本文中，φ 始终表示与一个 CC 向量场相关联的函数。

在半黎曼空间形式中，将其视为浸入半欧几里得空间的超二次曲面时，CC 向量场是相应半欧几里得空间上定义的平行向量场 [34, 21] 的投影。注意，根据式 (19)，例2.6中的向量场 $Z = \varrho\partial_t$ 是闭共形的。

其他重要的 CC 向量场类包括 *parallel* ($\varphi \equiv 0$), *homothetic*（φ 是常数函数）以及 *radial*，也就是说，当 M 是半欧几里得空间且 $Z(x) = \varphi x + Z_0$ 时，其中 Z_0 是一个平行向量场。

CC 向量场最显著的特征之一是，它们的长度 $|Z| = \sqrt{|\bar{g}(Z, Z)|}$ 沿着与其正交的方向保持常数（若非零）（参见 [34] 中的引理 2.7）。

引理 2.7 *Let $Z \in \Gamma(TM)$ be a CC vector field and $X \in \Gamma(TM)$ such that $\bar{g}(Z, X) = 0$. If $\bar{g}(Z, Z)$ never vanishes then $X \cdot |Z| = 0$.*

Proof. 注意到

$$X \cdot \bar{g}(Z, Z) = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Z, Z) = 2\varphi\bar{g}(X, Z) = 0.$$

结论立即得出。 □

近年来，我们看到人们日益关注探索 CC 向量场与某些类零超曲面几何之间的相互作用，其中环境流形为空间形式[39], 、拟常曲率空间 [5], ，或与 Raychaudhuri 方程 [4] 相关。一个常见的出发点是描述一个

*CC 向量场 Z 根据分解 (9)，即 $Z = Z + Z_\xi + Z_N$，其中 $Z_\xi = g(Z, N)\xi$， $Z_N = -g(Z, \xi)N$ 以及 $\overset{*}{Z} \in \Gamma(S(TM))$。现在，我们建立将上述关系与高斯公式和魏因加滕公式结合后得到的基本关系。请将以下结果与 [5] 中的命题3.1以及 [39]中的命题3.7进行比较。

引理 2.8. *Let $(M, g, S(TM))$ be a null hypersurface of $(\bar{M}, \bar{g})$. If $Z \in \Gamma(TM)$ is a CC vector field, then for any $X \in \Gamma(S(TM))$:*

(a) $\varphi X = \overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{Z} - \bar{g}(Z, N)A^*_\xi X - g(Z, \xi)A_N X,$

(b) $C(X, \overset{*}{Z}) + X \cdot g(Z, N) - g(Z, N)\tau(X) = 0$ *and*

(c) $B(X, \overset{*}{Z}) + X \cdot g(Z, \xi) + g(Z, \xi)\tau(X) = 0.$

Proof. 由公式 10 可得

$$\varphi X = (\overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{Z} - A^*_{Z_\xi} X - A_{Z_N} X) + (\overset{*}{h}(X, \overset{*}{Z} + \nabla^{*t}_X Z_\xi) + (h(X, \overset{*}{Z}) + \nabla^t_X Z_N)$$

因此，对上述方程两边的 $S(TM)$ 分量进行比较，得到

$$\varphi X = \overset{*}{\nabla}_X \overset{*}{Z} - g(Z, N)A^*_\xi X - g(Z, \xi)A_N X$$

因此 (a) 成立。类似地，考察根基分布(TM)和迹(M)分量，可得

$$\begin{aligned} 0 &= h(X, \overset{*}{Z}) + \nabla^t_X Z_N, \\ 0 &= \overset{*}{h}(X, \overset{*}{Z}) + \overset{*}{\nabla}{}^t_X Z_\xi. \end{aligned}$$

* *回想一下， $h(X, Z) = B(X, Z)N$因此

$$\nabla^t_X Z_N = \nabla^t_X g(Z, \xi)N = ((X \cdot g(Z, \xi)) + g(Z, \xi)\tau(X))N.$$

因此 (c) 也成立。最后，(b) 可由与上述 (c) 的证明类似的论证得出。

□

由引理 2.8 (a) 可直接描述 Z 完全位于根基分布(TM) 或 tr(TM) 上的情形（与 [39] 中的定理 3.9 比较）。

¯**推论** **2 9** *Let M g S TM be a null hypersurface of M $\bar{g}$ and .. (,,()) (,)* *$Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ a CC vector field. Then*
()

1. *If $\overset{*}{Z} = Z_\xi = 0$, then M is totally umbilical.*
2. *If $\overset{*}{Z} = Z_N = 0$, then $S(TM)$ is totally umbilical.*

Moreover, if Z is parallel then

1. *If* $\overset{*}{Z} = Z_\xi = 0$ *, then* M *is totally geodesic.*

2. *If* $\overset{*}{Z} = Z_N = 0$*, then* $S(TM)$ *is totally geodesic.*

以下引理将在第 4 节和第 5 节的若干结果中发挥关键作用。¯**引理**

2 10 *Let* M g S TM *be a null hypersurface of* M $\bar{g}$ *and*.. (,,( )) (,) ( ) $Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ *a CC vector field. If* S TM *in integrable then* ( ) ,

$$X \cdot (\bar{g}(X,\xi)\bar{g}(X,N)) = -\bar{g}(X, A_{Z^\perp}\overset{*}{Z}), \quad X \in \Gamma(S(TM)).$$

Proof. 由于 $S(TM)$ 是可积的，因此 A_N 是对称的。于是，根据引理 2.8 的 (b)、(c) 点以及公式 (12)，我们有

$$\begin{aligned} X \cdot (\bar{g}(X,\xi)\bar{g}(X,N)) &= -\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(X, A_N\overset{*}{Z}) - \bar{g}(Z,N)\bar{g}(X, A^*_\xi\overset{*}{Z}) \\ &= -\bar{g}(X, A_{Z_N}\overset{*}{Z}) - \bar{g}(X, A^*_{Z_\xi}\overset{*}{Z}) \\ &= -\bar{g}(X, A_{Z^\perp}\overset{*}{Z}). \end{aligned}$$

□

本节最后计算 CC 向量场 Z 的范数的屏幕梯度。

¯**引理** **2 11** *Let* M g S TM *be a null hypersurface of* M $\bar{g}$ *and*.. (,,( )) (,) ( ) $Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ *a CC vector field. Then*

$$\overset{*}{\nabla}|Z| = \frac{\varepsilon_Z \varphi}{|Z|}\overset{*}{Z},$$

where $\varepsilon_Z = \pm 1$ *is the sign of* $\overline{g}(Z,Z)$.

Proof. 给定 $S(TM)$ 的一个标准正交标架 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$，我们有

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}\bar{g}(Z,Z) &= \sum_{i=1}^{n}(e_i \cdot \bar{g}(Z,Z))e_i = \sum_{i=1}^{n} 2\bar{g}(\overline{\nabla}_{e_i}Z, Z)e_i = \sum_{i=1}^{n} 2\bar{g}(\varphi e_i, Z)e_i \\ &= 2\varphi\overset{*}{Z}. \end{aligned}$$

最后

$$\overset{*}{\nabla}|Z| = \frac{\overset{*}{\nabla}\varepsilon_Z g(Z,Z)}{2|Z|} = \frac{\varepsilon_Z \varphi}{|Z|}\overset{*}{Z}.$$

□

3 屏拟共形零超曲面

一个自然产生的关键问题是： $S(TM)$作为 TM 的子丛时的几何，是否以某种自然方式与其作为 $T\bar{M}$的子丛时的几何相关。在 [3] 中，K. Duggal和C. Atindogbe定义了屏幕共形零超曲面的概念，并证明对于这一类超曲面，答案是肯定的。确切地说，一个零超曲面

$(M,\ g,\ S(TM))$若其形状算子线性相关，则称为 *screen conformal*，因此存在 $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$使得

$$A_N = \phi A_\xi^*.$$

当环境流形 $(\bar{M},\ \bar{g})$ 具有常曲率 [18] 时，关于这类超曲面已有大量分类结果。然而，根据例2.6，某一重要类的时空并不属于这一情形。因此，为了涵盖这类例子，文献 [32] 引入了屏幕拟共形零超曲面的概念。

定义 3.1. *A null hypersurface* $(M,\ g,\ S(TM))$ *of* $(M,\ \bar{g})$ *is*屏幕拟共形 *if the shape operators* A_N *and* A_ξ^* *of* M *and* $S(TM)$ *satisfy*

$$A_N = \phi A_\xi^* + \psi P,$$

for some functions $\phi\ \psi \in \mathcal{C}^\infty\ M$ *; where* $P\ \ \Gamma\ TM\ \to \Gamma\ S\ TM$ *is the*，( ) : ( ) (( )) (，) 拟共 *natural projection. We call* $\phi\ \psi$ *a* 形对 .

近期已有研究探讨满足经典几何限制（全测地、全脐、等距参数、爱因斯坦）的屏幕拟共形零超曲面（参见 [31] 及其中的参考文献）。此外，若 $(M,\ g,\ S(TM))$ 是屏幕拟共形的，则 $S(TM)$ 是可积的（参见 [32] 中的定理 3.7）。不难验证，例2.6 中描绘的零超曲面 $(M,\ g,\ S^*(TM))$ 是屏幕拟共形的，其拟共形对为 $(1,\ \sqrt{2}\varrho'/\varrho)$。 [2]

此时，自然会问：在什么情况下，我们能够为一个退化超曲面赋予屏分布，使相应的零超曲面 $(M,\ g,\ S(TM))$ 具有屏幕共形性质？ [18], 定理 2.3.5 指出，如果环境空间存在一个 *par-allel* 向量场，那么它会在任意零超曲面上诱导出一种屏幕共形结构。正如下一个结果所示，闭共形向量场与屏幕拟共形分布之间也存在类似的联系，从而推广了上述结果。

定理 3.2。 *Let* $(M,\ g)$ *be a degenerate hypersurface immersed* $(M,\ \bar{g})$ *and* $Z \in \Gamma($ $T\bar{M})$ *a closed and conformal vector field with* $\bar{g}(Z,\ Z) \neq 0$*. If* *Z is nowhere tangent to M then there exists a screen distribution $S'(TM)$* *so that* $M\ g\ S'\ TM$ *is screen quasi-conformal. Furthermore* $\tau\ X\ = 0($，，( ))，( ) (( )) $\forall X \in \Gamma\ S'\ TM$.

Proof. 由于 $Z_p \notin T_pM$ 我们有 $E = span(Z) \oplus$根基分布(TM) 是一个秩为 2 的向量丛，其中 $\bar{g}|_E$ 具有洛伦兹型。考虑 $S'(TM)\ = E^\perp$ 并令 tr(TM) 为 E 中与根基分布 (TM) 互补的零直线丛。由于 $Z \in \Gamma(E)$，我们有 $Z_r \in \Gamma($根基分布$(TM))$ 和 $Z_t \in \Gamma($tr$(TM))$，使得

$$Z = Z_r + Z_t$$

因此，我们可以选择 $\xi \in \Gamma($根基分布$(TM))$ 和 $N \in \Gamma($根基分布$(TM))$ 作为

$$\xi = Z_r, \quad N = \frac{1}{\bar{g}(Z_r, Z_t)} Z_t,$$

[2]注意，在这种情况下还满足以下附加条件：(a) ϕ和 ψ沿着 $S(TM)$ 的叶为常数，且 (b) 对所有 $X \in \Gamma(S(TM)),\ \tau(X)\ = 0$。

或等价地

$$Z = \xi + \theta N,$$

其中

$$\theta = \bar{g}(Z_r, Z_t) = \frac{1}{2}\bar{g}(Z, Z).$$

因此，对于 $X \in \Gamma(TM)$，我们有

$$\begin{aligned} \varphi X &= \bar{\nabla}_X Z \\ &= \bar{\nabla}_X \xi + (X \cdot \theta)N + \theta \bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X \xi + h(X, \xi) + (X \cdot \theta)N + \theta(-A_N X + \tau(X)N) \\ &= -A^*_\xi X - \theta A_N X - \tau(X)\xi + (X \cdot \theta)N + \theta\tau(X)N. \end{aligned}$$

因此我们立即得到

$$\begin{aligned} \varphi P X &= -A^*_\xi X - \theta A_N X, \\ 0 &= (X \cdot \theta)N + \theta\tau(X)N. \end{aligned}$$

因此，第一个方程表明 $(M, g, S'(TM))$ 是屏拟共形的。此外，根据引理 2.7，$\theta \neq 0$ 沿着 $S'(TM)$ 为常数，且第二个方程表明 $\tau(X) = 0$。

□

最后请注意，如果 CC 场与屏分布正交，则 $(M, g, S(TM))$ 是屏拟共形的。

命题 3.3。 *Let $(M, g, S(TM))$ be a null hypersurface of $(\bar{M}, \bar{g})$. If $Z \in \Gamma TM$ is a CC vector field such that $Z = 0$ then $M g S TM$ is screen quasi-conformal.*

Proof. 通过与定理 3.2 相同的计算，我们得到

$$\varphi X = -g(Z, N)A^*_\xi X - g(Z, \xi)A_N X,$$

因此我们得到

$$A_N X = -\frac{g(Z, N)}{g(Z, \xi)}A^*_\xi X + \frac{\varphi}{g(Z, \xi)}X.$$

□

4 常数角零超曲面

通常来说，处理退化子流形需要对经典几何概念的标准定义作出一些调整。对于半黎曼超曲面而言，如式 (1) 所定义的相对于向量场 V 的角，很大程度上取决于超曲面正交向量场的归一化，从而在其上给出单位法向量场 $\mathbf{n}$。对于零超曲面 $(M, g, S(TM))$，零方向 ξ 和 N 中缺乏规范的归一化，因此函数

$$\measuredangle(V, \xi) := \frac{\bar{g}(V, \xi)}{|V|}, \quad \measuredangle(V, N) := \frac{\bar{g}(V, N)}{|V|},$$

不适合作为描述 M 与处处非零向量场 V 之间夹角的候选函数。

事实上，式（5）的规范自由度使得这类函数（在不为零时）经过缩放后可以取任意可能的值。特别地，我们总可以选择 f，使得 $\measuredangle(V,\hat{\xi})$ 为常数。例如，取 $f=\bar{g}(V,\xi)/|Z|$，我们得到 $\measuredangle(V,\hat{\xi})=1$。对于 $\measuredangle(V,\hat{N})$，情况类似。然而请注意，一般而言，我们不能利用式（5）使 *both* 函数 $\measuredangle(V,\hat{\xi})$ 和 $\measuredangle(V,\hat{N})$ 同时为常数。因此，为了保持式（1）的代数形式，我们考虑如下定义。

定义 4.1 *Let M g STM be a null hypersurface of M $\bar{g}$ and V be a nowhere null vector field along M. We say that M g STM has constant angle respect to V if there exists $\xi\in\Gamma(rad(TM))$ and $N\in\Gamma(tr(TM))$ such that the functions*

$$\measuredangle(V,\xi)=\frac{\bar{g}(V,\xi)}{|V|}\quad and\quad \measuredangle(V,N)=\frac{\bar{g}(V,N)}{|V|} \tag{22}$$

are constant.

乍一看，人们可能会认为，定义 4.1 在具体例子中并不十分有用，因为对于给定的一对零向量场 $\{\xi,N\}$，角函数（22）的非常数性无法确定 $(M,g,S(TM))$ 是否相对于 V具有常角。然而，正如下一个结果所示，我们可以用不依赖于任何特定缩放选择的术语来表述定义 4.1。

引理 4.2 *Let M g STM be a null hypersurface in M $\bar{g}$ and V a nowhere null vector field along M. Then the following statements are equivalent:*

1. *$(M,g,S(TM))$ has constant angle with respect to Z.*
2. *For any choice of $\xi\in\Gamma($ $rad\,M$ and $N\in\Gamma$ $tr\,M$ the function $\measuredangle V\,\measuredangle V\,N$ is constant.*
3. *$g(V^*/|V|,\ V^*/|V|)$ is constant.*

Proof. 我们首先证明条件 (1) 和 (2) 的等价性。假设 $\measuredangle V\,\xi$ $\measuredangle V\,N$ $\xi=f\xi$ $N=$ 和 N/f $\measuredangle V\,\xi\,\measuredangle V\,N=\measuredangle V\,\xi\,\measuredangle V\,N$ 为常数。于是对于 $\hat{}$ 和 $\hat{}$，$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$，因此它显然是一个常数函数。

反之，假设 $k=\measuredangle(V,\xi)\measuredangle(V,N)$ 为常数。取

$$f=\frac{\measuredangle(V,N)}{k},$$

因此

$$\measuredangle(V,\hat{\xi})=f\measuredangle(V,\xi)=1,\quad \measuredangle(V,\hat{N})=\measuredangle(V,N)/f=k.$$

为确立条件 (2) 与 (3) 之间的等价性，请注意

$$g(V,V)=g(V^*,V^*)+2g(V,\xi)g(V,N), \tag{23}$$

thus

$$g\left(\frac{V^*}{|V|},\frac{V^*}{|V|}\right)=\frac{g(V,V)}{|V|^2}-2\frac{g(V,\xi)}{|V|}\frac{g(V,N)}{|V|}=\varepsilon_Z-2\measuredangle(V,\xi)\measuredangle(V,N)$$

结果立即得证。

□

回顾一下，在半黎曼设定中，常角超曲面可以通过 $V^{\top}/|V|$ 的平方范数来定义，或者等价地，通过 $V^{\perp}/|V|$ 的平方范数来定义；其中 $V^{\top}$ 和 $V^{\perp}$ 表示 V 的切向分量和法向分量。因此，引理 4.2 可视为这一经典结果在零背景下的推广（例如，参见 [34] 中的引理 3.3）。

此外，讨论非退化超曲面（M， g）时，会自然出现两种特殊情形：向量场 V 与超曲面正交，以及向量场与超曲面相切。例如，若 V 的法分布可积，则其某个积分流形的单位法向量场必与 V 共线，因此我们可以认为该超曲面与 V 的夹角为零。例如，在半欧几里得空间中，考虑平行或径向向量场时，超平面或超二次曲面便属于这种情形。另一方面，若 V 与超曲面相切（M， g），则 V 与任意单位法向量场正交；在半欧几里得空间中，圆柱面（V 平行）和圆锥面（V 径向）正是如此。

例 4.3. *In view of Lemma 4.2 we have that the proper analogue for a null hypersurface* $(M,\ g,\ S(TM))$ *making a zero angle with respect to a vector field* V *are precisely those for which* $V = 0$ *that is when* $V \in \Gamma\ S\ TM^{\perp}$. *Notice that if we assume* V *to be a CC vector field*[3] *then Proposition 2.9 ensures that totally geodesic or totally umbilic null hypersurfaces fit in this description in close analogy to the non degenerate case. Moreover if we take a vector field* $\zeta \in \Gamma$ *transversal to* M *and consider the associated screen distribution* $S_{\zeta}\ TM$ *as in Remark 2.2 then* $\zeta = 0$ *and consequently* $M\ g\ S_{\zeta}\ TM$ *makes a constant angle with respect to* ζ.

示例 4.4 *Let us consider a null hyperplane* $\Pi \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ *and a parallel vector field* $V \in \Gamma\ T\mathbb{R}_1^{n+2}$. *We can always choose* ξ *to be parallel along* Π *and that* $\measuredangle V, \xi$ *is constant. Moreover if we take* $S'(T\Pi)$ *as the tangent spaces to a family of parallel planar sections of* Π *then* N *is also parallel along* M *and thus* $\measuredangle\ V\ N$ *is constant as well. Consequently* $(\Pi,\ g,\ S'(T\Pi))$ *is a constant angle null hypersurface of* $\mathbb{R}_1^{n+2}$.

Conversely assume $\Pi\ g\ S\ T\Pi$ *is a constant angle null hypersurface with respect to a parallel vector field* V. *Further without loss of generality we can assume* $V = e_0$ *if* V *is timelike choose* $\xi \in \Gamma\ rad\ TM$ *such that* $\measuredangle\ V\ \xi\ = \bar{g}\ V\ \xi\ = 1$. *Let* $N = N_0\ N_1\ \ldots\ N_{n+1}$ *such that* $\measuredangle\ N\ V = -N_0$ *is constant. Thus* $N_2^2 + \cdots + N_{n+1}^2 = 1$ *and*

$$S(TM) = span\{e_2 - N_2\xi, \ldots, e_{n+1} - N_{n+1}\xi\}.$$

Thus, for $n = 1$ *we have that* $(\Pi,\ g,\ S(TM))$ *is constant angle hypersurface only if* $S(TM)$ *is planar, that is,* $S(TM)_p$ *is generated by the intersection of* T_pM *and a hyperplane in the ambient space* $\mathbb{R}_1^{m+2}$ *passing through* p

[3]请记住，半欧几里得空间中的 CC向量场必然是平行的或径向的。

(see Figure 4). On the other hand,

for $n \geq 2$ we have infinitely many non planar null hypersurfaces.

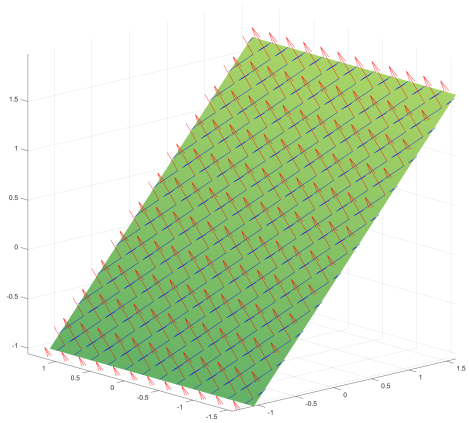

图1：一个平面常角零超曲面。

示例 **4 5** *We now provide some examples of constant angle null.. , hypersurfaces in the two-dimensional light cone Λ_1^2. Let Z be a timelike parallel vector field along $\Lambda_1^2 \subset \mathbb{R}_1^3$. Without loss of generality we can assume $Z = e_0$. Let $\Phi \quad \mathbb{R}^2 \to \Lambda_1^2$ given by $\Phi\ a_1\ a_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ a_1\ a_2$: (,) , ,) be a graph parametrization of the light cone, then*

$$\xi = \Phi/\sqrt{a_1^2 + a_2^2} - 2e_0 = \left(-1, \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$

satisfies $g(Z, \ \xi) = 1$. Moreover, by taking the screen distribution corresponding to

$$N = \left(N_0, \frac{a_1(1 - N_0) + a_2\sqrt{-1 + 2N_0}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2(1 - N_0) - a_1\sqrt{-1 + 2N_0}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right)$$

we obtain a null hypersurface $\Lambda_2^1\ g\ S\ T\Lambda_2^1$ having a constant angle with (, , ( )) respect to Z. If $N_0 = \frac{1}{2}$ then

$$N = \left(\frac{1}{2}, \frac{a_1}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \frac{a_2}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\right) = \frac{1}{2}\xi - e_0,$$

which corresponds to the trivial case depicted in Example 4.3. Notice also that the resulting screen is planar. However, if $N_0 < = \frac{1}{2}$, then

$$S(T\Lambda_1^2) = span\{e_0 + \frac{a_1\sqrt{-1 - 2N_0} - a_2}{\sqrt{-1 - 2N_0}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}e_1 + \frac{a_1 + a_2\sqrt{-1 - 2N_0}}{\sqrt{-1 - 2N_0}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}e_2\},$$

which is a non trivial and non planar screen (see Figure 4).

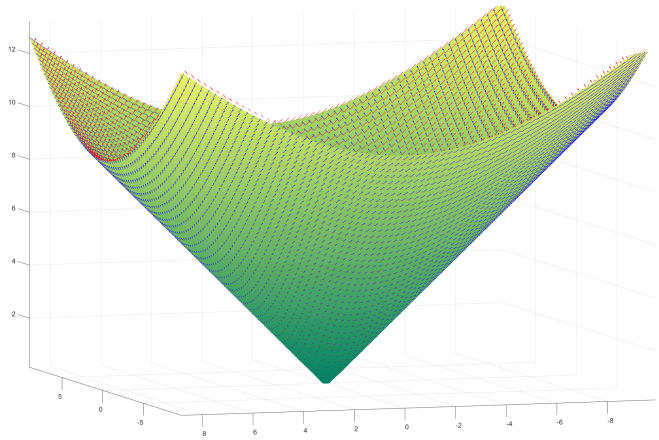

图2：一个非平面恒角零超曲面。

5 典范主方向

F. Dillen 最初提出的 [14], 典范主方向概念与常角超曲面密切相关。事实上, 在几种不同的情形下，首选向量场投影到超曲面上时会产生一个主方向。其精确定义如下。

定义 5.1 *Let M $\bar{g}$ be a semi-Riemannian manifold N h a semi-Riemannian manifold of it and $Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ a vector field along N. We say Z is a if its projection $Z^{\top} \in \Gamma$ TN is a principal direction for some normal vector field $\in \Gamma$ $TN^{\perp}$. Let $\bar{M}$ $\bar{g}$ be a semi-Riemannian manifold N h a semi-Riemannian manifold of it and $Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ a vector field along N. We say Z is a if its projection $Z^{\top} \in \Gamma$ TN is a principal direction for some normal vector field $\in \Gamma$ $TN^{\perp}$.*

事实证明，CC 向量场与典范主方向之间存在密切联系。对于 CC 向量场，关于典范主方向，我们有以下等价关系。

引理 5.2 *Let M g S TM be a screen integrable null hypersurface of $\bar{M}$ g and $Z \in \Gamma$ $T\bar{M}$ a CC vector field along M. The following are equivalent*

1. *M g S TM has a canonical principal direction with respect to $A_{Z^{\perp}}$.*
2. *$\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(N,\xi)$ is constant in directions tangent to $S(TM)$ and orthogonal to Z.*
3. *There exists a null frame $\{\xi, N\}$ such that $\bar{g}(Z,\xi)$ and $\bar{g}(N,\xi)$ areconstant in directions tangent to $S(TM)$ and orthogonal to Z.*

4. $\bar{g}(\overset{*}{Z},\overset{*}{Z})$ *is constant in directions tangent to* $S(TM)$ *and orthogonal to* $\overset{*}{Z}$*.*

Proof. 注意到，函数 $\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(Z,\xi)$ 在式 5 的缩放下保持不变，这立即确立了 (2) 与 (3) 的等价性。此外，根据式 (23) 和引理 2.7，(2) 与 (4) 等价。最后，由引理 2.10 可得 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。 □

现在我们确立一个基本结果，用以描述常角零超曲面与典范主方向之间的相互作用。

定理 5 3 *Let* $M\ g\ S\ TM$ *be a screen integrable null hypersur-..face of* $\bar{M}\ \bar{g}$ *and* $Z\in\Gamma\ T\bar{M}$ *a CC vector field. If* $M\ g\ S\ TM$ *has* (,,( )) (,) ( ) (,,( ))
constant angle respect to Z *then* Z *is a canonical principal direction with ,, respect to* $A_{Z^\perp}$*. Moreover*

$$A_{Z^\perp}\overset{*}{Z}=2\varepsilon_Z\measuredangle(Z,\xi)\measuredangle(Z,N)\varphi\overset{*}{Z}.$$

Proof. 由引理 4.2 和 2.7 可知，$\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(Z,N)$ 在 * $_*$与 $S(TM)$ 相切且与 Z 正交的方向，因此根据 5.2，Z 是 $A_{Z^\perp}$ 的一个主方向。为了计算 $\overset{*}{Z}$ 的主值，假设 $\measuredangle(Z,N)$ 为常数。因此

$$0=\overset{*}{\nabla}\measuredangle(Z,N)=-\bar{g}(Z,N)\frac{1}{|Z|^2}\overset{*}{\nabla}|Z|+\frac{1}{|Z|}\overset{*}{\nabla}g(Z,N),$$

因此由引理 2.11 可得

$$\overset{*}{\nabla}\bar{g}(Z,N)=\frac{\bar{g}(Z,N)}{|Z|}\overset{*}{\nabla}|Z|=\frac{\bar{g}(Z,N)}{|Z|}\left(\frac{\varepsilon_Z\varphi}{|Z|}\overset{*}{Z}\right)=\varepsilon_Z\frac{\bar{g}(Z,N)}{|Z|^2}\varphi\overset{*}{Z},$$

同理,

$$\overset{*}{\nabla}\bar{g}(Z,\xi)=\varepsilon_Z\frac{\bar{g}(Z,\xi)}{|Z|^2}\varphi\overset{*}{Z}.$$

Thus

$$\overset{*}{\nabla}(\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(Z,N))=2\varepsilon_Z\frac{\bar{g}(Z,\xi)\bar{g}(Z,N)}{|Z|^2}\varphi\overset{*}{Z}=2\varepsilon_Z\measuredangle(Z,\xi)\measuredangle(Z,N)\varphi\overset{*}{Z}$$

由引理 2.10 即得该结果。 □

回顾一下，对于平行向量场，我们有 $\varphi\equiv 0$ 因此可立即由定理 5.3 得到以下结果。

推论 5 4 *Let* $M\ g\ S\ TM$ *be a screen integrable null hyper-..surface of* $\bar{M}\ \bar{g}$ *and* $Z\in\Gamma\ T\bar{M}$ *a parallel vector field along* M*. If* (,,( )) (,) ( ) $(M,g,S(TM))$ *has constant angle respect to* Z*, then*

$$A^*_{Z^\perp}\overset{*}{T}=0.$$

6 应用

本节分析两个相关的情形。首先，我们关注平行向量场。

推论 6.1. *Let* $(M, g, S(TM))$ *be a screen inegrable null hypersurfaceof* $(\bar{M}\bar{M})$ $Z \in \Gamma(T\bar{M})$ *a CC vector field along* M *and* $T = \overset{*}{Z}/|\overset{*}{Z}|$. *If*$(M, g, S(TM))$ *has a canonical principal direction respect to* $A_{Z^\perp}$, *then*

1. T *is a geodesic vector field on* $S(TM)$。
2. *The eigenvalue of* T *is*

$$\lambda = g(\overset{*}{\nabla}_T \overset{*}{Z}, T) - \varphi$$

Proof. 设 λ 为一个光滑函数，使得 $A_{Z^\perp}\overset{*}{Z} = \lambda\overset{*}{Z}$。因此，由引理 2.8 可得

$$\begin{aligned}
\overset{*}{\nabla}_T T &= T \cdot \frac{1}{|\overset{*}{Z}|}\overset{*}{Z} + \frac{1}{|\overset{*}{Z}|}\overset{*}{\nabla}_T \overset{*}{Z} \\
&= |\overset{*}{Z}|\, T \cdot \frac{1}{|\overset{*}{Z}|} T + \frac{1}{|\overset{*}{Z}|}\left(\bar{g}(Z, N)A^*_\xi T + \bar{g}(Z, \xi)A_N T + \varphi T\right) \\
&= -|\overset{*}{Z}|\,\frac{1}{|\overset{*}{Z}|^2} g(\overset{*}{\nabla}_T \overset{*}{Z}, T)T + \frac{1}{|\overset{*}{Z}|}\left(A_{Z^\perp} T + \varphi T\right) \\
&= -\frac{1}{|\overset{*}{Z}|}(g(\overset{*}{\nabla}_T \overset{*}{Z}, T) + \lambda + \varphi)T
\end{aligned}$$

.

$_*$另一方面，由于 T的长度为单位长度，可得 $\bar{g}(\nabla_T T, T) = 0$，进而推出

$$-g(\overset{*}{\nabla}_T \overset{*}{Z}, T) + \lambda + \varphi = 0.$$

因此 $\overset{*}{\nabla}_T T = 0$，所以 T是一个测地向量场。 □

请注意，定理 5.3 与推论 6.1 相结合，揭示了测地向量场与主方向之间微妙的关系。即使对于浸入 $\mathbb{R}^3$ 的曲面，其主曲线同时也是测地线的曲面的分类问题仍未解决。显然，在每个全测地曲面中，曲率线与测地线是一致的。然而，在正圆柱面中，每条曲率线都是测地线；而在正则环面中，则存在并非测地线的曲率线，例如不同于赤道的平行曲线。曲率线为测地线的曲面实例包括 Monge 曲面和 Molding 曲面 [6]。此外，在 [2] 中，N. Ando 给出了所谓平行曲率曲面上的曲率线成为测地线的条件。进一步地，他还给出了度量的局部刻画，从而使一族曲率线的叶状结构由测地线构成。

现在我们探讨洛伦兹流形在四维情况下的两个应用。

定理 6.2。 *Let* $(M,\ g,\ S(TM))$ *be a screen integrable null hypersurface having a constant angle with respect to a parallel vector field* $Z \in \Gamma(TM)$ *along* M. *If* $\mathrm{tr}A_{Z^\perp} \equiv 0,$ *then* $S(TM)$ *is flat.*

Proof. 由于 $S(TM)$ 是二维的，令 $W \in \Gamma(S(TM))$ 为一个与 T 正交的酉向量场。因此，由于 $\mathrm{tr}A_{Z^\perp} \equiv 0$，我们有

$$g(A_{Z^\perp}T, T) + g(A_{Z^\perp}W, W) = 0.$$

为了证明 $S(TM)$ 是平坦的，我们将证明

$$\overset{*}{\nabla}_T T = \overset{*}{\nabla}_W T = \overset{*}{\nabla}_T W = \overset{*}{\nabla}_W W = 0.$$

由推论 6.1，我们有 $\overset{*}{\nabla}_T T = 0$。此外，由于 W 是酉的，我们

$_*$有 $g(\nabla_T W,\ W) = 0$，而 W 与 T 正交，这意味着

$$0 = T \cdot \overline{g}(W, T) = \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_T T, W) + \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_T W, T) = \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_T W, T),$$

因此 $\overset{*}{\nabla}_T W = 0$。

$_*$现在回想一下，由于 Z 平行，我们有 $\varphi = 0$，而 $|Z|$ 是常数，因为 $(M,\ g,\ S(TM))$ 具有常角（见引理 4.2 ）。因此，根据引理 2.8，我们有

$$\overset{*}{\nabla}_W T = |\overset{*}{Z}|\overset{*}{\nabla}_W \overset{Z}{*} = |\overset{*}{Z}|A_{Z^\perp}W$$

因此，由于 $\mathrm{tr}A_{Z^\perp} \equiv 0$ ，我们有

$$g(\overset{*}{\nabla}_W T, W) = |\overset{*}{Z}|g(A_{Z^\perp}W, W) = -|\overset{*}{Z}|g(A_{Z^\perp}T, T) = 0,$$

其中，最后一个等式根据推论 5.4成立。另一方面，T为酉的，这意味着 $g(\overset{*}{\nabla}_W T,\ T) = 0$，因此 $\overset{*}{\nabla}_W T = 0$。

$_*$最后，由于 W为酉的，我们有 $g(\nabla_W W,\ W) = 0$，而正交性则保证

$$0 = W \cdot \overline{g}(W, T) = \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_W W, T) + \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_W T, W) = \overline{g}(\overset{*}{\nabla}_W W, T),$$

这证明了 $\overset{*}{\nabla}_W W = 0$。因此， $S(TM)$ 是平坦的，符合要求。 □

作为最后一个应用，我们证明定理 2.20 在 [21] 零背景下的一个类似结论。这里需要先给出一个引理。

引理 6.3. *Let* $(M^3, g, S(TM))$ *be a three dimensional null hypersur-face of* $(\bar{M}^4, \bar{g})$ f *a smooth function on* M *and* $\{X, Y\}$ *an orthonormal frame field of* $S(TM)$. *If* $\overset{*}{\nabla}_X X = hX$ *for a smooth function* h, *then* fX *is a CC on* $S(TM)$ *if and only if* f *satisfies:*

$$Y \cdot f = 0$$

$$X \cdot f + hf = fg(\overset{*}{\nabla}_Y X, Y).$$

Proof. 直接计算可得

$$\overset{*}{\nabla}_X(fX) = (X\cdot f)X + f\overset{*}{\nabla}_X X = (X\cdot f + f\hat{f})X,$$
$$\overset{*}{\nabla}_Y(fX) = (Y\cdot f)X + f\overset{*}{\nabla}_Y X = (Y\cdot f)X + fg(\overset{*}{\nabla}_Y X, Y)Y.$$

该结果立刻得出。 □

定理 6.4。 *Let* $(M^3,\ g,\ S(TM))$ *be a null hypersurface of a four dimensional Lorentzian space form* $\bar{M}^4(c)$ *of constant sectional curvature* c *with vanishing null mean curvature. If the CC vector field* $Z \in \Gamma(T\bar{M})$ *induces a canonical principal direction with respect to* A^*_ξ *then* $1/\sqrt{|2k^*|}$ *is closed and conformal on* $S(TM)$ *where* k^* *is the principal curvature in the direction of* $T = \overset{*}{Z}/|\overset{*}{Z}|$. *Moreover,* k^* *is constant in directions tangent to* $S(TM)$ *but orthogonal to* T.

Proof. 设 $\{T, W\}$ 是 $S(TM)$的标准正交标架。由于 A^*_ξ是对称的，根据一个标准论证， W也是 A^*_ξ的主方向。零平均曲率假设可直接推出 $A^*_\xi W = -k^* W$。

现在，由于 $\{T, W\}$ 是正交归一的，根据推论 6.1，我们有 $g(T,\ \overset{*}{\nabla}_T W) = -g(\overset{*}{\nabla}_T T,\ W) = 0$。由于 W 是酉的，这又意味着 $\overset{*}{\nabla}_T W = 0$。

现在回忆一下，在空间形式中，曲率自同态满足

$$\bar{R}(X,Y)U = \bar{g}(X,U)Y - \bar{g}(Y,U)X$$

因此，根据 Codazzi 方程（参见方程（18）），我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{g}(R(T,W)T,\xi)\\
&= T(B(T,W)) - W(B(T,T)) - B(\nabla_T W, T) - B(W, \nabla_T T) + 2B(\nabla_W T, T)\\
&= T(B(T,W)) - W(B(T,T)) - g(A^*_\xi(T), \overset{*}{\nabla}_T W) - \bar{g}(A^*_\xi(W), \overset{*}{\nabla}_T T) + 2g(A^*_\xi(T), \overset{*}{\nabla}_W T)\\
&= T(B(T,W)) - W(B(T,T)) + 2k^* g(T, \overset{*}{\nabla}_W T)\\
&= T\cdot g(A^*_\xi T, W) - W\cdot g(A^*_\xi T, T)\\
&= -W\cdot k^*,
\end{aligned}$$

由此证明了定理的第二个断言。

为了证明第一个断言，我们借助引理 6.3，并证明 $h := 0$, $f := 1/\sqrt{|k^*|}$, $X := T$ 和 $Y := W$ 满足该引理的假设。注意，作出这些选择后， $W\cdot k^* = 0$ 立即给出 $Y\cdot f = 0$，且引理 6.3 的第一个条件成立。

为验证引理的第二个条件，我们再次应用 Codazzi 方程,

再次对其进行积分以得到

$$\begin{aligned}0 &= \overline{g}(R(T,W)W,\xi)\\ &= T(B(W,W)) - W(B(T,W)) - B(\nabla_T W, W)\\ &\qquad - B(W,\nabla_T W) + B(\nabla_W T, W) + B(T,\nabla_W W)\\ &= T\cdot g(A^*_\xi W, W) + g(A^*_\xi W, \overset{*}{\nabla}_W T) + g(A^*_\xi T, \overset{*}{\nabla}_W W)\\ &= -T\cdot k^* - g(k^* W, \overset{*}{\nabla}_W T) + g(k^* T, \overset{*}{\nabla}_W W)\\ &= -T\cdot k^* - 2k^* g(W, \overset{*}{\nabla}_W T).\end{aligned}$$

Thus

$$-\frac{T\cdot k^*}{2k^*} = g(W, \overset{*}{\nabla}_W T),$$

因此我们有，其中 $\sigma = \text{sign} k^*$,

$$T\cdot f = -\frac{1}{2}\frac{T\cdot(|k^*|)}{(|k^*|)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma T\cdot(k^*)}{\sigma k^*(|k^*|)^{1/2}} = fg(Y, \overset{*}{\nabla}_Y X)$$

由此确立了引理 6.3 的第二个条件，从而完成了证明。

□

致谢

S. Chable-Naal 感谢 Conacyt 通过 Becas Nacionales 计划（793510）提供的支持。M. Navarro 获得了 Conacyt SNI 25997 的部分资助。D. Solis 获得了 Conacyt SNI 38368 的部分资助。M. Navarro 和 D. Solis 获得了 UADY-FMAT PTA 2023 项目的部分资助。

参考文献

[1] Aguilar-Su´arez, R. 和 Ruiz-Hernandez, G., *Lagrangian surfaces of constant angle in the complex Euclidean plane*, Bol. Soc. Mat. Mex., 28(70), (2022年)

[2] Ando, N. *A Surface which has a family of geodesics of curvature*, Beitr. Algebra Geom., 48(1), 237-256, (2007年)

[3] Atindogbe, C. 和 Duggal, K.L., *Conformal screen on lightlike hypersurfaces*, Int. J. Pure Appl. Math., 11 4 421 442, 2004 ( ) - ( )

[4] Atindogbe, C. 和 Olea, B., *Conformal vector fields and null hypersurfaces*, Results Math., 77 129 2022 ( ), ( )

[5] Atindogbe, C. 和 Mbiakop, K.T., *Normalized null hypersurfaces in Lorentzian manifolds admitting conformal vector fields*, Diff, Geom. Dyn. Syst., 23(11) 1-17, (2021年)

[6] Brander, D. 和 Gravesen, J., *Monge surfaces and planar geodesic foliations*, J. Geom., 109 4 2018 ( ), ( )

[7] Cecil, T.E. 和 Ryan, P. J. *Geometry of Hypersurfaces*, Springer, (2015年)

[8] Chen, B.-Y., *A simple characterisation of Generalised Robertson-Walker spacetimes* 46 2014 , Gen. Relativ. Gravit., ( ).[9] Chen B.-Y., *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Appli-cations*, World Scientific, (2011)[10] Chen, D., Chen, G., Chen, H. 和 Dillen, F. *Constant angle surfaces in* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ 19, 289 304, 2012 ,《比利时数学学会 Simon Stevin 通报》, - ( )[11] Chen, B.-Y. 和 Deshmukh, S. *Euclidean submanifolds with conformal canonical vector field* 55 6 1823 1834, .《韩国数学学会通报》, ( ) - (2018年)[12] Daiczer, M. 和 Tojeiro, R. *Submanifold Theory: Beyond an Introduction* 2019 . Springer ( )

[13] Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken, J. 和 Vrancken, L. *Constant angle surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ 152, 89 96, 2007 . Monatsh. Math. - ( )[14] Dillen, F., Fastenakels, J., Van der Veken, J. 和 Vrancken, L. *Surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *with a canonical principal direction* .《全球分析与几何年刊》35, 381-396, (2009)[15] Dillen, F., Munteanu, M.I., Van der Veken, J. 和 Vrancken, L. *Classification of constant angle surfaces in a warped product* .《巴尔干几何及其应用杂志》16(2), 35-47, (2011)[16] Dillen, F. 和 Munteanu, M.I. *Constant angle surfaces in* $H^2 \times \mathbb{R}$. Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.)", 40(1), 85-97, (2009)[17]Duggal, K.L. 和 Bejancu, A., *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, Mathematics and its Ap- plications, vol. 264, Kluwer Academic (1996)[18] Duggal, K. L. 和 Sahin, B. *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds.* ¨ 2010 数学前沿, Birkhauser, ( )[19] Fu, Y. 和 Nistor, A.I. *Constant angle property and canonical principal directions for surfaces in* $\mathbb{M}^2 \ c \ \times \mathbb{R}_1$ 10, ( ) .《地中海数学杂志》1035-1049, (2013)[20] Fu, Y. 和 Yang, D. *On constant slope spacelike surfaces in 3-dimensional Minkowski space* 285, 208 220, ,《数学分析及其应用杂志》, - (2012)[21] Garcia Dinorin, A. 和 Ruiz-Hern´andez, G. . *Semi Riemannian hypersurfaces with a canonical principal direction* Bol. Soc. Mat. Mex- icana. 27(52) (2021年)[22] Garnica, E., Palmas, O. 和 Ruiz-Hern´andez, G. . *Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions* Bol. Soc. Mat. Mex., 18(1), 29-41, (2012).[23] Garnica, E., Palmas, O. 和 Ruiz-Hern´andez, G. , *Hypersurfaces with a canonical principal direction* 30 5 382 391,《微分几何及其应用》, ( ), - (2012)[24] Gutierrez, M. 和 Olea, B. *Null hypersurfaces and the rigged metric.* 载于《洛伦兹几何进展》, Albujer, A. 等编，129-142。Springer, (2022年)

[25] Hawking, S . W. and Ellis, G. F. R., *The large scale structure of space-time* , 剑桥数学物理专著, vol. 1, 剑桥大学出版社, (1973)[26]d'Inverno, R., *Introducing Einstein's Relativity*, 克拉伦登出版社 (1992).[27] Kuhnel, W. and Rademacher, H.-B. *Conformal vector fields on pseudo-Riemannian spaces* 7 3 237 250 1997 ,《微分几何及其应用》, ( ) - ( ).[28] Manfio, F., Tojeiro, R. and Van der Veken, J. *Geometry of submanifolds with respect to ambient vector fields.* 《数学年刊》, 199, 2197-2225, (2020)[29] Munteanu, M.I. and Nistor, A.I. *Complete classification of surfaces with a canonical principal direction in the Euclidean space* $\mathbb{E}^3$. 《中欧数学杂志》, 9(2), 378-389", (2011)[30] Munteanu, M.I. and Nistor, A.I. *Surfaces in* $\mathbb{E}^3$ *making constant angle with Killing vector fields.* 23 6 1250023, 2012 《国际数学杂志》, ( ), ( )[31] Navarro, M., Palmas, O. and Solis, D. A. *Geometry of null hypersurfaces in Lorentzian space forms* 载于《洛伦兹几何进展》, Albujer, A. 等编, 257-272。Springer, (2022)[32] Navarro, M., Palmas, O. and Solis, D. A., *Null screen quasi-conformal hypersurfaces in semi-Riemannian manifolds and applications* , 《数学新闻》, 293(8) 1534-1553, (2020).[33] Navarro, M., Palmas, O. and Solis, D. A., *Null screen isoparametric hypersurfaces in Lorentzian space forms Mediterr. J. Math* 15 6 , , ( ) 215, (2018)[34] Navarro, M., Ruiz-Hern´andez, G. and Solis, D. *Constant mean curvature hypersurfaces with constant angle in semi-Riemannian space forms.* 49 473 495, 2016 《微分几何及其应用》 ( ), - ( )[35] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity* , , Pure and App. Math., vol . 103 1983 学术出版社, ()[36] Onnis, I.I. and Piu, P. *Constant angle surfaces in the Lorentzian Heisenberg group* 109, 575 589, 2017 .《数学档案》, - ( )[37] Onnis, I.I., Passos Passamani, A. and Piu, P. *Constant angle surfaces in Lorentzian Berger spheres.* 29, 1456 1478, 2019 《几何分析杂志》, - ( )[38] Speiser, D. and Weil, A. and Mattmuller, M. *Die Werke von Jakob Bernoulli: Bd. 5:Differentialgeometrie.* 1999 Birkauser, ( )

[39] Ssekajja, S., *Lightlike hypersurfaces in spaces with concircular fields*,《阿拉伯数学杂志》, 10(3) 699-710, (2021)[40] Wald, R.M., *General Relativity*, 芝加哥大学出版社 (1984), 1.

Samuel Chable-Naal. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida, México.

samuelchable@alumnos.uady.mx 2.

Matias Navarro. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida, México.

matias.navarro@correo.uady.mx

3. Didier A. Solis. Facultad de Matemáticas. UniversidadAutónoma de Yuctán, Periférico Norte 13615. Mérida,
México. didier.solis@correo.uady.mx