arXiv:2303.02537v1 [math.NT] 5 Mar 2023

关于 Sp($2n$) ×GL(1) 的 Hecke 型积分札记

PAN YAN

Abstract. 设 π 是 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ 的一个不可约尖点自守泛表示，并设 $\chi: F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是一个幺正阿代尔类特征。本文给出一个 Hecke 型 Rankin-Selberg 积分表示，用以表示次数为 $2n+1$ 的扭曲标准部分 L-函数 $L^S(s, \pi\times\chi)$。

1. 引言

Zeta 函数或 L-函数是数论中最受关注的基本对象之一。研究 L-函数的一种常见方法是通过积分表示，其起源可追溯到 Riemann 关于 Riemann ζ-函数的论文。对于与上半平面上的尖点形式 L-函数 $L(s,f)=\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ 相关联的 $f(z)=\sum_{n=1}^\infty a_n e^{2\pi inz}$，Hecke [Hecke36] 利用 f 的 Mellin 变换建立了积分表示

$$\Lambda(s,f)=\int_0^\infty f(iy)y^s d^\times y=\int_0^\infty f\left(\begin{pmatrix} y & \\ & 1\end{pmatrix}\cdot i\right) y^s d^\times y, \tag{1}$$

其中，$\Lambda(s,f)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$ 是完备的 L-函数，而 $\begin{pmatrix} y & \\ & 1\end{pmatrix}\cdot i$ 表示线性分式变换的作用。这使 Hecke 得以推导出 $\Lambda(s,f)$ 的解析性质。

L自守表示的 -函数最初由 Jacquet 和 Langlands 开创 [JL70]对于 GL_2。设 F是一个数域，其阿代尔环为 $\mathbb{A}$。设 (π, V_π) 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}$ 的一个不可约自守尖点表示，并设 $\chi: F^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^\times$ 是一个幺正阿代尔类特征。设$\psi: F\backslash\mathbb{A}\to\mathbb{C}^\times$ 是一个非平凡加性特征。设 $\varphi\in V_\pi$ 是一个非零尖点形式。仿照 Hecke 的积分（1），其中我们将 GL_1 嵌入 GL 的 mirabolic 子群的 Levi 子群中，$_2$，Jacquet 和 Langlands 考虑了积分

$$I_2(s,\varphi,\chi)=\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\varphi\begin{pmatrix} t & \\ & 1\end{pmatrix}\chi(t)|t|^{s-1}d^\times t. \tag{2}$$

将尖点形式 φ 替换为其傅里叶展开

$$\varphi(g)=\sum_{\gamma\in F^\times} W_{\varphi,\psi}\left(\begin{pmatrix}\gamma & \\ & 1\end{pmatrix} g\right)$$

其中，$W_{\varphi,\ \psi}$ 是由下式给出的 φ 的惠特克函数

$$W_{\varphi,\psi}(g)=\int_{F\backslash\mathbb{A}}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} g\right)\psi^{-1}(x)dx,$$

Date: 2023年3月7日。*2020 Mathematics Subject Classification.* 主分类号 11F70；次分类号 22E55。*Key words and phrases.* Rankin-Selberg 方法，自守 L-函数，Whittaker 模型。

我们看到，积分 $I_2(s,\varphi,\chi)$ 展开为（当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时）

$$I_2(s,\varphi,\chi) = \int_{\mathbb{A}^\times} W_{\varphi,\psi}\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \chi(t)|t|^{s-1} d^\times t. \tag{3}$$

根据惠特克模型 [Sha74]，惠特克函数 $W_{\varphi,\psi}$ 是可分解的，因此积分 $I_2(s,\varphi,\chi)$ 是欧拉型的。这使我们能够分解积分 (3)，并研究与 (3) 对应的局部积分；通过非分歧计算，我们可以显式求出局部非分歧积分，从而得到局部 L-函数。这个过程为 $L^S(s,\pi\times\chi)$ 给出了积分表示，其中 S 是一个有限个赋值的集合，在这些赋值之外，数据均为非分歧且已标准化。

注 1.1。对于 $\mathrm{SL}_2\times\mathrm{GL}_1$，可以修改积分 (2)，以得到 $L(s,\pi\times\chi)$ 的积分表示，其中 π 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 的不可约自守尖点表示，具体如下。取 $\varphi\in V_\pi$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 上的一个非零尖点形式，我们考虑积分

$$J(s,\varphi,\chi) = \int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \varphi\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \chi(t)|t|^{s-1} d^\times t. \tag{4}$$

并且可以证明（当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时）

$$J(s,\varphi,\chi) = \int_{\mathbb{A}^\times} W_{\varphi,\psi}\begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \chi(t)|t|^{s-1} d^\times t,$$

其中 $W_{\varphi,\psi}$ 是 φ 的惠特克函数。在（4）中，我们将 GL_1 嵌入 SL_2 的标准 Borel 子群的 Levi 子群中。

为了将积分 $I_2(s,\varphi,\chi)$ 从 $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_1$ 推广到 $\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_1$，需要将一个投影算子作用于 GL_n 上的尖点形式，将其投影到 GL_2 的 mirabolic 子群上的尖点形式。这个投影通过取某个傅里叶系数来实现。当 $n=2$ 时，这个投影就是恒等算子。令 N_{GL_n} 为 GL_n 的极大幺幂子群，并令 $N^0_{\mathrm{GL}_n} = \{(u_{i,j})\in N_{\mathrm{GL}_n} : u_{1,2}=0\}$。我们将特征 ψ 从 $F\backslash\mathbb{A}$ 延拓到 $N_{\mathrm{GL}_n}(F)\backslash N_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{A})$，定义如下

$$\psi(u) = \psi(u_{1,2}+\cdots+u_{n-1,n})$$

对于 $u=(u_{i,j})\in N_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{A})$。对于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 上某个不可约自守尖点表示空间中的非零尖点形式 $\varphi\in V_\pi$，以及一个酉幂类特征 χ，我们考虑积分

$$I_n(s,\varphi,\chi) = \int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{N^0_{\mathrm{GL}_n}(F)\backslash N^0_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{A})} \varphi\left(u\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & I_{n-2}\end{pmatrix}\right)\psi^{-1}(u)\chi(t)|t|^{s-\frac{n-1}{2}} du\, d^\times t. \tag{5}$$

积分 $I_n(s,\varphi,\chi)$ 展开为（当 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ 时）

$$\int_{\mathbb{A}^\times} W_{\varphi,\psi}\left(\begin{pmatrix} t & \\ & I_{n-1}\end{pmatrix}\right)\chi(t)|t|^{s-\frac{n-1}{2}} d^\times t \tag{6}$$

其中

$$W_{\varphi,\psi}(g) = \int_{N_{\mathrm{GL}_n}(F)\backslash N_{\mathrm{GL}_n}(\mathbb{A})} \varphi(ug)\psi^{-1}(u)du,$$

并且它表示 $L^S(s,\pi\times\chi)$。更一般地，GL L-函数的理论由 $\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_m$ 在一系列论文中发展起来 [JS81A，JS81B]。更多细节请读者参阅精彩的讲义 [Cog04]。

本文旨在给出一个 Hecke 型积分表示，类似于（5），用于 Sp $L\mathrm{GL}_{2n} \times$ 的扭曲标准 $_1$ -函数，其次数为 $2n+1$。设 π 是 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ 的一个不可约自守尖点表示。全文中，我们始终假设 π 是泛型的。为回顾这一概念，设 N 是 Sp_{2n} 的标准极大幺幂子群。我们在 $N(F)\backslash N(\mathbb{A})$ 上定义一个特征，记为 ψ_N，如下：

$$\psi_N(u) = \psi(\sum_{i=1}^{n} u_{i,i+1}),\ u = (u_{i,j}) \in N(\mathbb{A}).$$

那么 π 是泛型的，如果函数空间

$$W_{\varphi,\psi_N}(g) = \int\limits_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \varphi(ug)\psi_N^{-1}(u)du,\ g \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A}),$$

随 $\varphi \in V_\pi$ 变化时不为零，则 U 是泛型的。令 N 的以下子群为：

$$U = \{u = (u_{i,j}) \in N : u_{1,2} = u_{2n-1,2n} = 0\}.$$

令 $\alpha : \mathrm{GL}_1 \to \mathrm{Sp}_{2n}$ 为嵌入

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t & & \\ & I_{2n-2} & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

对于非零尖点形式 $\varphi \in V_\pi$ 和幺正阿代尔类特征 χ，我们考虑以下积分

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi) = \int\limits_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \int\limits_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi(u\alpha(t))\psi_N^{-1}(u)\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}}dud^\times t. \tag{7}$$

本文证明以下定理。

定理 1.2. 设 π 是 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{A})$ 的不可约自守尖点泛型表示，且 $\chi : F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是幺正阿代尔类特征。假设 $\varphi \in V_\pi$ 是非零尖点形式，在张量积分解 $\pi \cong \otimes_v' \pi_v$ 下对应于 $\otimes_v \xi_v$。那么

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi) = \frac{L^S(2s-\frac{1}{2}, \pi\times\chi)}{L^S(4s-1,\chi)} \cdot \mathcal{Z}_S(s,\varphi,\chi),$$

其中，S 是有限个赋值（包括所有阿基米德赋值，使得对于 $v \notin S$、π_v、χ_v 和 ψ_v 均为非分歧），且 $\mathcal{Z}_S(s,\varphi,\chi)$ 是亚纯函数。此外，对于任意 $s_0 \in \mathbb{C}$，可以选择数据，使得 $\mathcal{Z}_S(s_0,\varphi,\chi) \neq 0$。

注 1.3。 当 $n=1$ 时，我们的积分变为

$$\int\limits_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \varphi\left(\begin{smallmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{smallmatrix}\right)\chi(t)|t|^{2s-\frac{3}{2}}d^\times t.$$

这是在 4 中作变量代换后得到的积分（s）。

注 1.4。 当 $n=2$ 时，我们的积分变为

$$\int\limits_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \int\limits_{F^3\backslash\mathbb{A}^3} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & & y & z \\ & 1 & w & y \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & t^{-1} \end{pmatrix}\right)\psi^{-1}(w)\chi(t)|t|^{2s-\frac{5}{2}}dydzdwd^\times t, \tag{8}$$

它表示 Sp L×GL$_4$ ×的五次扭曲标准$_1$-函数。将（8）与 Novodvorsky 积分（[Nov79], 另见 [Bum89, 第 3 节。3]）

$$\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{F^3\backslash\mathbb{A}^3}\phi\left(\begin{pmatrix}1 & y & & z\\ & 1 & & \\ & w & 1 & -y\\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & & & \\ & t & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right)\psi^{-1}(y)\chi(t)|t|^{s-\frac{1}{2}}dydzdwd^\times t \tag{9}$$

其中， ϕ 是 GSp$_4(\mathbb{A})$ 上的泛型尖点形式，它表示 GSp$_4$ ×GL$_1$ 的四次扭曲 Spin L-函数。

我们强调， L辛群上泛型表示的函数已得到充分理解，例如可参见 [GRS97] 和 [GRS98] ，其中 Ginzburg、Rallis 和 Soudry 构造了一族涉及 theta 级数的 Shimura 型积分。我们的目标是向读者展示，在 Hecke 型积分的背景下，GL$_n$ × GL$_1$ 与 Sp$_{2n}$ ×GL$_1$ 之间的相似性。

一旦表述完毕，定理1.2 便可由 L-函数积分表示理论中的标准步骤立即推出。整体展开计算见定理2.1。局部非分歧计算见命题3.1。关于分歧地点和阿基米德地点处局部积分的非消失性，见命题4.1。我们指出，命题3.1 和命题4.1 可由 [GRS98]中的工作推得。因此，本文的主要贡献是第2节中的整体展开计算。

2. Global unfolding

在本节中，我们证明关于积分 $\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)$ 的一些基本整体结果。

定理 2.1. 当 Re(s) $\gg 0$ 时，积分 $\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)$ 绝对收敛，并且可以亚纯延拓到所有 $s\in\mathbb{C}$。此外，当 Re(s) $\gg 0$ 时，积分 $\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi)$ 展开为

$$\int_{\mathbb{A}^\times}W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}}d^\times t. \tag{10}$$

第一个结论是标准的，细节从略；例如参见 [Gin90，定理 A(a)]。为证明第二个结论，我们先证明以下恒等式。

命题 2.2. 对于 $g\in$Sp$_{2n}(\mathbb{A})$，有

$$\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})}\varphi(ug)\psi_N^{-1}(u)du=\sum_{\xi\in F^\times}W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(\xi)g). \tag{11}$$

证明。固定 $g\in$Sp$_{2n}(\mathbb{A})$，并考虑由 F_g 定义的函数

$$F_g(x_0)=\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & 1 & 0 & 0\\ & & & & & 1 & -x_0\\ & & & & & & 1\end{pmatrix}ug\right)\psi_N^{-1}(u)du.$$

这是定义在 $F\backslash\mathbb{A}$ 上的函数，因此它有一个傅里叶展开

$$F_g(x_0)=\sum_{\xi\in F}\int_{F\backslash\mathbb{A}}\int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})}\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & 1 & 0 & 0\\ & & & & & 1 & -x\\ & & & & & & 1\end{pmatrix}ug\right)\psi_N^{-1}(u)du\psi^{-1}(x\xi)dx\cdot\psi(x_0\xi).$$

在 $x_0 = 0$ 处计算 F_g，并将关于 $\xi \in F$ 的求和拆分为两部分，一部分对应于 $\xi = 0$，另一部分对应于关于 $\xi \in F^\times$ 的求和，我们得到

$$
\begin{aligned}
F_g(0) = & \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ug\right) \psi_N^{-1}(u) du dx \\
& + \sum_{\xi \in F^\times} \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ug\right) \psi_N^{-1}(u) du \psi^{-1}(x\xi) dx.
\end{aligned} \tag{12}
$$

右侧（12）中的第一部分包含

$$
\int_{(F\backslash\mathbb{A})^{2n-1}} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,2n-2} & u_{1,2n-1} & u_{1,2n} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u^*_{1,2n-1} \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & u^*_{1,2n-2} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & u^*_{1,3} \\ & & & & & 1 & u^*_{1,2} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{u} g\right) \prod_{i=2}^{2n} du_{1,i}
$$

作为内层积分，由于 φ 的尖点性，该积分等于零。这里，$\tilde{u}$ 是如下形式的矩阵

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & u_{2,3} & \cdots & u_{2,2n-2} & u_{2,2n-1} & 0 \\ & & 1 & \cdots & u_{3,2n-2} & u_{3,2n-1} & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & u^*_{2,3} & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.
$$

So

$$
\int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ug\right) \psi_N^{-1}(u) du dx = 0
$$

因此

$$
F_g(0) = \sum_{\xi \in F^\times} \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ug\right) \psi_N^{-1}(u) du \psi^{-1}(x\xi) dx.
$$

由于 φ 在 $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ 左乘下保持不变，我们有

$$
F_g(0) = \sum_{\xi \in F^\times} \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\left(\begin{pmatrix} \xi & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \xi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} ug\right) \psi_N^{-1}(u) du \psi^{-1}(x\xi) dx.
$$

接着，我们使用以下矩阵恒等式

$$
\alpha(\xi) \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x\xi & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x\xi \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \alpha(\xi)
$$

并通过变量替换 $x \mapsto x\xi^{-1}$ 得到

$$F_g(0) = \sum_{\xi \in F^\times} \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \alpha(\xi) u g \right) \psi_N^{-1}(u) du \psi^{-1}(x) dx.$$

接下来，我们将 $\alpha(\xi)$ 共轭到矩阵 u 的右侧。注意，通过 $\alpha(\xi)$ 进行共轭不会影响特征 ψ_N^{-1}，即 $\psi_N^{-1}(\alpha(\xi)u\alpha(\xi)^{-1}) = \psi_N^{-1}(u)$。在 u 中作变量代换后，我们得到

$$F_g(0) = \sum_{\xi \in F^\times} \int_{F\backslash\mathbb{A}} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -x \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} u\alpha(\xi) g \right) \psi_N^{-1}(u) du \psi^{-1}(x) dx.$$

因此

$$F_g(0) = \sum_{\xi \in F^\times} \int_{N(F)\backslash N(\mathbb{A})} \varphi(n\alpha(\xi)g)\psi_N^{-1}(n) dn = \sum_{\xi \in F^\times} W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(\xi)g).$$

最后，没有注意到 $F_g(0)$ 等于（2.2）的左端。这就完成了证明 . □

现在我们可以完成定理 2.1 的证明。

定理 *2.1* 的证明。 由命题 2.2，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(s,\varphi,\chi) &= \int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} \varphi(u\alpha(t))\psi_N^{-1}(u)\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} du d^\times t \\ &= \int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(\xi)\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t. \end{aligned}$$

对于任意 $\xi \in F^\times$，我们有 $\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} = \chi(\xi t)|\xi t|^{2s-n-\frac{1}{2}}$。于是

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi) = \int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \sum_{\xi \in F^\times} W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(\xi t))\chi(\xi t)|\xi t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t.$$

最后，我们将求和与积分合并，得到

$$\mathcal{Z}(s,\varphi,\chi) = \int_{\mathbb{A}^\times} W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t.$$

□

3. Local unramified computation

在本节中，我们计算定理 2.1 中整体积分（10）所对应的局部非分歧积分。设 F 为一个非阿基米德局部域，其整数环为 $\mathcal{O}$，并固定一个赋值参数 ϖ。设 q 为剩余域的基数。F 上的绝对值 $|\cdot|$ 归一化为满足 $|\varpi| = q^{-1}$。设 F 的一个非平凡非分歧加性特征为 ψ。我们假设 π 是 $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ 的一个不可约可容非分歧泛型表示，其萨特克参数为 a_1、a_2、$\cdots$、$a_n \in \mathbb{C}^\times$。根据假设，存在唯一的非分歧惠特克函数$W_\pi^0 \in \mathcal{W}(\pi,\psi_N)$，其中 $\mathcal{W}(\pi,\psi_N)$ 是与 π 相关、相对于特征

ψ_N 的惠特克函数空间，从而对于任意 $k \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathcal{O})$，有 $W_\pi^0(k) = W_\pi^0(I_{2n}) = 1$。我们假设 χ 是 $F^\times$ 的一个非分歧特征。与 χ 相关的局部 L-函数为

$$L(s,\chi) = (1-\chi(\varpi)q^{-s})^{-1}.$$

注意，Sp_{2n} 的 L-群为 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{C})$。令

$$A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n, 1, a_n^{-1}, \cdots, a_1^{-1})$$

为 $\mathrm{SO}_{2n+1}(F)$ 中的半单共轭类。则$\pi \times \chi$ 的局部扭标准 L-函数为

$$L(s,\pi\times\chi) = \det(1-A\chi(\varpi)q^{-s})^{-1}.$$

我们对乘法群 $F^\times$ 上的哈尔测度作如下归一化，使得 $\int_{\mathcal{O}^\times} d^\times t = 1$。令

$$\mathcal{Z}(s, W_\pi^0, \chi) = \int_{F^\times} W_\pi^0(\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t. \tag{13}$$

这是与（10）对应的局部非分歧积分。我们对该局部非分歧积分有如下结果。

命题 3.1。对于 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$，我们有

$$\mathcal{Z}(s, W_\pi^0, \chi) = \frac{L(2s-\frac{1}{2}, \pi\times\chi)}{L(4s-1,\chi)}.$$

证明。 这可由 [GRS98] 中的局部非分歧计算得出。事实上，($\mathcal{Z}(s, W_\pi^0, \chi)$ 在 (13) 中的积分恰好是 [GRS98 第 196] 页中的最后一个积分，其中 $k=1$，该积分是利用 Casselman-Shalika 公式计算得出的[CS80]。 □

注 3.2。 我们指出， [中局部非分歧积分的定义涉及某个诱导表示的非分歧截面。对 SL_2 应用岩泽分解并进行一些计算后，相应的局部非分歧积分（针对 $\mathrm{Sp}_{2n}\times\mathrm{GL}_1$）与我们在 [GRS98] 中的积分 $\mathcal{Z}(s, W_\pi^0, \chi)$（见 (13）一致。

注 3.3。 我们想指出，当 $\chi = 1$ 是平凡特征时，积分$\mathcal{Z}(s, W_\pi^0, \chi)$ 也已在 [GRS97 第 94–95] 页中计算过。

4. Local non-vanishing results

本节证明，对于任意 $s_0 \in \mathbb{C}$，都存在一组数据，使得局部积分在 s_0 处非零。

设 F 为局部域，可以是阿基米德域或非阿基米德域。设 π 为 $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ 的不可约泛型表示，χ 为 $F^\times$ 上的酉特征。 π 的惠特克函数空间记为 $\mathcal{W}(\pi, \psi_N)$。我们的局部积分为

$$\mathcal{Z}(s, W_\pi, \chi) = \int_{F^\times} W_\pi(\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t \tag{14}$$

其中 $W_\pi \in \mathcal{W}(\pi, \psi_N)$。我们有以下结果。

命题 4.1。 （i）当 $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 时，积分 $\mathcal{Z}(s, W_\pi, \chi)$ 绝对收敛。 （ii）积分 $\mathcal{Z}(s, W_\pi, \chi)$ 可亚纯延拓至整个复平面。 （iii）给定 $s_0 \in \mathbb{C}$，存在一组数据，使得 $\mathcal{Z}(s, W_\pi, \chi)$ 在 s_0 处非零。

证明。这由 [GRS98，引理 3.4、引理 3.5、命题 3.6]。 □

注 4.2. 我们指出，命题 4.1(i) 是通过惠特克函数 $W_\pi \in \mathcal{W}(\pi, \psi_N)$ 的渐近展开证明的；参见 [GRS98，引理 3.3]。命题 4.1(iii) 是通过反证法证明的：若假设对于所有数据的选择，$\mathcal{Z}(s, W_\pi, \chi)$ 均为零，则可推出对于所有惠特克函数 $W_\pi \in \mathcal{W}(\pi, \psi_N)$ 和酉特征 χ，$W_\pi(I_{2n})\chi(1)$ 均为零，这将导致矛盾。

5. Proof of Theorem 1.2

现在证明定理1.2。

定理 *1.2* 的证明。 取 S 如定理 1.2 所述，使得对所有 $v \notin S$，$\xi_v = \xi_v^0$ 是 V_{π_v} 中的非分歧向量。根据定理 2.1，有

$$\mathcal{Z}(s, \varphi, \chi) = \int_{\mathbb{A}^\times} W_{\varphi,\psi_N}(\alpha(t))\chi(t)|t|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t = \prod_v \int_{F_v^\times} W_{\xi_v,\psi_N}(\alpha(t_v))\chi_v(t_v)|t_v|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t_v.$$

根据命题 3.1，我们知道，对于 $v \notin S$，有

$$\int_{F_v^\times} W_{\xi_v^0,\psi_N}(\alpha(t_v))\chi_v(t_v)|t_v|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t_v = \frac{L(2s-\frac{1}{2}, \pi_v \times \chi_v)}{L(4s-1, \chi_v)}.$$

记

$$\mathcal{Z}_S(s, \varphi, \chi) = \prod_{v\in S} \int_{F_v^\times} W_{\xi_v,\psi_N}(\alpha(t_v))\chi_v(t_v)|t_v|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t_v.$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(s, \varphi, \chi) =& \prod_{v\notin S} \int_{F_v^\times} W_{\xi_v,\psi_N}(\alpha(t_v))\chi_v(t_v)|t_v|^{2s-n-\frac{1}{2}} d^\times t_v \cdot \mathcal{Z}_S(s, \varphi, \chi) \\ =& \frac{L^S(2s-\frac{1}{2}, \pi \times \chi)}{L^S(4s-1, \chi)} \cdot \mathcal{Z}_S(s, \varphi, \chi).\end{aligned}$$

所声称的 $\mathcal{Z}_S$（s、φ、χ）由命题 4.1 得出。定理1.2 的证明至此完成。 □

Acknowledgements

这项工作是在我作为俄亥俄州立大学博士生期间完成的。感谢我的导师 Jim Cogdell 对我的支持与鼓励。

References

[Bum89] Bump, Daniel, *The Rankin-Selberg method: a survey*, 数论、迹公式与离散群（奥斯陆，1987 49 109，1989 993311），– Academic Press，马萨诸塞州波士顿，。MR CS Casselman, W. 和 [80] Shalika, J., *The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function*，《Compositio Math.》，**41**，1980 2, 207 231 581582（），第 – 期。MR Cog Cogdell, James W., , *converse theorems, and functoriality for* GL_n, [04] *Lectures on L-functions* 自守 *L* 20, 1 96, 2004 2071506 函数讲义，Fields Inst. Monogr., [36] *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung* **112**, 第 – 卷– 美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，。MR Hec Hecke, E., ，《Math. Ann.》，(1936 1, 664 699 1513069)，第 – 期。MR Gin [90] *L-functions for* Ginzburg, David, $\mathrm{SO}_n \times \mathrm{GL}_k$，《J. Reine Angew. Math.》，405（1990），156–180。MR 1041001[GRS 97] *Periods poles of L-functions and symplectic-orthogonal* David Ginzburg、Stephen Rallis 和 *theta lifts* **487** 1997 85 114 1454260 David Soudry，，《J. Reine Angew. Math.》，（），–。MR [98] GRS David Ginzburg、Stephen Rallis 和 David Soudry，*L-functions for symplectic groups*，《Bull. Soc. Math. France》，126（1998），第 2 期，181–244。MR 1675971

[JL70] Jacquet, H. 和 Langlands, R. P., *Automorphic forms on* GL(2)，数学讲义，第114卷，Springer-Verlag，柏林-纽约，1970 0401654 。MR JS A Jacquet, H., Shalika, J. A., [81] *On Euler products and the classification of automorphic representations. I*，《美国数学杂志》，**103**，3, 499 558, 1981 618323 第 – 期。MR JS B Jacquet, H., Shalika, J. A., *On Euler products and the classification of automorphic representations. II*，《美国数学杂志》，[81] **103**，4, 777 815, 1981 623137 第 – 期。MR Nov Novodvorsky, Mark E., *Automorphic L-functions for symplectic group* GSp(4)，自守形式、表示与 *L*函数（数学研讨会论文集，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977），第2部分，《数学研讨会论文集》，XXXIII，[79] 87 95, 1979 546610 – 美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，。MR Sha Shalika, J. A., GL, *The multiplicity one theorem for* $_n$ 2 [74]《数学年刊》（），第100卷，171–193，1974。MR 348047

Department of Mathematics, The University of Arizona, Tucson, AZ 85721, USA
Email address: panyan@math.arizona.edu