arXiv:2303.02539v1 [math.CO] 5 Mar 2023

热带多胞体的最大内接热带球与最小外接热带球，以及其在体积估计和均匀抽样中的应用

David Barnhill Ruriko Yoshida Keiji Miura

摘要

我们基于最大加代数下的热带度量，研究热带射影环面上任意给定热带多胞体的最小外接热带球和最大内接热带球。我们证明，可以通过线性规划求得这些热带球。随后，我们利用任意给定热带多胞体的最小外接热带球和最大内接热带球，估计该热带多胞体的体积，并从中进行均匀抽样。

1 引言

热带多胞体 [30, 23]正日益成为经典多胞体的热带对应物，并受到越来越多的关注。人们预计，热带凸几何有望解决许多问题 [36, 39, 32, 37, 38], ，正如经典凸几何有诸多应用一样。事实上，热带射影空间上的热带多胞体已得到充分研究（例如，参见 [30, 23, 35] 及其中的参考文献），并已应用于统计学、优化和系统发育基因组学等诸多领域 [30, 36, 39, 32, 35, 11]。

在多面体几何中，给定多胞体的最小包围球（或球面）是指按照欧几里得度量和 l_2-范数衡量、能够包含该多胞体的最小球体。多胞体的最大内接球是指按照 l_2-范数衡量、包含于该多胞体中的最大球体。计算多胞体的最小包围球和最大内接球是一项具有挑战性的问题 [26, 31]。给定多胞体的最大内接球与线性规划的内点法密切相关；此外，给定多胞体的最小包围球和最大内接球均已应用于求解线性规划问题 [31], 、计算支持向量机 [7, 8], 以及估计多胞体的体积 [22]。

本文中，我们从最大加代数下的热带射影环面上的热带度量角度研究热带球。热带球 $B_l(x_0)$ 的形式化定义见定义 3.2，其半径为 $l > 0$ ，中心为

x_0 ，它定义为热带射影环面上所有点的集合，这些点与 x_0 的热带度量距离 d_{tr} （定义见定义 2.4）小于或等于 l。简单来说，热带球相当于欧几里得空间中的球，只需将 l_2-范数替换为热带度量 d_{tr}。热带射影环面上的热带多胞体，是由热带射影环面中有限个点生成的最小热带凸集。它类似于欧几里得空间中的经典多胞体，后者是欧几里得空间中由有限个点生成的最小凸集。与经典多胞体的最小包围球和最大内接球类似，热带多胞体的最小包围热带球是包含该热带多胞体的最小热带球，而其最大内接热带球则是包含于给定热带多胞体内的最大热带球。本文证明，下文式（5）—（9）所建立的线性规划问题给出了给定热带射影环面上的热带多胞体的最大内接热带球的中心 x_0 和半径 $R > 0$；下文式（14）—（16）所建立的线性规划问题则给出了其最小包围热带球的中心 y_0 和半径 $r > 0$。

计算多面体体积是一项困难的任务。一般而言，热带多胞体在欧几里得度量下不一定是经典凸的，并且可能包含一些维数低于热带射影环面 [23] 的分量，如图 1 所示。因此，在热带射影环面上计算热带多胞体的欧几里得体积是 #-P 难问题；即使只是估算热带多胞体的近似体积，一般也是 NP难的 [19]。在欧几里得空间中，计算经典多胞体的格点数量与计算多面体体积通过埃尔哈特理论 [13], 密切相关，即使输入多胞体由预言机描述，这两者仍是 #-P 难问题 [15]。作为一个具体案例，Brandenburg 等人 [5] 运用环面几何中的工具，计算格点多重热带多面体的体积、埃尔哈特多项式及 h^*-多项式的多变量版本；这类集合由有限个格点构成，既是热带凸的，也是经典凸的。

在欧几里得空间中，Cousins 和 Vempala [10] 通过模拟退火抽样，利用最小包围球和高斯分布来估计经典多胞体的体积。本文提出一种新方法，使用热带多胞体的最小包围热带球以及 Yoshida 等人提出的 Hit-and-Run（HAR）采样器 [38]，估计基于最大加代数、定义在热带射影环面上的热带多胞体的欧几里得体积。我们注意到，热带多胞体的最小包围热带球体积与最大内接热带球体积之比，可近似看作采样器的接受率，而通常这一比值可能非常小。因此，一般而言，估计热带多胞体的体积仍然很困难。

从热带多胞体本身进行抽样是一个重要问题。Yoshida 等人 [38] 提出了一种 HAR 采样器，利用带有热带度量的热带线段，从热带凸集进行抽样。他们证明，采用热带度量的 HAR 采样器可以从多热带体中均匀抽样，因此可以将热带多胞体分解为一组热带单纯形，

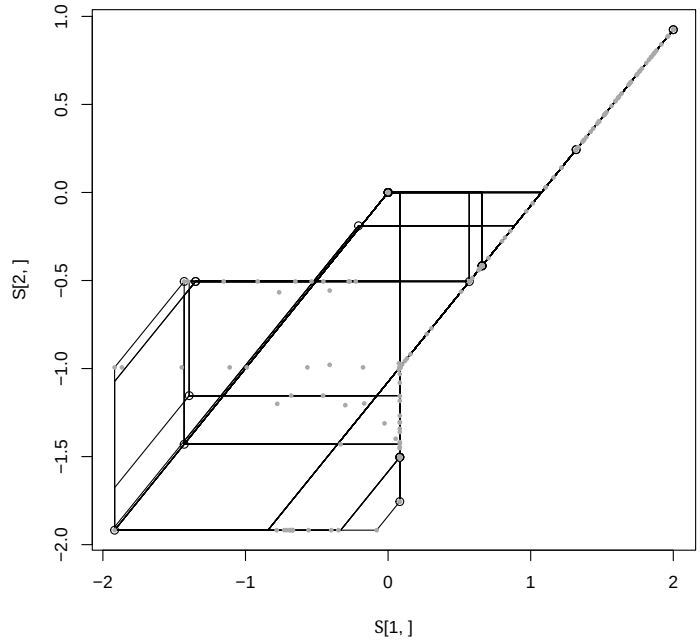

图 1：通过 Yoshida 等人提出的热带主成分分析计算得到的顶复门基因组数据（来自 Kuo等人）对应的系统发育树空间中的最佳拟合热带三角形 [27] 。热带三角形上的灰色点是数据中观测点在热带度量下的投影点。 [36]

这些是多重热带多面体，文献 [24], 中介绍了如何从热带多胞体中进行均匀抽样。不过，他们并未明确说明如何从一般的热带多胞体中进行均匀抽样，也没有具体实现所提出的方法。因此，本文将热带多胞体的最小包围热带球与采用热带度量的 HAR 采样器结合起来，从而对一般的热带多胞体进行均匀抽样。

本文结构如下：第 2 节介绍热带几何的基础知识。第 3 节说明如何求给定热带多胞体的最大内接热带球和最小包围热带球。我们向读者回顾如何构造由给定顶点集确定的热带多胞体的超平面，或 $h^* - representation$，相关内容见 [5]。利用 $h^* - representation$，我们展示如何通过线性规划计算最大内接热带球。接着，我们介绍如何再次利用线性规划构造最小包围热带球。第 4 节展示如何使用 [38]中介绍的 HAR 方法，从最小包围热带球中抽样，从而得到热带多胞体的体积估计 P。此外，我们还说明，如果 $P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 由 e 个顶点定义，就存在识别热带多胞体中满维胞腔之并的方法，即***(e-1)***树干 （定义2.16）；这能缩小最小包围热带球的半径，从而减少获得 P体积估计所需的采样点数量。第 5 节说明，从最小包围热带球中抽样，并枚举定义热带多胞体 P 的热带单形，可以对任意热带多胞体的（$e-1$）树干进行均匀抽样。

所有计算实验均使用统计计算工具 R 完成。本文使用的 R 代码可在 https://github. com/barnhilldave/Tropical-Balls.git 获取。

2 热带基础

本文中，我们始终考虑热带射影环面 $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，其中$\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1) \in R^e$ 是全 1 向量。这意味着

$$(x_1 + c, x_2 + c, \ldots, x_e + c) = (x_1, x_2, \ldots, x_e)$$

对任意 $c \in \mathbb{R}$ 以及任意向量 $x := (x_1, x_2, \ldots, x_e) \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$均成立。更多细节请参见 [30]和 [23]。

定义 2.1 (热带算术运算**)**。 在带有最大加代数 $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ 的热带半环上，加法和乘法这两种热带算术运算定义如下：

$$x \oplus y := \max\{x, y\}, \quad x \odot y := x + y \quad where\ x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

请注意，在该半环上， $-\infty$ 是加法 $\oplus$下的单位元，而0 是乘法 $\odot$ 下的单位元。

另一方面，在热带半环最小加代数（$\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \boxplus, \odot$）下，我们有加法和

乘法定义如下:

$$x \boxplus y := \min\{x, y\}, \quad x \odot y := x + y \quad where\ x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

定义 2.2 （热带标量乘法和热带向量加法）。对于任意x、 $y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，以及任意 $v = (v_1, \ldots, v_e)$ $w = (w_1, \ldots, w_e) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^e$，热带标量乘法和热带向量加法定义如下:

$$x \odot v \oplus y \odot w := (\max\{x + v_1, y + w_1\}, \ldots, \max\{x + v_e, y + w_e\}).$$

定义 2.3 (热带矩阵运算**)**。 假设我们有两个$(k_1 \times k_2)$维矩阵 A, B，以及一个$(k_3 \times k_1)$维矩阵 C，其元素属于 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$。那么，我们可以类比普通矩阵运算，定义热带矩阵运算 $A \oplus B$ 和$A \otimes C$。具体而言，有

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad (A \otimes C)_{ij} = \bigoplus_{\ell=1}^{k_1} A_{i\ell} \otimes C_{\ell j}.$$

定义 2.4 (广义希尔伯特射影度量**)**。 对于任意点 $v := (v_1, \ldots, v_e)$ $w := (w_1, \ldots, w_e)$ $\in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 其中 $[e] := \{1, \ldots, e\}$，热带距离 (也称为 热带度量) d_{tr} 在 v 与 w 之间定义为:

$$d_{\mathrm{tr}}(v, w) := \max_{i \in [e]} \{v_i - w_i\} - \min_{i \in [e]} \{v_i - w_i\}.$$

定义 2.5 (热带多胞体**)**。 假设我们有 $S \subset \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$。如果

$$x \odot v \oplus y \odot w \in S$$

对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 以及任意 $v, w \in S$，若 S，则称其为热带凸。假设 $V = \{v^1, \ldots, v^s\} \subset \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$。包含 V 的最小热带凸子集称为热带凸包 或热带多胞体，它可以写成 V 的所有热带线性组合构成的集合

$$\mathrm{tconv}(V) = \{a_1 \odot v^1 \oplus a_2 \odot v^2 \oplus \cdots \oplus a_s \odot v^s \mid a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}\}.$$

最小的子集 $V' \subseteq V$，使得

$$\mathrm{tconv}(V') = \mathrm{tconv}(V)$$

称为最小集或生成集，其中 $|V'|$ 是 V' 的基数。对于 $P = \mathit{tconv}\,(V')$， P 的边界记作 ∂P。

如果热带多胞体是用最大加代数定义的，我们称之为最大热带多胞体；如果热带多胞体是用最小加代数定义的，我们称之为 最小热带多胞体。

定义 2.6 （多重热带多面体（见 [24]））。 经典凸的热带多胞体称为多热带体。

定义 2.7（协向量分解（来自 [11] 和 [29]））。 热带多胞体可以分解为由多热带体组成的多面复形，称为 P 的协向量分解，记作 $\mathcal{C}_P$。

定义 2.8（热带多胞体的维数）。 热带多胞体 $P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 的维数定义为 $\mathcal{C}_P$ 中维数最大的多热带体的维数，记作 $dim(P)$。

接下来，我们回顾一下关于热带度量下投影到热带多胞体的定义。热带投影公式见 [30] 中的公式 5.2.3。

定义 2.9（热带点的投影）。 设 $V{:=}\ \{v^1,\ldots,v^s\}\ \subset\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，并设 $P = tconv(v^1,\ldots,v^s) \subseteq \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 是一个顶点集为 V 的热带多胞体。对于 $x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，令

$$\pi_P(x){:=}\bigoplus_{l=1}^{s}\lambda_l \odot v^l,\quad \text{where}\quad \lambda_l{=}\min(x - v^l). \tag{1}$$

Then

$$d_{\mathrm{tr}}(x,\pi_P(x)) \le d_{\mathrm{tr}}(x,y)$$

对所有 $y \in P$ 和 $\pi_P(x) \in P$ 均成立。换言之，$\pi_P(x)$ 是在热带度量 d_{tr} 下将 $x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 投影到热带多胞体 P 上所得的投影。

以下定义描述了热带超平面与热带多胞体之间的关系。具体而言，它们展示了最大热带多胞体与最小型热带超平面之间的联系。

定义 2.10（由 [39] 导出的热带超平面）。 对于任意 $\omega{:=}\ (\omega_1,\ldots,\omega_e)\ \in\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，由 ω定义的最大热带超平面记作 $H_\omega^{\max}$，它是满足以下条件的点集 $x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$

$$\max_{i\in[e]}\Big\{\omega_i + x_i\Big\} \tag{2}$$

至少取得两次。类似地，记作 $H_\omega^{\min}$的最小型热带超平面，是满足以下条件的点集 $x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$

$$\min_{i\in[e]}\Big\{\omega_i + x_i\Big\} \tag{3}$$

取得两次。如果上下文明确，我们就将 H_ω 简单称为基于最小加代数或最大加代数的热带超平面，其中 ω 是法向量 *of* H_ω。

定义 2.11（来自 [39]的扇区）。 每个热带超平面 H_ω 将热带射影环面 $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 划分为 e 个连通分支，这些分支是开扇区

$$S_\omega^i := \{x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}\,|\,\omega_i + x_i > \omega_j + x_j, \forall j \ne i\},\ i = 1,\ldots,e.$$

这些闭扇区定义为

$$\overline{S}^i_\omega := \{x \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1} \,|\, \omega_i + x_i \geq \omega_j + x_j, \forall j \neq i\},\ i = 1, \ldots, e.$$

定义 2.12（热带超平面排列）。对于给定的点集，$V = \{v^1, \ldots, v^s\}$，以每个 $v^i \in V$ 为顶点的热带超平面构成 V，$\mathcal{A}(V)$ 的热带超平面排列，其中

$$\mathcal{A}(V) := \{H_{-v^1}, \ldots, H_{-v^s}\}.$$

如果考虑由最大加代数定义的一组热带超平面，则称此排列为最大热带超平面排列，记作 $\mathcal{A}^{\max}(V)$。同样，由最小加代数定义的热带超平面排列称为最小热带超平面排列，记作$\mathcal{A}^{\min}(V)$。

定义 2.13（胞腔）。对于给定的超平面排列，$\mathcal{A}(V)$，胞腔定义为有限个闭扇区的交集。胞腔可以是有界的或无界的。有界胞腔是多重热带多面体。

定义 2.14（有界子复形（见 [11]））。对于顶点集，V，$\mathcal{A}(V)$定义了一组有界和无界胞腔，称为胞腔分解。有界胞腔的并构成有界子复形，$\mathcal{K}(V)$。

定理2.15（定理2.2，见 [12]）。一个最大热带多胞体 P，是由热带射影环面上由 $\mathcal{A}^{\min}$（V）诱导的胞腔分解 中属于 $\mathcal{K}$（V）的胞腔之并集。

定理2.15将 $\mathcal{K}(V)$ 描述为由 $\mathcal{A}(V)$ 诱导的一族有界胞腔。定义2.7通过多重热带多面体的并集来描述 P。由 $\mathcal{A}^{\min}(V)$ 诱导的有界胞腔就是这些多重热带多面体。因此，$\mathcal{C}_P$ 中的多重热带多面体之并集定义了 $\mathcal{K}(V)$。本文始终关注对属于 $\mathcal{K}(V)$ 的 $(e-1)$ 维多重热带多面体之并集进行抽样。$(e-1)$ 维多重热带多面体的并集将在下述定义中描述。

定义2.16（i-主干和i-触手（定义2.1，见 [29]）。设 P 是一个热带多胞体，且 $i \in [e-1]$，其中 $[e-1] = \{1, \ldots, e-1\}$。设 $\mathcal{F}_P$ 是 $\mathcal{C}_P$ 中相对开热带多胞体构成的族。对于任意 $T \in \mathcal{F}_P$，如果 T 不包含于 $\mathcal{F}_P$ 中任何（$i+1$）维热带多胞体的闭包内，且 T 的维数小于或等于 i，则称 T 为 $\mathcal{F}_P$ 的一个i-触手元素。P 的i-主干定义为

$$Tr_i(P) := \bigcup \Big\{F \in \mathcal{F}_P : \exists\, G \in \mathcal{F}_P \ with\ \dim(G) \geq i \ such\ that\ F \subseteq G\Big\}$$

其中 dim（G）是 $G \subset \mathcal{F}_P$ 的维数。Tr_i（P）表示移除了（$i-1$）-触手后的 $\mathcal{K}$（V）部分。仅包含 Tr_i（P）$\subseteq P$ 的最小包围球记为 B_k（Tr_i（P））。

注记 2.17（命题 2.3，见 [5]）。 热带多胞体的 $Tr_{e-1}(P)$ 是热带多胞体。
$P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$

例 2.18。 考虑热带多胞体 $P = \{(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ -1,\ 1),\ (0,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ -1)\}$。 $Tr_2(P)$ 是图 *2* 中显示的灰色部分。

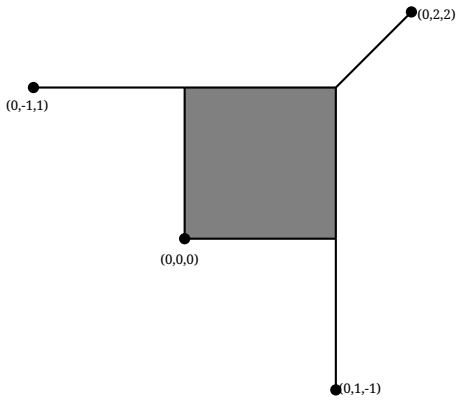

图 2：一个热带多胞体， P，由 $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中的四个顶点定义。 Tr_2P 的部分以灰色表示。

本文所述的所有方法都涉及从热带多胞体 P 的 $Tr_{e-1}(P)$ 中抽样。然而，正如 Joswig 等人所示，热带多胞体可能不存在 $Tr_{e-1}(P)$。（见 [24] 中的图 1（左）。）因此，本研究中考虑的所有热带多胞体都假设包含 $Tr_{e-1}(P)$。

3 利用优化寻找最大内接热带球和最小包围热带球

本节将说明如何求出热带单纯形 P_Δ的超平面表示，以便计算 P_Δ 的最大内接球。随后，我们将展示如何利用线性规划形式计算任意热带多胞体P的最小包围球。本文将始终用到热带单纯形和热带球，因此我们给出以下定义。

定义 3.1（热带单纯形）。 热带单纯形是一个热带多胞体，它具有一个最小顶点集（或生成元集） V'，使得 $|V'| = e$。热带单纯形记作 P_Δ。

定义 3.2（热带球）。以 $x_0 \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 为中心、半径为 $l > 0$ 的热带球 $B_l(x_0)$ 定义如下：

$$B_l(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1} \,|\, d_{\mathrm{tr}}(x_0, y) \le l\}.$$

对于热带多胞体 P，完全包含 P 且半径 r 最小的热带球称为最小包围球，记作 $B_r(P)$。对于同一个 P，完全包含于其中且半径 R 最大的热带球称为最大内接球，记作 $B_R(P)$。

3.1 利用最大加代数表示热带多胞体的超平面

Brandenburg 等人于 [5] 证明，多热带体P的超平面表示（记作 $h^* - representation(P)$）可由相关的克莱尼星号权重矩阵$\mathbf{m}^*$构造。以下定义展示了这一点，并将其推广到任意 P_Δ。

定义3.3（热带单纯形的超平面表示（参见 [5]中的命题2.14））。对于作为多热带体的热带单纯形，$P_\Delta \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$、$P_\Delta$可定义为一组经典半空间的交集。这些半空间利用克莱尼星号权重矩阵$\mathbf{m}^*$构造，其中每个m_{ij} 都是（i，j）项，即$\mathbf{m}^*$中的第i行第 j列元素。定义 P_Δ 的半空间构造如下：

$$P_\Delta = \{y \in \mathbb{R}^e \mid y_j - y_i \leq -m_{ij}, y_1 = 0, m_{ij} \in \mathbf{m}^*, i \neq j\}. \tag{4}$$

我们将这些半空间的交集记为 $h^* - representation$（P_Δ）。相比之下，利用顶点集 V表示 P_Δ 的顶点表示记为$v - representation$（P_Δ）。对于非经典凸的热带单纯形 P_Δ，$h^* - representation$（P_Δ）仅定义了 P的（$e-1$）主干（参见定义*2.16*）。

对于任意一个与含有 e个节点且没有正环的完全图相关联的权重矩阵$\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{e\times e}$，$m_{ij}$ 表示从节点 i 到节点 j 的权重，对角线上的元素全为零。权重矩阵$\mathbf{m}^*$可通过对$\mathbf{m}$取第$e-1$次热带幂构造。也就是说，$\mathbf{m}^{\odot e-1}$ 中的每个 $m_{ij} \in \mathbf{m}^*$都是从节点 i 到节点 j [4, 34]的最长路径。利用新矩阵$\mathbf{m}^*$，我们可以通过**(4)** [5]得到 $h^* - representation(P)$。

本文从一个顶点集 V'出发，它定义了一个热带单纯形$P_\Delta = \text{tconv}\,(V')$，并假设 V' 是最小顶点集。然后利用V' 构造$\mathbf{m}^*$。根据 [5], 中的命题2.14，$\mathbf{m}^*$与 V'中的点之间存在对应关系。

为了构建$\mathbf{m}^*$，我们必须先根据定义 3.4，计算矩阵 A的热带行列式，其中列向量 A_j 是热带点 V'。

定义 3.4 (热带行列式**)**。设 q 为正整数。对于任意一个大小为 $q\times q$、元素取自 $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 的方形热带矩阵 A，A 的热带行列式定义如下：

$$tdet(A) := \max_{\sigma\in S_q}\{A_{\sigma(1),1} + A_{\sigma(2),2} + \ldots + A_{\sigma(q),q}\},$$

其中，S_q是 $[q] := \{1,\ldots,q\}$的所有排列，$A_{i,j}$表示 A 的第(i,j)个元素。热带矩阵是奇异的，当且仅当：

1. A 不是方阵；

2. $tdet$（A）$= -\infty$；或

3. 至少有两个排列使最大值 $tdet(A)$得以实现。

对于方阵，这等价于说其行向量或列向量位于某个热带超平面中（参见 *[23]* 中的命题 *3.4*）。

求解 $tdet(A)$ 可归结为求解一个线性指派问题，即将 e 个任务分配给 e 个工人，以实现收益最大化。每个 $i,\ j \in [e]$ 中的第（$i,\ j$）个元素，即矩阵 A $A_{i,\ j}$，表示将任务 i 分配给工人 j 所获得的收益。$tdet(A)$ 给出了实现最大收益的排列（参见 [23] 中的观察 3.1）。

计算出 $tdet(A)$ 后，令 σ_P 为满足 $tdet(A)$ 的排列，如定义 3.4 所示。算法 1 的输出是一个 $e \times e$ 热带矩阵 A'，其对角线为 $A_{\sigma_P\ (i)\ \ i}$。

算法 1 计算方阵 A 的 $tdet(A)$ 和 $\sigma_P \in S_e$。

输入： 一个方阵，A，其列向量表示 V' 中的顶点集合。

输出： $tdet(A)$ 和 $\sigma_P \in S_e$。

枚举 A 的每个行索引排列 σ_k，其中 $\sigma_k \in S_e$。

计算 $t(\sigma_k) = \sum_{i=1}^{e} A_{\sigma_k(i)\ i}$，对每个 $\sigma_k \in S_e$。

令 $tdet(A) = \max_k (t(\sigma_k))$ 和 $\sigma_P = \sigma_k$

返回 $tdet(A)$ 和 σ_P。

例 *3.5*。考虑多热带体 $P_\Delta := tconv(\{(0, 0, 0), (0, 2, 5), (0, 3, 1)\})$。令其顶点为方阵 A的列向量，可得 $tdet(A) = 8$，其中 $\sigma_P = (1, 3, 2)$；这里，索引 σ_P 表示列，而该索引处的值表示该列的行索引。这表明，对 $tdet(A)$ 有贡献的矩阵 A 坐标为 $A_{1,\ 1} = 0$、$A_{3,\ 2} = 5$和$A_{2,\ 3} = 3$。将列按行索引从小到大重新排序，得到新矩阵 A'，如下所示，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A'.$$

求出 $\mathbf{m}^*$ 的最后一步是将 $-A'_{kk} \in A'$ 加到列中的每个元素上，A'_k 针对 $k \in [e]$。这一操作的结果完成了 $\mathbf{m}^*$的构造。构造出 $\mathbf{m}^*$ 后，我们可以利用式 (4) 提取 $h^* - representation(P_\Delta)$。为说明如何提取 $h^* - representation(P_\Delta)$，我们使用算法 2。

算法 2 提取热带单纯形 $P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$的 $h^* - representation(P_\Delta)$。

输入： 一个方阵 A，表示最小顶点集 V' 中的一组顶点，其中这些顶点是 A的列。**输出：** $h^* - representation(P_\Delta)$。计算 $tdet(A)$，并使用算法 1 确定定义 $tdet(A)$ 的 $\sigma_P \in S_e$ 。对列重新排序，构造新矩阵 A'，使得 $A_{\sigma_P(i)\ i} = A'_{kk}$，其中 $k = \sigma_P(i)$。对于矩阵 $\mathbf{m}^* \in \mathbb{R}^{e\times e}$，令 $m_{jk} = A'_{jk} - A'_{kk}$ 对所有 $j, k \in [e]$成立。使用 (4) 从 $\mathbf{m}^*$计算 $h^* - representation(P_\Delta)$。**返回** $h^* - representation(P_\Delta)$。

例 3.6 (例 3.5 续)。 继续讨论前一个例子中的多热带体 P_Δ，我们进行下一步，构造 $h^*-representation(P_\Delta)$。求出 $tdet(A)$ 并重新排列各列以构成新矩阵 A'后，将 $-A'_{kk}$ 加到列向量 A'_k 的每个元素上，以构造 $\mathbf{m}^*$。结果如下，

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{m}^*.$$

$h^* - representation$（P_Δ），如式 （4） 所述，如下所示

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &\leq 3 \\ y_3 - y_1 &\leq 5 \\ y_1 - y_2 &\leq 0 \\ y_3 - y_2 &\leq 3 \\ y_1 - y_3 &\leq 0 \\ y_2 - y_3 &\leq 2 \\ y_1 &= 0. \end{aligned}$$

图 3 展示了由 $\mathbf{m}^*$ 定义的有向图和多热带体。该有向图表示由 $\mathbf{m}^*$ 确定的任意两个节点之间的最大距离。

虽然 [5] 专门针对多重热带多面体中的 $h^* - representation(P_\Delta)$，但该方法也可用于任意热带单纯形。然而， $h^* -representation(P_\Delta)$ 仅定义了 $Tr_{e-1}(P_\Delta)$，因此产生了若干冗余约束。

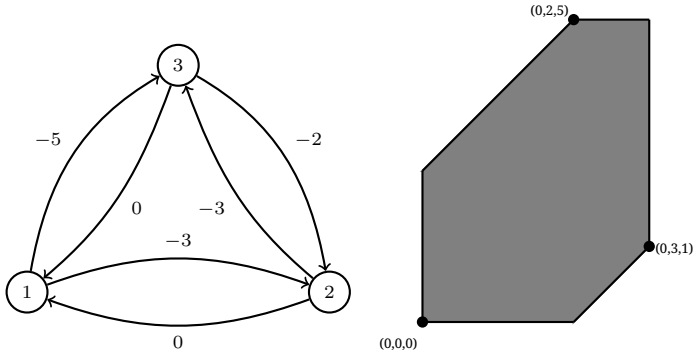

图 3：由例 3.6 的 克莱尼星号 确定的有向图。

3.1.1 热带多胞体的最大内接球

现在，我们说明如何使用 (4) 建立一个线性规划，为记作 $B_R(P_\Delta)$ 的热带单纯形 P_Δ 构造最大内接球。与任意多热带体一样，热带球 $B_l(x_0) \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 可定义为一个具有最小顶点集 V' 的热带单纯形，使得 $B_l(x_0) = \text{tconv}\,(V')$。

给定一点 $x_0 := (x_0^1, \ldots\ldots, x_0^e)$，表示 $B_l(x_0)$ 的中心，我们可以得到 V' 中 $B_l(x_0)$ 的顶点，使得 $B_l(x_0) = \text{tconv}\,(V')$，其中

$$V' = \left\{ \begin{array}{c} (x_0^1 - l, x_0^2 - l, x_0^3 - l \ldots, x_0^e - l), \\ (x_0^1 + l, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^e), \\ \vdots \\ (x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^e + l) \end{array} \right\}.$$

例 3.7. 令 $x_0 \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 表示热带球的中心， $B_l(x_0)$半径为 l ，其中 $x_0 := (0, x_0^1, x_0^2)$。由于 $B_l(x_0)$ 是一个多热带体，最小顶点集 V'由三个顶点组成，其中 $B_l(x_0) = \textit{tconv}(V')$。每个 $v^i \in V'$ （其中 $i \in [3]$）都可以用 x_0 和 l表示。具体而言，

$$\begin{aligned} v^1 &= (0, x_0^1 - l, x_0^2 - l) \\ v^2 &= (0, x_0^1, x_0^2 + l) \\ v^3 &= (0, x_0^1 + l, x_0^2) \end{aligned}$$

图 *4* 展示了 $B_l(x_0) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$的坐标构造。

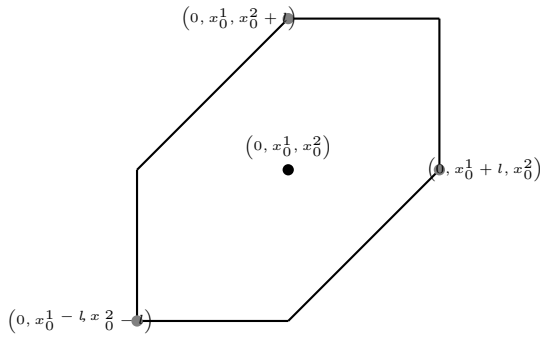

图 4：热带球，$B_l(x_0) \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 半径为 l。

利用 V'中的顶点，我们可以计算 $B_R(P_\Delta)$。要确定 $B_l(x_0)$是否位于 P_Δ内部，只需检查 V' 定义 $B_l(x_0)$的顶点是否位于P_Δ中。因此，为了求出 $B_R(P_\Delta)$，我们检查定义 $B_R(P_\Delta)$的每个顶点是否位于以中心点 x_0 和最大半径 R为参数的热带多胞体 P_Δ 内部。式 (5)–(9) 所示的线性规划通过根据其中心 x_0构造 $h^*-representation(B_R(P_\Delta))$，求得 $B_R(P_\Delta)$，如图 4 所示。

$$\max_{R,x_0} \quad R \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad (x_0^i + R) - x_1 \le -m_{1i} \qquad \forall\, i \in \{2,\dots,e\} \tag{6}$$

$$x_1 - (x_0^j - R) \le -m_{j1} \qquad \forall\, j \in \{2,\dots,e\} \tag{7}$$

$$(x_0^j + R) - x_0^i \le -m_{ij} \qquad \forall\, i,j \in \{2,\dots,e\},\ i \ne j \tag{8}$$

$$x_0^1 = 0. \tag{9}$$

要检查一个顶点是否位于 P_Δ 内，我们利用 (4)。由于第一个坐标具有特殊性（即 $x_1 = 0$），因此我们分别考虑 (4) 中针对 $j = 1$、$i = 1$ 的约束或其他情况。注意，对于定义 $B_R(P_\Delta)$ 的 V' 中的顶点，不等式大多是冗余的。因此，在上述公式中最终只保留了非冗余不等式。

值得注意的是，$B_R(P_\Delta)$ 不一定是唯一的。以下示例的结果表明，$B_R(P_\Delta)$ 可以有一个中心点 x_0，其位置从 (0,1.5,1.5) 到 (0,1.5,3)，并达到预期结果。

例3.8。 我们再次考虑例*3.6*中定义的热带单纯形 P_Δ。求解 $B_R(P_\Delta)$ 的公式为

$$
\begin{aligned}
\max_{R,x_0} \quad & R \\
s.t. \quad & x_0^1 - (x_0^2 - R) \le 0 \\
& x_0^1 - (x_0^3 - R) \le 0 \\
& (x_0^2 + R) - x_0^1 \le 3 \\
& (x_0^3 + R) - x_0^1 \le 5 \\
& (x_0^3 + R) - x_2 \le 3 \\
& (x_0^2 + R) - x_0^3 \le 2 \\
& x_0^1 = 0.
\end{aligned}
$$

由此得到 $x_0 = (0,\ 1.5,\ 1.5)$ 以及半径 $R = 1.5$。图5展示了 $B_R(P)$。

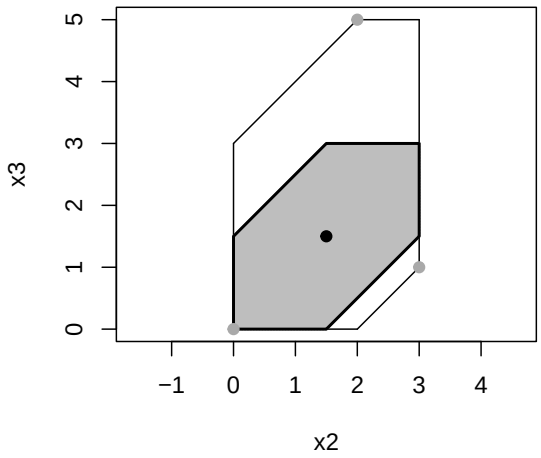

图5：来自例3.8的最大内接球。该热带球的半径为 $R = 1.5$，其 $B_R(P_\Delta)$为 $(0,0,0,(0,1.5,3),(0,3,1.5)\}$，以及 x_0 =(0,1.5,1.5)，图中以黑色表示。定义 P 的点以灰色表示。注意， P 的左下点与 $B_R(P_\Delta)$重合。

3.1.2 一般热带多胞体的最大内接球

上一节中，我们重点讨论了如何计算热带单形的最大内接球。本节将说明，可以将式 (5)–(9) 所示的相同过程和公式应用于任意热带多胞体 P，以求得 $B_R(P)$。

为此，我们重点关注 P, Δ_P 的热带单纯复形中的热带单形集；这些热带单形由 P, V' 中最小顶点集里的顶点的 $t = \binom{n}{e}$ 组合确定，并带有 $|V'| = n$ [17]。

定义 3.9 （热带单纯复形（参见 [17]））。设 V 为一个点集，使得 $tconv(V) = P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，即由所有子集 $V' \subseteq V$（其中 $|V'| \leq e$）定义的热带多胞体的集合，而热带多胞体 $P' = tconv(V')$ 称为热带单纯复形，记作 Δ_P。若 Δ_P 中的所有面具有相同的基数，则称 Δ_P 为纯的 。

只有具有 e 个或更多顶点的热带多胞体才可能包含一个 $Tr_{(e-1)}(P)$。因此，我们对 Δ_P中的每个热带单纯形应用 (5)-(9)，记作 $P^i_\Delta \in \Delta_P$，以构造 $B_{R_i}(P^i_\Delta)$，其中 R_i 是 P^i_Δ的最大内接球半径。由于 $\bigcup_{i=1}^t P^i_\Delta = P$，我们有 $\bigcup_{i=1}^t Tr_{e-1}(P^i_\Delta) = Tr_{e-1}(P)$。因此，对于 R_i 最大的 $P_i \in \Delta_P$，$B_R(P) = B_{R_i}(P_i)$。

例3.10 (摘自 [29])。考虑热带多胞体 $P := tconv(\{(0,-2,5),(0,-2,3),(0,2,2),(0,1,0)\})$。图 *6* 展示了这个热带多胞体。

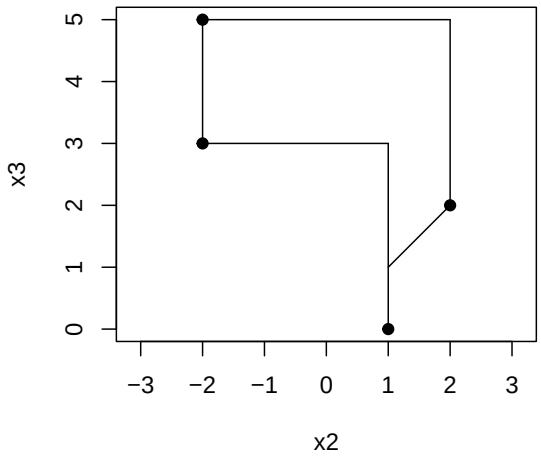

图 6：例3.10 中使用的热带多胞体。热带凸包由黑色的四个顶点 [29] 定义。

Δ_P 中有四个热带单形，因此要计算 $B_R(P)$，我们必须对每一个分别应用（5）-（9）。图 *7* 展示了这四个热带单形。

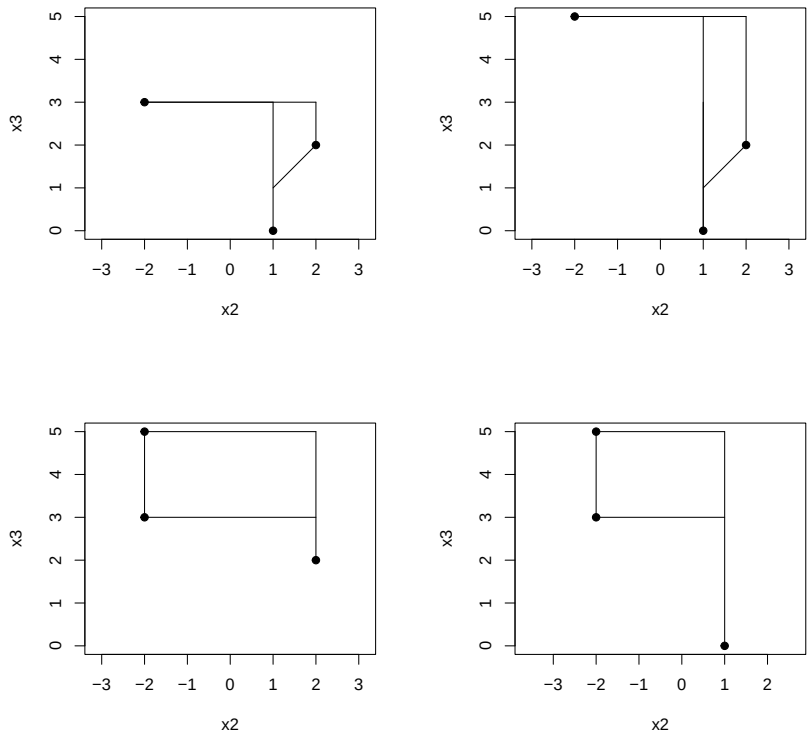

图 7：定义热带多胞体的热带单形， P 对应例 3.10。 P 由四个顶点定义，因此 P 可以由四个热带单形的并集定义。

在图 7 中，下面两个热带单形将得到 $B_R(P)$。为简洁起见，我们展示右下方热带单形的 $h*-representation(P)$，以及使用 （5）-（9）的线性规划表述。

$$
\begin{aligned}
\max_{R,x_0} \quad & R \\
s.t. \quad & x_0^1 - (x_0^2 - R) \leq 2 \\
& x_0^1 - (x_0^3 - R) \leq -3 \\
& (x_0^2 + R) - x_0^1 \leq 1 \\
& (x_0^3 + R) - x_0^1 \leq 5 \\
& (x_0^3 + R) - x_0^2 \leq 7 \\
& (x_2 + R) - x_0^3 \leq 1 \\
& x_0^1 = 0.
\end{aligned}
$$

$B_R(P)$ 中心点和半径分别为 $x_0 = (0, -1, 4)$ 和 $R = 1$。

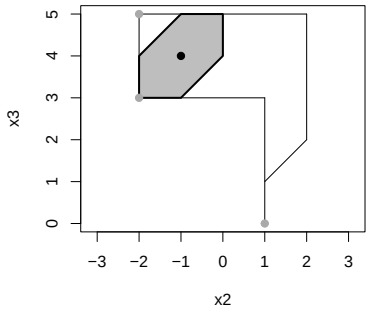

图8：例3.10中使用的热带多胞体，其中以灰色定义了 $B_R(P)$。中心点 x_0 以黑色显示。

最后一个例子说明了如何将式(5)-(9)中的表述应用于一个并非多热带体的热带单纯形。

例 3.11。考虑一个热带单纯形 $P_\Delta = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 3, 1), (0, 1, 2, 5), (0, 2, 5, 10)\}$。令 A 为一个将这些点表示为列向量的矩阵。我们计算 $tdet(A) = 14$，并对列进行排序，使得 $A_{\sigma(i),i} = a'_{kk}$，其中 $\sigma(i) = k$。

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A'.
$$

构造 A' 后，我们将 $-A'_{kk}$ 添加到每列 A_k 的每个元素中。

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{m}^*.$$

由此得到以下程序：

$$\begin{aligned} \max_{R,x_0} \quad & R \\ s.t. \quad & x_0^1 - (x_0^2 - R) \leq 0 \\ & x_0^1 - (x_0^3 - R) \leq 0 \\ & x_0^1 - (x_0^4 - R) \leq 0 \\ & (x_0^2 + R) - x_0^1 \leq 1 \\ & (x_0^3 + R) - x_0^1 \leq 3 \\ & (x_0^4 + R) - x_0^1 \leq 10 \\ & (x_0^3 + R) - x_0^2 \leq 2 \\ & (x_0^4 + R) - x_0^2 \leq 8 \\ & (x_0^2 + R) - x_0^3 \leq -1 \\ & (x_0^4 + R) - x_0^3 \leq 5 \\ & (x_0^2 + R) - x_0^4 \leq -4 \\ & (x_0^3 + R) - x_0^4 \leq 2 \\ & x_0^1 = 0. \end{aligned}$$

求解上述线性规划可得中心点 $x_0 = (0, .5, 2, .5)$，其半径为 $R = 0.5$。图 *9* 展示了 P_Δ 和 $B_R(P_\Delta)$。

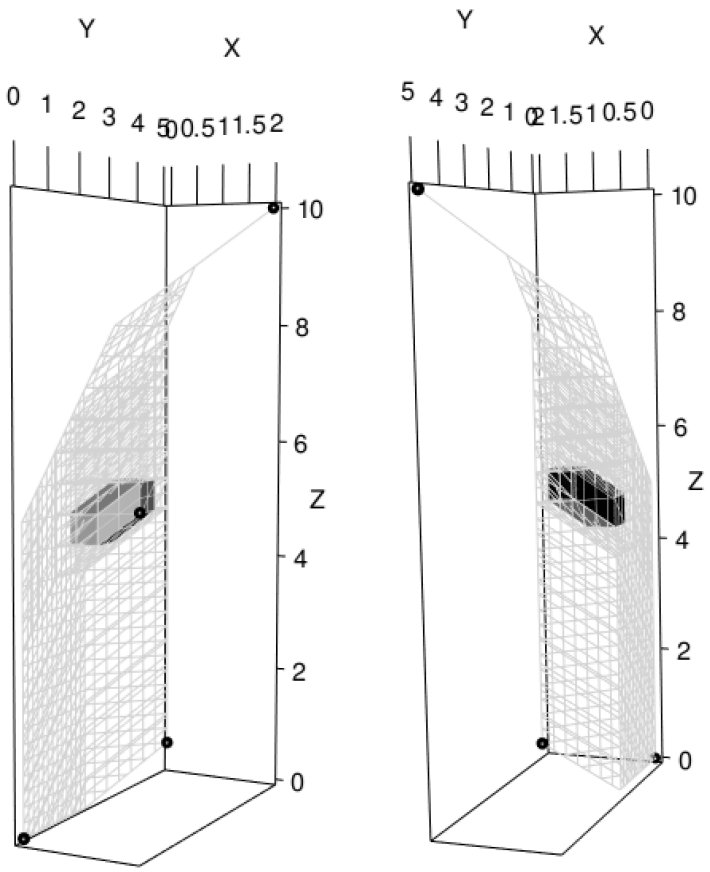

图 9：例 3.11 中构造的 $B_R(P_\Delta)$。

3.2 最小包围热带球

接下来，我们说明如何构造一个线性规划问题，为热带多胞体 P 求最小包围球 $B_r(P)$。我们希望 $y_0 \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 成为 $B_r(P)$ 的中心点，使其对每个满足 $P = \mathrm{tconv}(V)$ 的 $v_i \in V$ 最小化 $d_{tr}(y_0, v_i)$，且满足 $P \subset B_r(P)$。所有 $v_i \in V$ 对应的最小化值 $d_{tr}(y_0, v_i)$ 中的最大值，就是 $B_r(P)$ 的半径 r。Com˘aneci 等人在 [9]，中证明，对于任意两个点 $x, y \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，$d_{tr}(x, y)$ 可以改写为以下形式：

$$d_{tr}(x,y) = \max_i(x-y) - \min_j(x-y) = \max_{\substack{i,j \\ i\neq j}}(x_i - y_i - x_j + y_j). \tag{10}$$

注意，这等价于 [23], 中给出的以下表述

$$d_{tr}(x,y) = \max_{1\le i<j\le e}(|x_i - y_i - x_j + y_j|). \tag{11}$$

利用式（10）的结果，对于给定的 V，我们可以构造以下优化问题，以求出 $B_r(P)$ 的 y_0 和 r。

$$\min_{y_0} \max_{\substack{i\in[|V|]\\ j,k\in[e]\\ j\neq k}} \left(v_{ij} - y_0^j - v_{ik} + y_0^k\right) \tag{12}$$

$$\text{s.t. } v_i \in V. \tag{13}$$

由于我们正在最小化一组线性函数的最大值，因此可以进一步处理（12）中的目标函数，将其表述为一个线性规划，以通过用变量 r 替代最大值函数来求解 y_0，其中 r 表示 $B_r(P)$ 的半径。该表述如（14）—（16）所示:

$$\min_{r,y_0} \quad r \tag{14}$$

$$\text{s.t.} \quad v_{i,j} - y_0^j - v_{i,k} + y_0^k \le r \tag{15}$$

$$\forall\, i \in [|V|];\, j,k \in [e],\, j \neq k,$$

$$r \ge 0. \tag{16}$$

需要特别指出的是，y_0 不必属于 P 即可构造 $B_r(P)$。由于（10）与（11）等价，因此二者都会得到类似的约束构造（见 [28] 中的命题 25）。为了给出 $B_r(P)$ 半径的下界，我们得到以下命题。

命题 3.12。对于半径为 r 的热带多胞体 P B_r（P）的最小包围热带球，满足以下不等式:

$$r \ge \max_{i,j} \frac{d_{tr}(v_i, v_j)}{2}, \tag{17}$$

其中，v_i、$v_j \in V$，且 V 是 P 的顶点集。

证明。设 V' 是热带多胞体 P 的最小顶点集，其中 P =tconv（V'），并设 W' 是满足 $B_r(P)$ =tconv（W'）的最小顶点集。我们希望求出最小包围球 $B_r(P)$。回顾对于任意 x，$y \in P$

$$d_{tr}(x,y) \le \max_{i,j} d_{tr}(v_i, v_j)$$

其中 v_i，$v_j \in V'$ 和 i，$j \in [|V'|]$。因此，

$$\max_{i,j} d_{tr}(v_i, v_j) \le \min_{k,l} d_{tr}(w_k, w_l),$$

其中 w_k, $w_l \in W'$和 k, $l \in [|W'|]$。考虑到 $B_r(P)$ 和 W',

$$d_{tr}(w_k, w_l) = 2r \ \ \forall\, k, l \in [|W'|],$$

根据热带球的定义，其中 r 是该热带球的半径。因此，由于 $B_r(P)$ 包含 P,

$$\max_{i,j} \frac{d_{tr}(v_i, v_j)}{2} \leq r.$$

□

例3.13。考虑由 $V = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0),(0,0,1)\}$ 在 $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中生成的热带多胞体 P。顶点之间的最大两两热带距离为

$d_{tr}((0, 1, 0), (0, 0,1)) = 2$。因此， $r \geq 1$ （图*10*（左））。

例3.14。考虑由 $V = \{(0, 0, 0), (0, 2$ $(0,3,1)\}$ 在 $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中。顶点之间的最大两两热带距离为 $d_{tr}((0,0, 0),(0, 2,$ $5)) = d_{tr}((0, 3,1), (0,2, 5)) = 5$。因此， $r \geq 2.5$ （图*10*（右））。

例3.15。考虑由 $V = \{(0, -2, 3)$、$(0, -2, 5)$、$(0,2,2)$、$(0,1,1)\}$ 在 $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中生成的热带多胞体 P。其顶点之间的最大两两热带距离为 $d_{tr}((0, -2, 5)$、$(0$、1、$0)) = 8$。因此 $r \geq 4$ （图*10*（底部））。

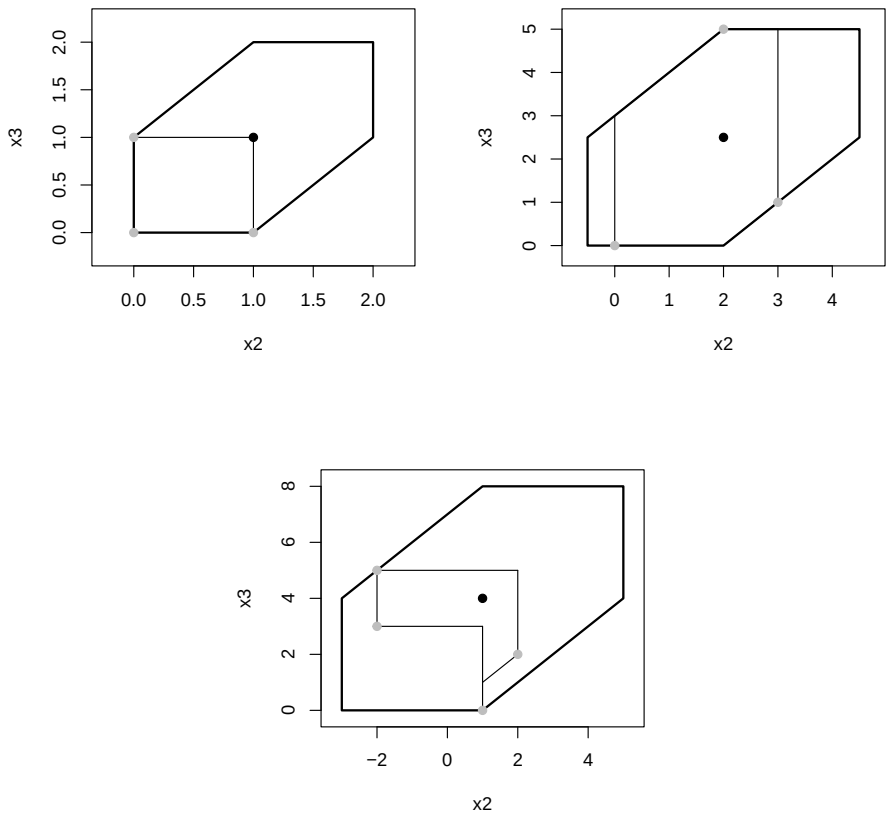

图10：例3.13、3.15 和 3.14 的结果。热带多胞体以灰色显示定义顶点，相关的 $B_r(P)$ 以黑线表示。黑点表示 $B_r(P)$ 的中心。

在前述每个例子中应用 (14)-(16) 可知，使用命题 3.12 的结果时等号成立。为说明在 (17) 中等号并不总是成立，我们给出 $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中一个热带多胞体的如下示例。

例 3.16。考虑由四个顶点生成的热带多胞体 $P(0,0,0,0)$、$(0,2,5,0)$、$(0,3,1,0)$、$(0,2,5,5)$，其位于 $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中。顶点之间的最大两两热带距离为 $d_{tr}((0,3,1,0),(0,2,5,5)) = 6$。然而，求解 (14)-*(15)* 得到 $r = 3.333$，其中 $y_0 = (0,0,2,3.333,1.667)$（图 *11*）。

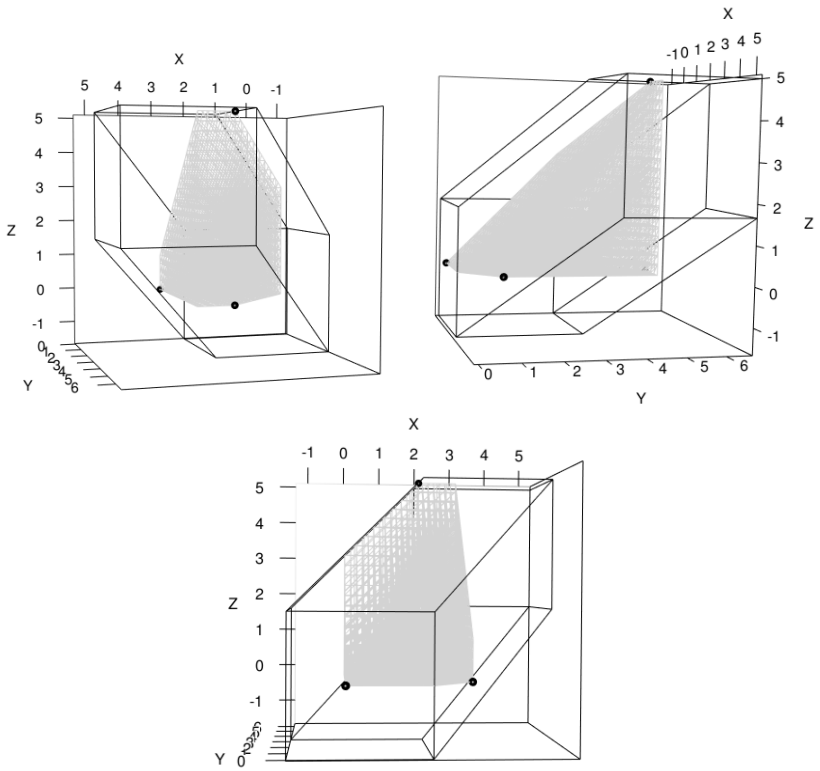

图 11：例 3.16 的结果。热带多胞体以灰色显示，其定义顶点以黑色显示。$B_r(P)$ 用黑线表示。

了解 $B_r(P)$ 和 $B_R(P)$，有助于我们进一步研究 P，相关内容见第 4 节。

4 估计热带多胞体的体积

估算经典多胞体的体积在数学和科学领域有广泛应用。许多文献表明，求出任意凸体的精确体积都颇具挑战，尤其是在高维情况下 [20, 6]。人们已开发出多种估算经典多胞体体积的方法，包括运用埃尔哈特理论以及 MCMC 方法 [10, 14]。本节介绍一种方法：使用基于热带度量的 HAR 采样器来估算热带多胞体的欧几里得体积。这是 [10] 中针对经典多胞体所介绍方法的对应方法。

注 4.1。 如 *[19],* 所示，计算热带多胞体的体积Vol（P）是 *NP*难问题（参见 *[19]*中的定理 *5.5* 和推论 *5.6*）。此外，如果通过不等式描述热带多胞体，计算 Vol（P） 是 *#P*困难问题，见 *[19,*定理 *8.1]*。另外，我们知道，除非 $P = NP$ *[19,* 定理 *7.8]*，否则不存在用于近似 Vol（P） 的多项式时间算法。因此，一般而言，估计 Vol（P） 是一个困难问题。

4.1 热带射影空间中热带球的体积

本节将 $B_r(P)$ 应用于估计给定热带多胞体体积的问题，其中其体积可以通过解析方法计算。Ehrhart 证明，经典多胞体的体积可以由计数膨胀多胞体 [14] 内格点数量的有理拟多项式的首项系数确定。由于热带球 $B_l(x_0)$ 是经典凸的，我们可以通过计算 Ehrhart 拟多项式来计算 $Vol(B_l(x_0))$，并确定其首项系数。更有帮助的是，热带球 $B_l(x_0) \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 本质上由 e 个超立方体组成，其中每个超立方体的边长为 l。这一结构使我们能够使用以下公式计算$Vol(B_l(x_0))$：

$$Vol(B_l(x_0)) = e \times l^{(e-1)}. \tag{18}$$

公式 (18) 已在 [19, 推论 33] 中给出，并提供了对 $Vol(B_l(x_0))$ 的直接计算方法。表1展示了随着维数增加，半径为 $Vol(B_l(x_0)$、 $l = 2$ 和 $l = 4$ 时的不同取值。

n	$Vol(B_2(x_0))$	$Vol(B_4(x_0))$
3	6	48
4	32	256
5	80	1280
6	192	6144
10	5120	$\approx 2.62 \times 10^6$

表1：随着 n 增加， $B_l(x_0) \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 的体积（适用于 $l = 2$ 和 $l = 4$）。

4.2 通过从最小外接球抽样进行体积估计

我们通过从$B_r(P)$中抽取点来估计给定热带多胞体的体积，该区域包含 P，然后确定同时落在 P 内的点所占的比例 p。将 $Vol(B_r(P))$ 乘以 p，即可得到 $Vol(P)$ 的估计值。对于任意热带多胞体，已知 $B_r(P)$ 以及 P，即可给出 $Vol(P)$ 的界。

命题 4.2。设 P是一个热带多胞体。那么 $Vol(P) \leq Vol(B_r(P))$。具体而言，$Vol(B_r(P))$ 是 $Vol(P)$的一个上界。

证明。根据定义，$B_r(P)$ 包含 P。因此，$Vol(P)$ 必须小于或等于 $Vol(B_r(P))$，从而得到一个上界。 □

同样，对于任意包含一个 $Tr_{e-1}(P)$ 的热带多胞体，我们也可以建立一个下界。在 [19], 中，作者证明了多热带体的下界是最大内接球的体积（见推论 3.6）。下面的命题将这一结果推广到一般情形。

命题 4.3。设 P是任意一个包含 $Tr_{e-1}(P)$ 的热带多胞体，其中$e \geq 3$。包含在 $Tr_{e-1}(P)$ 中的 $B_R(P)$ 为 P 的体积提供了一个下界。具体而言，

$$Vol(P) \geq Vol(B_R(P))$$

.

证明。 P的 $Tr_{e-1}(P)$ 表示一个维数为（e –1）的 [29]热带多胞体。任何热带多胞体 P，其中 $dim(P)$ =$(e-1)$ 都包含一个 $B_R(P)$。因此，$(e-1)$-主干的 $B_R(P)$，$B_R(Tr_{e-1}(P)) = B_R(P)$。因此，

$$Vol(B_R(P)) = Vol(B_R(Tr_{e-1}(P)) \leq Vol(P)).$$

□

虽然命题 4.2 和命题 4.3 为 $Vol(P)$ 提供了界，但这些界之间的范围可能非常大。

接下来，我们总结体积估计技术。给定一个热带多胞体 $P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$，计算 $B_r(P)$。使用 A 中描述的 HAR 采样器（见算法 7），从 $B_r(P)$ 中获取采样点。确定比例 p：来自 $B_r(P)$ 的采样点中，同时落在 P 中的点所占的比例。通过以下计算估计 $Vol(P)$，其中 $\cdot$ 表示经典乘法，

$$Vol(P) \approx p \cdot Vol(B_r(P)). \tag{19}$$

下面的算法 3 描述了通过从 $B_r(P)$ 抽样来估计 P 的体积的步骤。

算法 3 通过从 $B_r(P)$ 抽样估计 P 的体积。**输入：** 热带多胞体 $P:=\mathrm{tconv}(v_1, \ldots, v_s)$; 使用 (14) 计算得到的最小包围球 $B_r(P)$ ； 初始点 $x_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 和所需点数 I。**输出：** P 的体积估计。设置 $C = 0$**对于** $k = 0, \ldots, I-1$, **执行**使用算法 7 在 A 中生成随机点 x_{k+1} 。**如果** $x_{k+1} \in P$ **则**$C = C + 1$。**结束如果 结束循环**设置 $p = \frac{C}{I}$ 设置 $Vol(P) = p \cdot Vol(B_r(P))$**返回** $Vol(P)$。

—

由于算法 3 从 $B_r(P)$ 中抽样以估计 $Vol(P)$，因此从 $B_r(P)$ 中抽取更多点会得到更好的结果。因此，抽样点的数量与 $Vol(B_r(P))$ 相对于 $Vol(Tr_{e-1}(P))$ 的大小有关。一种评估这种关系的方法是比较 $B_R(P)$ 和 $B_r(P)$ 的半径之比，这类似于文献 [10] 中针对经典多胞体所述的某种方法。比值较小表明 $Vol(Tr_{e-1}(P))$ 相对于 $Vol(B_r(P))$ 较小，因此需要更多抽样点才能更准确地估计 $Vol(P)$，由此得到下一个命题。

命题4.4。 给定一个最小包围球 B_r（P）和一个最大内接球 B_R（P），从 B_r（P）中抽取的点落在 P 内的比率 A（P）有如下下界：

$$A(P) \geq \left(\frac{R}{r}\right)^{(n-1)}. \tag{20}$$

证明。 考虑 $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中的两个热带球 $B_l(x_0)$ 和 $B_k(y_0)$，使得 $B_l(x_0) \subset B_k(y_0)$。回忆一下， $Vol(B_l(x_0))$ 和 $Vol(B_k(y_0))$ 是通过 (18) 得到的。令，

$$\frac{Vol(B_l(x_0))}{Vol(B_k(y_0))} = \frac{n * l^{n-1}}{n * k^{n-1}} \tag{21}$$

$$= \frac{l^{n-1}}{k^{n-1}} \tag{22}$$

$$= \left(\frac{l}{k}\right)^{(n-1)}. \tag{23}$$

因此，我们得到了这一结果。 □

命题 4.2 有助于深入了解使用算法 3 估计 $Vol(P)$ 的难度。此外，如表1所示，当 $dim(P)$ 增大时，对于常数 r， $Vol(B_r(P))$ 也会增大。

示例 4.5. 考虑例 *3.11* 中定义并在图 *9* 中展示的热带多胞体 P。 P 的最大内接球半径为 $R = 0.5$，这表明 $Vol(B_R(P)) = 0.5$。 P 的最小外接球半径为 $r = 5$，因此 $Vol(B_r(P)) = 500$。在此情况下使用算法 *3*，需要对 $B_r(P)$ 进行抽样，其中 $Vol(B_r(P)) = 500$，以估计 $Vol(P)$，其体积更接近 0.5。

接下来，我们给出将算法 3 应用于前文定义的若干热带多胞体后得到的一些结果。

例 4.6（示例 4.5 续）。考虑示例 *3.11* 中的热带多胞体。 $B_r（P）$的半径为 $r = 5$，这意味着 $Vol（B_r（P）） = 500$。表 *2* 展示了使用算法 *3*、采用递增样本量得到的体积估计。这里， I 为样本量， C 为落在 P 中的抽样点数。

I	C/I	$Vol（P）$
1000	0.003	1.5
10000	0.0049	2.45
100000	0.00529	2.645

表 2： $P \in \mathbb{R}^4/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 的体积估计，其中抽样点数I各不相同，来自 $B_r（P）$。

示例 4.7 (例3.10，续**)**。我们对例 *3.10* 中的 P 应用算法 *3*，并改变从 $B_r(P)$ 中抽取的点数。回想一下，对于 $B_r(P)$， $r = 4$ 表示 $Vol(B_r(P))$，其中 $= 48$。表 *3* 展示了 $Vol(P)$ 的估计值，图 *12* 则展示了 $I = 1000$ 和$I = 10000$ 的点分布。

I	C/I	$Vol（P）$
1000	0.168	8.064
10000	0.1993	9.564
100000	0.1965	9.4392

表 3： $P \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 的体积估计，其中抽样点数I各不相同，来自 $B_r（P）$。

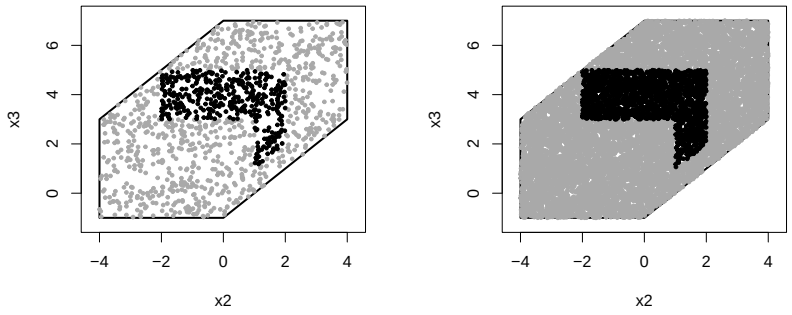

图 12：例 4.6 抽取 1,000 个点（左）和 10,000 个点（右）的结果。黑色点表示落在 P 内部的点。

4.3 热带多胞体的圆整

本节探讨对热带多胞体进行“舍入”的思路，以减少估计 $Vol(P)$ 所需的样本量。在 [10], 中，对经典多胞体进行舍入是指对该多胞体施加线性变换，使其处于近似各向同性的位置。该线性变换会缩小经典多胞体的欧几里得最大内切球与最小包围球的半径之差，从而减少估计给定经典多胞体 [10] 的体积所需的样本量。

本节中，我们提出将这种线性变换推广到热带多胞体 P 的一种类似方法。为此，首先，我们通过移除 P 的所有 *(e- 2)*-触手，找到一个仅包含 $Tr_{e-1}(P)$ 的最小包围热带球，记作 $B_k(Tr_{e-1}(P))$，从而只留下 $Tr_{e-1}(P)$。由于 $Tr_{e-1}(P) \subseteq P$，我们有 $B_k(Tr_{e-1}(P)) \subseteq B_r(P)$，其中 $k \leq r$。因此，我们有

$$Vol(B_k(Tr_{e-1}(P))) \leq Vol(B_r(P)).$$

因此，移除 P 的所有 *(e-2)*-触手 后，最小包围热带球 $B_k(Tr_{e-1}(P))$ 的体积更小，估算 $Vol(P)$ 所需的样本量也更少。

这里我们只关注一个热带单纯形 P_Δ，它不是多热带体，但具有 $Tr_{e-1}(P)$（见图 9）。对于任何具有 $Tr_{e-1}(P_\Delta)$ 的 P_Δ，$Tr_{e-1}(P_\Delta)$ 都是经典凸的。本文从 P_Δ 的顶点表示开始，将其记为 $v - representation(P_\Delta)$。

算法 4 展示了如何求出 $B_k(Tr_{e-1}(P_\Delta))$。该算法需要枚举伪顶点；对于具有超平面表示 [25]的经典多面体，这一问题已知是 NP难的。

定义 4.8 (伪顶点（参见 [24]））。对于给定的 $\mathcal{A}^{min}(V)$，*max*-热带多胞体 P 的伪顶点是任意点 $x \in P$，它与$(e-1)$ 个或更多最小型热带超平面的交点重合。

为了枚举 $Tr_{e-1}(P_\Delta)$ 的伪顶点，我们首先构造 P_Δ 的 $h^* - representation(P_\Delta)$。然后，我们应用 [3] 中描述、并由 Fukuda 在 cddlib [16] 中实现的双描述 算法，其中双描述 定义如下:

定义 4.9 （双重描述方法（参见 [1]））。 双重描述方法是一种算法，可计算由不等式定义的多面体的顶点表示。

使用双重描述 时， $h^* - representation$（P_Δ）是输入。由于双重描述 算法用于枚举以超平面表示描述的经典多胞体的顶点，因此只会枚举 Tr_{e-1}（P_Δ）的伪顶点，因为 Tr_{e-1}（P_Δ）是经典凸的。然后应用（14）-（16），即可构造 B_k（Tr_{e-1}（P_Δ））。

算法 4舍入热带单纯形， P_Δ。

输入： 热带单纯形 $P_\Delta := \text{tconv}(v_1, \ldots, v_e)$。**输出：** 最小包围球， B_k（Tr_{e-1}（P_Δ））。构造 $h^* - representation$（P_Δ）。使用 $double - description$ 方法 [2]枚举定义 Tr_{e-1}（P_Δ）的伪顶点集合。利用（14）-（16）计算最小包围球， B_k（Tr_{e-1}（P_Δ））。**返回** B_k（Tr_{e-1}（P_Δ））。

下面的例子展示了如何将算法 4 应用于一个并非多热带体的 P_Δ。

例4.10 （例 4.6续）。 考虑例 *4.6*中的热带多胞体。注意，这也是一个热带单纯形， P_Δ。 B_r（P_Δ）的半径为$r = 5$， 这意味着 Vol（B_r（P_Δ））$= 500$。按照算法 *4* 逐步进行，可得到以下伪顶点集合，它们定义了 Tr_{e-1}（P_Δ）的边界:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 5 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

计算新的最小包围球， $B_k(Tr_{e-1}(P_\Delta))$，得到半径$r = 2$。该 $B_k(Tr_{e-1}(P_\Delta))$ 的体积为 $Vol(B_r(Tr_{e-1}(P_\Delta))) = 32$。图 *13* 展示了所得的 $Tr_{e-1}(P_\Delta) \subset P_\Delta$。

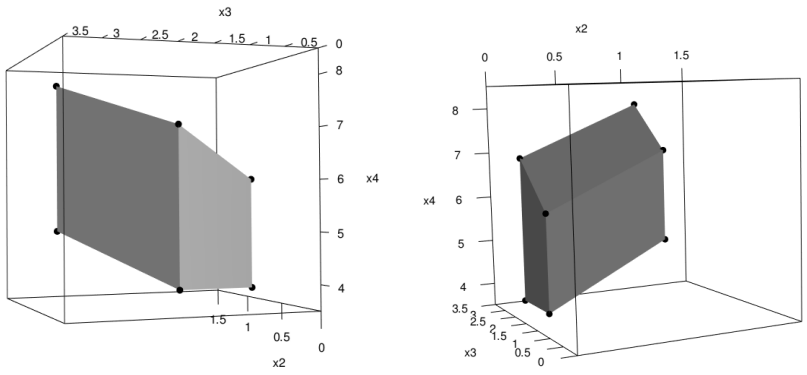

图 13：使用 rcdd 软件包 [21]通过算法 4 定义的例4.10中的 $Tr_{(e-1)}(P)$。红色的点表示伪顶点。

表4比较了舍入前后 $Vol(P_\Delta)$ 的估计值。

I	$Vol(P_\Delta)$	$Vol(Tr_{(e-1)}(P_\Delta))$
1000	1.5	2.752
10000	2.45	2.512
100000	2.645	2.517

表4：例4.10中， P_Δ， $Tr_{e-1}(P_\Delta) \in \mathbb{R}^4/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 在不同抽样点数量下的体积估计， I 。

5 从热带多胞体中热带单形的并集进行抽样

本节重点讨论从 $Tr_{e-1}(P) \subseteq P$（其不是经典凸的）中进行均匀抽样，其中 P 是一个热带多胞体。我们的目标是确定 Δ_P中的一组热带单形，使得这些热带单形的并集定义$Tr_{e-1}(P)$。然后，使用 A 中的算法 7，根据各热带单形所定义的 $Tr_{e-1}(P)$的比例，从每个热带单形中进行抽样。在 [38], 中，作者表明可以从多热带体中进行均匀抽样，但并未实现该方法。该方法可以扩展到任意不包含于热带超平面内的热带单形 P_Δ（见 [24]中的引理2）。

遗憾的是，对于一个非经典凸的 $Tr_{e-1}(P) \in P$，由于在 P 的边界上存在有偏采样（记为 ∂P），我们无法直接应用算法 7。相反，给定一个顶点集 V，它定义了 P，其中 $|V| = n$ 和 $n > e$，我们必须考虑 V 中 e 个顶点的所有 $\binom{n}{e}$ 种组合。每种组合都定义了一个热带单纯形 $P^i_\Delta \in \Delta_P$，其中 $\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{e}} P^i_\Delta = P$，这也定义了 $Tr_{(e-1)}(P)$。

枚举出每个 $P_\Delta^i \in \Delta_P$ 后，我们必须找到热带单纯形的一个子集 $\Delta'_P \subset \Delta_P$，使得 $\bigcup_{k\in[|\Delta'_P|]} P_\Delta^k = P' \subseteq P$，其中 $Tr_{(e-1)}(P) \subset P'$ 且 $0 \leq dim(P_\Delta^i \cap P_\Delta^j) \leq e-2$ 对所有 P_Δ^i，$P_\Delta^j \subseteq \Delta'_P$ 都成立。为了找到 Δ'_P，我们可以使用算法 7 从 $B_r(P)$ 中抽样，并找出整个样本 X 中落在 P 内的点。我们将落在 P 中的抽样点称为 X_P。然后，我们计算 X_P 中落入每个 $P_\Delta^i \in \Delta_P$ 的点所占比例 p_i。最后，我们令 $\Delta'_P = \{P_\Delta^i, \dots, P_\Delta^k\}$，其中 $i,\ k \in [|\binom{n}{e}|]$ 且 $\sum_{j\in\{i\dots,k\}} p_j = 1$。

算法 5 确定满足 $0 \leq dim(P_\Delta^i \cap P_\Delta^j) \leq e-2 \forall\ P_\Delta^i$ 的 $\Delta'_P \subset \Delta_P$，$P_\Delta^j \subset \Delta'_P$其中 $\bigcup_{k\in[|\Delta'_P|]} P_\Delta^k = P'$ 满足 $Tr_{(e-1)}(P) \subset P'$。

输入： 热带多胞体 $P{:=}\,\mathrm{tconv}\,(v_1,\dots,v_e)$; 起始点，$x_0$；样本量，$I$。**输出：** 一组热带单形，$\Delta'_P \in \Delta_P$ 和 $\mathbf{p} = \{p_i \dots p_k\}$，其中 $i,k \in \left[\left|\binom{|V|}{e}\right|\right]$。使用算法 7 从 $B_r(P)$ 中抽取 I 个点，并将该集合记为 X。令 $X_P \subset X$，其中 X_P 是落在 P 内的点的子集。枚举每个热带单形 $P_\Delta^i \subset P$。对每个 $P_\Delta^i \subset P$，计算 $\frac{|X_P \in P_\Delta^i|}{|X_P|} = p_i$。令 $\Delta'_P = \{P_\Delta^i, \dots, P_\Delta^k\}$，其中 $P' = \bigcup_{j\in\{i,\dots,k\}} P_\Delta^j$ 满足 $\sum_{j\in\{i\dots,k\}} p_j = 1$。**返回** Δ'_P和 $\mathbf{p} = \{p_i \dots p_k\}$，其中 $i,k \in [|\binom{n}{e}|]$。

识别出 Δ'_P 和 $\mathbf{p}$ 后，我们再次使用算法 7，并按照算法 6 所示的比例 $p_i \in \mathbf{P}$ 对每个 $P_\Delta^i \in \Delta'_P$ 进行抽样。

算法 6 均匀抽样 $Tr_{(e-1)}(P) \in P$，其中 $P \in \mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$和$Tr_{e-1}(P)$不是经典凸的。**输入：** 一组热带单形 $\Delta'_P = \{P_\Delta^i, \dots, P_\Delta^k\}$ 和 $\mathbf{p} = \{p_i, \dots, p_k\}$，其中 $i, k \in [|\binom{n}{e}|]$ 取自算法 5；起始点 y_0；以及样本量 J。**输出：** 一组点 Y，从 $Tr_{(e-1)}(P)$ 中均匀抽样得到。**对于** $j = 0 \dots J-1$ **执行**根据 $\mathbf{p}$ 中定义的比例随机选择 $P_\Delta^i \subset \Delta'_P$。使用算法 7 从 P_Δ^i 中抽取 y_{j+1}。**结束循环并返回** Y。

举例来说，我们回看图 6。请注意，定义 $P \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 的顶点集 V 的基数为 $|V| = 4$。因此需要考察 $\binom{4}{3}$ 个热带单形（见图 7）。在此情况下，图 7 左侧或右侧的那对热带单形都代表一组热带单形

它们仅在边界处相交，但仍定义 $Tr_{e-1}(P)$。在下面的例子中，我们将考虑右侧的那对热带单形。

例*5.1*。考虑热带多胞体 $P = \{(0, -2, 3), (0, -2, 5), (0, 2, 2), (0, 1, 0)\}$。该热带多胞体 P 可分解为两个热带单形：$P^1_\Delta = \{(0, -2, 5), (0, -2, 3), (0, 1, 0)\})$，其 $p_1 = 0.62$；以及 $P^2_\Delta = \{(0, -2, 5), (0, 1, 0), (0, 2, 2)\})$，其 $p_2 = 0.38$。使用算法 *6*，并将样本量设为 $I = 2000$，我们按照比例 p_1 和 p_2 对 P^1_Δ 和 P^2_Δ 进行抽样。图*14*展示了此例的结果。

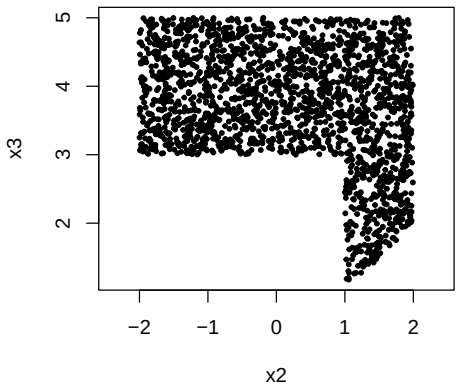

图14：例5.1的结果。

例*5.2*。考虑热带多胞体 $P = \{(0,0, 2, 0)、(0, 0, 0, 0)、(0, 4, -10,0)、(0, 3, -3, 5)、(0, 4, 2, 10)\}$。这里，$P$ 可以分解为五个热带单形。尽管定义 $Tr_{e-1}(P)$的热带单形组合不止一种，但我们将 $P^1_\Delta = \{(0, 0, 2, 0)、(0, 0, 0, 0)、(0, 4, -10, 0)、(0, 4, 2, 10)\}$ 确定为 $p_1 = 0.97$，并将$P^2_\Delta = \{(0, 0, 0, 0)、(0, 4, -10, 0)、(0, 3, -3, 5)、(0, 4, 2, 10)\}$确定为 $p_2 = 0.03$。使用样本量 $I = 3000$，我们对 P^1_Δ 和 P^2_Δ进行抽样。图*15*展示了该示例的结果。

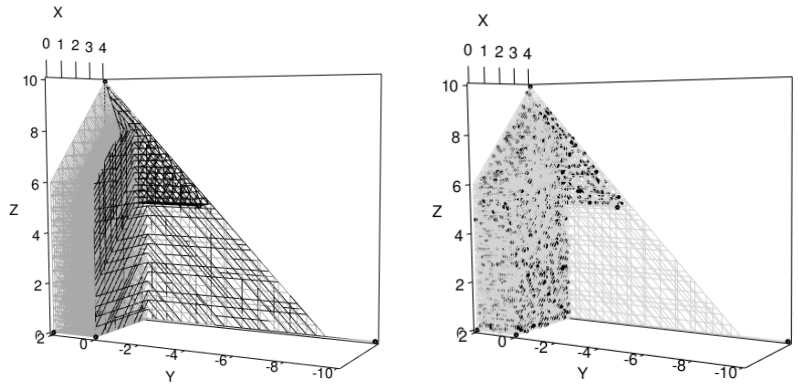

图15：例5.2的结果。黑色和灰色用于区分每个 P_{Δ}^{i}，其中 $\bigcup_{i=1}^{2} P_{\Delta}^{i} = P'$（左）。黑点表示来自 $Tr_{e-1}(P)$ 的抽样结果（右）。

6 结论

在本文中，我们证明了计算热带多胞体的最大内接与最小外接热带球可以表述为线性规划问题；随后，我们应用这些热带多胞体的热带球，在 $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$上估计该热带多胞体的体积并进行均匀抽样。

Gaubert 和 Marie MacCaig 指出，即使是估计热带多胞体的体积也是NP难 [19]。尽管本文所述的方法易于实现，但并未改变估计热带多胞体体积的难度。除了体积估计的难度之外，Murty 和 Oskoorouchi 还指出，对于一个以顶点表示的给定经典多胞体 P（即，将该多胞体表示为有限个顶点的凸包），以及一个给定点 $x_0 \in P$，计算以 x_0 为中心、内接于 P 的最大球的半径是NP难 [31]。因此，这引出了以下问题：

问题6.1. 给定一个由有限多个点构成的热带凸集所表示的热带多胞体，计算其最大内接热带球的半径及中心的时间复杂度是多少？ $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$

类似地，Shenmaier 证明，对于给定的采用顶点表示的经典多胞体 P，求出包围多胞体 P 的最小球的中心并计算其半径是 NP难问题 [33]。因此，我们有以下开放问题：

问题6.2。 给定 $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$中的一个由有限个点构成的热带凸集，且将其视为一个热带多胞体，计算最小包围热带球的半径及其中心的时间复杂度是多少？

带外推的顶点 Hit-and-Run 抽样

在本附录中，我们描述算法3、5和6中使用的马尔可夫链蒙特卡罗 HAR 采样器。该采样器被定义为一种带外推的顶点 *HAR* 采样器算法。这类采样器从热带单形的（$e-1$）主干（见定义2.16）中均匀采样，最初在 [38]中进行了描述。具体而言，对于 $\mathbb{R}^e/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 中的一个热带单形 $P_\Delta := \mathrm{tconv}(v^1, \ldots\ldots, v^s)$，其最小顶点集为 V'，从 $v^i \in V'$ 经过点 x 得到的一个“外推”点被定义为投影到其他顶点或 $V'^{-i} = \{v^1, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^e\}$ 上，即

$$\pi_{V'^{-i}}(x) := \bigoplus_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{e} \lambda_l \odot v^l \quad \text{where} \quad \lambda_l = \min(x - v^l). \tag{24}$$

作者证明，沿线段 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\ v^i}$进行的抽样是均匀的。然而，结果表明抽样存在偏差，因为一般而言，$\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\ v^i}$ 会在到达 v^i之前与 P_Δ或 ∂P_Δ的边界相交，从而导致对 ∂P_Δ的过度采样。

为避免对 ∂P_Δ进行有偏采样，我们必须检测 $\Gamma_{\pi_{V^{-i}}(x)\ v^i}$何时与 ∂P_Δ 相交，并忽略 $\Gamma_{\pi_{V^{-i}}(x)\ v^i}$ 在初始交点之后沿 ∂P_Δ 继续延伸的部分。这样可以确保我们进行抽样的线段位于 P 的内部，从而防止对 ∂P_Δ的过度采样。该线段的一个端点将是 $\pi_{V^{-i}}(x)$，而另一个端点将是 $\Gamma_{\pi_{V^{-i}}(x)\ v^i}$的某个弯折点 。

定义A.1 (弯折点来自 [30])。给定两个点 v^1、v^2，v^1与 v^2 之间的热带线段记作 Γ_{v^1,v^2}，由至多 $e-1$ 条欧几里得线段首尾相接组成。定义每条欧几里得线段的点集 B称为Γ_{v^1,v^2}的弯折点。包含 v^1 和v^2在内，Γ_{v^1,v^2} 至多由 e 个弯折点组成。为计算定义Γ_{v^1,v^2} 的集合 B，我们有如下

$$B = \left\{ \begin{array}{rcl} (v_e - u_e) \odot u \oplus v & = & v \\ (v_{e-1} - u_{e-1}) \odot u \oplus v & = & (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{e-1}, v_{e-1} - u_{e-1} + u_e) \\ & \vdots & \\ (v_2 - u_2) \odot u \oplus v & = & (v_1, v_2, v_2 - u_2 + u_3, \ldots, v_2 - u_2 + u_e) \\ (v_1 - u_1) \odot u \oplus v & = & u. \end{array} \right\}. \tag{25}$$

.

因此，利用这样一个事实：热带单纯形中 $Tr_{(e-1)}(P_\Delta)$ 的边界 P_Δ 是 $\mathcal{A}(V')$ 中闭扇区的交集，我们可以通过依次计算 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}(x)}\ v^i}$ 的每个折点 $b^j \in B$ 到每个 $H^{min}_{\omega^i}$ 的距离，来检测 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}(x)}\ v^i}$ 与 ∂P_Δ 的交集。我们使用方程（26）计算该距离

$$d_{tr}(x, H_{\omega^i}^{min}) = d_{tr}(x + \omega, H_{\mathbf{0}}^{min}), \tag{26}$$

这已在 [18] 中证明成立。若对任意 ω^i， $d_{tr}(b^j, H_{\omega^i}^{min}) = 0$，则已检测到 ∂P_Δ。接着，我们可以将 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\, v^i}$ 截断为 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\, b^j}$，并使用 [38] 中的算法 1 从 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\, b^j}$ 进行采样。若对任意 $b_j \in B$ 均未检测到 ∂P_Δ，则使用 [38] 中的算法 1 沿 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\, v^i}$ 的整个范围进行采样。由此得到算法 7，它将 V' 随机划分为子集 V'^{-i} 和 $\{v^i\}$，并仅在 $\pi_{V'^{-i}}(x)$ 与 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}}(x)\, v^i}$ 和 ∂P_Δ 的首次交点之间进行采样。

算法 7 使用超平面距离计算并进行截断，从 P 进行顶点 HAR 外推抽样。

输入： $P_\Delta := \text{tconv}(v^1, \ldots, v^s)$，初始点 $x_0 \in P_\Delta$ 和最大迭代次数 $I \geq 1$。输出：一个随机点 $x \in P_\Delta$。令 Ω 为由每个 $v^i \in V'$ 处定义 $H_{\omega^i}^{\min}$ 的法向量 ω^i 构成的集合。对于 $k = 0, \ldots, I-1$，执行：随机选择一个满足 $v^i \notin V'^{-i}_k$ 的非空集合 V'^{-i}_k。构造 $\Gamma_{\pi_{V'^{-i}_k}(x_k)\, v^i}$。将定义线段 $\Gamma_{\pi_{V_k^{-i}}(x_k)\, v^i}$ 的弯折点集合 B 排序，排除端点。设置 $j = 1$，当 $j \leq |B|$ 时执行：对每个满足 $b^j \in B$ 的 $\omega^i \in \Omega$，使用方程（26）计算 $d_{tr}(b^j, H_{\omega^i}^{\min})$。如果对于某个 $\omega^i \in \Omega$， $d_{tr}(b^j, H_{\omega^i}^{\min}) = 0$，则令 $\Gamma^k = \Gamma_{\pi_{V_k^{-i}}(x_k)\, b^j}$。否则，如果 $j < |B|$，则设置 $j = j + 1$；否则令 $\Gamma^k = \Gamma_{\pi_{V_k^{-i}}(x_k)\, v^i}$。结束 if。结束 if。结束 while。从热带线段 Γ^k 中，使用算法 1 从 [38] 生成一个随机点 x_{k+1}。结束 for。返回 $x := x_I$。

示例 A.1. 令 $P_\Delta := \textit{tconv}(\{(0, -1, 1), (0, 0, 0), (0, 1, -1)\})$。图*16*展示了使用算法 *7* 从 P_Δ 抽取 *2000* 个点的结果。

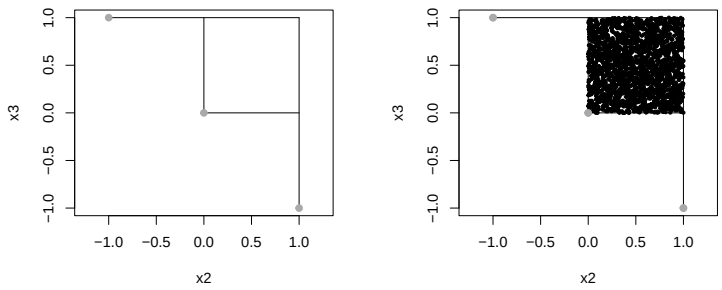

图16：使用算法 7 为 $P_\Delta \in \mathbb{R}^3/\mathbb{R}\mathbf{1}$ 抽样 2000 个点后的示例 A.1 结果。

致谢

作者感谢 Michael Joswig 教授和 Ngoc Tran 教授提供的有益交流与讨论。RY 和 DB 获得了美国国家科学基金会 DMS 1916037 的部分资助。KM 获得了日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 JP18K11485、JP22K19816 和 JP22H02364 的部分资助。

参考文献

[1] Xavier Allamigeon、St´ephane Gaubert 和 Eric Goubault。热带双描述法。载于 Jean-Yves Marion 和 Thomas Schwentick 编，第*27*届计算机科学理论方面国际研讨会 - *STACS 2010*，第27届计算机科学理论方面国际研讨会论文集，第 47–58 页，法国南锡，2010年3月。Inria Nancy Grand Est & Loria。

[2] David Avis 和 Komei Fukuda。用于凸包以及超平面配置和多面体顶点枚举的枢轴算法。符号计算几何，8:98–104，1991年1月。[3] David Avis 和 Komei Fukuda。用于凸包以及超平面配置和多面体顶点枚举的枢轴算法。离散与计算几何，8:295–313，1992年1月。[4] Fran¸cois Baccelli、Guy Cohen、G.J. Olsder 和 Jean-Pierre Quadrat。同步与线性——一种离散事件系统代数。运筹学会期刊，45，1994年1月。[5] Marie-Charlotte Brandenburg、Sophia Elia 和 Leon Zhang。多热带多面体的多元体积、Ehrhart多项式和 h^*-多项式。符号计算杂志，114(C):209–230，2023年1月。

[6] Augustin Chevallier、Fr´ed´eric Cazals 和 Paul Fearnhead。利用分段确定性马尔可夫过程高效计算高维空间中多面体的体积，2022。[7] K. L. Clarkson。核心集、稀疏贪婪近似与Frank-Wolfe算法。*ACM*算法汇刊，6(4):63，2010。[8] K. L. Clarkson、E. Hazan 和 D. P. Woodruff。面向机器学习的次线性优化。*ACM*期刊，59(5):23:1–23:49，2012。[9] Andrei Comˇaneci 和 Michael Joswig。通过运输求热带中位数，2022。[10] Ben Cousins 和 Santosh Vempala。一种实用的体积算法。数学规划计算，8:133–160，2016年10月。[11] M. Develin 和 B. Sturmfels。热带凸性。*Documenta Mathematica*，9:1–27，2004。[12] Anton Dochtermann、Michael Joswig 和 Raman Sanyal。热带类型及其相关胞腔分解。代数杂志，356(1):304–324，2012年4月。[13] E. Ehrhart。关于n维有理齐次多胞体。巴黎科学院院报，254:616–618，1962年。[14] Eugene Ehrhart。丢番图几何——关于n维有理齐次多胞体。法国科学院周报，254(4):616，1962年。[15] G. Elekes。几何不等式与体积计算的复杂性。离散计算几何，1(4):289–292，1986年。[16] Komei Fukuda。cddlib，2020。[17] Francisco Criado Gallart。单纯复形的热带角平分线与直径，2021。柏林工业大学博士论文。[18] B. G¨artner 和 M. Jaggi。热带支持向量机，2006。ACS技术报告。编号：ACS-TR-362502-01。[19] St´ephane Gaubert 和 Marie MacCaig。逼近热带多胞体的体积很困难。国际代数与计算杂志，29(02):357–389，2019年。[20] Cunjing Ge、Feifei Ma 和 Jian Zhang。一种快速实用的凸多面体体积估算方法。$CoRR$，abs/1401.0120，2014年。[21] Charles J. Geyer、Glen D. Meeden，并纳入了由 Komei Fukuda 编写的 cddlib 代码。*rcdd*：计算几何，2021。R软件包版本1.5。

[22] A.G. Horvath 和 Z. Langi。内接于单位球面的最大体积多胞体。*Monatsh Math*，181:341–354，2016年。[23] Michael Joswig。《热带组合学基础》。施普林格，纽约，纽约州，2021。[24] Michael Joswig 和 Katja Kulas。热带凸性与普通凸性的结合。*Advances in Geometry*，10(2):333–352，2010年。[25] Leonid Khachiyan、Endre Boros、Konrad Borys、Khaled M. Elbassioni 和 Vladimir A. Gurvich。求出多面体所有顶点是困难的。离散与计算几何，39:174–190，2006年。[26] H. Konno、Y. Yajima 和 A. Ban。计算由线性不等式组定义的多胞体所包含的最小球面。*Comput Optim Applic*，3:181–191，1994。[27] C. Kuo、J. P. Wares 和 J. C. Kissinger。顶复门全基因组系统发育：对基因树之间不一致性的分析。*Mol Biol Evol*，25(12):2689–2698，2008。[28] B. Lin、B. Sturmfels、X. Tang 和 R. Yoshida。树空间中的凸性。*SIAM Discrete Math*，3:2015–2038，2017。[29] Georg Loho 和 Matthias Schymura。热带埃尔哈特理论与热带体积。*Research in the Mathematical Sciences*，7:30，2020年12月。[30] D. Maclagan 和 B. Sturmfels。《热带几何导论》，第161卷，属于*Graduate Studies in Mathematics*丛书。Graduate Studies in Mathematics，第161卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。[31] K.G. Murty 和 M.R. Oskoorouchi。线性规划的球方法。*AlgorithmicOperations Research*，5:21–33，2010年。[32] Robert Page、Ruriko Yoshida 和 Leon Zhang。系统发育树空间上的热带主成分分析。*Bioinformatics*，36(17):4590–4598，2020年6月。[33] V.V. Shenmaier。包含 k 个点的最小球问题。*J.Appl. Ind. Math.*，7:444–448，2013。[34] Ngoc Mai Tran。多热带体与热带特征空间：线性锥。离散与计算几何，51:539–558，2012年。[35] Ngoc Mai Tran。多热带体枚举。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，151:1–22，2017。[36] R. Yoshida、L. Zhang 和 X. Zhang。热带主成分分析及其在系统发育学中的应用。*Bulletin of Mathematical Biology*，81:568–597，2019年。

[37] Ruriko Yoshida、David Barnhill、Keiji Miura 和 Daniel Howe。系统发育树的热带密度估计，2022。[38] Ruriko Yoshida、Keiji Miura 和 David Barnhill。从热带凸集进行击中与运行采样，2022。[39] Ruriko Yoshida、Misaki Takamori、Hideyuki Matsumoto 和 Keiji Miura。热带支持向量机：评估及其向函数空间的扩展。《神经网络》，157:77–89，2021。