arXiv:2303.02541v1 [math.PR] 5 Mar 2023

连续遍历容量

Yihao Sheng* 和 Yongsheng Song*

2023年3月7日

摘要

本文旨在刻画连续遍历上概率 $\mathbb{V}=$ 的集合 Θ 的结构（定理 3.3）：

- Θ 包含有限个遍历概率；
- Θ 中的任何不变概率都是 Θ中那些遍历概率的凸组合；
- Θ 中的任何概率在不变 σ-代数上都与 Θ 中的某个不变概率一致。

最后这一性质已由 Cerreia-Vioglio、Maccheroni 和 Marinacci 得到[1], , 他们率先研究了此类容量的遍历性。

作为该刻画的一个应用，我们证明了一个遍历性结果（定理 3.4），它改进了 [1] 中的结果：时间平均 ξ 的极限由上期望 $\sup_{P\in\Theta} E_P[\xi]$界定，而非由 Choquet积分界定。一般而言，前者严格小于后者。

关键词：连续容量；遍历性。MSC 分类：28 A12；37A05。

1 引言

不变容量和遍历容量的概念最初由 Cerreia-Vioglio、Mac- cheroni 和 Marinacci 提出 [1], , 他们据此给出了关于连续不变容量的第一个 Birkhoff遍历定理。下面我们用本文的记号陈述他们的主要结果。

设 $(\Omega\ \mathcal{F},T)$ 是一个可测系统，且 $\mathbb{V}=\sup_{P\in\Theta} P$是一个连续上概率。若 $\mathbb{V}$ 是 T-不变的，则对任意 $P\in\Theta$ 以及 Ω 上的任意有界随机变量 ξ ，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega)\quad exists,\quad P\text{-}a.s.$$

进一步假设 $\mathbb{V}$ 是遍历的，则对任意 $P\in\Theta$，有

$$-C_{\mathbb{V}}[-\xi^*]\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega)\le C_{\mathbb{V}}[\xi^*],\quad P\text{-}a.s., \tag{1.1}$$

其中 $\xi^*(\omega)=\limsup\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi(T^k\omega)$, $C_{\mathbb{V}}$ 表示关于 $\mathbb{V}_{n\to\infty}$ 的 Choquet积分

本文的主要目的是刻画连续遍历容量 $\mathbb{V}$。具体而言，设 Θ 为 Ω 上由 $\mathbb{V}$支配的概率集合，并设 Θ_0 （分别为 Θ_*）是 Θ 中 T-不变（分别为遍历）概率的子集。那么，我们得到

*中国科学院数学与系统科学研究院，中国科学院，北京 100190；中国科学院大学数学科学学院，北京 100049。电子邮箱：shengyihao@amss.ac.cn（Y. Sheng）、yssong@amss.ac.cn（Y. Song）。

- Θ_* 的基数有限；
- $\Theta_0 = \text{co}\ \Theta_*$，即 Θ_*的凸包。

作为附带结果，我们改进了遍历定理（1.1）。设 $\mathbb{E}^0 = \sup_{P\in\Theta_0} E_P$. 那么，对于任意 $P \in \Theta$ 以及任意有界随机变量 ξ，我们有

$$-\mathbb{E}^0[-\xi] \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k\omega) \le \mathbb{E}^0[\xi], \quad P\text{-a.s.}$$

该极限被 上期望 $\mathbb{E}^0[\xi]$所界定，而非Choquet积分 $C_{\mathbb{V}}[\xi^*]$.

本文其余部分安排如下。第2节介绍连续容量的一些记号。第3节给出并证明主要结果。第4节作为附录，简要介绍巴拿赫-马祖尔极限 [2]。

2 一些记号

设 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 为一个可测空间，且令 $T: \Omega \to \Omega$ 为一个可测变换。记 $\mathcal{I}$为 T-不变代数。令 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ $A \in \mathcal{F}$ 为一个上概率，其中Θ是 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的一个概率族。记 $\mathcal{M}(\Omega)$ 为 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的概率集合。在本文中，我们假设

$$\Theta = \big\{P \in \mathcal{M}(\Omega) \mid P(A) \le \mathbb{V}(A),\ A \in \mathcal{F}\big\}.$$

令 $\mathbb{E}[\xi] = \sup_{P\in\Theta} E_P[\xi]$，其中 ξ是一个 $\mathcal{F}$-可测函数，且 $\sup_{P\in\Theta} E_P[|\xi|] < \infty$. 我们称 $\mathbb{E}$ 为关于 Θ.的上期望

定义 2.1 令 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$， $A \in \mathcal{F}$，为关于 Θ.的上概率。若 $\mathbb{V}$ 从上连续，即 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(A_n) = 0$ for $A_n \in \mathcal{F}$ with$A_n \downarrow \emptyset$，则称其为连续的。

注 2.2 设 $A_n \in \mathcal{F}, n \ge 1$, 是一个由不相交集合组成的序列。若对于某个 $\varepsilon > 0$ 和所有 $n \ge 1$, $\mathbb{V}(A_n) \ge \varepsilon$，则 $\mathbb{V}$ 不可能是连续的。事实上， $\bigcup_{k\ge n} A_k \downarrow \varnothing$，但 $\mathbb{V}(\bigcup_{k\ge n} A_k) \ge \mathbb{V}(A_n) \ge \varepsilon$.

定义 2.3 设 $\mathbb{V}$ 是 $(\Omega\ \mathcal{F})$ 上的连续上概率。若对于任意 $A \in \mathcal{F}$，都有以下关系，则称 $\mathbb{V}$ 是 T-不变的:

$$\mathbb{V}(A) = \mathbb{V}(T^{-1}A).$$

下面的引理引自 [1]。为方便读者，我们在此给出一个简短的证明。

引理 2.4 假设 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ 是 T-不变的。设 Θ_0 是 Θ 中 T-不变概率的子集。对于每个 $P \in \Theta$，存在 $P' \in \Theta_0$，使得 $P = P'$ 在 T-不变代数 $\mathcal{I}$ 上成立。

证明。对于 $P \in \Theta$，令 $P_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(T^{-k}A)$。设 Λ 是一个 Banach–Mazur 极限（见定义 4.1），并令 $P'(A) = \Lambda\big((P_n(A))\big)$；由于 Λ 是线性泛函，因此它具有可加性。由 Λ 的正性可知， $P'(A) \le \Lambda\big((\mathbb{V}(A))\big) = \mathbb{V}(A)$。 $\mathbb{V}$ 的连续性意味着 P' 是一个概率。因此我们得到 $P \in \Theta$。注意到，对于任意 $A \in \mathcal{I}$ 和 $n \in \mathbb{N}$， $P_n(A) = P(A)$，由此对每个 $A \in \mathcal{I}$，有 $P'(A) = P(A)$。对于任意 $A \in \mathcal{F}$，注意 $\limsup_n |P_n(A) - P_n(T^{-1}A)| = 0$。根据注 4.3，我们有

$$P'(T^{-1}A) = \Lambda\big((P_n(T^{-1}A))\big) = \Lambda\big((P_n(A))\big) = P'(A),$$

即， P' 是 T-不变的。 □

定义 2.5 设 $\mathbb{V}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的连续上概率。若对于 $A \in \mathcal{I}$., $\mathbb{V}$ 是 T-遍历的，即 $\mathbb{V}(A) = 0$, 或为 1。

3 遍历上概率的刻画

本节中，我们建立连续遍历上概率的一种刻画（定理 3.3）。作为应用，我们证明一个遍历性结果（定理 3.4），改进了 [1] 中的结果。

引理 3.1 假设 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ 是 T-遍历的。令 Θ_0 为 Θ 中 T-不变概率的子集。对于满足 $\mathbb{V}(A) > 0$ 的 $A \in \mathcal{I}$，存在 $P' \in \Theta_0$ 使得 $P'(A) = 1$。

证明。对于满足 $\mathbb{V}(A) > 0$的 $A \in \mathcal{I}$，存在 $P_n \in \Theta$ 使得 $P_n(A) \to 1$。令 Λ 为 Banach–Mazur 极限，并设 $P(B) = \Lambda((P_n(B))), B \in \mathcal{F}$。由 Λ 的性质和 $\mathbb{V}$ 的连续性可知， P 是一个属于 Θ 的概率，且满足 $P(A) = \lim_n P_n(A) = 1$。由引理 2.4 可知，存在 $P' \in \Theta_0$ 使得 $P'(A) = 1$。 □

引理 3.2 假设 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ 是 T-遍历的。令 Θ_0为 T-不变概率在 Θ中的子集。对于 T-遍历概率 P^*，若存在 $P \in \Theta_0$使得 P^*相对于 P绝对连续，则有 $P^* \in \Theta_0$。

证明。对于 T-遍历概率 P^*，令 $\Theta_{P^*} = \{P \in \Theta_0 \mid P^* \ll P\}$。假设 Θ_{P^*}非空，但不包含 P^*。

两个不变概率测度相等，当且仅当它们在不变σ-代数 $\mathcal{I}$上相等。下文中，我们将考虑可测空间 $(\Omega, \mathcal{I})$。

令 $\beta_0 = \sup^{P\in\Theta_0}(P^* - P)^+(\Omega)$，根据假设 $P^* \notin \Theta_0$，该值为正。取 $P_0 \in \Theta_0$使得 $(P^* - P_0)^+(\Omega) \geq \frac{1}{2}\beta_0$。令 $\Omega = D_0 \cup D_0^c$为符号测度 $P^* - P_0$ 的 Hahn分解，其中

$$(P^* - P_0)(D_0) = (P^* - P_0)^+(\Omega).$$

因此我们得到 $P^*(D_0) = 1$和 $P_0(D_0^c) \geq \frac{1}{2}\beta_0$。

设 $\Theta_1 = \{P \in \Theta_0 \mid P(D_0) = 1\}$。由于 $P^*(D_0) = 1$且 Θ_{P^*}非空，存在$P' \in \Theta_0$使得 $P'(D_0) > 0$。由引理 3.1可知 Θ_1非空。令 $\beta_1 = \sup^{P\in\Theta_1}(P^* - P)^+(\Omega)$，它是正的。选择 $P_1 \in \Theta_1$使得 $(P^* - P_1)^+(\Omega) \geq \frac{1}{2}\beta_1$。令 $\Omega = D_1 \cup D_1^c$为 $P^* - P_1$ 的 Hahn分解，其中 $D_1 \subset D_0$ 且

$$(P^* - P_1)(D_1) = (P^* - P_1)^+(\Omega).$$

那么，我们得到 $P^*(D_1) = 1$和 $P_1(D_1^c \cap D_0) \geq \frac{1}{2}\beta_1$。

通过归纳法，我们可以得到满足条件的 $(\Theta_k, \beta_k, P_k, D_k)_{k\geq 0}$

$$\begin{aligned}
&\Theta_{k+1} = \{P \in \Theta_k \mid P(D_k) = 1\} \neq \emptyset,\\
&\beta_{k+1} = \sup_{P\in\Theta_{k+1}} (P^* - P)^+(\Omega) > 0,\\
&P_{k+1} \in \Theta_{k+1} \text{ with } (P^* - P_{k+1})^+(\Omega) \geq \frac{1}{2}\beta_{k+1},\\
&\Omega = D_{k+1} \cup D_{k+1}^c \text{ being the Hahn decomposition of } P^* - P_{k+1} \text{ with}\\
&D_{k+1} \subset D_k,\ P^*(D_{k+1}) = 1 \text{ and } P_{k+1}(D_{k+1}^c \cap D_k) \geq \frac{1}{2}\beta_{k+1}.
\end{aligned}$$

注意到 $\{D_{k+1}^c \cap D_k\}_{k\geq 0}$互不相交，且 $\mathbb{V}(D_{k+1}^c \cap D_k) \geq P_{k+1}(D_{k+1}^c \cap D_k) \geq \frac{1}{2}\beta_{k+1} > 0$.于是 $\mathbb{V}(D_{k+1}^c \cap D_k) = 1$，这与注 2.2 矛盾。 □

现在，我们给出连续遍历容量 $\mathbb{V}$. 的如下刻画

定理 3.3 假设 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ 是 T-遍历的。令 Θ_0（分别为 Θ_*）表示 T-不变概率（分别为遍历概率）在 Θ 中构成的子集。那么， Θ_* 的基数有限，并且$\Theta_0 = \text{co}\ \Theta_*$，即 Θ_* 的凸包。

证明。由 $\mathbb{V}$ 的连续性和注 2.2 可直接得出 Θ_* 的基数有限。现在证明 $\Theta_0 = \text{co}\ \Theta_*$。对于具有遍历性的 $P \in \Theta_0$，可得所需结果。否则，我们可以选取一个集合 $A \in \mathcal{I}$，使得 $0 < P(A) < 1$。令 $A_0 = A, A_1 = A^c$，这称为 Ω 的非平凡分解。如果 $A_\alpha, \alpha \in \{0,1\}$ 没有非平凡分解，则过程终止。否则，我们有一个分解 $A_\alpha = A_{\alpha 0} + A_{\alpha 1}$ for$A_{\alpha 0}, A_{\alpha 1} \in \mathcal{I}$，且 $0 < P(A_{\alpha 0}) P(A_{\alpha 1}) < P(A_\alpha)$。然后，我们对 $A_\alpha, \alpha \in \{0,1\}^n, n \geq 2$ 重复上述过程。

我们声称上述过程将在有限步后终止。否则，我们将得到一列不相交集合 $(B_n) \subset \mathcal{I}$，满足 $P(B_n) > 0, n \geq 1$。由 $\mathbb{V}$ 的遍历性可知， $\mathbb{V}(B_n) = 1, n \geq 1$，这不可能，因为 $\mathbb{V}$ 是连续的。

因此，我们得到 Ω 的一个有限划分 $\{B_k\}_{k=1}^n$，满足 $B_k \in \mathcal{I}, P(B_k) > 0$，且其中任意一个 B_k 都不存在非平凡分解。于是， $P_k(\cdot) = P(\cdot|B_k)$ 是遍历的，且相对于 P 绝对连续，因此由引理 3.2 可得 $P_k \in \Theta_*$。注意到

$$P(C) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P_k(C), \text{ for } C \in \mathcal{F},$$

我们得到所需结果。 □

基于上述刻画，我们可以将遍历定理 (1.1) 改进如下:

定理 3.4 假设 $\mathbb{V}(A) = \sup_{P\in\Theta} P(A)$ 是 T-遍历的。令 Θ_0 为 T-不变概率在 Θ 中构成的子集。那么对于任意 $P \in \Theta$ 以及任意有界随机变量 ξ，有

$$-\mathbb{E}^0[-\xi] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k\omega) \leq \mathbb{E}^0[\xi], \quad P\text{-}a.s.,$$

其中 $\mathbb{E}^0$ 是关于 Θ_0的上期望。

证明。由于 $\xi^*(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k(\omega))$ 和 $\xi_*(\omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k(\omega))$ 都是$\mathcal{I}$-可测的，根据引理 2.4，只需证明对任意 $P \in \Theta_0$,

$$P\big\{ -\mathbb{E}^0[-\xi] \leq \xi_* = \xi^* \leq \mathbb{E}^0[\xi] \big\} = 1.$$

令 $\Theta_* = \{P_i\}_{i=1}^m$，并令 $\Omega = D_1 \cup \cdots \cup D_m$为满足 $P_i(D_i) = 1, i = 1, \cdots, m$ 的 $\mathcal{I}$-可测划分。根据定理 3.3，有 $E_P[\xi|\mathcal{I}] = \sum_{i=1}^m E_{P_i}[\xi] 1_{D_i}$, P-几乎处处成立。于是，Birkhoff遍历定理给出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k\omega) = \sum_{i=1}^{m} E_{P_i}[\xi] 1_{D_i}, \quad P\text{-a.s.},$$

这就得到了所需结果。 □

注 3.5 上述定理从两个方面改进了 *[1]* 中的遍历定理。首先，上期望 $\mathbb{E}^0[\xi]$ 通常严格小于 Choquet积分 $C_{\mathbb{V}}[\xi^*]$。其次，对于一般情形， *[1]* 中并未给出 $\xi^*(\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k(\omega))$ 的显式形式。

4 附录

巴拿赫-马祖尔极限（参见 Aliprantis 和 Border 所著《无穷维分析》， 2005 [2]）在不变容量的研究中发挥着重要作用。因此，我们将对此作简要介绍。

定义 4.1 设 ℓ_∞ 为所有有界数列构成的空间。若正线性泛函 $\Lambda{:}\ell_\infty \to \mathbb{R}$ 满足

1. $\Lambda(e) = 1$，其中 $e = (1,1,1,\ldots)$；2. 对每个 $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$，$\Lambda(x_1, x_2, \ldots) = \Lambda(x_2, x_3, \ldots)$。

引理 4.2 若 Λ 是巴拿赫-马祖尔极限，则

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n$$

对每个 $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$。特别地，对于每个收敛数列 x，$\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$（因此，每个巴拿赫-马祖尔极限都是极限泛函的扩张）。

注 4.3 对任意 $x, y \in \ell_\infty$，

$$|\Lambda(x) - \Lambda(y)| \leq \lim_{n} \sup_{k\geq n} |x_k - y_k|.$$

定理 4.4 Banach–Mazur 极限存在。

参考文献

[1] S. Cerreia–Vioglio、F. Maccheroni、M. Marinacci：《下概率的遍历定理》。《美国数学会会刊》144(8)（2016），3381-3396。

[2] Aliprantis、Boeder：《无穷维分析》，第 3 版，施普林格，柏林，2006 年。