arXiv:2303.02564v1 [math.NA] 5 Mar 2023

二维 Bakhvalov型网格上奇异摄动对流-扩散问题有限元方法的超接近性 ⋆

Chunxiao Zhang[a,1]，Jin Zhang[a,*]

[a]S数学与统计学院，山东师范大学，中国济南 250014 a

摘要

对于奇异摄动对流-扩散问题，在 Bakhvalov型网格上进行有限元方法的超逼近分析仍是一个悬而未决的问题，尤其是在二维情况下。困难源于转折点附近层区域的网格宽度，导致收敛性估计次优。现有的分析技术无法很好地处理这些困难。为填补这一空白，本文首次针对解的光滑部分精心设计了一种新型插值，从而在有限元方法的能量范数下获得了几乎达到 2 阶的最优超接近性结果。我们的理论结果关于奇异摄动参数 ε 一致，并得到了数值实验的支持。

关键词：奇异摄动，对流–扩散，Bakhvalov型网格，有限元方法，超接近性。

2000年数学主题分类：65N12,
65N30

⋆本研究部分受国家自然科学基金委员会（11771257）和山东省自然科学基金（ZR2021MA004）资助。*电子邮箱：jinzhangalex@sdnu.edu.cn[1]电子邮箱：chunxiaozhangang@outlook.com

1. 引言

考虑如下奇异摄动对流-扩散方程:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u - bu_x + cu &= f \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $0 < \varepsilon \ll 1$ 表示摄动参数， b、 c和 f 是具有充分光滑性的二元函数。还满足以下条件:

$$b \geqslant \beta > 0, \quad c + \frac{1}{2}b_x \geqslant \gamma > 0 \quad \text{on } \overline{\Omega},$$

其中， β、 γ 为常数。根据上述条件，对于每个 $f \in L^2(\Omega)$，问题（1）在 $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ 中存在唯一解（见 [16]）。此外，该解在 $y = 0$、 $y = 1$ 处各有一个宽度为$\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon})$ 的抛物层，并在$x = 0$ 处有一个宽度为 $\mathcal{O}(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon})$的指数层。具有如（1）所示特征层的问题至关重要。它们可以作为处理实际问题的数学模型，例如无滑移边界条件下物体绕流问题的模型。众所周知，边界层的存在会使标准数值方法变得不稳定。为处理边界层，人们提出了大量方法。其中，将有限元方法应用于层适应网格是一个重要课题 [17, 18, 9, 10, 4]。

对于有限元方法（FEM）而言，超接近性是一个重要的收敛性质。此处的超接近性是指，在某个范数下， $\Pi u - u^N$ 的收敛性质高于 $u - u^N$ 的收敛性质，其中 u 是精确解， Πu 是 u的某种插值，而 u^N 是有限元解。超接近性质可用于各种估计，例如 L^2 估计 [19]和 L^∞ 估计 [13], ，以评估数值解的精度。

迄今为止，已有大量研究关注层适应网格之一——Shishkin型网格上的有限元法超接近性 [3, 22, 12, 8]。Bakhvalov型网格是另一种广泛使用的层适应网格 [11]。与Shishkin型

网格相比，Bakhvalov型网格在某些情况下数值表现更佳，且其过渡点不受网格参数影响 N。然而，这类网格上的超逼近分析进展甚微。主要困难源于层区域中最后一个网格单元的宽度，导致在 Bakhvalov型网格上使用标准拉格朗日插值时只能得到次优估计（更多信息请参阅 [15, 问题 4.1] 和 [26] ）。为优化 Bakhvalov型网格上的收敛阶，Zhang 和 Liu 在 [20] 中针对解的指数层提出了一种特殊插值方法，为收敛性分析开辟了新的方向。随后，他们在 [21] 中又为解的光滑部分构造了另一种特殊插值方法，以提高其收敛精度。结合这两种插值方法，在一维情形下可直接获得最优二阶超接近性。

然而，正如我们所了解到的，几乎所有关于 Bakhvalov型网格的超逼近分析都在一维 [21, 25]情形下进行。迄今为止，还没有文章对二维 Bakhvalov型网格进行超逼近分析。我们发现，在二维情形下，要为解的光滑部分获得尖锐估计面临诸多挑战。现有的分析技术无法妥善处理这些困难。具体而言， [21] 中针对光滑部分提出的插值无法推广到二维情形，这表明，构造一种既连续又能优化光滑部分估计的插值是一项极具挑战性的任务。

为弥补这一空白，我们首次根据光滑部分的特性以及二维 Bakhvalov型网格的结构，构造了一种新颖的插值。通过消除对某些棘手项的估计，这种新插值能够提高光滑部分的超接近性精度，为今后在二维 Bakhvalov型网格上的超逼近分析提供了有力工具。此外，我们将 [20] 中的另一种特殊插值推广到二维情形，用于解的指数层。需要注意的是，为确保该插值

在二维情形下满足齐次狄利克雷边界条件，需要进行一些边界修正。由此可得本文的主要结论：对于问题 (1)，在二维 Bakhvalov型网格上，能量范数下超接近性的收敛阶几乎可达 2。我们的结果是最优的，并且关于奇异摄动参数 ε一致。

接下来，我们将介绍本文的结构。第2节介绍关于解 u的一些信息，构造二维Bakhvalov型网格，并给出相应的双线性有限元法。第3节为超接近性论证构造一种新颖的插值方法。此外，还推导了一些初步结论。第4节将详细证明 Bakhvalov型网格上的超接近性质。最后，第5节给出一些数值结果，以支持我们的理论结论。

本文将使用标准 Sobolev空间 $W^{m,\,p}(D)$ ，其中m为非负整数，定义域为 $D \subset \Omega$，且 $H^m(D) = W^{m,\,2}(D)$。在 $H^m(D)$上，$|\cdot|_{m,\,D}$为半范数，$\|\cdot\|_{m,\,D}$ 为范数。此外，$L^p(D)$ 为 Lebesgue空间，$\|\cdot\|_{L^p(D)}$表示该空间中的范数。当 $p = 2$时，$\|\cdot\|_{L^2(D)}$记作 $\|\cdot\|_D$。若 $D = \Omega$，则从这些记号中省略D 。此外，本文中的所有常数，包括一般常数 C 和固定常数 C_i，均不受 ε 和网格参数N的影响。

2. 正则性结果、Bakhvalov型网格与有限元法

2.1. 正则性结果

Assu假设 1. 我们可以将方程 (1) 的解分解为以下几个部分 *:*

$$u = S + E_1 + E_2 + E_{12}, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

其中，S 是光滑部分，E_1 是 $x = 0$处的指数层，E_2 是 $y = 0$ 和 $y = 1$处的抛物层，E_{12} 是角层。

¯此外，对于任意 $(x,\ y) \in \Omega$，以下不等式成立：

$$\left|\frac{\partial^{m+n}S}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)\right| \leqslant C, \tag{3a}$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n}E_1}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)\right| \leqslant C\varepsilon^{-m}e^{\frac{-\beta x}{\varepsilon}}, \tag{3b}$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n}E_2}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)\right| \leqslant C\varepsilon^{-\frac{n}{2}}(e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}+e^{-\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}}), \tag{3c}$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n}E_{12}}{\partial x^m \partial y^n}(x,y)\right| \leqslant C\varepsilon^{-(m+\frac{n}{2})}e^{\frac{-\beta x}{\varepsilon}}(e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}+e^{-\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}}), \tag{3d}$$

其中 m、 n 为非负整数，且 $0 \leqslant m+n \leqslant 3$。

关于假设1的更多细节见 [6] 和 [7]。

2.2. Bakhvalov型网格

人们提出了不同的Bakhvalov型网格，作为Bakhvalov网格的近似（见 [11]）。本文将分析[14]中提出的一种二维Bakhvalov型网格。

设 $N \geqslant 4$为正偶整数， x_i（$0 \leqslant i \leqslant N$）和 y_j（$0 \leqslant j \leqslant N$）为满足下列条件的网格节点

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1, \quad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = 1.$$

于是，Bakhvalov型网格定义为

$$x_i = \phi(\frac{i}{N}) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma\varepsilon}{\beta}\ln(1-2(1-\varepsilon)\dfrac{i}{N}) & i = 0,1,...,\dfrac{N}{2}, \\ 1-(1-x_{\frac{N}{2}})\dfrac{2(N-i)}{N} & i = \dfrac{N}{2}+1,...,N, \end{cases} \tag{4a}$$

$$y_j = \varphi(\frac{j}{N}) = \begin{cases} -\sigma\sqrt{\varepsilon}\ln(1-4(1-\varepsilon)\dfrac{j}{N}) & j = 0,1,...,\dfrac{N}{4}, \\ d_1(\dfrac{j}{N}-\dfrac{1}{4})+d_2(\dfrac{j}{N}-\dfrac{3}{4}) & j = \dfrac{N}{4}+1,...,\dfrac{3N}{4}-1, \\ 1+\sigma\sqrt{\varepsilon}\ln(1-4(1-\varepsilon)(1-\dfrac{j}{N})), & j = \dfrac{3N}{4},...,N, \end{cases} \tag{4b}$$

其中， d_1、 d_2 用于确保函数 ψ 在过渡点$1\ 4$ 和$3\ 4$处的连续性。

– –

Ω通过连接网格节点并沿平行于 x轴和 y轴的方向作线，被划分为矩形网格。这些网格记为$K_{i,\ j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$，符号 K 表示一个一般的矩形网格。于是得到一个张量积矩形网格 $\mathcal{T}_N$ ，其网格点为 (x_i, y_j)。见图1

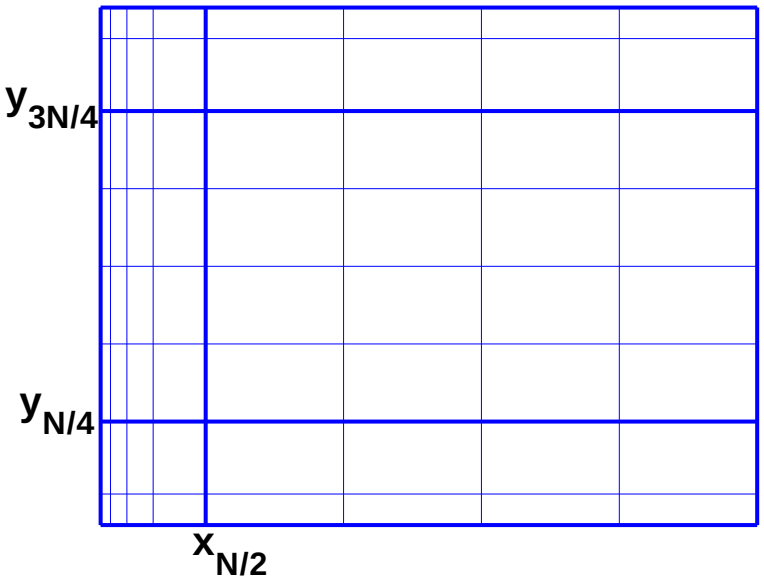


图1：矩形划分 $\mathcal{T}_N$

假设2. 假设 $\sigma = \frac{5}{2}$ 和 $\varepsilon \leqslant N^{-1}$ 在我们的分析中。此外，我们假设

$$\frac{\sigma\varepsilon}{\beta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2} \quad and \quad \sigma\sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{4}.$$

为方便起见，令 $h_{x,i} = x_{i+1} - x_i$, $h_{y,j} = y_{j+1} - y_j$，并且当 $j = \frac{N}{4}, \ldots, \frac{3N}{4} - 1$ 时，设 $h_{y,j} =: h$；当 $i = \frac{N}{2}, \ldots, N-1$ 时，设 $h_{x,i} =: H$。

Lemma 1. 若假设2成立，则对于 Bakhvalov型网格 (4)，我们有 e

$$
\begin{aligned}
&N^{-1} \leqslant H \leqslant 2N^{-1},\\
&\frac{1}{2}\sigma\varepsilon \leqslant h_{x,\frac{N}{2}-1} \leqslant 2\sigma N^{-1},\\
&h_{x,0} \leqslant h_{x,1} \leqslant \cdots \leqslant h_{x,\frac{N}{2}-2} \leqslant \sigma\varepsilon,\\
&C_1\varepsilon N^{-1} \leqslant h_{x,0} \leqslant C_2\varepsilon N^{-1},\\
&C_3\sigma\varepsilon \ln N \leqslant x_{\frac{N}{2}-1} \leqslant C_4\sigma\varepsilon \ln N, \quad x_{\frac{N}{2}} \geqslant C\sigma\varepsilon|\ln\varepsilon|,\\
&h_{x,i}^{\mu} e^{\frac{-\beta x_i}{\varepsilon}} \leqslant C\varepsilon^{\mu}N^{-\mu}, \quad 0 \leqslant i \leqslant \frac{N}{2}-2 \quad and \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \sigma,\\
&|E_1(x_{\frac{N}{2}}, y)| \leqslant C\varepsilon^{\sigma}, \quad |E_1(x_{\frac{N}{2}-1}, y)| \leqslant CN^{-\sigma}.
\end{aligned}
$$

关于 $h_{y,\ j}$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$，除将 ε 替换为 $\sqrt{\varepsilon}$ 外，其他性质均可类似地推导。

此外，为了后续分析，我们还需要以下性质。

引理 2. 若假设2成立，则可得出以下结论：

$$
\begin{aligned}
&h_{x,\frac{N}{2}-1} \leqslant C\varepsilon^{1-\alpha}N^{-\alpha},\\
&h_{y,\frac{N}{4}-1} = h_{y,\frac{3N}{4}} \leqslant C(\sqrt{\varepsilon})^{1-\alpha}N^{-\alpha},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中 $\alpha \in (0,1]$。

证明. 根据 (4)，可推导出

$$
h_{x,\frac{N}{2}-1} = \frac{\sigma\varepsilon}{\beta}\ln\frac{1-2(1-\varepsilon)(\frac{1}{2}-N^{-1})}{1-2(1-\varepsilon)\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\sigma\varepsilon}{\beta}\frac{1}{\alpha}(\frac{\varepsilon+2(1-\varepsilon)N^{-1}}{\varepsilon})^{\alpha} \leqslant C\varepsilon^{1-\alpha}N^{-\alpha}, \tag{6}
$$

这里我们采用标准论证 $\ln\ x \leqslant \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \quad \alpha \in (0,1]$。$h_{y,\ \frac{N}{4}-1}$ 和 $h_{y,\ \frac{3N}{4}}$ 可用类似的方法证明。

□

然后，我们将 Ω 划分为四个子区域：

$$
\begin{aligned}
&\Omega_s := \left[x_{\frac{N}{2}-1}, 1\right] \times \left[y_{\frac{N}{4}-1}, y_{\frac{3N}{4}+1}\right], \quad \Omega_y := \left[x_{\frac{N}{2}-1}, 1\right] \times \left(\left[0, y_{\frac{N}{4}-1}\right] \cup \left[y_{\frac{3N}{4}+1}, 1\right]\right),\\
&\Omega_x := \left[0, x_{\frac{N}{2}-1}\right] \times \left[y_{\frac{N}{4}-1}, y_{\frac{3N}{4}+1}\right], \quad \Omega_{xy} := \left[0, x_{\frac{N}{2}-1}\right] \times \left(\left[0, y_{\frac{N}{4}-1}\right] \cup \left[y_{\frac{3N}{4}+1}, 1\right]\right).
\end{aligned}
$$

此外，为方便起见，我们将 Ω_0 定义为 $\left[x_{\frac{N}{2}-1}, x_{\frac{N}{2}}\right] \times [0, 1]$。

2.3. 有限元法

设 $V^N \subset H_0^1(\Omega)$ 是方程 (1) 的分片双线性有限元空间，其定义为

$$V^N = \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \ v|_{\partial\Omega=0} \text{ and } v|_K \in \mathcal{Q}_1(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_N \right\},$$

其中

$$\mathcal{Q}_1(K) = \text{span}\left\{ x^i y^j : 0 \leqslant i, j \leqslant 1 \right\}.$$

于是，相应的有限元法为：求满足 $a(u^N, v) = (f, v) \quad \forall v \in V^N$ 的 $u^N \in V^N$，其中

$$a(u^N, v) := \varepsilon(\nabla u^N, \nabla v) + (-b u_x^N, v) + (c u^N, v) \quad \forall v \in V^N. \tag{7}$$

根据（1）中的条件，有如下强制性

$$a(v, v) \geqslant C\|v\|_\varepsilon^2, \qquad \forall v \in V^N, \tag{8}$$

其中 C 与 ε 和 N 无关，能量范数定义为

$$\|v\|_\varepsilon^2 := \varepsilon \, |v|_1^2 + \|v\|^2.$$

由此可知， u^N 由（7）良好定义（参见 [2] 及其中的参考文献）。

本文将分析能量范数下的超接近性质。令$v = u^N - \Pi u$，其中 u^N 是有限元解，Πu 是 u的插值。由（8）和伽辽金正交性 $a(u^N - u, \ v) = 0, \quad \forall v \in V^N$ 可得

$$C\|v\|_\varepsilon^2 \leqslant a(v, v) = a(u - \Pi u, v) = \varepsilon(\nabla(u - \Pi u), \nabla v) + (-b(u - \Pi u)_x, v) + (c(u - \Pi u), v). \tag{9}$$

3. 插值误差与新插值

本节将给出一些标准的插值误差，并为解的光滑部分构造一种新插值。此外，还将给出一些预备结论。

3.1. 插值误差

有关以下引理的更多信息，请参阅 [5] 。

引理 3. 设 $K \in \mathcal{T}_N$，并假设 K 是 $K_{i,\ j}$。假设 $w \in W^{2,\ p}(\Omega)$，并记 w^I 为 w 在 K 顶点处的标准拉格朗日插值。则，

$$\|w - w^I\|_K \leqslant C \sum_{s+t=2} h_{x,i}^s h_{y,j}^t \|\frac{\partial^2 w}{\partial x^s \partial y^t}\|_K,$$

$$\|(w - w^I)_x\|_K \leqslant C \sum_{s+t=1} h_{x,i}^s h_{y,j}^t \|\frac{\partial^2 w}{\partial x^{s+1} \partial y^t}\|_K,$$

$$\|(w - w^I)_y\|_K \leqslant C \sum_{s+t=1} h_{x,i}^s h_{y,j}^t \|\frac{\partial^2 w}{\partial x^s \partial y^{t+1}}\|_K,$$

其中 s 和 t 为非负整数。

3.2. 新插值

在本小节中，我们为光滑部分 S 构造一种新插值 ΠS。此外，针对指数层 E_1，我们基于 [20] 构造另一种插值 πE_1。

设 $\theta_{i,\ j}(x、\ y)$ 为有限元空间 V^N 中与节点 $(x_i、\ y_j)$ 对应的标准节点基函数。对于任意 $v \in C^0(\Omega)$，其拉格朗日插值 $v^I \in V^N$ 定义为

$$v^I(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} v(x_i, y_j) \theta_{i,j}(x, y).$$

在后续分析中，为简洁起见，我们将从 $\int_{[]\times[]}$ 中省略 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，并令 $\theta_{i,j}(x, y) = \theta_{i,j}$。

对于方程 (1) 的解 u，回顾式 (2)，然后定义从 Πu 到 u 的插值为

$$\Pi u = \Pi S + \pi E_1 + E_2^I + E_{12}^I. \tag{10}$$

定义

$$\Pi S = \begin{cases} \mathcal{P} S & (x, y) \in [x_{\frac{N}{2}-1}, x_{\frac{N}{2}}] \times [y_{\frac{N}{4}}, y_{\frac{3N}{4}}], \\ \mathcal{L} S & (x, y) \in [x_{\frac{N}{2}-2}, x_{\frac{N}{2}-1}] \times [y_{\frac{N}{4}}, y_{\frac{3N}{4}}], \\ S^I & \text{other}, \end{cases} \tag{11}$$

^{N} ^{3N}其中 $\mathcal{P}S = \sum_{i=\frac{N}{2}-1}^{\frac{2}{2}} \sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{4}{4}} \mathcal{P}S(x_i$、
$y_j)\theta_{i,j}$满足

$$\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j-1}} (S-\mathcal{P}S)_x \theta_{\frac{N}{2},j} + \int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}} (S-\mathcal{P}S)_x \theta_{\frac{N}{2},j}$$
$$= -\frac{H^2}{12}\left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\theta_{\frac{N}{2},j}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y + \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\theta_{\frac{N}{2},j}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y\right] \quad j=\frac{N}{4}+1,\ldots,\frac{3N}{4}-1, \tag{12}$$

and

$$\mathcal{P}S(x_{\frac{N}{2}-1},y_j) = S(x_{\frac{N}{2}-1},y_j) \qquad j=\frac{N}{4},\frac{3N}{4} \tag{13}$$
$$\mathcal{P}S(x_{\frac{N}{2}},y_j) = S(x_{\frac{N}{2}},y_j) \qquad j=\frac{N}{4},\frac{N}{4}+1,\ldots,\frac{3N}{4}, \tag{14}$$

$\mathcal{L}S$ 满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}S(x_{\frac{N}{2}-1},y_j) = PS(x_{\frac{N}{2}-1},y_j) & j=\frac{N}{4},\ldots,\frac{3N}{4}, \\ \mathcal{L}S(x_{\frac{N}{2}-2},y_j) = S(x_{\frac{N}{2}-2},y_j) & j=\frac{N}{4},\ldots,\frac{3N}{4}. \end{cases} \tag{15}$$

参见 [20], ，我们将 πE_1 定义为

$$\pi E_1 = E_1^I - \mathcal{Q}E_1 + \mathcal{B}E_1, \tag{16}$$

其中

$$\mathcal{Q}E_1 = \sum_{j=0}^{N} E_1(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}, \tag{17}$$

$$\mathcal{B}E_1 = \sum_{j=0,N} E_1(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}, \tag{18}$$

它们是边界修正，以确保二维插值满足齐次狄利克雷边界条件。此外， E_2^I 和 E_{12}^I 分别是 E_2 和 E_{12}的标准拉格朗日插值。

注 1. 对光滑部分的超逼近分析而言，利用积分恒等式 (55)，扩散项 $\varepsilon(\nabla(S-S^I),\nabla v)$ 在 Ω 上几乎可以达到 2 阶；采用 *[23],* 中使用的方法，对流项 $(-b(S-S^I)_x, v)$ 在大多数区域几乎可以达到 2 阶，但在区域$[x_{\frac{N}{2}-1}, x_{\frac{N}{2}+1}] \times [y_{\frac{N}{4}}, y_{\frac{3N}{4}}]$上，有些项无法通过以往研究中的标准论证得到更优估计

。因此，我们考虑设计一种新插值 ΠS ，以便对较难处理的项 (85) 和 (92) 给出更精确的估计。在一维情形 *[21],* 中，难以处理的项可以通过专门设计的插值相互抵消。但这一思路无法推广到二维，这表明，在二维中构造一种既具有连续性、又能够优化较难处理项估计的插值，是一项极具挑战性的任务。经过深入考量，设计了新插值 (11)：条件 (12) 用于对 (85) 和 (92) 给出更精确的估计；条件 (13)、(14) 和 (15) 则用于确保连续性。此外，下面将证明 ΠS 的存在性和唯一性。

注 2. 在子域 $[x_{\frac{N}{2}-1}, x_{\frac{N}{2}}] \times [y_{\frac{N}{4}}, y_{\frac{3N}{4}}]$ 上，令 $S - \mathcal{P}S = S - S^I + S^I - \mathcal{P}S$。那么，对于 $j = \frac{N}{4} + 1, \ldots, \frac{3N}{4} - 1$，我们将 (12) 重写为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left\{\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j-1}}\left[(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1},y_{j-1})\theta_{\frac{N}{2}-1,j-1}+(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\right]_x\theta_{\frac{N}{2},j}\right.\\
&\left.+\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}}\left[(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}+(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1},y_{j+1})\theta_{\frac{N}{2}-1,j+1}\right]_x\theta_{\frac{N}{2},j}\right\}\\
&=-\tau_j,
\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\tau_j = \ell_{1,j} + \ell_{2,j} + \ell_{3,j},$$

$$\ell_{1,j} =: \frac{1}{h}\left\{\frac{H^2}{12}\left[\int_{y_{j-1}}^{y_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\theta_{\frac{N}{2},j}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y+\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\theta_{\frac{N}{2},j}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y\right]\right\},$$

$$\ell_{2,j} =: \frac{1}{h}\left[\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j-1}}(S-S^I)_x\theta_{\frac{N}{2},j}+\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}}(S-S^I)_x\theta_{\frac{N}{2},j}\right],$$

$$\ell_{3,j} =: \frac{1}{h}\left\{\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j-1}} \left[(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}},y_{j-1})\theta_{\frac{N}{2},j-1}+(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}},y_j)\theta_{\frac{N}{2},j}\right]_x \theta_{\frac{N}{2},j}\right.$$
$$\left.+\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}} \left[(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}},y_j)\theta_{\frac{N}{2},j}+(S^I-\mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}},y_{j+1})\theta_{\frac{N}{2},j+1}\right]_x \theta_{\frac{N}{2},j}\right\}.$$

回顾式（14），可得

$$\ell_{3,j}=0.$$

我们可以得到

$$\tau_j=\ell_{1,j}+\ell_{2,j}=\mathcal{O}(N^{-2}).$$

根据标准逼近理论。

为方便起见，记 $(S^I-PS)(x_{\frac{N}{2}-1}、\ y_j)=:\ \beta_j\,(j=\frac{N}{4}+1,\ .....,\ \frac{3N}{4}-1)$。下面直接考察离散系统（19），并将其改写为如下形式

$$Db=-\tau, \tag{20}$$

其中

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & ... & 0 & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(\frac{N}{2}-1)\times(\frac{N}{2}-1)} \qquad b=\begin{pmatrix}\beta_{\frac{N}{4}+1}\\ \beta_{\frac{N}{4}+2}\\ ...\\ \beta_{\frac{3N}{4}-1}\end{pmatrix} \quad \tau=\begin{pmatrix}\tau_{\frac{N}{4}+1}\\ \tau_{\frac{N}{4}+2}\\ ...\\ \tau_{\frac{3N}{4}-1}\end{pmatrix}.$$

显然，三对角矩阵 D 的行列式不为零，因此线性方程组（20）的解存在且唯一。结合（14）和（13）可知，插值 $\mathcal{P}S$ 存在且唯一。

此外，注意到 b 的最大范数为

$$\|b\|_\infty=\max_{\frac{N}{4}+1\leqslant j\leqslant\frac{3N}{4}-1}|\beta_j|=|\beta_{j*}|,$$

根据式 (20)，我们得到

$$\begin{cases} 3|\beta_{j^*}| \leqslant |4\beta_{j^*} + \beta_{j^*+1}| = |\tau_{j^*}| = \mathcal{O}(N^{-2}) & \text{if } j^* = \dfrac{N}{4} + 1, \\ 2|\beta_{j^*}| \leqslant |\beta_{j^*-1} + 4\beta_{j^*} + \beta_{j^*+1}| = |\tau_{j^*}| = \mathcal{O}(N^{-2}) & \text{if } \dfrac{N}{4} + 2 \leqslant j^* \leqslant \dfrac{3N}{4} - 2, \\ 3|\beta_{j^*}| \leqslant |\beta_{j^*-1} + 4\beta_{j^*}| = |\tau_{j^*}| = \mathcal{O}(N^{-2}) & \text{if } j^* = \dfrac{3N}{4} - 1. \end{cases}$$

因此，我们可以得出结论：

$$\|b\|_\infty \leqslant CN^{-2} \quad i.e. \quad |(S^I - \mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1}, y_j)| \leqslant CN^{-2}, \quad j = \frac{N}{4} + 1, \ldots, \frac{3N}{4} - 1. \tag{21}$$

为了后续分析，我们需要以下插值界。

引理 4. 设 $K \in \mathcal{T}_N$，假设 1 和 2 成立。 ΠS 表示S的新插值。那么存在一个常数 C，使得以下不等式成立：

$$\|S - \Pi S\|_{L^\infty(K)} \leqslant CN^{-2}.$$

证明. 由三角不等式可得

$$\|S - \Pi S\|_{L^\infty(K)} \leqslant \|S - S^I\|_{L^\infty(K)} + \|S^I - \Pi S\|_{L^\infty(K)}, \tag{22}$$

其中

$$\|S - S^I\|_{L^\infty(K)} \leqslant CN^{-2}, \tag{23}$$

可由引理 3 直接得到。再利用 (21)，我们可以推导出

$$\|S^I - \Pi S\|_{L^\infty(K)} \leqslant CN^{-2}. \tag{24}$$

至此，我们完成了证明。 □

下面将频繁使用拉格朗日插值的以下稳定性： $\forall K \in \mathcal{T}_N$ 且 $v \in C^1(K)$时，拉格朗日插值 v^I 满足

$$|v^I|_{1,L^\infty(K)} \leqslant C|v|_{1,L^\infty(K)}. \tag{25}$$

引理5. 设假设 1 和 2 成立。 E_i^I 分别表示 E_i、 $i = 1$、2、12 的标准拉格朗日插值。则存在一个常数 C ，使得以下不等式成立：

$$\|E_1 - E_1^I\| + \|E_2 - E_2^I\| + \|E_{12} - E_{12}^I\| \leqslant CN^{-\sigma}, \tag{26}$$

$$\|E_1 - E_1^I\|_\varepsilon + \|E_2 - E_2^I\|_\varepsilon + \|E_{12} - E_{12}^I\|_\varepsilon \leqslant CN^{-1}, \tag{27}$$

$$\|\mathcal{Q}E_1\|_\varepsilon + \|\mathcal{B}E_1\|_\varepsilon \leqslant C(1 + \varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{2}})N^{-\sigma}. \tag{28}$$

证明。(a) 考虑 $\|E_1 - E_1^I\|_\varepsilon$。 我们将 $\|E_1 - E_1^I\|$ 分解为

$$\|E_1 - E_1^I\|^2 = \|E_1 - E_1^I\|^2_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]} + \|E_1 - E_1^I\|^2_{\Omega_0} + \|E_1 - E_1^I\|^2_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]}.$$

利用引理 3、假设1和引理1可得

$$\begin{aligned}
\|E_1 - E_1^I\|^2_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]} &\leqslant C \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{s+t=2} h_{x,i}^{2s} h_{y,j}^{2t} \|\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^s \partial y^t}\|^2_{K_{i,j}} \\
&\leqslant C \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{s+t=2} h_{x,i}^{2s} h_{y,j}^{2t} (\varepsilon^{-s} e^{-\frac{\beta x_i}{\varepsilon}})^2 h_{x,i} h_{y,j} \\
&\leqslant C\varepsilon N^{-4}.
\end{aligned} \tag{29}$$

由三角不等式、假设1、引理1和 (25) 得

$$\|E_1 - E_1^I\|^2_{\Omega_0} \leqslant \|E_1\|^2_{\Omega_0} + \|E_1^I\|^2_{\Omega_0},$$

其中

$$\begin{aligned}
\|E_1\|^2_{\Omega_0} &\leqslant C \int_{\Omega_0} (e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}})^2 \leqslant C\varepsilon N^{-2\sigma}, \\
\|E_1^I\|^2_{\Omega_0} &\leqslant C \int_{\Omega_0} (N^{-\sigma})^2 \leqslant CN^{-2\sigma-1}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\|E_1 - E_1^I\|^2_{\Omega_0} \leqslant CN^{-2\sigma-1}. \tag{30}$$

按照对 $\|E_1 - E_1^I\|_{\Omega_0}^2$ 的相同论证，我们有

$$\|E_1 - E_1^I\|_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]}^2 \leqslant C\varepsilon^{2\sigma}. \tag{31}$$

$\|(E_1 - E_1^I)_x\|$ 可分解为

$$\|(E_1 - E_1^I)_x\|^2 = \|(E_1 - E_1^I)_x\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}^2 + \|(E_1 - E_1^I)_x\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2.$$

与式（29）类似，可得

$$\|(E_1 - E_1^I)_x\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}^2 \leqslant C\varepsilon^{-1}N^{-2}. \tag{32}$$

由三角不等式、逆不等式、假设1、引理1和式（25）可得

$$\|(E_1 - E_1^I)_x\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2 \leqslant C(\|(E_1)_x\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2 + \|(E_1^I)_x\|_{\Omega_0}^2 + \|(E_1^I)_x\|_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]}^2),$$

其中

$$\begin{aligned}
&\|(E_1)_x\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2 \leqslant C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma},\\
&\|(E_1^I)_x\|_{\Omega_0}^2 \leqslant Ch_{x,\frac{N}{2}-1}^{-2}N^{-2\sigma}h_{x,\frac{N}{2}-1} \leqslant C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma},\\
&\|(E_1^I)_x\|_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]}^2 \leqslant C\varepsilon^{2\sigma-2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\|(E_1 - E_1^I)_x\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2 \leqslant C\varepsilon^{-1}N^{-2\sigma}. \tag{33}$$

关于 $\|(E_1 - E_1^I)_y\|$ 的论证与 $\|(E_1 - E_1^I)_x\|$类似，因此

$$\|(E_1 - E_1^I)_y\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}^2 \leqslant C\varepsilon N^{-2}. \tag{34}$$

$$\|(E_1 - E_1^I)_y\|_{\Omega_s\cup\Omega_y}^2 \leqslant CN^{-2\sigma}. \tag{35}$$

(b) 考虑 $\|E_2 - E_2^I\|_\varepsilon$和 $\|E_{12} - E_{12}^I\|_\varepsilon$。它们的证明与 $\|E_1 - E_1^I\|_\varepsilon$ 类似，因此省略。这里只给出后续分析中将用到的主要结论，

供后续分析使用。

$$\|E_2 - E_2^I\|^2_{\Omega_y \cup \Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}} N^{-4}, \tag{36}$$

$$\|E_2 - E_2^I\|^2_{\Omega_x \cup \Omega_s} \leqslant CN^{-2\sigma}, \tag{37}$$

$$\|(E_2 - E_2^I)_x\|^2_{\Omega_y \cup \Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}} N^{-2}, \tag{38}$$

$$\|(E_2 - E_2^I)_x\|^2_{\Omega_x \cup \Omega_s} \leqslant CN^{-2\sigma}, \tag{39}$$

$$\|(E_2 - E_2^I)_y\|^2_{\Omega_y \cup \Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} N^{-2}, \tag{40}$$

$$\|(E_2 - E_2^I)_y\|^2_{\Omega_x \cup \Omega_s} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} N^{-2\sigma}, \tag{41}$$

and

$$\|E_{12} - E_{12}^I\|^2_{\Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{2}} N^{-4}, \tag{42}$$

$$\|E_{12} - E_{12}^I\|^2_{\Omega n \Omega_{xy}} \leqslant CN^{-2\sigma}, \tag{43}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_x\|^2_{\Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} N^{-2}, \tag{44}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_x\|^2_{\Omega_x \cup \Omega_y} \leqslant C\varepsilon^{-1} N^{-2\sigma}, \tag{45}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_x\|^2_{\Omega_s} \leqslant C\varepsilon^{-1} N^{-4\sigma}, \tag{46}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_y\|^2_{\Omega_{xy}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}} N^{-2}, \tag{47}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_y\|^2_{\Omega_x \cup \Omega_y} \leqslant CN^{-2\sigma}, \tag{48}$$

$$\|(E_{12} - E_{12}^I)_y\|^2_{\Omega_s} \leqslant C\varepsilon^{-1} N^{-4\sigma}. \tag{49}$$

上述不等式给出了（26）和（27）的估计。

（c）考虑 $\|\mathcal{Q}E_1\|_\varepsilon$ 和 $\|\mathcal{B}E_1\|_\varepsilon$。（17）、（18）、引理1和逆不等式可得

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}E_1\|^2_\varepsilon &\leqslant CN^{-2\sigma} \sum_{j=0}^{N} \|\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\|^2_\varepsilon \\
&\leqslant CN^{-2\sigma} \sum_{j=0}^{N} (\varepsilon h^{-2}_{x,\frac{N}{2}-1} h_{x,\frac{N}{2}-1} h_{y,j} + \varepsilon h^{-2}_{y,j} h_{x,\frac{N}{2}-1} h_{y,j} + h_{x,\frac{N}{2}-1} h_{y,j}) \\
&\leqslant CN^{-2\sigma},
\end{aligned} \tag{50}$$

类似地,

$$\|\mathcal{B}E_1\|^2_\varepsilon \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}} N^{-2\sigma}. \tag{51}$$

至此证明完毕。 □

4. Bakhvalov型网格上的超接近性质

In t本节将详细分析超接近性 $\|u^N - \Pi u\|_\varepsilon$ 。(9) 给出

$$C\|v\|_\varepsilon^2 \leqslant a(v,v) = a(u-\Pi u, v) = \varepsilon(\nabla(u-\Pi u), \nabla v) + (-b(u-\Pi u)_x, v) + (c(u-\Pi u), v).$$

引理6. 设 u 为满足假设 1 和 2 的(1)的解， Πu 为 u的新插值。对于任意的 $v \in V^N$, 有

$$|\varepsilon(\nabla(u-\Pi u), \nabla v) + (c(u-\Pi u), v)| \leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon.$$

证明。

$$\varepsilon(\nabla(u-\Pi u), \nabla v) = \varepsilon(\nabla(E_1+E_2+E_{12}-\pi E_1 - E_2^I - E_{12}^I), \nabla v) + \varepsilon(\nabla(S-\Pi S), \nabla v).$$

（a）考虑 $\varepsilon(\nabla(E_1+E_2+E_{12}-\pi E_1 - E_2^I - E_{12}^I)、\ \nabla v)$。以下估计是直接的:

$$|\varepsilon \int_{\Omega_y \cup \Omega_s} (E_1 - \pi E_1)_x v_x + \varepsilon \int_\Omega (E_1 - \pi E_1)_y v_y| \leqslant CN^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon, \tag{52}$$

$$|\varepsilon \int_\Omega (E_2 - E_2^I)_x v_x + \varepsilon \int_{\Omega_x \cup \Omega_s} (E_2 - E_2^I)_y v_y| \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}} N^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon, \tag{53}$$

$$|\varepsilon \int_{\Omega n \Omega_{xy}} (E_{12} - E_{12}^I)_x v_x + \varepsilon \int_{\Omega n \Omega_{xy}} (E_{12} - E_{12}^I)_y v_y| \leqslant CN^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon, \tag{54}$$

其中我们使用了引理5中的一些结论。

为分析其余项，我们引入两个积分恒等式，这些恒等式已在 [24] 中详细证明 [23, 定理 4.3]:

$$\int_K \frac{\partial}{\partial x}(w - w^I)\frac{\partial v}{\partial x} = \int_K \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} F(y)(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3}(y - y_K)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}), \tag{55a}$$

$$\int_K \frac{\partial}{\partial y}(w - w^I)\frac{\partial v}{\partial y} = \int_K \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} E(x)(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(x - x_K)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}), \tag{55b}$$

其中

$$F(y)=\frac{(y-y_K)^2-\hbar_K^2}{2},$$
$$E(x)=\frac{(x-x_K)^2-h_K^2}{2},$$

$K\in\mathcal{T}_N$, h_K 表示 K 在 x 方向上的半长， $\hbar_K$ 表示 K在 y 方向上的半宽， (x_K,y_K)表示 K的中心， K可表示为$(x_K-h_K,x_K+h_K)\times(y_K-\hbar_K,y_K+\hbar_K)$。

对于项 $\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-\pi E_1)_x v_x$，我们首先将其拆分为

$$\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-\pi E_1)_x v_x=\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-E_1^I)_x v_x+\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1^I-\pi E_1)_x v_x.$$

利用 (55a) 推导得

$$|\varepsilon\int_{K\subset\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-E_1^I)_x v_x|\leqslant C\int_K e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}}|F(y)||\frac{\partial v}{\partial x}|\leqslant CN^{-2}\|e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}}\|_K\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_K,$$

su对 $K\subset\Omega_x\cup\Omega xy$ 求和并应用柯西-施瓦茨不等式，我们得到 t

$$|\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-E_1^I)_x v_x|\leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{56}$$

(16)-(18)结合逆不等式可得

$$\begin{aligned}|\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1^I-\pi E_1)_x v_x|&=|\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}\sum_{j=1}^{N-1}(E_1(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j})_x v_x|\\&\leqslant C\varepsilon N^{-\sigma}\sum_{j=1}^{N-1}\|(\theta_{\frac{N}{2}-1,j})_x\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}\|v_x\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}\\&\leqslant C\varepsilon N^{-\sigma}\sum_{j=0}^{N-1}h_{x,\frac{N}{2}-2}^{-1}h_{x,\frac{N}{2}-2}^{\frac{1}{2}}h_{y,j}^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}\\&\leqslant CN^{-\sigma+\frac{1}{2}}\|v\|_\varepsilon.\end{aligned} \tag{57}$$

与 $\varepsilon\int_{\Omega_x\cup\Omega_{xy}}(E_1-E_1^I)_x v_x$ 类似，只是使用了 (55b)，我们可以得到

$$|\varepsilon\int_{\Omega_y\cup\Omega_{xy}}(E_2-E_2^I)_y v_y|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{58}$$

结合引理1和 (55a)，可得

$$\begin{aligned}|\varepsilon\int_{K\subset\Omega_{xy}}(E_{12}-E_{12}^I)_x v_x| &\leqslant C\varepsilon^{-1}\int_K\left[e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}}(e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}+e^{-\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}})\right]|F(y)||\frac{\partial v}{\partial x}|\\ &\leqslant C\varepsilon^{-1}\left[h_{y,j}^2\max(e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}+e^{-\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}})\right]\|e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}}\|_K\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_K\\ &\leqslant C\varepsilon^{-1}(\sqrt{\varepsilon}N^{-1})^2\|e^{-\frac{\beta x}{\varepsilon}}\|_K\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_K,\end{aligned}$$

然后求和:

$$|\varepsilon\int_{\Omega_{xy}}(E_{12}^I-E_{12})_x v_x|\leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{59}$$

与 $\varepsilon\int_{K\subset\Omega_{xy}}(E_{12}-E_{12}^I)_x v_x$ 类似，只需将 (55a) 代入 (55b)，即可得到

$$|\varepsilon\int_{\Omega_{xy}}(E_{12}^I-E_{12})_y v_y|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{60}$$

汇总 (52)–(54) 和 (56)–(60)，可得

$$|\varepsilon(\nabla(E_1+E_2+E_{12}-\pi E_1-E_2^I-E_{12}^I),\nabla v)|\leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{61}$$

(b) 考虑 $\varepsilon(\nabla(S-\Pi S),\nabla v)$。它可拆分为

$$\begin{aligned}&\varepsilon(\nabla(S-\Pi S),\nabla v)\\ =&\varepsilon\int_{\Omega n([x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}])}(\nabla(S-S^I),\nabla v)+\varepsilon\int_{[x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]}(\nabla(S-\Pi S),\nabla v).\end{aligned}$$

利用两个积分恒等式 (55a) 和 (55b)，可得

$$|\varepsilon\int_K(\nabla(S-S^I),\nabla v)|\leqslant C\varepsilon N^{-3}\|\nabla v\|_K,$$

对 $K\subset\Omega n([x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}])$ 求和，并应用柯西–施瓦茨不等式，可得

$$|\varepsilon\int_{\Omega n([x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}])}(\nabla(S-S^I),\nabla v)|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{62}$$

设 $S-\Pi S=S-S^I+S^I-\Pi S$,

$$|\varepsilon\int_{[x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]}(\nabla(S-S^I),\nabla v)|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{3}{2}}\|v\|_\varepsilon. \tag{63}$$

由引理 3 可直接得出。应用 (24)、逆不等式和柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned}
&|\varepsilon \int_{[x_{\frac{N}{2}-2},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]} (\nabla(S^I-\Pi S),\nabla v)| \\
\leqslant& C\varepsilon \sum_{i=\frac{N}{2}-2}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1} h_{x,i}^{-1}\|S^I-\Pi S\|_{L^\infty(K_{i,j})}(h_{x,i}h_{y,j})^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{K_{i,j}} \\
\leqslant& CN^{-2}\|v\|_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{64}$$

将 (62)–(64) 合并，可得

$$|\varepsilon(\nabla(S-\Pi S),\nabla v)| \leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{65}$$

(c) 考虑 $(c(u-\Pi u),v)$。回顾引理 4 和引理5，可得

$$|(c(u-\Pi u),v)| \leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{66}$$

T于是，结合 (61)、(65) 和 (66)，我们证明了引理6中的结论。 □

引理7. 设假设 1 和 2 成立， πE_1 为 (16) 中定义的 E_1 的插值， E_2^I 和 E_{12}^I 分别为 E_2 和 E_{12} 的标准拉格朗日插值。对于任意 $v\in V^N$，有

$$|(-b(E_1+E_2+E_{12}-\pi E_1-E_2^I-E_{12}^I)_x,v)| \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\|v\|_\varepsilon + CN^{-2}\|v\|_\varepsilon.$$

证明. 格林公式给出

$$\begin{aligned}
&(-b(E_1+E_2+E_{12}-\pi E_1-E_2^I-E_{12}^I)_x,v) \\
=&\int_\Omega b(E_1-\pi E_1)v_x + \int_\Omega b(E_{12}-E_{12}^I)v_x + \int_\Omega b_x\left[(E_1-\pi E_1)+(E_{12}-E_{12}^I)\right]v - \int_\Omega b(E_2-E_2^I)_x v.
\end{aligned}$$

(a) 考虑 $\int_\Omega b(E_1-\pi E_1)v_x$。它可以分解为

$$\int_\Omega b(E_1-\pi E_1)v_x = \int_{\Omega n\Omega_0} b(E_1-E_1^I)v_x + \int_{\Omega n\Omega_0} b\mathcal{Q}E_1 v_x - \int_\Omega b\mathcal{B}E_1 v_x + \int_{\Omega_0} b\left[E_1-(E_1^I-\mathcal{Q}E_1)\right]v_x.$$

使用 H¨older 不等式、(29) 和 (31) 可得

$$|\int_{\Omega n\Omega_0} b(E_1 - E_1^I)v_x| \leqslant C(N^{-2} + C\varepsilon^{\sigma-\frac{1}{2}})\|v\|_\varepsilon. \tag{67}$$

由式 (17)，我们知道 $\mathcal{Q}E_1|_{\Omega n\Omega_0} = \sum_{j=0}^{N} E_1(x_{\frac{N}{2}-1}, y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,\ j}$，于是

$$\begin{aligned}
|\int_{\Omega n\Omega_0} b\mathcal{Q}E_1 v_x| &\leqslant C\|\mathcal{Q}E_1\|_{\Omega n\Omega_0}\|v_x\|_{\Omega n\Omega_0} \\
&\leqslant CN^{-\sigma}\sum_{j=0}^{N}\|\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\|_{\Omega n\Omega_0}\|v_x\|_{\Omega n\Omega_0} \\
&\leqslant CN^{-\sigma}\sum_{j=0}^{N-1}(h_{x,\frac{N}{2}-2}h_{y,j})^{\frac{1}{2}}\|v_x\|_{\Omega n\Omega_0} \\
&\leqslant CN^{-\sigma+\frac{1}{2}}\|v\|_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{68}$$

根据式 (18)，有

$$\begin{aligned}
|-\int_{\Omega} b\mathcal{B}E_1 v_x| &\leqslant CN^{-\sigma}\sum_{j=0,N}\|\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\|_\Omega\|v_x\|_\Omega \\
&\leqslant CN^{-\sigma}\sum_{j=0,N-1}(h_{x,\frac{N}{2}-1}h_{y,j})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|v\|_\varepsilon \\
&\leqslant CN^{-\sigma}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|v\|_\varepsilon \\
&\leqslant CN^{-\sigma-\frac{1}{4}}\|v\|_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{69}$$

这里我们用到了引理 2 中的 $h_{x,\ \frac{N}{2}-1} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}$。

对于 $\int_{\Omega_0} b\left[E_1 - (E_1^I - \mathcal{Q}E_1)\right]v_x$，根据式 (17) 和三角不等式，我们可以看出

$$\|E_1 - (E_1^I - \mathcal{Q}E_1)\|_{\Omega_0}^2 \leqslant \|E_1\|_{\Omega_0}^2 + \|E_1^I - \mathcal{Q}E_1\|_{\Omega_0}^2, \quad E_1^I - \mathcal{Q}E_1|_{\Omega_0} = \sum_{j=0}^{N} E_1(x_{\frac{N}{2}}, y_j)\theta_{\frac{N}{2},j},$$

其中

$$\begin{aligned}
&\|E_1\|_{\Omega_0}^2 \leqslant C\varepsilon N^{-2\sigma}, \\
&\|E_1^I - \mathcal{Q}E_1\|_{\Omega_0}^2 \leqslant C\varepsilon^{2\sigma}\sum_{j=0}^{N}\|\theta_{\frac{N}{2},j}\|_{\Omega_0}^2 \leqslant C\varepsilon^{2\sigma}\sum_{j=0}^{N-1}(h_{x,\frac{N}{2}-1}h_{y,j}) \leqslant C\varepsilon^{2\sigma}N^{-1}.
\end{aligned}$$

因此,

$$|\int_{\Omega_0} b\left[E_1-(E_1^I-\mathcal{Q}E_1)\right]v_x|\leqslant CN^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon. \tag{70}$$

综合（67）—（70），可得

$$|\int_{\Omega} b(E_1-\pi E_1)v_x|\leqslant CN^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{71}$$

（b）考虑 $\int_\Omega b(E_{12}-E_{12}^I)v_x$。它将分为六种情况：$\Omega_{xy}$，$\Omega_x$，$[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])$，$[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([y_{\frac{N}{4}-1},y_{\frac{N}{4}}]\cup[y_{\frac{3N}{4}},y_{\frac{3N}{4}+1}])$，$[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]$，以及 $[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]$。

$$|\int_{\Omega_{xy}} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-2}\|v\|_\varepsilon,$$

由（42）可得。进一步利用 H¨older 不等式、引理1、引理 2 和（25），可推出

$$|\int_{\Omega_x} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant C\|E_{12}\|_{L^\infty(\Omega_x)}(\mathrm{meas}\Omega_x)^{\frac{1}{2}}\|v_x\|_{\Omega_x}\leqslant CN^{-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon,$$

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant CN^{-\sigma}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}N^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\varepsilon}\ln N)^{\frac{1}{2}}\|v_x\|_\varepsilon\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{8}}N^{-\sigma-\frac{1}{8}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon,$$

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([y_{\frac{N}{4}-1},y_{\frac{N}{4}}]\cup[y_{\frac{3N}{4}},y_{\frac{3N}{4}+1}])} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant CN^{-\sigma}(\varepsilon^{\frac{3}{4}}N^{-\frac{1}{4}}(\sqrt{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\|v_x\|_\varepsilon\leqslant CN^{-\sigma-\frac{3}{8}}\|v\|_\varepsilon,$$

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant C\varepsilon^{\sigma-\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}-\sigma}\|v\|_\varepsilon,$$

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant C\varepsilon^{\sigma-\frac{1}{2}}\|v\|_\varepsilon,$$

其中用到了 $h_{x,\frac{N}{2}-1}\leqslant C\varepsilon^{\frac{3}{4}}N^{-\frac{1}{4}}$和 $h_{y,\frac{N}{4}-1}=h_{y,\frac{3N}{4}}\leqslant C(\sqrt{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}$，它们可由引理 2 推得。

总之,

$$|\int_{\Omega} b(E_{12}-E_{12}^I)v_x|\leqslant CN^{-\sigma}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon+C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-2}\|v\|_\varepsilon. \tag{72}$$

(c) 考虑 $\int_\Omega b_x\left[(E_1-\pi E_1)+(E_{12}-E_{12}^I)\right]v$。由引理5可得

$$|\int_{\Omega} b_x\left[(E_1-\pi E_1)+(E_{12}-E_{12}^I)\right]v|\leqslant CN^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon. \tag{73}$$

(d)考虑 $\int_\Omega b(E_2-E_2^I)_x v$。我们将讨论分为 $\Omega_x\cup\Omega_s$ 和 $\Omega_{xy}\cup\Omega_y$ 两种情况。由式 (39) 可知

$$|\int_{\Omega_x\cup\Omega_s} b(E_2-E_2^I)_x v|\leqslant CN^{-\sigma}\|v\|_\varepsilon.$$

格林公式给出

$$\int_{\Omega_{xy}\cup\Omega_y} b(E_2-E_2^I)_x v=-\int_{\Omega_{xy}\cup\Omega_y}(b_x v+bv_x)(E_2-E_2^I).$$

然后，将 $\Omega_{xy}\cup\Omega_y$划分为 Ω_{xy}, $[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])$和 $[x_{\frac{N}{2}},1]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])$。类似于 (29)，可得

$$|-\int_{\Omega_{xy}}(b_x v+bv_x)(E_2-E_2^I)|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\|v\|_\varepsilon. \tag{74}$$

由假设1、引理1、引理 2、H¨older 不等式、三角不等式和 (25) 可得

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])}(b_x v+bv_x)(E_2-E_2^I)|\leqslant CN^{-\sigma-\frac{1}{4}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon,$$

$$|\int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])}(b_x v+bv_x)(E_2-E_2^I)|\leqslant C\varepsilon^{\sigma-\frac{1}{4}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon.$$

综上，

$$|\int_\Omega b(E_2-E_2^I)_x v|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\|v\|_\varepsilon. \tag{75}$$

由 (71)-(75)，得到引理7的证明。 □

引理 8. 设假设 1 和 2 成立， ΠS 为 S的新插值。对于任意$v\in V^N$，有

$$|(-b(S-\Pi S)_x,v)|\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon+CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon.$$

证明。我们将 $(-b(S-\Pi S)_x$、 $v)$ 分解如下：

$$\begin{aligned}&(b(S-\Pi S)_x,v)\\&=\int_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]}b(S-\Pi S)_x v+\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times[0,1]}b(S-\Pi S)_x v+\int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]}b(S-S^I)_x v.\end{aligned} \tag{76}$$

应用 Gr 对（76）右侧的第一项应用een公式，可得

$$\int_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]} b(S-\Pi S)_x v = -\int_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]} (b_x v+bv_x)(S-\Pi S)+\int_0^1 b(S-\Pi S)v(x_{\frac{N}{2}-1},y)\mathrm{d}y.$$

由引理 4 和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}
|-\int_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[0,1]} (b_x v+bv_x)(S-\Pi S)| &\leqslant C\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{j=0}^{N-1}\|S-\Pi S\|_{K_{i,j}}\|v_x\|_{K_{i,j}} \\
&\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}N^{-2}(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{j=0}^{N-1}h_{x,i}h_{y,j})^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{j=0}^{N-1}\|v\|_{K_{i,j}})^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_{\varepsilon},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
|\int_0^1 b(S-\Pi S)v(x_{\frac{N}{2}-1},y)\mathrm{d}y| &\leqslant CN^{-2}\sum_{j=0}^{N-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(\int_0^{x_{\frac{N}{2}-1}} v_x(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y \\
&\leqslant CN^{-2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\|v_x\|_{L^1(K_{i,j})} \\
&\leqslant CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

在估计 (76) 中剩余的两项之前，我们先将 $\Pi^N b$ 定义为 b 的离散L_2–投影，如下：

$$b^{K_{i,j}} = \Pi^N b|_{K_{i,j}} = \frac{1}{h_{x,i}h_{y,j}}\int_{K_{i,j}} b.$$

注意到 $\Pi^N b$ 是一个分片常向量函数。这是一个标准结果：

$$\|b-\Pi^N b\|_\infty \leqslant CN^{-1}|b|_{1,\infty}. \tag{77}$$

此外，在后续分析中我们将频繁用到以下估计。对于任意的 $v\in V^N$和 $j=\frac{N}{4}$，...，$\frac{3N}{4}-1$：

$$|v(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)| \leqslant Ch^{-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}(\int_0^{x_{\frac{N}{2}-1}} v_x(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y \leqslant Ch^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[y_j,y_{j+1}]}, \tag{78}$$

$$|v(x_{\frac{N}{2}},y_j)| \leqslant C\|v\|_{L^\infty(K_{\frac{N}{2},j})} \leqslant C(h_{x,\frac{N}{2}}h_{y,j})^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{K_{\frac{N}{2},j}} \leqslant CN\|v\|_{K_{\frac{N}{2},j}}, \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\|(S-\mathcal{P}S)_x\|_{L^\infty(K_{\frac{N}{2}-1,j})} &\leqslant \|(S-S^I)_x\|_{L^\infty(K_{\frac{N}{2}-1,j})} + \|(S^I-\mathcal{P}S)_x\|_{L^\infty(K_{\frac{N}{2}-1,j})} \\ &\leqslant CN^{-1} + Ch^{-1}_{x,\frac{N}{2}-1}\|S^I-\mathcal{P}S\|_{L^\infty(K_{\frac{N}{2}-1,j})} \\ &\leqslant Ch^{-1}_{x,\frac{N}{2}-1}N^{-2}.\end{aligned} \tag{80}$$

现在，我们将（76）式的第二项分解为

$$\begin{aligned}&\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times[0,1]} b(S-\Pi S)_x v \\ =&\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}}]\cup[y_{\frac{3N}{4}},1])} b(S-S^I)_x v + \int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times[y_{\frac{N}{4}},y_{\frac{3N}{4}}]} b(S-\mathcal{P}S)_x v \\ =&I+II+III+IV,\end{aligned} \tag{81}$$

其中

$$I =: \int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}}]\cup[y_{\frac{3N}{4}},1])} b(S-S^I)_x v, \tag{82}$$

$$II =: \sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1}\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}} b^{K_{\frac{N}{2}-1,j}}(S-\mathcal{P}S)_x\left[v(x_{\frac{N}{2}-1},y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}+v(x_{\frac{N}{2}-1},y_{j+1})\theta_{\frac{N}{2}-1,j+1}\right], \tag{83}$$

$$III =: \sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1}\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}} (b^{K_{\frac{N}{2}-1,j}}-b^{K_{\frac{N}{2},j}})(S-\mathcal{P}S)_x\left[v(x_{\frac{N}{2}},y_j)\theta_{\frac{N}{2},j}+v(x_{\frac{N}{2}},y_{j+1})\theta_{\frac{N}{2},j+1}\right], \tag{84}$$

$$IV =: \sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1}\int_{K_{\frac{N}{2}-1,j}} b^{K_{\frac{N}{2},j}}(S-\mathcal{P}S)_x\left[v(x_{\frac{N}{2}},y_j)\theta_{\frac{N}{2},j}+v(x_{\frac{N}{2}},y_{j+1})\theta_{\frac{N}{2},j+1}\right]. \tag{85}$$

利用 [24]中的积分恒等式：令 $K\in\mathcal{T}_N$，并假设 K 是$K_{i,\ j}$、$(x_K$、 $y_K)$是 K的中心，则

$$\int_K \frac{\partial}{\partial x}(S-S^I)v = \int_K R(S,v) + \frac{h^2_{x,i}}{12}\left[\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{i+1},y)\mathrm{d}y - \int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_i,y)\mathrm{d}y\right], \tag{86}$$

其中

$$R(S,v) =\frac{1}{3}E(x)(x-x_K)\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h_{x,i}^2}{12}\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}v + F(y)\frac{\partial^3 S}{\partial x \partial y^2}$$
$$\cdot\left[v-(x-x_K)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3}(y-y_K)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}(x-x_K)(y-y_K)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right],$$

并参见 [23, (4.24)-(4.31)]了解详细信息，(76) 的最后一项可分解为

$$\begin{aligned}
&\int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]} b(S-S^I)_x v \\
=&\int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]} (b-\Pi^N b)(S-S^I)_x v + \int_{[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]} \Pi^N b(S-S^I)_x v \qquad (87)\\
=&V+VI+VII+VIII+IX,
\end{aligned}$$

其中

$$V =: \int_{[x_{\frac{N}{2}-1},1]\times[0,1]} (b-\Pi^N b)(S-S^I)_x v, \qquad (88)$$

$$VI =: \int_{[x_{\frac{N}{2}-1},1]\times[0,\ 1]} \Pi^N b R(S,\ v), \qquad (89)$$

$$VII =: \sum_{i=\frac{N}{2}}^{N-2}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{H^2}{12}(b^{K_{i,j}} - b^{K_{i+1,j}})\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{i+1},y)\mathrm{d}y, \qquad (90)$$

$$VIII =: \sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} -b^{K_{\frac{N}{2},j}}\frac{H^2}{12}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y + \sum_{j=\frac{3N}{4}}^{N-1} -b^{K_{\frac{N}{2},j}}\frac{H^2}{12}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y, \qquad (91)$$

$$IX =: \sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1} -b^{K_{\frac{N}{2},j}}\frac{H^2}{12}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y. \qquad (92)$$

接下来，我们给出 $I-IX$ 的估计。回顾引理 3，并利用三角不等式，可得

has

$$
\begin{aligned}
|I| &\leqslant |\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([0,y_{\frac{N}{4}-1}]\cup[y_{\frac{3N}{4}+1},1])} b(S-S^I)_x v| + |\int_{[x_{\frac{N}{2}-1},x_{\frac{N}{2}}]\times([y_{\frac{N}{4}-1},y_{\frac{N}{4}}]\cup[y_{\frac{3N}{4}},y_{\frac{3N}{4}+1}])} b(S-S^I)_x v| \\
&\leqslant CN^{-1}\left[(h_{x,\frac{N}{2}-1}\sqrt{\varepsilon}\ln N)^{\frac{1}{2}} + (h_{x,\frac{N}{2}-1}h_{y,\frac{N}{4}-1})^{\frac{1}{2}}\right]\|v\|_\varepsilon \\
&\leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\|v\|_\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

应用 (78)、(80) 和柯西-施瓦茨不等式，可得

$$
\begin{aligned}
|II| &\leqslant CN^{-2}\sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1} h^{-1}_{x,\frac{N}{2}-1}h^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[y_j,y_{j+1}]}h_{x,\frac{N}{2}-1}h \\
&\leqslant CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N(\sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1}h)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1}\|v\|^2_{[0,x_{\frac{N}{2}-1}]\times[y_j,y_{j+1}]})^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{94}
$$

利用式 (77)、(79)、(80) 和柯西-施瓦茨不等式，可以很容易地得到 III 的估计。

$$
\begin{aligned}
|III| &\leqslant C\sum_{j=\frac{N}{4}}^{\frac{3N}{4}-1} N^{-3}h^{-1}_{x,\frac{N}{2}-1}N\|v\|_{K_{\frac{N}{2},j}}h_{x,\frac{N}{2}-1}h \\
&\leqslant CN^{-\frac{5}{2}}\|v\|_\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{95}
$$

由恒等式 (12) 可得

$$
IV + IX = i + ii + iii + iv, \tag{96}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
i &=: -b^{K_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}}}h^2_{x,\frac{N}{2}}\int_{y_{\frac{N}{4}}}^{y_{\frac{N}{4}+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y_{\frac{N}{4}})\theta_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y, \\
ii &=: -b^{K_{\frac{N}{2},\frac{3N}{4}-1}}h^2_{x,\frac{N}{2}}\int_{y_{\frac{3N}{4}-1}}^{y_{\frac{3N}{4}}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y_{\frac{3N}{4}})\theta_{\frac{N}{2},\frac{3N}{4}}(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y, \\
iii &=: b^{K_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}}}\int_{K_{\frac{N}{2}-1,\frac{N}{4}}}(S-\mathcal{P}S)_x v(x_{\frac{N}{2}},y_{\frac{N}{4}})\theta_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}}, \\
iv &=: b^{K_{\frac{N}{2},\frac{3N}{4}-1}}\int_{K_{\frac{N}{2}-1,\frac{3N}{4}-1}}(S-\mathcal{P}S)_x v(x_{\frac{N}{2}},y_{\frac{3N}{4}})\theta_{\frac{N}{2},\frac{3N}{4}}.
\end{aligned}
$$

由标准逼近理论和（79）可得

$$|i+ii| \leqslant CN^{-2}\|v\|_{\varepsilon}, \tag{97}$$

并由 (79) 和 (80) 可得

$$|iii+iv| \leqslant CN^{-2}\|v\|_{\varepsilon}, \tag{98}$$

回顾 (77) 和引理 3，可得

$$|V| \leqslant CN^{-2}\|v\|_{\varepsilon}. \tag{99}$$

对于 VI，利用逆不等式和 H¨older 不等式可得

$$|\int_{K\subset[x_{\frac{N}{2}},1]\times[0,1]} \Pi^N bR(S,v)| \leqslant CN^{-1}\|R(S,v)\|_K \leqslant CN^{-3}\|v\|_K$$

对 $K \subset [x_{\frac{N}{2}}$、 $1] \times [0$、 $1]$ 求和并应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$|VI| \leqslant CN^{-3}\sum_{i=\frac{N}{2}}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\|v\|_{K_{i,j}} \leqslant CN^{-2}\|v\|_{\varepsilon}. \tag{100}$$

由迹不等式和柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} |VII| &\leqslant CN^{-3}\sum_{i=\frac{N}{2}}^{N-2}\sum_{j=0}^{N-1} H^{-1}\|v\|_{L^1(K_{i,j})} \\ &\leqslant CN^{-3}\sum_{i=\frac{N}{2}}^{N-2}\sum_{j=0}^{N-1} H^{-\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}\|v\|_{K_{i,j}} \\ &\leqslant CN^{-2}\|v\|_{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{101}$$

对于 VIII，只需讨论右侧的第一项，因为第二项的情况与第一项相同。由三角不等式、迹不等式

和柯西-施瓦茨不等式可得

$$
\begin{aligned}
&|\sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-1} -b^{K_{\frac{N}{2},j}}\frac{H^2}{12}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y| \\
\leqslant&|\sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-2} -b^{K_{\frac{N}{2},j}}\frac{H^2}{12}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y| + |-b^{K_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}-1}}\frac{H^2}{12}\int_{y_{\frac{N}{4}-1}}^{y_{\frac{N}{4}}}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}v(x_{\frac{N}{2}},y)\mathrm{d}y| \\
\leqslant&CN^{-2}\sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-2}H^{-1}\|v\|_{L^1(K_{\frac{N}{2},j})} + CN^{-2}H^{-1}\|v\|_{L^1(K_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}-1})} \\
\leqslant&CN^{-\frac{3}{2}}(\sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-2}h_{y,j})^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=0}^{\frac{N}{4}-2}\|v\|^2_{K_{i,j}})^{\frac{1}{2}} + CN^{-2}\|v\|_{K_{\frac{N}{2},\frac{N}{4}-1}} \\
\leqslant&C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N\|v\|_{\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{102}
$$

综合（93）—（102），得证。 □

现在给出主要定理。

定理1. 在假设 1 和 2 均成立的条件下，设u 是方程（1）的精确解， u^I 是 u的标准拉格朗日插值， u^N 是相应的有限元解。则有

$$\|u^I - u^N\|_{\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N + CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N.$$

证明. 由三角不等式可得

$$\|u^I - u^N\|_{\varepsilon} \leqslant \|u^I - \Pi u\|_{\varepsilon} + \|\Pi u - u^N\|_{\varepsilon}. \tag{103}$$

综合引理6、引理7和引理8，可得

$$\|\Pi u - u^N\|_{\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{-\frac{3}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}N + CN^{-2}\ln^{\frac{1}{2}}N. \tag{104}$$

那么，对于 $\|u^I - \Pi u\|_{\varepsilon}$,

$$\|u^I - \Pi u\|_{\varepsilon} \leqslant \|E_1^I - \pi E_1\|_{\varepsilon} + \|S^I - \Pi S\|_{\varepsilon}.$$

引理5得出

$$\|E_1^I - \pi E_1\|_\varepsilon = \|\mathcal{Q}E_1 - \mathcal{B}E_1\|_\varepsilon \leqslant C(1+\varepsilon^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{2}})N^{-\sigma}. \tag{105}$$

(21) 和逆不等式可得

$$\begin{aligned}
\|S^I - \Pi S\|_\varepsilon &= \|\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}-1}(S^I - \mathcal{P}S)(x_{\frac{N}{2}-1}, y_j)\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\|_\varepsilon \\
&\leqslant CN^{-2}\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}-1}\|\theta_{\frac{N}{2}-1,j}\|_\varepsilon \\
&\leqslant CN^{-2}\sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}-1}(h^{-1}_{x,\frac{N}{2}-1}h_{x,\frac{N}{2}-1}h + h^{-1}h_{x,\frac{N}{2}-1}h + h_{x,\frac{N}{2}-1}h) \\
&\leqslant CN^{-2}.
\end{aligned} \tag{106}$$

综合 (104)、(105) 和 (106)，得证。 □

5. 数值结果

这里将进行一些数值实验，以支持我们的理论结果。计算使用 Intel Visual Fortran 11 完成，离散问题可参见 [1] 。

考虑如下问题 (1) 的测试问题：

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta u - (3-x-y)u_x + 2u &= f(x,y) \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\
u &= 0 \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

我们选择 $f(x、y)$，使得

$$u(x,y) = (\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}})(\frac{(1-e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}})(1-e^{-\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}})}{1-e^{-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}}}).$$

是方程（1）的精确解。

在我们的研究中，我们采用双线性有限元法，并假设 $\varepsilon \leqslant N^{-1}$。数值结果见表1，其中列出了能量范数 $\|u^I - u^N\|_\varepsilon$ 下的误差和收敛阶，具体情况为 $\varepsilon = 10^{-2}$、10^{-3}、...、10^{-8} 和 $N = 8$、16、32、64、128、256。

表1表明，$\|u^I - u^N\|_\varepsilon$ 的收敛速率接近 $\mathcal{O}(N^{-2})$，验证了定理1。

表1：$\|u^I - u^N\|_\varepsilon$ 的误差及收敛阶

ε	N					
	8	16	32	64	128	256
10^{-2}	0.132E-01	0.167-02	0.209E-03	0.264E-04	0.334E-05	0.426E-06
	2.99	2.99	2.99	2.98	2.97	—
10^{-3}	0.223E-01	0.336E-02	0.386E-03	0.439E-04	0.525E-05	0.647E-06
	2.73	3.12	3.14	3.06	3.02	—
10^{-4}	0.281E-01	0.295E-02	0.353E-03	0.498E-04	0.801E-05	0.117E-05
	3.25	3.07	2.82	2.64	2.77	—
10^{-5}	0.235E-01	0.266E-02	0.339E-03	0.508E-04	0.941E-05	0.199E-05
	3.14	2.98	2.74	2.43	2.24	—
10^{-6}	0.208E-01	0.249E-02	0.329E-03	0.504E-04	0.952E-05	0.212E-05
	3.06	2.92	2.71	2.40	2.17	—
10^{-7}	0.195E-01	0.241E-02	0.324E-03	0.501E-04	0.952E-05	0.213E-05
	3.02	2.90	2.69	2.40	2.16	—
10^{-8}	0.191E-01	0.239E-02	0.323E-03	0.501E-04	0.953E-05	0.213E-05
	3.00	2.89	2.69	2.39	2.16	—

6. 利益冲突声明

我们声明不存在任何利益冲突。

7. 参考文献

参考文献

[1] M. Benzi、G. H. Golub 和 J. Liesen。鞍点问题的数值解。《数值学报》，14：1–137，2005。[2] S. C. Brenner 和 L. . Scott。《有限元方法的数学理论》。Springer，纽约，第三版，2008。[3] S. Franz 和 T. Linß。具有特征层的奇异摄动对流-扩散问题的 Galerkin有限元法超收敛分析。《数值方法与偏微分方程》，24(1)：144–164，2008。

[4] J. L. Gracia、F. J. Lisbona 和 E. O'Riordan。奇异摄动抛物型反应扩散方程的耦合系统。《计算数学进展》，32(1)：43–61，2010。

[5] W. Guo 和M. Stynes。对流-扩散问题在 Shishkin网格上流线扩散格式的逐点误差估计。《IMA 数值分析杂志》，17(1)：29– 59，1997。

[6] R. B. Kellogg 和 M. Stynes. 简单对流扩散问题中的角点奇异性和边界层。《微分方程杂志》，213(1):81–120，2005。

[7] R. B.Kellogg 和 M. Stynes. 简单对流扩散问题中角点奇异性和边界层的改进界。《应用数学快报》，20(5):539–544，2007。

[8] J. Li. 奇异摄动反应扩散问题在高度非均匀各向异性网格上的有限元方法的收敛性与超收敛分析。《应用数值数学》，36(2-3):129–154，2001。

[9] T. Linß. 对流-扩散问题的层适应网格。《计算方法与应用力学及工程》，192(9-10):1061–1105，2003。[10] T. Linß. 耦合奇异摄动反应扩散方程组的有限元方法分析。《数值算法》，50(3):283–291，2009。[11] T. Linß. 反应-对流-扩散问题的层适应网格。施普林格出版社，柏林，2010。[12] X. Liu、M. Stynes 和 J. Zhang. Shishkin 矩形网格上指数层对流-扩散问题的边稳定化超接近性。《IMA 数值分析杂志》，38(4):2105–2122，2018。[13] X. Liu 和 J. Zhang. 特征层问题在 Shishkin 三角网格上的流线扩散有限元法点态估计。《数值算法》，78(2):465–483，2018。[14] H-G. Roos. Bakhvalov型网格上线性有限元的误差估计。《应用数学》，51(1):63–72，2006。[15] H-G. Roos 和 M. Stynes. 奇异摄动微分方程数值分析中的一些未决问题。《计算方法与应用数学》，15(4):531–550，2015。[16] H-G. Roos、M. Stynes 和 L. Tobiska. 奇异摄动微分方程的鲁棒数值方法。施普林格出版社，柏林，第二版，2008。[17]H-G. Roos. 奇异摄动问题的层适应网格。《应用数学与力学》，78(5):291–309，1998。[18] H-G. Roos 和 T. Linß. 层适应网格上一致收敛的充分条件。《计算》，63(1):27–45，1999。[19] M. Stynes 和 L. Tobiska. 含边界层对流-扩散问题的流线扩散有限元法：最优误差分析与精度提升。《数值分析学报（SIAM）》，41(5):1620–1642，2003。

[20] J. Zhang 和 X. Liu. Bakhvalov型网格上有限元方法一致收敛的最佳阶。《科学计算杂志》，85(1)：论文编号 2，14 页，2020 年。[21] J. Zhang 和 X. Liu. Bakhvalov型网格上线性有限元方法的超接近性与后处理。《数值算法》，92(3)：1553–1570，2023 年。[22] J. Zhang 和 M. Stynes. 具有特征层的对流-扩散问题的连续内罚方法的超接近性。《计算方法与应用力学及工程》，319：549–566，2017 年。[23] Z. Zhang. Shishkin网格上二维对流-扩散问题的有限元超收敛性。《数学计算》，72(243)：1147–1177，2003 年。[24] Q. Lin 和 N. Yan.《高效有限元的构造与分析》。河北大学出版社，中国，1996 年。[25] J. Zhang 和 Y. Lv. 两个参数奇异摄动问题中Bakhvalov型网格上有限元方法的超接近性。《应用数值数学》，171：329–352，2022 年。[26] J. Zhang 和 X. Liu. 一维奇异摄动对流-扩散方程中 Bakhvalov型网格上线性有限元方法的超接近性。《应用数学快报》，111：论文编号 106624，7 页，2021 年。