arXiv:2303.02594v1 [math.DS] 5 Mar 2023

回归集的豪斯多夫维数

ZHANGNAN HU* 和 TOMAS PERSSON

Abstract. 我们考虑 d维环面上的线性映射，由 $T(x) = Ax$ (模 1) 定义，其中 A 是一个可逆的 $d \times d$ 整数矩阵，且没有特征值位于单位圆上。在 $d = 2$ 且 $\det A = \pm 1$的情形下，我们给出集合的豪斯多夫维数公式

$$\{ x \in \mathbb{T}^d : d(T^n(x), x) < e^{-\alpha n} \text{ for infinitely many } n \}.$$

1. Introduction

设 $(X, \mathscr{B}, T, \mu, d)$ 是一个度量测度保持系统（保测系统）。若 (X, d) 是一个可分度量空间，则众所周知的庞加莱回归定理表明，μ-几乎处处的 $x \in X$ 都是回归的，即

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n x, x) = 0.$$

这说明，对于 μ-几乎所有的 $x \in X$，轨道会无限多次返回到以初始点为中心的一系列收缩目标中。然而，它并未说明轨道返回初始点或以初始点为中心的收缩目标的速度。Boshernitzan[3] 研究了一般系统的回归速率。

定理 1.1 ([3])。 设 $(X, \mathscr{B}, T, \mu, d)$ 为一个保测系统。假设对某个 $\tau > 0$， τ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^\tau$ 的 X 是 σ-有限的。那么对 μ-几乎处处的 $x \in X$，

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\tau}} d(T^n x, x) < \infty.$$

此外，若 $\mathcal{H}^\tau(X) = 0$，则对 μ-几乎处处的 $x \in X$，

$$\liminf_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\tau}} d(T^n x, x) = 0.$$

后来，Barreira 和 Saussol [2] 将回归速率与下点态维数联系起来。

定理 1.2 ([2])。 若 $T\colon X \to X$ 是可测子集 $X \subset \mathbb{R}^m$上的博雷尔可测映射，且 μ 是 T-不变的 X上的博雷尔概率测度，那么对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，有

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/\tau} d(T^n x, x) = 0$$

日期：2023年3月7日。2010 数学学科分类。 37C45，37D20，28A80。 * 通讯作者。

对于任意 $\tau > \underline{d}_\mu(x)$，其中

$$\underline{d}_\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

因此，一个自然的问题是：当回归速率被一般函数取代时，回归点集有多大？更确切地说，设 $(X, \mathscr{B}, T, \mu, d)$ 是一个保测系统，$r_n(x)$ 是自然数集 $\mathbb{N}\times X$ 上的某个正函数。将回归集定义为

$$E = E(r_n) = \{\, x \in X : T^n x \in B(x, r_n(x)) \text{ for infinitely many } n \geq 1 \,\}.$$

Tan 和 Wang [13] 计算了当T 为具有 $\beta > 1$ 的 β-变换时，$E(r_n)$ 的豪斯多夫维数。随后，Seuret 和 Wang [14]证明了共形迭代函数系的一个类似结果。Chang、Wu 和 Wu [4] 研究了满足强分离条件的自相似集上的回归集。之后，Baker 和 Farmer [1] 将他们的结果推广到了有限共形迭代函数系。Hussein、Li、Simmons 和 Wang [9] 表明，对于某些共形系统和扩张系统，$E(r_n)$ 的测度遵循零—全律。Kirsebom、Kunde 和 Persson [10] 研究了一类混合区间映射以及环面上的某些线性映射所对应的 $E(r_n)$ 的测度。

回归集是一个上极限集，通常具有较大的交性质，最初由 Falconer [5]引入。给定 $s \in (0, m]$，他将 $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^m)$ 定义为所有满足以下条件的 G_δ 集 F 在 $\mathbb{R}^d$ 中的类：$\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^m)$ 中任意集合的豪斯多夫维数至少为 s，并且该类对相似变换和可数交封闭。在 d维环面 $\mathbb{T}^d$ 上定义相应的集合类十分直接。

Persson 和 Reeve [11]使用黎曼势来确定一个上极限集是否属于类 $\mathcal{G}^s(\mathbb{T}^m)$。以下引理对于证明我们的结果十分重要。

引理 1.3 (引理 2.1，见 [12]。另见 [11])。设 E_n 是$\mathbb{T}^m$ 中的开集，设 μ_n 是满足 $\mu_n(\mathbb{T}^m \setminus E_n) = 0$ 的测度。若存在常数C 使得

$$C^{-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) \leq C$$

对任意球 B，且

$$\iint |x-y|^{-s} d\mu_n(x) d\mu_n(y) < C$$

对所有 n，则有 上极限$_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^m)$，特别地，我们有维数$_{\mathrm{H}}$(上极限$_{n\to\infty} E_n) \geq s$。

受上述结果启发，我们关注当 T 是作用于 $\mathbb{T}^2$ 上的线性映射，且速率 r_n 不依赖于初始点时，$E(r_n)$的豪斯多夫维数，即集合

$$E = \{\, x \in \mathbb{T}^2 : T^n(x) \in B(x, r_n) \text{ for infinitely many } n \geq 1 \,\}.$$

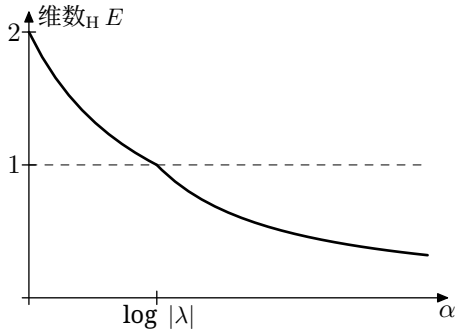


FIGURE 1. α关于$A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$的函数图像 $\dim_{\mathrm{H}} E$，其中

定理1.4。设 A 是一个 2×2 整数矩阵，满足 $|\det A| = 1$，且有一个特征值 $|\lambda| > 1$。设 $T(x) = Ax$ (模1)，并且对 $n \geq 1$、 $r_n = e^{-\alpha n}$、$\alpha > 0$成立。则

$$\dim_{\mathrm{H}} E = s_0,$$

其中

$$s_0 = \min\Big\{ \frac{2\log|\lambda|}{\alpha + \log|\lambda|}, \frac{\log|\lambda|}{\alpha} \Big\}.$$

此外，对于 $\alpha > 0$，我们有$E \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2)$。

He 和 Liao [8, 定理 1.7] 给出了E 的维数公式，其中 A 是对角矩阵，不一定是整数，且所有对角元素的模都大于 1。我们的结果似乎是首个同时存在收缩和扩张情形下的此类结果。

注1.5. 对于一般的非递增正实数序列 $\{r_n\}_{n\geq 1}$，令

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log r_n}{n}.$$

那么定理1.4同样成立。

设 A 和 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 如定理1.4所述。将回归集改写为

$$E = \{\, x \in \mathbb{T}^2 : A^n x \pmod 1 \in B(x, r_n) \text{ i.o.} \,\},$$

并令

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &:= \{\, x \in \mathbb{T}^2 : A^n x \pmod 1 \in B(x, r_n) \,\} \\ &= \{ x \in \mathbb{T}^2 : (A^n - I)x \pmod 1 \in B(0, r_n) \,\}, \end{aligned}$$

其中 I 是单位矩阵。那么 $E = \limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}_n$。

本文的结构如下。在下一节中，我们将讨论周期点

$$\{\, x \in \mathbb{T}^2 : (A^n - I)x \pmod 1 = 0 \,\},$$

这对我们的证明至关重要，因为要理解 $\mathcal{E}_n$，我们需要理解这些周期点的分布。我们主要结果的证明分为两部分。在第3节中，我们给出 E的豪斯多夫维数的上界。最后一节专门证明 E 具有大交性质，从而给出 E的豪斯多夫维数的下界。

不失一般性，我们只证明 $\det A = 1$和 $\lambda > 1$情形下的定理1.4，因为对于 $\lambda < -1$ 或 $\det A = -1$，我们可以考虑 A^2 而不是 A，其特征值为 $\lambda^2 > 1$ 和 λ^{-2}，且 $\det A^2 = 1$。因此，我们省略其他情形的证明。

记号1.6。若存在绝对常数$0 < c < \infty$ 使得对所有 $n \in \mathbb{N}$， $f_n \le c g_n$均成立，则记 $f_n \lesssim g_n$, $n \in \mathbb{N}$。如果对于 $n \in \mathbb{N}$有 $f_n \lesssim g_n$ 和 $g_n \lesssim f_n$，则记为 $f_n \asymp g_n$。

2. Periodic points

设 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ 为一个满足 $\det A = 1$ 且具有特征值$\lambda > 1$的整数矩阵。则

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda - a}{b} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda^{-1} - a}{b} \end{bmatrix}$$

是特征值分别为 λ 和 λ^{-1}的特征向量。我们可以将 A 对角化为 $A = TDT^{-1}$，其中

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda - a}{b} & \frac{\lambda^{-1} - a}{b} \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \frac{b\lambda}{1 - \lambda^2} \begin{bmatrix} \frac{\lambda^{-1} - a}{b} & -1 \\ -\frac{\lambda - a}{b} & 1 \end{bmatrix} \text{ and } D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}.$$

因此，对于 $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= TD^nT^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{n+1} - (\lambda - a)\lambda^{-n+1}}{1-\lambda^2} & \frac{b(-\lambda^{n+1} + \lambda^{-n+1})}{1-\lambda^2} \\ \frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^{n+1} - (\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} & \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1} - (\lambda-a)\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &A^n - I \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{n+1} - (\lambda - a)\lambda^{-n+1}}{1-\lambda^2} - 1 & \frac{b(-\lambda^{n+1} + \lambda^{-n+1})}{1-\lambda^2} \\ \frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^{n+1} - (\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} & \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1} - (\lambda-a)\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Put

$$H_n := \det(A^n - I).$$

由上述方程可得

$$\begin{aligned} &(A^n - I)^{-1} \\ &= \frac{1}{H_n} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1} - (\lambda-a)\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} - 1 & \frac{b(\lambda^{n+1} - \lambda^{-n+1})}{1-\lambda^2} \\ \frac{(a-\lambda^{-1})(\lambda-a)\lambda^{n+1} + (\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} & \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{n+1} - (\lambda-a)\lambda^{-n+1}}{1-\lambda^2} - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

我们观察到， $\mathcal{E}_n$ 由椭圆圆盘 $\{\mathcal{E}_n^i\}_i$ 组成，其半轴分别与 $r_n^{\frac{\lambda^n-1}{|H_n|}}$ 和 $r_n^{\frac{1-\lambda^{-n}}{|H_n|}}$ 相当，圆心为周期为 n 的周期点。若 A 是对称的，则 $\{\mathcal{E}_n^i\}_i$ 的半轴等于 $r_n^{\frac{\lambda^n-1}{|H_n|}}$ 和 $r_n^{\frac{1-\lambda^{-n}}{|H_n|}}$，因为 A 的特征向量彼此正交。

回顾一下，点 $x \in \mathbb{T}^2$ 称为周期为 n 的周期点，如果

$$(A^n - I)x \pmod 1 = 0. \tag{2.1}$$

本节中，我们研究周期点，以了解椭圆圆盘 $\{\mathcal{E}_n^i\}_i$ 的分布。

2.1. **周期点的数量**。

引理 2.1. 对于每个 $n \geq 1$， $H_n = 2 - \lambda^n - \lambda^{-n}$ 和 H_n 都是整数。

证明。 对于 $n \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} H_n &= \det(A^n - I) = \det(D^n - I) \\ &= (\lambda^n - 1)(\lambda^{-n} - 1) = 2 - \lambda^n - \lambda^{-n}, \end{aligned}$$

由于 $A^n - I$ 是整数矩阵， H_n 是整数。 □

引理 2.2. 周期为 n 的周期点数量为 $|H_n|$，即

$$\#\{\, x \in \mathbb{T}^2 : (A^n - I)x \pmod 1 = 0 \,\} = |H_n|.$$

我们将使用以下定理证明引理 2.2。

定理 2.3 (皮克定理 [7])。 假设一个多边形的所有顶点坐标均为整数。设 i 为多边形内部的整数点数量， b 为其边界上的整数点数量（包括顶点和边上的点）。那么该多边形的面积（平方单位）为

$$i + \frac{b}{2} - 1.$$

引理 *2.2* 的证明。 注意，周期点的数量与方程 (2.1) 的解的数量相同，也就是 $(A^n - I)\mathbb{T}^2$ 中整数格点的数量。

我们假设 $A^n - I = \left[\begin{smallmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{smallmatrix}\right]$。那么 $(A^n - I)\mathbb{T}^2$ 是坐标为以下各点的平行四边形

$$(0,0),\ (a_n, c_n),\ (b_n, d_n),\ (a_n + b_n, c_n + d_n).$$

将连接 (0,0) 与 (a_n, c_n) 的线段记为 L_1，将连接 (0,0) 与 (b_n, d_n) 的线段记为 L_2，将连接 (b_n, d_n) 与 $(a_n + b_n, c_n + d_n)$ 的线段记为 L_3，并将连接 (a_n, c_n) 与 $(a_n + b_n, c_n + d_n)$ 的线段记为 L_4。

这里假设 i 是 $(A^n - I)\mathbb{T}^2$ 内部的整点数，而 N_k 是 L_k, $k = 1$，2，3，4上的整点数。那么 $(A^n - I)\mathbb{T}^2$ 边界上的整点数为

$\sum_k N_k - 4$。注意，$N_1 = N_3$ 和 $N_2 = N_4$。因此，$(A^n - I)\mathbb{T}^2$ 中的整数格点数为 $i + N_1 + N_2 - 3$。

根据皮克定理，我们有

$$\mathcal{L}((A^n - I)\mathbb{T}^2) = i + (\sum_k N_k - 4)/2 - 1 = i + N_1 + N_2 - 3.$$

由于 $\mathcal{L}((A^n - I)\mathbb{T}^2) = |a_n d_n - c_n b_n| = |\det(A^n - I)|$，因此（$A^n - I$）$\mathbb{T}^2$ 中的整数格点数等于 $|\det(A^n - I)|$，即 $|H_n|$。□

2.2. 当 n 为奇数时的周期点。要得到 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 的下界，只需研究n为奇数时周期点的分布。下文中，我们只考虑 n 为奇数的情形。假设 $n = 2k + 1$。令

$$S_k = \lambda^k + \ldots + \lambda + 1 + \lambda^{-1} + \ldots + \lambda^{-k} = \frac{\lambda^{-k} - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda}.$$

注意，$S_k = 1 + \mathrm{tr}\ D + \ldots + \mathrm{tr}\ D^k = 1 + \mathrm{tr}\ A + \ldots + \mathrm{tr}\ A^k$，其中 $\mathrm{tr}\, D$ 表示 D的迹。因此，S_k 是一个整数。

引理 2.4. 对于每个 $n = 2k + 1$，$H_n = -(\mathrm{tr}\ A - 2)S_k^2$.

证明。对于每个 $k \geq 0$，我们都有

$$\begin{aligned} S_k^2 &= \frac{(\lambda^{k+1} - \lambda^{-k})^2}{(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda^{2k+2} + \lambda^{-2k} - 2\lambda}{(\lambda - 1)^2} \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2}(\lambda^{2k+1} + \lambda^{-2k-1} - 2) = -\frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2} H_{2k+1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 $k = 0$，我们有 $1 = S_0^2 = -\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2} H_1$，此外还有 $H_1 = 2 - \lambda - \lambda^{-1} = 2 - \mathrm{tr}\ A$。因此

$$1 = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2}(\mathrm{tr}\, A - 2). \tag{2.3}$$

由 (2.2) 和 (2.3) 可得 $H_n = -(\mathrm{tr}\ A - 2)S_k^2$。□

由于我们假设 $\lambda > 1$，因此有 $\mathrm{tr}\, A - 2 > 0$。令$S'_k = (\mathrm{tr}\, A - 2)S_k$。根据同一假设，我们有 $S'_k > 0$。记

$$\mathscr{P}_o = \left\{ \left(\frac{m}{S'_k}, \frac{j}{S'_k} \right) : 0 \leq m, j \leq S'_k - 1 \right\}.$$

引理 2.5。对于 $n = 2k + 1$，$k \geq 0$，周期为 n 的周期点包含于 $\mathscr{P}_o$ 中。

证明。我们证明 $A_{2k+1} := (\mathrm{tr}\, A - 2)S_k(A^{2k+1} - I)^{-1}$ 是一个整数矩阵。若如此，对于 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$，任意周期点 $x = (A^{2k+1} - I)^{-1}[m_1\ m_2]^t$ 都可以改写为

$$x = \frac{1}{S'_k} A_{2k+1}[m_1\ m_2]^t.$$

由于 $A_{2k+1}[m_1\ m_2]^t$ 是一个整数向量，这意味着 $x \in \mathscr{P}_o$。

由于根据引理 2.4, $H_n = -(\text{tr}\, A - 2)S_k^2$, 我们有

$$A_{2k+1}$$
$$= \frac{-1}{S_k}\begin{bmatrix} \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}-(\lambda-a)\lambda^{n+1}}{1-\lambda^2} - 1 & \frac{b(\lambda^{n+1}-\lambda^{-n+1})}{1-\lambda^2} \\ \frac{-(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^{n+1}+(\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} & \frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{n+1}-(\lambda-a)\lambda^{-n+1}}{1-\lambda^2}-1 \end{bmatrix}.$$

Put

$$\begin{aligned} R_k &= \lambda^k - \lambda^{k-1} + \ldots + (-1)^k + (-1)^{k-1}\lambda^{-1} + \ldots - \lambda^{-k+1} + \lambda^{-k} \\ &= \frac{\lambda^{k+1} + \lambda^{-k}}{1+\lambda}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

由于 $R_k = (-1)^k + (-1)^{k-1}\,\text{tr}\ A + \ldots - \text{tr}\ A^{k-1} + \text{tr}\ A^k$, 我们有$R_k$ 是一个整数。

我们有

$$\begin{aligned} \text{tr}\, A_{2k+1} &= \frac{\lambda^{2k+1}-1}{S_k} + \frac{\lambda^{-2k-1}-1}{S_k} \\ &= (\lambda-1)\lambda^k - \lambda^{-2k-1}\frac{\lambda^{2k+1}-1}{S_k} \\ &= (\lambda-1)(\lambda^k - \lambda^{-k-1}). \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} \det A_{2k+1} &= \frac{(\lambda^{2k+1}-1)(\lambda^{-2k-1}-1)}{S_k^2} \\ &= (\lambda-1)^2\frac{2-\lambda^{2k+1}-\lambda^{-2k-1}}{(\lambda^{k+1}-\lambda^{-k})^2}\lambda^k = -\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda}. \end{aligned}$$

因此, $\text{tr}\, A = -\det(A_{2k+1})S_k$。由于 $\det\ A_{2k+1}$ 与 k 无关, 我们有 $\det\ A_{2k+1} = \det\ A_1 = \det(A-I) = 2 - \text{tr}\ A$, 这是一个整数。由此可知, $\text{tr}\, A_{2k+1} = (2 - \text{tr}\ A)S_k$ 也是一个整数。

最后, 我们令 $e_1 = [1 \quad 0]^t$ 和 $e_2 = [0 \quad 1]^t$, 计算 $e_2^t A_{2k+1} e_2$、$e_2^t A_{2k+1} e_1$ 和 $e_1^t A_{2k+1} e_2$, 并证明它们都是整数。经过一些化简, 我们得到

$$\begin{aligned} e_2^t A_{2k+1} e_2 &= -\frac{1}{S_k}\Big(\frac{(\lambda^{-1}-a)\lambda^{n+1} - (\lambda-a)\lambda^{-n+1}}{1-\lambda^2} - 1\Big) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\Big(\frac{\lambda^{2k+1} - \lambda^{-2k+1} + \lambda^2 - 1}{\lambda^{1+k} - \lambda^{-k}} + a\frac{\lambda^{-2k} - \lambda^{2k+2}}{\lambda^{1+k} - \lambda^{-k}}\Big) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\Big(\frac{(\lambda^{1+k} - \lambda^{-k})(\lambda^k + \lambda^{-k+1})}{\lambda^{1+k} - \lambda^{-k}} - a\frac{\lambda^{2k+2} - \lambda^{-2k}}{\lambda^{1+k} - \lambda^{-k}}\Big) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\Big(\lambda^k + \lambda^{-k+1} - a(\lambda^{k+1} + \lambda^{-k})\Big) \\ &= R_{k-1} - aR_k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

and

$$\begin{aligned} e_1^t A_{2k+1} e_2 &= -\frac{1}{S_k}\frac{b(\lambda^{n+1}-\lambda^{-n+1})}{1-\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda-1}{\lambda^{-k}-\lambda^{k+1}}\frac{b(\lambda^{2k+2}-\lambda^{-2k})}{1-\lambda^2} \\ &= \frac{b}{1+\lambda}\frac{\lambda^{-2k}-\lambda^{2k+2}}{\lambda^{-k}-\lambda^{k+1}} \\ &= \frac{b}{1+\lambda}(\lambda^{-k}+\lambda^{k+1}) = bR_k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Also

$$\begin{aligned} e_2^t A_{2k+1} e_1 &= \frac{1}{S_k}\frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^{n+1}-(\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda^{-k}-\lambda^{k+1}}\frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^{n+1}-(\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)\lambda^{-n+1}}{b(1-\lambda^2)} \\ &= \frac{1}{\lambda^{-k}-\lambda^{k+1}}\frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)(\lambda^{2k+2}-\lambda^{-2k})}{b(1+\lambda)} \\ &= -\frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)(\lambda^{k+1}+\lambda^{-k})}{b(1+\lambda)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

注意到 $e_2^t A_1 e_1 = c$，即

$$\begin{aligned} c &= \frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)\lambda^2-(\lambda-a)(\lambda^{-1}-a)}{b(1-\lambda^2)} \\ &= \frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)(\lambda^2-1)}{b(1-\lambda^2)} \\ &= -\frac{(\lambda^{-1}-a)(\lambda-a)}{b}. \end{aligned}$$

于是，(2.7) 可改写为

$$e_2^t A_{2k+1} e_1 = cR_k. \tag{2.8}$$

由 (2.5)、(2.6) 和 (2.8)，可知矩阵元素 $e_2^t A_{2k+1} e_1$、$e_1^t A_{2k+1} e_2$、$e_2^t A_{2k+1} e_2$ 都是整数。由于 $\mathrm{tr}\, A_{2k+1}$ 是整数，A_{2k+1} 的右下元素也必定是整数。□

引理 2.6. 对于 $n = 2k+1$、$k \geq 0$，点 $\left\{ \left(\frac{m}{S_k}, \frac{j}{S_k} \right) : m、j = 0、\ldots\ldots、S_k - 1 \right\}$ 都是周期点。

证明。我们证明 $A'_{2k+1} := \frac{1}{S_k}(A^{2k+1} - I)$ 是整数矩阵，且 $\det A'_{2k+1} = 2 - \mathrm{tr}\, A$。这意味着，如果 $x = \frac{1}{S_k}[x_1 \ x_2]^t$，其中 x_1 和 x_2 是整数，那么 $(A^{2k+1} - I)x$ 是整数矩阵，因此 $T^{2k+1}(x) = x$。

注意到

$$e_1^t A'_{2k+1} e_1 = -e_2^t A_{2k+1} e_2, \quad e_2^t A'_{2k+1} e_2 = -e_1^t A_{2k+1} e_1,$$

$$e_1^t A'_{2k+1} e_2 = e_1^t A_{2k+1} e_2, \quad e_2^t A'_{2k+1} e_1 = e_2^t A_{2k+1} e_1,$$

其中 $A_{2k+1} = (trA - 2)S_k(A^{2k+1} - I)^{-1}$。由引理 2.5 的证明可知, A'_{2k+1} 的矩阵元素均为整数。□

注记 2.7. 引理 2.6 中找到的周期点数显然是 S_k^2。这已足以满足我们的需要，但我们指出，根据引理 2.2，周期点数为 $|H_{2k+1}|$，而由 (2.2) 得, $S_k^2 = -\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2} H_{2k+1}$。由于 $\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\operatorname{tr} A - 2}$，因此我们有

$$S_k^2 = -\frac{1}{\operatorname{tr} A - 2} H_{2k+1}.$$

因此，引理 2.6 中找到的周期点是全部周期点，当且仅当 $\operatorname{tr} A - 2 = \pm 1$。

注记 2.8. 当 n 为偶数时，也就是说，$n = 2k, k \geq 1$，周期为 n 的周期点包含于

$$\mathscr{P}_e = \Big\{ \Big(\frac{m}{g_k}, \frac{j}{g_k} \Big) : 0 \leq m, j \leq g_k - 1 \Big\},$$

其中 $g_k = \sqrt{(a+d)^2 - 4}(\lambda^k - \lambda^{-k})$。

记号 2.9。设 $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ 是一个整数矩阵，满足 $\det A = 1$，且具有一个特征值 $\lambda > 1$。根据引理 *2.2*，给定 $n \geq 1$，满足 （2.1）的周期点数量为 $|H_n|$。记

$$\lambda_{n,1} = r_n \frac{\lambda^n - 1}{|H_n|} = \frac{r_n}{1 - \lambda^{-n}}, \quad \lambda_{n,2} = r_n \frac{1 - \lambda^{-n}}{|H_n|} = \frac{r_n}{\lambda^n - 1}.$$

则 $\mathcal{E}_n$ 由椭圆圆盘 $\{\mathcal{E}_n^i\}_{i=1}^{|H_n|}$ 构成，并且对于 $i \geq 1$， $\mathcal{E}_n^i$ 包含一个顶点为以下各点的平行四边形 E_n^i

$$x_{n,i} + \left[1 \quad \tfrac{\lambda - a}{b}\right]^t \lambda_{n,2}, \qquad x_{n,i} - \left[1 \quad \tfrac{\lambda - a}{b}\right]^t \lambda_{n,2},$$
$$x_{n,i} + \left[1 \quad \tfrac{\lambda^{-1} - a}{b}\right]^t \lambda_{n,1}, \qquad x_{n,i} - \left[1 \quad \tfrac{\lambda^{-1} - a}{b}\right]^t \lambda_{n,1},$$

其中心 $x_{n,\,i}$ 是满足 （2.1）的周期点。此外， E_n^i 的对角线长度分别为 $2\lambda_{n\,、\,1}$ 和 $2\lambda_{n\,、\,2}$。

3. The upper bound on $\dim_{\mathrm{H}} E$

在本节中，我们将给出 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 的上界。

引理 3.1。设 A 是一个 2×2 整数矩阵，满足 $\det A = 1$，且具有一个特征值 $\lambda > 1$。令 $T(x) = Ax$ （模 1），并且对于 $n \geq 1$， $r_n = e^{-\alpha n}$，$\alpha \geq 0$。则

$$\dim_{\mathrm{H}} E \leq s_0,$$

其中

$$s_0 = \min\Big\{ \frac{2\log\lambda}{\alpha + \log\lambda}, \frac{\log\lambda}{\alpha} \Big\}.$$

证明。我们注意到，对于任意的 $n \geq 1$, $E \subset \bigcup_{n\geq k} \mathcal{E}_n$。注意， $\mathcal{E}_n$由 $|H_n|$ 个形状相同的椭圆圆盘组成。存在两种对 $\mathcal{E}_n$ 的自然覆盖。

情形 1：对于 $\alpha > 0$，序列 $\{r_n\}_{n\geq 1}$ 是一个趋于 0 的正实数递减序列。那么对于任意 $\delta > 0$，存在某个$k_0 \geq 1$，使得对于任意 $k \geq k_0$，都有 $r_k < \delta$。因此

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_{n\geq k_0} \mathcal{E}_n) \leq \sum_{n\geq k_0}\sum_{i=1}^{|H_n|} \mathcal{H}^s_\delta(\mathcal{E}_{n,i}). \tag{3.1}$$

由于 $\mathcal{E}_{n,\,i} \subset B(x_i,\ \lambda_{n,\,1})$，因此 (3.1) 可以改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(E) &\leq \sum_{n\geq k_0}\sum_{i=1}^{|H_n|} \mathcal{H}^s_\delta(B(x_i, \lambda_{n,1})) \\ &\lesssim \sum_{n\geq k_0} r_n^s \lambda^n = \sum_{n\geq k_0} e^{n(\log\lambda - \alpha s)}.\end{aligned}$$

因此 $s > \log_\alpha{}^\lambda$，~~—~~我们有 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$，这意味着 $\dim_{\mathrm{H}} E \leq \log^\lambda_\alpha$。

情形 2：对于 $\alpha > 0$，我们用一些边长为 $2\lambda_{n,\,2}$ 的正方形覆盖$\mathcal{E}_{n,\,i}$，并将这些正方形记为 $\{S_{i,j}\}_j$。我们假设 $S_{i,\,j}$ 的中心为 $x_{i,\,j}$，并且

$$\Gamma_i := \#\{S_{i,j}\} \asymp \frac{\lambda_{n,1}}{\lambda_{n,2}} = \frac{\lambda^n - 1}{1 - \lambda^{-n}} \asymp \lambda^n.$$

对于任意 $\delta > 0$，存在某个 $n_0 \geq 1$，使得对于任意 $n \geq n_0$，都有 $2\sqrt{2}\lambda_{n,\,2} < \delta$。那么

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(E) &\leq \mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_{n\geq k_0} \mathcal{E}_n) \leq \sum_{n\geq k_0}\sum_{i=1}^{|H_n|}\sum_{j=1}^{\Gamma_i} \mathcal{H}^s_\delta(S_{i,j}) \\ &\lesssim \sum_{n\geq k_0} |H_n|\Gamma_i (r_n\lambda^{-n})^s \\ &\lesssim \sum_{n\geq k_0} \lambda^{2n}(r_n\lambda^{-n})^s = \sum_{n\geq k_0} e^{n(2\log\lambda - (\alpha+\log\lambda)s)}.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $s > \frac{2\log\alpha+}{\log\lambda}{}^\lambda$，我们有 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$，这意味着 $\dim_{\mathrm{H}} E \leq \frac{2\log\alpha+}{\log\lambda}{}^\lambda$。

综合情形 1 和情形 2，我们得到

$$\dim_{\mathrm{H}} E \leq \min\Big\{\frac{2\log\lambda}{\alpha + \log\lambda}, \frac{\log\lambda}{\alpha}\Big\}. \qquad \square$$

4. Lower bound on Hausdorff dimension

我们将测度 μ 的 s 维里斯势定义为
$$R_s\mu(x) = \int |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(y)。$$

s 维黎曼能量 μ 为
$$I_s(\mu) = \int R_s\mu \,\mathrm{d}\mu = \iint |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

设 A 是一个满足 $\det A = 1$ 且具有特征值$\lambda > 1$的 2×2 整数矩阵。引理 2.6 告诉我们，$\left\{\binom{m}{S_k}, \binom{j}{S_k}: \ m, \ j = 0, \ldots, S_k - 1\right\}$ 是周期为 $n = 2k+1$ 的周期点。重新编号后，我们将这些周期点记为 $\{x_{n,i}\}_{i=1}^{N_n}$，其中 $N_n = S_k^2$。

对于 $n = 2k+1$，定义
$$E_n = \bigcup_{i=1}^{N_n} E_n^i, \tag{4.1}$$
并回顾记号 2.9，$E_n^i \subset \mathcal{E}_n^i$ 是中心为$x_{n,i}$、对角线长度为$2\lambda_{n,1}$ 和$2\lambda_{n,2}$的平行四边形。注意到 $E_n \subset \bigcup_{j=1}^{|H_n|}\mathcal{E}_n^j$。因此 $\limsup_n E_n \subset E$。

现在我们证明 E_n^i 与 E_n^j、$i \neq j$之间的最短距离为正。对于任意一对 E_n^i 和 E_n^j、$i \neq j$，假设$x_{n,i} = \binom{i_1}{S_k}, \binom{i_2}{S_k})$ $x_{n,j} = \binom{j_1}{S_k}, \binom{j_2}{S_k})$，则
$$d(E_n^i, E_n^j) \geq d(x_{n,i}, l_{n,j}) - 2r_n\lambda_{n,2},$$
其中 $d(x_{n,i}, l_{n,j})$是$x_{n,i}$ 与直线$l_{n,j}$ 之间的距离，由$f(x) = \binom{\lambda^{-1}-a}{b}(x - \frac{j_1}{S_k}) + \frac{j_2}{S_k}$给出。当 $i_1 = j_1$时，我们有 $d(E_n^i, E_n^j) \asymp S_k^{-1}$。当 $i_1 \neq j_1$ 时，由于 $\binom{\lambda^{-1}-a}{b}$ 是二次代数数，根据丢番图逼近的刘维尔定理，我们有
$$\begin{aligned} d(x_{n,i}, l_{n,j}) &\gtrsim \left|\frac{\lambda^{-1}-a}{b}\Big(\frac{i_1-j_1}{S_k}\Big) + \frac{j_2-i_2}{S_k}\right| \\ &\geq \frac{c_1}{S_k|i_1-j_1|}, \end{aligned}$$
其中，$c_1 > 0$ 是一个仅取决于 A的常数。因此，E_n^i 与 E_n^j、$i \neq j$之间的距离满足
$$d(E_n^i, E_n^j) \begin{cases} \gtrsim \frac{1}{S_k|i_1-j_1|} \gtrsim \lambda^{-n} > 0 & \text{if } i_1 \neq j_1, \\ \asymp S_k^{-1} & \text{if } i_1 = j_1. \end{cases} \tag{4.2}$$

当 n 足够大时，我们有 $\{E_n^i\}_{i=1}^{N_n}$ 彼此不相交。因此
$$Ł(E_n^i) = \frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{|bH_n|}r_n^2, \quad Ł(E_n) = \sum_{i=1}^{N_n} Ł(E_n^i) = \frac{\pi}{|b(a+d-2)|}r_n^2.$$

4.1. 估计 α 较大时的情形。本小节给出当 $\alpha \geq \frac{1}{2}\log\lambda$ 时 E 的豪斯多夫维数下界。

定理 4.1. 对于 $\alpha \geq \frac{1}{2}\log\lambda$，令 E_n 如 (4.1) 中所定义。则

$$\limsup_{k\to\infty} E_{2k+1} \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2),$$

其中 $s_0 = \min\left\{ \frac{2\log\alpha+\log\lambda}{\log\lambda}, \frac{\log\lambda}{\alpha} \right\}$.

由于 $\limsup_{k\to\infty} E_{2k+1} \subset E$，由定理 4.1 可得$E \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2)$。

定理 *4.1* 的证明。令

$$\mu_n = \frac{1}{\text{Ł}(E_n)}\text{Ł}|_{E_n}.$$

由于周期点的分布 $\{x_{n,i}\}_i$ 非常规则，显然存在一个常数 $C > 1$，使得对于任意球 $B \subset \mathbb{T}^2$，我们有

$$C^{-1} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu_{2k+1}(B)}{\text{Ł}(B)} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\mu_{2k+1}(B)}{\text{Ł}(B)} \leq C.$$

（事实上，我们可以取 $C = 1$。）

现在我们证明，对于某个 $s > 0$， $I_s(\mu_n)$ 是有限的，其中 $n = 2k+1$。记

$$\begin{aligned}\iint \frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) &= I_1 + I_2 \\ &= \sum_{i=1}^{N_n}\int_{E_n^i}\int_{E_n^i}\frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_n}\int_{E_n^i}\int_{E_n^j}\frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y).\end{aligned}$$

a) 令 $\phi^s(\mathcal{E})$ 为椭圆 $\mathcal{E}$ 的奇异值函数。那么

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^{N_n}\frac{1}{\text{Ł}(E_n)^2}\int_{E_n^i}\int_{E_n^i}\frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \frac{1}{r_n^4}\sum_{i=1}^{N_n} K\frac{\text{Ł}(E_n^i)^2}{\phi^s(E_n^i)} = \frac{1}{r_n^4}\sum_{i=1}^{N_n} K\frac{\pi^2 r_n^4}{S_k^4\phi^s(E_n^i)} \\ &= S_k^{-2}\phi^{-s}(E_n^i). \end{aligned}$$

b) 现在我们估计 $I_2 = \sum_{i=1}^{N_n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N_n}\int_{E_n^i}\int_{E_n^j}\frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y)$。

只需证明里斯势

$$R(x) = \sum_{j\neq i_0}\int_{E_n^j}\frac{1}{|x-y|^s}\,\mathrm{d}\mu_n(y)$$

对于 $x \in E_n^{i_0}$ 一致有界,

由于 $\alpha > \frac{1}{2}\log\lambda$，对于任意 $i \geq 1$，与 $\{(\frac{l}{S_k}, \frac{l+1}{S_k}) \times (\frac{m}{S_k}, \frac{m+1}{S_k})\}$ 相交的立方体数量是一致有界的。因此 $|i_1 - j_1| \lesssim 1$，其中 $\frac{i_1}{S_k}$、$\frac{j_1}{S_k}$ 分别是 $x_{n,i}$ 和 $x_{n,j}$ 的第一坐标。根据（4.2），E_n^i 与 E_n^j之间的最短距离 d_n，$i \neq j$ 满足

$$d_n \gtrsim \lambda^{-\frac{n}{2}}.$$

注意，对于 $j \neq i_0$、$x \in E_n^{i_0}$和 $y \in E_n^j$，存在 $0 \leq m \leq d_n^{-1}$和 $1 \leq l \leq d_n^{-1}$使得 $|x-y| \geq (m^2+l^2)^{1/2} d_n$。于是

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \sum_{j \neq i_0} \int_{E_n^j} \frac{1}{|x-y|^s} \,\mathrm{d}\mu_n(y) \leq \sum_{m=0}^{d_n^{-1}} \sum_{l=1}^{d_n^{-1}} ((m^2+l^2)^{1/2} d_n)^{-s} \mu_n(E_n^j) \\ &\lesssim \frac{1}{r_n^2} S_k^s \int_0^{d_n^{-1}} \int_0^{d_n^{-1}} (u^2+v^2)^{-\frac{s}{2}} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \\ &\lesssim r_n^{-2} \lambda^{\frac{1}{2}ns} \lambda^{\frac{1}{2}n(2-s)} = e^{n(-2\alpha + \log\lambda)} < C_1, \end{aligned}$$

这里，C_1 是一个与 n 和 x无关的常数。于是

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathcal{E}_n^i} I_2(x) \,\mathrm{d}\mu_n(x) \asymp C_1 \lambda^n r_n^{-2} < C_2.$$

其中，C_2 是一个与 n无关的常数。

结合 a) 和 b)，我们有

$$I_s(\mu_n) = I_1 + I_2 \leq S_k^{-2} \phi^{-s}(\mathcal{E}_n^i) + C_2.$$

令 $s_0 = \min\{\frac{\log\lambda}{\alpha}, \frac{2\log\alpha + \log\lambda}{\log\lambda}\} > 2$，并令 m满足 $m < s_0 \leq m+1$。取 s，使得 $\overline{m < s < D}$。

如果 $m = 0$，则 $s_0 = \frac{\log\lambda}{\alpha}$，并且我们有

$$\phi^s(E_n^i) = (\lambda_{n,1})^s = \frac{(\lambda^n - 1)^s}{(a+d-2)^s S_k^{2s}} r_n^s.$$

当 n 充分大时，我们于是有

$$\begin{aligned} S_k^{-2} \phi^{-s}(E_n^i) &\asymp \Big(\frac{(\lambda^n - 1)}{\lambda^n + \lambda^{-n} - 2}\Big)^{-s} e^{\alpha s n} (\lambda^n + \lambda^{-n} - 2)^{-1} \\ &\lesssim e^{\alpha s n} \lambda^{-n} \asymp \exp\{n(\alpha s - \log\lambda)\}. \end{aligned}$$

由此，鉴于 $s < \frac{1}{\alpha}\log\lambda$，可得 $\exp\{n(\alpha s - \log\lambda)\} < M$。这意味着 $S_k^{-2}\phi^{-s}(E_n^i) < M$，其中 $M > 0$是一个绝对常数。

若 $m = 1$，则 $s_0 = \frac{\log\lambda}{\log 2 + \log\alpha}$且

$$\begin{aligned} \phi^s(E_n^i) = \lambda_{n,1}(\lambda_{n,2})^{s-1} &= \frac{\lambda^n - 1}{(a+d-2)S_k^2} r_n \frac{(1-\lambda^{-n})^{s-1}}{(a+d-2)^{s-1} S_k^{2s-2}} r_n^{s-1} \\ &= \frac{(\lambda^n - 1)(1-\lambda^{-n})^{s-1}}{(a+d-2)^s S_k^{2s}} r_n^s, \end{aligned}$$

此处 $\lambda_{n,\ 2} = r_{\frac{1-\lambda^{-n}}{n\ |H_n|}}$。当 n 足够大时，我们有

$$\begin{aligned} S_k^{-2}\phi^{-s}(E_n^i) &\asymp \frac{(\lambda^n+\lambda^{-n}-2)^{s-1}}{(\lambda^n-1)(1-\lambda^{-n})^{s-1}} e^{\alpha s n} \\ &\lesssim e^{\alpha s n}\lambda^{n(s-2)} = \exp\{n(\alpha s-(2-s)\log\lambda)\}. \end{aligned}$$

注意到，对于任意 $s < \frac{2}{\log\alpha+\ \log\lambda}$，我们有 $\exp\{n(\alpha s-(2-s)\log\ \lambda)\} < M$，于是可得 $S_k^{-2}\phi^{-s}(E_n^i) < M$。

因此，对于任意

$$s < s_0 := \min\Big\{\frac{2\log\lambda}{\alpha+\log\lambda}, \frac{1}{\alpha}\log\lambda\Big\} \le 2,$$

我们有 $I_s(\mu_{2k+1})$ 对所有充分大的 k 都一致有界。根据引理 1.3，我们有 $\limsup_k E_{2k+1} \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2)$。由此可知，当 $\alpha \ge \frac{1}{2}\log\lambda$ 时，

$$E \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2).$$

此外，

$$\dim_{\mathrm{H}} E \ge \dim_{\mathrm{H}}\Big(\limsup_{k\to\infty} E_{2k+1}\Big) \ge \min\Big\{\frac{2\log\lambda}{\alpha+\log\lambda}, \frac{1}{\alpha}\log\lambda\Big\}. \quad \square$$

4.2. 当 α 较小时的估计。 在本小节中，我们给出当 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\log\ \lambda$ 时 $\dim_{\mathrm{H}}\limsup_n E_n$ 的下界。记 L^1 为限制在 $\mathbb{T}$ 上的勒贝格测度。

令 $L_{x_0} := \{(x_0,\ y):\ y \in \mathbb{T}\}$、$x_0 \in \mathbb{T}$ 且

$$F_n(x_0) = \{\mathcal{E}_{n,i} \cap L_{x_0} : 1 \le i \le N_n,\ \lambda_{n,2}/3 \le |E_n^i \cap L_{x_0}| \le 2\lambda_{n,2}\}.$$

假设 $F_n(x_0) = \{I_{n,i}:\ 1 \le i \le M_n\}$，且 $M_n = \#F_n(x_0)$。

定理 4.2。 对于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\log\lambda$，给定 $x_0 \in \mathbb{T}$，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x_0) \in \mathcal{G}^{s_1}(L_{x_0}),$$

其中 $s_1 = \frac{\log\lambda-\alpha\log\ \lambda+\alpha}{}$。特别地，对于任意 $x_0 \in \mathbb{T}$，我们有

$$\dim_{\mathrm{H}}\Big(\limsup_{n\to\infty} F_n(x_0)\Big) \ge s_1.$$

注意，对于任意 $x \in \mathbb{T}$，集合 $F_n(x)$ 可视为 E_n 与直线 L_x 在 $\mathbb{T}^2$上的交集的子集。因此，在 [6],中应用命题 7.9，我们推出

$$\dim_{\mathrm{H}}\Big(\limsup_{n\to\infty} E_n\Big) \ge s_1 + 1 = s_0.$$

于是我们得到了 $\dim_{\mathrm{H}} E$ 的下界，它与其上界一致。不过，我们还将进一步说明 $\limsup_k E_{2k+1}$ 的性质，具体如下。

定理4.3。对于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\log\lambda$，有

$$\limsup_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2),$$

其中 $s_0 = \frac{2}{\text{对数 } \lambda \text{对数 } \lambda+\alpha}$.

由于只需研究 $\limsup_k F_{2k+1}(x_0)$ 和 $\limsup_k E_{2k+1}$，而无需研究 $\limsup_n F_n(x_0)$ 和 $\limsup_n E_n$，因此从现在起，我们始终假设$n = 2k+1, k \geq 0$。

引理4.4。给定任意一条满足 $L_l \subset L_{x_0}$、长度为 ℓ 的线段，对于足够大的 $n = 2k+1$，我们有

$$\#\Big\{ i : 1 \leq i \leq N_n,\ \frac{\lambda_{n,2}}{4} \leq |E_n^i \cap L_l| \leq 2\lambda_{n,2} \Big\} \asymp \ell r_n \lambda^n.$$

特别地，$\#M_n \asymp r_n\lambda^n$。

证明。假设 $L_l = \{(x_0, y) : y \in (y_0, y_0+\ell)\}$。注意，$i \geq 1$与 $\frac{\lambda_n}{4}^2 \leq |E_n^i \cap L_l| \leq 2\lambda_{n,2}$ 当且仅当 $x_{n,i} \in P_l$，其中 $x_{n,i}$ 是 $\mathcal{E}_n^i$的中心，而 P_l是顶点为（a', b'）、（d', c'）、（$a', b'+\ell$）、（$d', c'+\ell$）的平行四边形，并且

$$\begin{aligned} a' &= x_0 - K_0\lambda_{n,1}, \qquad d' = x_0 + K_0\lambda_{n,1}, \\ b' &= y_0 - K_0'\lambda_{n,1}, \qquad c' = y_0 + K_0'\lambda_{n,1} \end{aligned}$$

这里 $K_0,\ K_0' > 0$ 是绝对常数。注意，

$$\#\{ x_i : 1 \leq i \leq N_n,\ x_i \in P_l \} = \#\{ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : (p,q) \in S_k P_l \}.$$

S_kP_l 的顶点坐标为（$a'S_k, c'S_k$）、（$d'S_k, b'S_k$）、（$a'S_k, c'S_k + \ell S_k$）和（$d'S_k, b'S_k + \ell S_k$）。根据皮克定理，我们有

$$\begin{aligned} \#\{ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : (p,q) \in S_k P_l \} &\leq (\lceil d'S_k \rceil - \lfloor a'S_k \rfloor)\lceil lS_k \rceil \\ &\leq (lS_k + 1)(2K_0 r_n S_k \frac{\lambda^n - 1}{|H_n|} + 2) \lesssim \ell r_n \lambda^n, \quad (4.3) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \#\{ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : (p,q) \in S_k P_l \} &\geq (\lfloor d'S_k \rfloor - \lceil a'S_k \rceil)\lfloor lS_k \rfloor \\ &\geq (lS_k - 1)(2K_0 r_n S_k \frac{\lambda^n - 1}{|H_n|} - 2) \gtrsim \ell r_n \lambda^n. \quad (4.4) \end{aligned}$$

结合 (4.3) 和 (4.4)，我们得到

$$\#\Big\{ i : 1 \leq i \leq N_n,\ \frac{\lambda_{n,2}}{4} \leq |E_n^i \cap L_l| \leq 2\lambda_{n,2} \Big\} \asymp \ell r_n \lambda^n.$$

取 $\ell = 1$。则 $M_n \asymp r_n\lambda^n$. □

现在我们给出定理 4.2 的证明。

定理 *4.2* 的证明。给定 $x_0 \in \mathbb{T}$，在本证明中，为方便起见，我们将 $F_n(x_0)$ 写作F_n。对于 $n = 2k+1$，令

$$\mu_n = \frac{1}{\text{Ł}^1(F_n)}\text{Ł}^1|_{F_n}.$$

由引理4.4可得 $\text{Ł}^1(F_n) \asymp r_n^2$。

i) 对任意球 $B \subset L_{x_0}$，有

$$\begin{aligned}\mu_n(B) &= r_n^{-2} \sum_{\substack{i=1\\ I_{n,i}\cap B\neq\varnothing}}^{M_n} \text{Ł}^1(B\cap I_{n,i})\\ &\lesssim r_n^{-2}\text{Ł}^1\Big((1+\frac{2\lambda_{n,2}}{r_B})B\Big) r_n\lambda^n r_n\lambda^{-n} \le \text{Ł}^1\Big((1+\frac{2\lambda_{n,2}}{r_B})B\Big).\end{aligned}$$

由于 $\max_i |I_{n,\ i}| \to 0$，当 $n\to\infty$ 时，因此

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mu_n(B)}{\text{Ł}^1(B)} \lesssim 1.$$

并且当 n 足够大时，有

$$\begin{aligned}\mu_n(B) = \sum_{\substack{i=1\\ I_{n,i}\cap B\neq\varnothing}}^{M_n} \frac{\text{Ł}^1(B\cap I_{n,i})}{\text{Ł}^1(F_n)} &\ge \sum_{\substack{i=1\\ I_{n,i}\subset B}}^{M_n}\frac{\text{Ł}^1(I_{n,i})}{\text{Ł}^1(F_n)}\\ &\asymp r_n^{-2}\#\{\, i : I_{n,i}\subset B\,\} r_n\lambda^{-n}.\end{aligned}$$

由于

$$\#\{\, i : I_{n,i}\subset B\,\} \supset \{\, i : \mathcal{E}_n^i \cap (1-2\lambda_{n,2})B \neq \varnothing\,\},$$

由引理4.4可得

$$\#\{\, i : I_{n,i}\subset B\,\} \gtrsim \text{Ł}^1((1-2\lambda_{n,2})B) r_n\lambda^n.$$

Then

$$\mu_n(B) \gtrsim \text{Ł}^1((1-2\lambda_{n,2})B),$$

因此，当 n足够大时，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\mu_n(B)}{\text{Ł}^1(B)} \gtrsim 1.$$

因此

$$C_3^{-1} \le \liminf_{n\to\infty}\frac{\mu_n(B)}{\text{Ł}^1(B)} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{\mu_n(B)}{\text{Ł}^1(B)} \le C_3,$$

其中，$C_3 > 0$ 是一个与 n 和 B无关的常数。

2）现在我们证明，对于某个 s， μ_n 的能量有界。我们有

$$\begin{aligned} I_s(\mu_n) &= \iint |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) \\ &= \sum_{i=1}^{M_n}\sum_{j=1}^{M_n}\int_{I_{n,i}}\int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) \\ &= \sum_{i=1}^{M_n}\int_{I_{n,i}}\int_{I_{n,i}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M_n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M_n}\int_{I_{n,i}}\int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y). \end{aligned}$$

1）当 $i=j$ 时，对于某个 $i\geq 1$， $x\in I_{n,\ i}$ 我们有

$$I_1(x) := \int_{I_{n,i}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(y) \leq \frac{1}{r_n^2}|I_{n,i}|^{1-s} \lesssim e^{n\{(1+s)\alpha-(1-s)\log\lambda\}}.$$

注意，对于任意 $s<$对数~~$\lambda-\alpha$~~对数 $\lambda+\alpha$，我们有 $I_1(x)\lesssim 1$，这意味着

$$I_1 := \sum_{i=1}^{M_n}\int_{I_{n,i}}\int_{I_{n,i}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(x)\,\mathrm{d}\mu_n(y) \lesssim r_n\lambda^n r_n^{-1}\lambda^{-n} < C_4 \quad (4.5)$$

对于充分大的 n 成立。

2）对于 $x\in I_{n,\ i}$ 对于某个 $i\geq 1$，令

$$I_2(x) := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M_n}\int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(y).$$

对于 $p\geq 0$，设

$$A_p = \Big\{ j : I_{n,j}\cap\Big\{ (x_0,y) : \frac{p+1}{S_k} > |y-x| \geq \frac{p}{S_k}\Big\}\neq\varnothing\Big\}.$$

Then

$$\begin{aligned} I_2(x) &\leq S_1(x)+S_2(x) \\ &:= \sum_{p=1}^{S_k-1}\sum_{j\in A_p}\int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(y) + \sum_{\substack{j\in A_0\\ j\neq 1}}\int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_n(y). \end{aligned}$$

对于 $p \geq 1$、$j \in A_p$ 和 $y \in I_{n,\ j}$，我们有 $|x-y| \geq \frac{p}{S_k}$。由引理4.4可知，对于任意 $s \leq 1$,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{p=1}^{S_k-1} \sum_{j \in A_p} \mu_n(I_{n,j}) \Big(\frac{p}{S_k}\Big)^{-s} \\ &\asymp \sum_{p=1}^{S_k-1} \#A_p p^{-s} r_n^{-1} \lambda^{-n} S_k^s \\ &\asymp \lambda^{\frac{n}{2}(s-1)} \sum_{p=1}^{S_k-1} p^{-s} \leq \lambda^{\frac{n}{2}(s-1)} \int_0^{S_k} u^{-s}\, \mathrm{d}u \\ &\leq \lambda^{\frac{n}{2}(s-1)} \lambda^{\frac{n}{2}(1-s)} \leq C_5. \end{aligned} \tag{4.6}$$

现在我们估计 $S_2(x) = \sum_{\substack{j \in A_0 \\ j \neq 1}} \int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s} \mathrm{d}\mu_n(y)$。回顾 (4.2)，则对于 $m \neq j$,

$$d(E_n^m, E_n^j) \gtrsim \lambda^{-n}.$$

我们将区间之间的最短距离 $\{I_{n,i}\}$ 记为 d_n，则对于任意 $j_1 \neq j_2 \in A_0$，有 $d(I_{n,j_1}, I_{n,j_2}) \geq d_n \gtrsim \lambda^{-n}$。因此

$$\begin{aligned} S_2(x) &\leq \sum_{q=1}^{\#A_0} (q d_n)^{-s} \mu_n(I_{n,j}) \lesssim r_n^{-2} r_n \lambda^{-n} \lambda^{ns} \sum_{q=1}^{\#A_0} q^{-s} \\ &\leq r_n^{-1} \lambda^{n(s-1)} \int_0^{\#A_0} u^{-s}\, \mathrm{d}u \leq r_n^{-1} \lambda^{n(s-1)} (r_n S_k)^{1-s} \\ &\lesssim r_n^{-s} \lambda^{\frac{n}{2}(s-1)} = e^{n\{\alpha s + \frac{1}{2}\log\lambda(s-1)\}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

注意，对于任意 $s < \log\lambda \log\lambda + 2\alpha$，有 $S_2(x) \lesssim 1$。由 (4.6) 和 (4.7)，对于任意 $s < \log\lambda \log\lambda + 2\alpha$，有

$$I_2 := \sum_{i=1}^{M_n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M_n} \int_{I_{n,i}} \int_{I_{n,j}} |x-y|^{-s}\, \mathrm{d}\mu_n(x)\, \mathrm{d}\mu_n(y) < C_6. \tag{4.8}$$

注意，

$$\min\Big\{\frac{\log\lambda - \alpha}{\log\lambda + \alpha}, \frac{\log\lambda}{\log\lambda + 2\alpha}\Big\} = \frac{\log\lambda - \alpha}{\log\lambda + \alpha}$$

对所有 $\alpha > 0$ 均成立。结合 (4.5) 和 (4.8)，对于任意 $s < \log\lambda - \alpha \log\lambda + \alpha$，当 n 足够大时，有 $I_s(\mu_n) < C_4 + C_6$。

记为 $s_1 = \log\lambda - \alpha \log\lambda + \alpha$。应用引理 1.3，可得 $\limsup_{n\to\infty} F_n \in \mathcal{G}^{s_1}(L_{x_0})$。□

假设 μ 是定义在 $[0,1]^2$ 上的有限测度，并且可以分解为

$$\mu(A) = \int \mu_x(A \cap \{x\} \times [0,1])\, \mathrm{d}\nu(x) = \int \mu_x(A)\, \mathrm{d}\nu(x),$$

对任意 $A \in \mathcal{B}$，其中 μ_x 是支撑集包含于 $\{x\} \times [0,1]$ 的测度。我们称 $\{\mu_x\}_{x\in[0,1]}$ 是 μ 关于 ν 的测度分解。此外，我们假设 μ_x 和 ν 是概率测度。

引理 4.5。如上所述，对于 μ，当 $x = (x_1, x_2)$ 时，有

$$R_{s+t}\mu(x) \le \int R_s\mu_{y_1}(x_2)|x_1 - y_1|^{-t}\,\mathrm{d}\nu(y_1).$$

特别地，如果 μ_x 的 s 维里斯势一致有界，并且 ν 具有有界的 t 维势，那么

$$I_{s+t}(\mu) \le \sup_x \|R_s\mu_x\|_\infty \|R_t\nu\|_\infty.$$

证明。记 $x = (x_1, x_2)$ 和 $y = (y_1, y_2)$，则有

$$\begin{aligned} R_{s+t}\mu(x) &= \iint |(x_1,x_2)-(y_1,y_2)|^{-s-t}\,\mathrm{d}\mu_{y_1}(y_2)\,\mathrm{d}\nu(y_1) \\ &\le \int\left(\int |x_2-y_2|^{-s}\,\mathrm{d}\mu_{y_1}(y_2)\right)|x_1-y_1|^{-t}\,\mathrm{d}\nu(y_1) \\ &= \int R_s\mu_{y_1}(x_2)|x_1-y_1|^{-t}\,\mathrm{d}\nu(y_1). \end{aligned}$$

因此

$$\|R_{s+t}\mu\|_\infty \le \sup_x \|R_s\mu_x\|_\infty \|R_t\nu\|_\infty.$$

由于 μ 是概率测度，我们有 $I_{s+t}(\mu) \le \|R_{s+t}\mu\|_\infty$。 □

现在我们完成主要结果定理1.4的证明。

定理*1.4*的证明。对于 $\alpha \ge \frac{1}{2}\log\lambda$，由定理 4.1可得

$$E \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2),$$

其中 $s_0 = \min\left\{ \frac{2\log\alpha + \log\lambda}{\log\lambda}, \frac{1}{\alpha}\log\lambda \right\}$，

因此

$$\dim_{\mathrm{H}} E \ge s_0.$$

对于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\log\lambda$，令 $\tilde{\mu}_n$ 定义为

$$\tilde{\mu}_n(A) = \int \mu_{x,n}(A)\,\mathrm{d}x,$$

对于 $A \in \mathcal{B}$，其中 $\mu_{x,n} = \frac{1}{\mathrm{L}(F_n(x))}\mathrm{L}^1|_{F_n(x)}$。对于 $n \ge 1$，

$$\tilde{\mu}_n(\mathbb{T}^2 \setminus E_n) = 0,$$

也就是说，$\tilde{\mu}_n$ 的支撑集包含于 E_n中。于是 $\{\mu_{x,n}\}_{x\in\mathbb{T}}$ 是 $\tilde{\mu}_n$ 关于勒贝格测度 L^1的测度分解。

由定理 4.2，s_1维的黎曼势 μ_{2k+1} 在 k 足够大时一致有界；注意，对于任意 $\varepsilon > 0$，L^1 的$(1-\varepsilon)$维势有界。应用定理 4.2 和引理 4.5，当 k 足够大时，我们有

$$I_{s_1+1-\varepsilon}(\tilde{\mu}_{2k+1}) < \infty,$$

此处当 $\alpha < \frac{1}{2}\log\lambda$时， $s_0 - \varepsilon = s_1 + 1 - \varepsilon$。容易证明，对于任意球 $B \subset \mathbb{T}^2$,

$$1 \lesssim \liminf_{k\to\infty} \frac{\tilde{\mu}_{2k+1}(B)}{\mathrm{L}(B)} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\tilde{\mu}_{2k+1}(B)}{\mathrm{L}(B)} \lesssim 1.$$

应用引理 1.3，我们有 $\limsup_{k\to\infty} E_{2k+1} \in \mathcal{G}^{s_0-\varepsilon}(\mathbb{T}^2)$。由于$\varepsilon > 0$ 是任意的，我们有 $\limsup_{k\to\infty} E_{2k+1} \in \mathcal{G}^{s_0}$，特别地，$\dim_{\mathrm{H}} E \geq s_0$.

因此，对于 $\alpha > 0$，我们有

$$E \in \mathcal{G}^{s_0}(\mathbb{T}^2),$$

且 $\dim_{\mathrm{H}} E \geq s_0$。结合引理 3.1，我们有 $\dim_{\mathrm{H}} E = s_0$。□

致谢。 张楠·胡的这项研究得到了中国国家留学基金管理委员会的资助。

References

[1] S. Baker 和 M. Farmer，自共形集的定量回归性质，Proc. Amer. Math. Soc. 149(3) (2021), 1127–1138。[2] L. Barreira 和 B. Saussol，通过 *Poincar´e*回归研究测度的豪斯多夫维数，Comm. Math. Phys. 219 (2001), no. 2, 443–463。[3] M. D. Boshernitzan，定量回归结果，Invent. Math. 113 (1993), no. 3, 617–631。[4] Y. Chang、M. Wu 和 W. Wu，定量回归性质与齐次自相似集，Proc. Amer. Math. Soc. 147(4) (2019), 1453–1465。[5] K. Falconer，具有大交集的集合类，Mathematika 32(2) (1985), 191–205。[6] K. Falconer，分形几何：数学基础与应用，第三版。John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014。[7] B. Gr¨unbaum 和 G. C. Shephard，皮克定理，Amer. Math. Monthly 100 (1993), no. 2, 150–161。[8] Y. He、L. Liao，分段扩张映射上的定量回归性质 $[0,1]^d$，arXiv:2302.05149。[9] M. Hussain、B. Li、D. Simmons 和 B.-W. Wang，回归理论的动力系统*Borel–Cantelli*引理，Ergodic Theory and Dynamical Systems, 42(6), 2022, 1994-2008。[10] M. Kirsebom、P. Kunde 和 T. Persson，关于收缩目标与自回归点，即将发表于 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, arXiv:2003.01361v2。[11] T. Persson、H. Reeve，具有大交集的集合的*Frostman*型引理及其在丢番图逼近中的应用，Proceedingsof the Edinburgh Mathematical Society, Volume 58, Issue 02, June 2015, 521–542。[12] T. Persson，质量转移原理与具有大交集的集合，Real Anal. Exchange 47 (2022), no. 1, 191–205。[13] B. Tan 和 B.-W. Wang，β动力系统中的定量回归性质，Adv. Math. 228 (2011), no. 4, 2071–2097。[14] S. Seuret 和 B.-W. Wang，共形迭代函数系中的定量回归性质，Adv. Math. 280 (2015), 472–505。

Z.-N. Hu, School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, P. R. China电子邮箱地址：hnlgdxhzn@163.com

T. Persson, Centre for Mathematical Sciences, Lund University, Box 118, 221 00 Lund, Sweden电子邮件地址: tomasp@maths.lth.se