arXiv:2303.02603v1 [math.AT] 5 Mar 2023

通过外推 Morava-Euler示性数得到同伦基数

Lior Yanovski*

摘要

我们通过在限制到奇素数 p 后构造一个唯一的可加共同推广，回答 John Baez 提出的一个问题：经典欧拉示性数与 Baez-Dolan 同伦基数之间有何关系。具体做法是对任意 $\ell \mid p-1$，将与 Morava $K(n)$ 上同调理论相关联的欧拉示性数序列 ℓ-进地外推至高度 $n=-1$。我们在若干情形下明确计算了这一序列，并将一些广为流传的启发式比较纳入理论，这些比较涉及欧拉示性数与同伦基数，以及发散级数的求和。



插图出自《哲学珍珠》，1503年，作者为 Gregor Reisch（Typ 520.03.736，哈佛大学霍顿图书馆）。

*耶路撒冷希伯来大学爱因斯坦数学研究所。

目录

1 引言 2 2 Morava-欧拉示性数 10 3 示例

ζ_X **20 4 ℓ-进连续分解**

26

参考文献 **31**

1 引言

计数与同伦

去范畴化原初的罪过，是从有限集范畴 Fin 转向其同构类集合 $\mathbb{N}$。将一个有限集映射到其同构类，也就是它的基数，这一过程会丢失关于该集合对称性以及不同集合之间不可逆映射的重要信息。然而，这也使一种称为计数的实用技巧成为可能。Fin 中二元余积和积的范畴构造，分别对应于集合 $\mathbb{N}$ 上的加法和乘法二元运算。基数映射

$$|-|\colon \mathrm{Fin} \longrightarrow \mathbb{N}$$

因此具有如下意义上的可加性和可乘性:

$$|X \sqcup Y| = |X| + |Y| \qquad , \qquad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

这就是算术的基础。
可加性还可以进一步扩展，以部分涵盖减法。给定有限集的单射 $X \hookleftarrow Z$, ！ Y，我们有容斥性质

$$|X \cup_Z Y| = |X| + |Y| - |Z|.$$

对单射的限制是 Fin 离散性的产物。 Z 中的每个点都会在推出 $X \cup_Z Y$中将 X 的一个点与 Y 的一个点对应起来，但将同一对元素对应两次，并不会对所得集合及其基数产生额外影响。然而，如果我们考虑的不是普通推出，而是同伦 推出，那么每次这样的对应都会被一个连接这两个点的路径 取代。为每条这样的路径赋值 -1 ，便能得到所谓推出的基数总值 $|X| + |Y| - |Z|$ 。也就是说，只要将每对点被对应的次数考虑在内，容斥性质就仍然成立。更进一步，将两条路径对应起来，应由一条“路径之间的路径”或一个二维圆盘来取代。每个这样的圆盘都应为总基数贡献 $+1$ ，因为它“将两次对应合而为一”，如此等等。这一思想被形式化为欧拉示性数的概念。

令 $\mathcal{S}^{\mathrm{fin}}$ 为有限空间范畴，即由点经有限同伦余极限生成的空间范畴。存在一个唯一的同伦不变量函数

$$\chi\colon \mathcal{S}^{\mathrm{fin}} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

由 $\chi(\varnothing) = 0$ 和 $\chi(\mathrm{pt}) = 1$归一化，它满足可加性，即

$$\chi(X \cup_Z^h Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(Z).$$

将空间 X 表示为点的（迭代）有限同伦余极限，可赋予其有限胞腔结构。若 x_n 是 n维胞腔的数量，那么根据迭代容斥性质，我们得到

$$\chi(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x_n \quad \in \quad \mathbb{Z},$$

因此，这样的 χ 是唯一的，并且可以按预期的方式计算。为了证明这个表达式定义良好（即仅取决于 X的同伦型），我们可以利用这样一个事实：它通过（上）同调与一个显然是同伦不变量的表达式相一致：

$$\chi(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H^{\mathrm{even}}(X;\mathbb{Q}) - \dim_{\mathbb{Q}} H^{\mathrm{odd}}(X;\mathbb{Q}).$$

因此，我们可以将欧拉示性数视为将有限集的基数概念延拓到同伦有限空间这一范畴中的唯一可加延拓。

回到有限集的通常基数，我们注意到，乘法性也可以扩展，以部分涵盖除法。设有限群 G 在有限集 X上自由作用。那么，我们有

$$|X/G| = |X|/|G|,$$

其中 X/G 是在该作用下的轨道集。这里，对自由作用的限制同样是由有限集的离散性决定的。改为考虑同伦轨道，则得到一个 1截断空间（等价地说，一个群胚）

$$X/\!\!/G = \coprod_{x\in X/G} BG_x.$$

若将有限群 G 的分类空间 $BG = \mathrm{pt}/\!\!/G$ 的基数定义为 $1/|G|$，则由轨道-稳定子定理可得

$$|X/\!\!/G| = |X|/|G|.$$

直观地说， BG 只有一个点，但具有 G 个对称性；在考虑其基数时，我们希望将这些对称性计算在内。受此启发，Baez 和 Dolan 在 [BD01]中引入了以下更高阶的同伦推广：

定义 1.1 (Baez-Dolan)。若空间 X 具有有限个同伦类，则称其为 π-有限的。也就是说，它有有限个连通分支，且每个连通分支只有有限个非零同伦群，并且这些群都是有限群。对于连通的 π-有限空间 X，其同伦基数定义为

$$|X| = \prod |\pi_n(X)|^{(-1)^n} \quad \in \quad \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

我们将这个函数扩展到非连通的 π-有限空间 X，方法是对 X 的（有限多个）连通分支的基数求和。

这一数学定义背后的想法是， π_2 的元素是 π_1 中元素的对称性，因此是“对称性的对称性”；结合上文在欧拉示性数语境中讨论的迭代容斥原理的乘法类比，便可得到上述公式。利用同伦群的长正合列，我们可以轻松推出同伦基数的扩展乘法性质：给定一个由 π-有限空间构成的纤维序列

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z,$$

其中 Z 是连通的，我们有

$$|Y| = |X||Z| \quad \in \quad \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

换句话说， π-有限群 $G = \Omega Z$ 作用于 π-有限空间 X ，其同伦轨道为$X/\!\!/G = Y$，并且我们有

$$|X/\!\!/G| = |X||BG| = |X|/|G|.$$

特别地，Baez-Dolan 同伦基数

$$|-|\colon \mathcal{S}^{\pi\text{-fin}} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

是将有限集的基数扩展到适当的乘法同伦有限空间上的唯一同伦不变量乘法 扩展。

自然会让人想知道，计数的两种同伦论扩展——欧拉示性数和同伦基数——是否一致。但是，正如 Baez 和 Dolan 早已指出的那样，由于所需的有限性条件几乎互不相容，因此无法比较二者。也就是说，唯一既有限又 π-有限的空间就是有限集。尽管如此， [Bae05]收集的大量启发式论据暗示，这两个概念或许终究有所关联。其中最基本的一条启发式论据涉及有限群 G的分类空间。按定义， BG 的同伦基数为 $1/|G|$，但由于 BG 总是无限维的，因此它没有定义良好的欧拉示性数。不过， BG 由 Bar 构造得到的标准胞腔结构在每个维度都有 $(|G|-1)^n$ 个胞腔 n。因此，若直接套用欧拉示性数公式，就会得到发散的几何级数

$$\chi(BG) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (|G|-1)^n.$$

总计 以任何合理的正则化方式强行求和，都会得到“预期”的答案 r

$$\frac{1}{1+(|G|-1)} = \frac{1}{|G|}.$$

This 以及对发散级数的其他启发式处理，促使 Baez 提出了以下 g

问题 1.2 （[Bae03]）。 欧拉示性数与同伦基数之间有何关系？

关于欧拉示性数各种推广的文献相当丰富，其中一些与上述问题有关（例如 [Lei08]）。更具体地说，“群的欧拉示性数”这一主题由来已久，在 [Bro12，第 IX 章]中可以找到出色的教科书式论述。从我们的角度来看，这一理论可以被视为对有限空间的欧拉示性数和有限群分类空间的同伦基数所作的一种性质良好的共同推广。然而，公平地说，迄今为止，对于一般的 π-有限空间，尚未对 Baez 的问题给出令人满意的答案。[1]

[1]一个解决 一篇预印本中声称使用了不同的技术 [Ber18], 但显然其中存在错误。T he 提出的方 然而，这种方法仍然很有趣，值得进一步探究。

广义同伦基数

探讨 Baez 的问题，一种方法是先考察这两种计数方式在多大程度上相容。也就是说，是否存在一类自然的空间，既包含有限空间，也包含π-有限空间，并且我们可以在其上定义一个性质良好的“广义同伦基数”函数，使其在前者上延拓欧拉示性数，在后者上延拓 Baez-Dolan 同伦基数。一个相当精简的此类设定是取由 π-有限空间在有限同伦余极限下生成的空间范畴$\mathcal{S}^{\mathrm{small}}$，并询问是否存在一个可加函数

$$|-|\colon \mathcal{S}^{\mathrm{small}} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

也就是说

$$|X \cup_Z^h Y| = |X| + |Y| - |Z|,$$

它将 π-有限空间映射到它们的同伦基数。不幸的是，很容易看出这是不可能的。对于任意两个不同的素数 p 和 q，同伦推出方块

$$\begin{array}{ccc} BC_p \times BC_q & \longrightarrow & BC_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ BC_p & \longrightarrow & BC_p * BC_q = \mathrm{pt} \end{array}$$

将推出

$$|BC_p| + |BC_q| - |BC_p \times BC_q)| = |\mathrm{pt}|,$$

从而

$$\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 - \frac{1}{q}\Big) = 0.$$

面对这一失败，我们或许可以寄望于：此类函数存在的障碍仅在于不同素数之间的相互作用。事实上，这正是我们关于 Baez 的问题的主要结果。令 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$ 为由 π-有限p-空间在有限余极限下生成的空间范畴，也就是说，其同伦群是 p-群。

定理 A. 对每个素数 $p \neq 2$，都存在一个（必然唯一的）广义同伦基数函数

$$|-|\colon \mathcal{S}^{p\text{-small}} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

满足：

(1) 若 $X \in \mathcal{S}^{p\text{-small}}$ 是一个连通的 π-有限 p-空间，则

$$|X| = \prod_{n \geq 1} |\pi_n(X)|^{(-1)^n}.$$

(2) 对于 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$ 中的每个图表 $X \leftarrow Z \to Y$，都有

$$|X \cup_Z^h Y| = |X| + |Y| - |Z|.$$

(3) 对于每个 $X, Y \in \mathcal{S}^{p\text{-small}}$，我们都有

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

诚然，这一结果仍有不足之处（当然还需要处理 $p = 2$ 的情形）。一个更自然的设定是考虑范畴 $\mathcal{S}^{p\text{-bigger}}$：该范畴由一个点在有限余极限和$\pi$-有限 p-空间形状余极限下生成，并在其中寻求一个同时平等处理减法与除法的函数

$$\|-\|\colon \mathcal{S}^{p\text{-bigger}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

满足广义可加性

$$\|X \cup_Z^h Y\| = \|X\| + \|Y\| - \|Z\|$$

以及广义可乘性

$$\|X /\!\!/ G\| = \|X\|/|G|$$

对于每个 π-有限 p-群 G 作用于 $X \in \mathcal{S}^{p\text{-bigger}}$的情形，其中 $|G|$ 是 Baez-Dolan 同伦基数。注意，我们有 $\mathcal{S}^{p\text{-small}} \subseteq \mathcal{S}^{p\text{-bigger}}$，而具有上述性质的函数 $\|-\|$ 将限制为定理 A中的广义同伦基数。然而，作者目前尚不知道如何构造这样的函数 $\|-\|$ （甚至不知道 $\mathcal{S}^{p\text{-bigger}}$ 是否真的大于 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$）。

Morava-Euler示性数

虽然通过计数胞腔来定义空间的欧拉示性数 X ，只有在空间 X 具有有限个胞腔的胞腔结构时才有意义，但通过有理上同调来定义

$$\chi(X) := \dim_{\mathbb{Q}} H^{\text{even}}(X;\mathbb{Q}) - \dim_{\mathbb{Q}} H^{\text{odd}}(X;\mathbb{Q})$$

则对所有具有有限维有理上同调的空间 X 都有意义，其中包括所有 π-有限空间。此外， χ 在其有定义的空间的所有同伦推出上都具有可加性，因此我们确实得到一个可加函数

$$\chi\colon \mathcal{S}^{p\text{-small}} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

当然，问题在于它无法在 π-有限 p-空间（即它们的同伦基数）上给出所需的值，因为它只假设取整数值。事实上，在有理上同调看来， π-有限空间 X 是离散的，因此我们得到 $\chi(X) = |\pi_0(X)|$。定理A 中构造广义同伦基数的关键思想，是考察相对于其他上同调理论的欧拉示性数，从而生成一列可加函数

$$\chi_n\colon \mathcal{S}^{p\text{-small}} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

虽然它们都不会是所需的广义同伦基数（因为同样地，它们都假设取整数值），但经过某种极限过程便会得到一个函数

$$|-|\colon \mathcal{S}^{p\text{-small}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

在 π-有限的 p-空间上取值正确。此外，同伦推出中的可加性会在这一极限过程中保留下来，因此 $|-|$ 也将具有这种性质。

上文提到的上同调理论是色同伦论中的$Morava$ K-理论。对于一个隐含固定的素数 p 和一个色谱高度 $0 \leq n \leq \infty$，我们有表示空间上某种（广义）上同调理论的 Morava$K$-理论环谱 $K(n)$。在极端情形下，我们有通常的上同调理论

$$K(0)^*(X) = H^*(X;\mathbb{Q}) \quad , \quad K(\infty)^*(X) = H^*(X;\mathbb{F}_p),$$

而 n 的中间值则在零特征与正特征之间提供了某种外推，这种外推只存在于“高等代数”中。对于每个 K（n），系数环κ_n ：$=$ K（n）*(pt)都是分次域，因此我们可以考虑 K（n）*（X）关于 κ_n的维数。根据 [RW80], 中进行的基本计算，对于每个有限 n，$\mathsf{S}^{\mathrm{small}}$ 中的对象都具有有限维的 K（n）上同调。

定义 **1.3.** 对于每个 $X \in \mathcal{S}^{\mathrm{small}}$，高度为 n 的 $X \in \mathcal{S}^{\mathrm{s}}$的*Euler–Morava*特征
mall定义为

$$\chi_n(X) := \dim_{\kappa_n} K(n)^{\mathrm{even}}(X) - \dim_{\kappa_n} K(n)^{\mathrm{odd}}(X).$$

将其限制在$\mathcal{S}^{p\text{-small}}$上，就得到所需的可加函数序列。值得注意的是，借助Lurie发展的一套关于温和全能性 的深奥理论，这些数可以用初等方式描述，即通过计数从环面出发的映射的同伦类。

定理1.4 ([Lur19，推论4.8。6])。 对于一个 π-有限 p-空间 X，

$$\chi_n(X) = |[\mathbb{T}^n, X]| \quad \in \quad \mathbb{N},$$

其中 $\mathbb{T}^n$ =$(S^1)^n$ 是 n 维环面。

这个公式颇为引人注目。例如，注意到左侧是两个维数的差值，而右侧则是一个由函子性定义的集合的基数。

注 1.5。 事实上，Lurie 更一般地证明，对于任意 π-有限空间 X，Morava-欧拉示性数 $\chi_n(X)$ 等于从 p-进环面 $B^n\mathbb{Z}_p$到 X的映射的同伦类数量。在本文中，我们主要坚持讨论 p-空间，在这些空间中二者相同。唯一的例外是第 $X = BG$ 节中考虑 G 一般有限群 3的例子。这一特殊情形早于 Lurie 的 [Lur19]，Hopkins-Kuhn-Ravenel 关于广义特征标理论的工作已经对其进行了处理 [HKR00]。

换个角度看,我们对固定的 π-有限 p-空间 X 考虑函数 ζ_X: $\mathbb{N}$! $\mathbb{N}$ 给定的 y

$$\zeta_X(n) := \chi_n(X) = |[\mathbb{T}^n, X]|.$$

关于这个函数，我们的主要结果如下:

定理 B. 对于每个 π-有限 p-空间 X 和一个素数 $\ell \mid (p-1)$，函数 ζ_X: $\mathbb{N}$! $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_\ell$可唯一延拓为连续的 ℓ-*adic* 函数

$$\hat{\zeta}_X : \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell,$$

使得（独立于 ℓ）

$$\hat{\zeta}_X(-1) = |X| \quad \in \quad \mathbb{Q} \ (\subseteq \mathbb{Q}_\ell).$$

由可加性可知，对于每个 $X \in \mathcal{S}^{p\text{-small}}$，莫拉瓦欧拉示性数$\chi_n(X)$ 序列在 n 中是一致的 ℓ-进连续的，并且其外推到 $n=-1$ 所得的值是一个有理数。由此得到

$$|-| := \chi_{-1} : \mathcal{S}^{p\text{-small}} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

是所需的广义同伦基数函数，从而证明了定理A。
为了直观了解上述广义同伦基数的构造，考察以下两个例子很有启发性：

(1) 对于 X 有限空间，数列 $\chi_n(X)$ 是常数，因此特别地

$$\chi_n(X) = \chi_0(X) \quad \in \quad \mathbb{Z}.$$

取 ℓ-进极限 $n \to -1$，我们仍得到 X的经典欧拉示性数。

(2) 对于 $X = B^d C_p$ 度数为 d的 C_p Eilenberg-MacLane 空间，我们有

$$\chi_n(B^d C_p) = p^{\binom{n}{d}} \quad \in \quad \mathbb{Z}.$$

现在，虽然函数 $\binom{n}{d}$ 仅对 $n \geq 0$以组合方式定义，但它关于 n是多项式，因此可以外推到 $n=-1$，其形式为

$$\binom{-1}{d} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-d)}{1\cdot 2\cdots d} = (-1)^d.$$

此外，由于 $p \equiv 1$ 模 ℓ，函数 p^n 也在 ℓ-进拓扑下连续，因此取复合函数 $p^{\binom{n}{d}}$ 的 ℓ-进极限 $n \to -1$，得到

$$p^{\binom{-1}{d}} = p^{(-1)^d} = |B^d C_p|.$$

我们注意到，对于一般的 π-有限 p-空间 X，上同调理论 $K(n)$ 只能观察到 n阶 Postnikov 截断 X，因此，为了恢复所有 π-有限 p-空间的同伦基数，我们确实需要函数序列 χ_n 的全部项。定理 B 的一个有趣推论是，此类空间的同伦基数是一种稳定不变量。

与高阶半可加性的关系

我们对定理 B 的证明完全是初等的。我们分析数列 $\zeta_X(n) := |[\mathbb{T}^n, X]|$ 这些数仅通过 Lurie 公式与 X 的欧拉–莫拉瓦示性数相关，而我们将该公式视为黑箱。尽管如此，我们仍借此机会提供一些理论背景，这或许能揭示更深层的结构现象，而本文的结果不过是这些现象在数值上的投影（也或许能指向更强的版本）。由于这纯粹是为了阐释，我们只以非正式的方式略述相关思路。更多信息可参见 [HL13、CSY22、CSY21、Lur19]。

首先，用一种更高深的方式来定义有限空间X 的经典欧拉示性数：它是其悬挂谱 $X \otimes \mathbb{S} \in \mathrm{Sp}$ 的对称么半维数。也就是说，对于一般的可对偶谱 X，其维数（恒等映射的迹）是 $\pi_0(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}$ 的一个元素。

由于范畴 Sp 是稳定的，其中的可对偶对象在有限（余）极限下封闭，并且它们的维数满足可加性

$$\dim(X \cup_Z^h Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(Z).$$

因此，将经典欧拉示性数限制在有限空间的悬挂谱上，我们便可将其恢复（关于这一观点的更多内容，请参见 [PS14]）。

类似地， π-有限空间的 $K(n)$-上同调具有有限维性的深层原因，是 Hopkins-Lurie 意义下 $K(n)$-局部谱的范畴 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 具有 ∞-半可加性（[HL13]）。粗略地说，这意味着，以一个 π-有限空间为指标的 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 中的图表，其极限与余极限存在典范同构。这一显著性质有许多推论，其中之一是 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 中的可对偶对象在 π-有限（余）极限下封闭。由于 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 也是稳定的，可对偶对象在有限（余）极限下也封闭。特别地，对于每个 $X \in \mathsf{S}^{p\text{-small}}$， $K(n)$-局部化的悬挂谱 $X \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{S}_{K(n)}$ 在 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$中是可对偶的，我们可以计算它的维数

$$\dim(X \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathbb{S}_{K(n)}) \in \pi_0(\mathbb{S}_{K(n)}),$$

并且这个维数函数和之前一样是可加的。环 $\pi_0(\mathbb{S}_{K(n)})$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 的幂零加厚，虽然 Carmeli 和 Yuan 的工作表明，奇异幂零元 可以以这种方式出现，但忽略幂零部分后，我们恰好得到整数

$$\chi_n(X) := \dim_{\kappa_n} K(n)^{\mathrm{even}}(X) - \dim_{\kappa_n} K(n)^{\mathrm{odd}}(X) \quad \in \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_p.$$

总而言之，空间的欧拉–莫拉瓦示性数可以根据谱范畴 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 中可对偶对象的对称幺半维数来定义；由于这些范畴的高阶半可加性，这些对象在 π-有限余极限下是闭合的。Baez 和 Dolan 的同伦基数事实证明也与高阶半可加性密切相关。正如在普通半可加范畴中可以对态射进行加法一样，在高阶半可加范畴中，可以沿 π-有限空间对态射进行积分。特别地，在一个 π-有限空间X上对某个对象的恒等态射进行积分，可以看作乘以“ X的基数”，而它是环 $\pi_0(\mathbb{S}_{K(n)})$ 的一个元素。由此我们得到一列这样的基数

$$|X|_n \in \pi_0(\mathbb{S}_{K(n)}).$$

此外， $K(n)$-局部对称幺半维数也可通过以下公式用这些术语表述：一个 π-有限的 p-空间 X 的

$$\dim(X \otimes \mathbb{S}_{K(n)})) = |LX|_n.$$

对于高度 $n = 0$，也就是说，对于有理谱范畴 $\mathrm{Sp}^{\mathbb{Q}} = \mathrm{Sp}^{K(0)}$，这种基于高阶半可加性的基数概念恰好就是 Baez-Dolan 同伦基数

$$|X|_0 = |X| \in \mathbb{Q} = \mathbb{S}_{\mathbb{Q}}.$$

对于更高的高度，可以应用 Lurie 的温和全能性机制来证明， $|X|_n$ 的整数部分与 $|L^n X|_0$ 相同。结合以上所有结果，Euler–Morava 特征与 Baez-Dolan 同伦基数便处于同等地位。具体而言，序列

$$|X|,\ \chi_0(X),\ \chi_1(X),\ \chi_2(X),\ \chi_3(X),\ \ldots$$

与序列相差幂零元

$$|X|_0,\ \ |X|_1,\ \ |X|_2,\ \ |X|_3,\ \ |X|_4,\ \ \dots$$

因此，我们可以大致将定理B 理解为：一个 π-有限 p空间 X 的高阶半加性基数序列 ℓ关于色谱高度是 n-进连续的。

大纲

在第2节中，我们证明定理B，定理A 则如上文所述由此推出。证明自然地分为两部分：证明 $\zeta_X(n)$ 是 ℓ- 进连续的，并证明外推至 $n=-1$ 是 $|X|$。

在第3节中，我们考察三类例子。首先，我们证明，对于环空间，函数$\zeta_X(n)$ 看不到 X 的 Postnikov 不变量，因此具有非常简单的组合公式。其次，我们利用 [HKR00] 的结果分析 $X=BG$ 的情形，其中 G 是一个一般的有限（不一定是 p-）群。第三，我们构造一族具有非平凡 Postnikov 不变量的 π-有限 p空间，并给出 $\zeta_X(n)$ 关于 p-二项式系数的公式。

在第4节中，我们回到对 $|BG|$ 与 $\chi(BG)$的启发式比较。我们从广义同伦基数的 ℓ-进连续性角度重新诠释这一比较，并建立一个一般框架，即 ℓ-进连续的分解，将这一现象推广到高阶 π-有限群。

致谢

这里介绍的大部分结果，都是我在2017年攻读博士学位期间的第一个项目中，在 Tomer Schlank 的指导下取得的（他建议我“以某种方式运用 Morava K-理论”）。这些结果随后在当年于雷根斯堡举办的跨色同伦论会议上公布，此后也在多场报告中介绍过，但种种琐事使写作过程一再延迟。需要指出的是，当时 Lurie 的 [Lur19]尚未出版，许多一般性的高阶半加性背景也仍付之阙如。因此，从某种意义上说，如今正是更适合阐述这些想法的时候，这或许能稍稍弥补这漫长的拖延。

我衷心感谢 Tomer Schlank 多年来在本项目中给予我的帮助和指导。也感谢他对本文早期草稿提出的宝贵意见。我还要感谢 Maxime Ramzi；通过许多富有启发性的交流，他重新激发了我对本项目的兴趣，并促使我最终写成本文。我也想感谢 John Baez，他对这些及其他高阶范畴论思想所作的诸多精彩阐述，最初促使我开始思考这一项目。最后，我要感谢 seminarak 群的所有现任及前任成员，感谢他们带来的富有启发性的交流和鼓励；尤其感谢 Shai Keidar 和 Shaul Ragimov，他们为命题3.5第二部分的证明提供了优雅的论证。

2 Morava-Euler示性数

本节将证明定理B，由此可得定理A，正如我们上文所解释的。也就是说，我们需要证明，给定一个 π-有限 p-空间 X，函数 $\zeta_X(n)=|[\mathbb{T}^n,X]|$

可延拓为一个 ℓ-进连续函数 $\hat{\zeta}\colon \mathbb{Z}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$，且 $\hat{\zeta}_X(-1) = |X|$. 我们将应用以下判据：

定理 2.1 (Mahler [Mah58])。 一个函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_\ell$ 可延拓为一个（必然唯一的）连续 $\hat{}$ 函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_\ell$，当且仅当其逆二项式变换

$$\overline{f}(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

满足 $f(\overline{n}) \to n$ 在 ℓ-*adic* 范数下，当 $n \to \infty$时。此外，在这种情况下，$\hat{} f$ 在$a \in \mathbb{Z}_\ell$ 处的值由下式给出

$$\hat{f}(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \overline{f}(k).$$

我们的策略是利用归纳法分析 X 的 Postnikov 塔，并显式考察 $X = B^d C_p$的情形，以验证一个 π-有限 p-空间 X的 ζ_X 满足这一判据。

范畴化马勒定理

为实施这 一策略，我们需要将马勒定理中的所有要素都“范畴化”。

定义 2.2. 保序单射 $[k] \hookrightarrow [n]$ 诱导出环面 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k$之间的一个投影。我们称这些为标准投影。若 $L^n X$ 中的一个元素是由某个 $\mathbb{T}^k \to X$ 中的元素经某个标准投影 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k \to X$ 诱导而来，则称其为旧元素，其中 $k < n$；否则称其为新元素。我们令

$$LX = L_{\mathrm{old}} X \sqcup L_{\mathrm{new}} X$$

表示将 LX 划分为旧元素（即常值元素）和新元素的分区。于是， $L^n X$ 中的新元素为 $L^n_{\mathrm{new}} X \subseteq L^n X$，旧元素则为其补集。

警告 2.3. 尽管我们可以将新元素空间 $L^n_{\mathrm{new}} X \subseteq L^n X$的记号解释为函子 L_{new} 作用于 X后迭代 n 次，但类似的论断对 $L^n X$中的旧元素并不成立。特别地，我们将记号 $L^n_{\mathrm{old}} X$ 专用于函子 L_{old} 作用于 X后迭代 n次；对于 $n \geq 1$，这通常是旧元素空间$L^n X \setminus L^n_{\mathrm{new}} X$的真子空间。

注意，标准投影 $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^k$ 有截面，因此对于每个 X，相应的映射$L^k X \to L^n X$ 都有反 *retract*。特别地，诱导映射 $\pi_0(L^k X) \to \pi_0(L^n X)$ 是单射。此外，我们希望证明， $\pi_0(L^n X)$ 中的每个元素，都是由 $\pi_0(L^k X)$ 中某个新的元素诱导而来，且对应唯一的最小坐标子集 $[k], \to [n]$。由于我们讨论的是模同伦的分解，这一点并非显而易见。我们将使用以下结果：

引理 2.4。 设 $A, B, C \in S$ 是空间，并有一个映射

$$f\colon A \times B \times C \longrightarrow X.$$

若 f 可经由每个投影在同伦意义下分解

$$A \times C \longleftarrow A \times B \times C \longrightarrow B \times C,$$

那么它在同伦意义下经由投影 $A \times B \times C \to C$ 分解。

Proof. 先考虑 $C = \mathrm{pt}$ 的情形。如果 $f\colon A \times B \to X$ 同时经由两个投影分解 s

$$A \longleftarrow A \times B \longrightarrow B$$

在同伦意义下，那么它便通过它们由连接给出的同伦推出分解：

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \star B \end{array}$$

论断现在由一个标准事实得出：底部映射和右侧映射是零伦的（例如参见 [DH21，命题 2.21。]）。一般 C 的论断可由上述特殊情形得出：将定义 $A \star B$ 的推出方块与 C 相乘，并注意到所得方块仍然是推出方块。

□

因此，

命题 2.5。 设 X 是一个空间，且 $n \geq 0$。$\pi_0(L^n X)$ 中的每个元素都由 $\pi_0(L^k X)$ 中的一个唯一新的元素沿着唯一的包含映射 $[k]$,*!* $[n]$诱导而来。

证明。 由引理 2.4可知，若映射 $\gamma\colon \mathbb{T}^n \to X$ 通过 $[n]$的两个坐标子集分解，那么它便通过它们的交集分解。因此，存在一个最小的 $[k] \hookrightarrow [n]$ 使得 γ 属于限制映射 $\pi_0(L^k X) \to \pi_0(L^n X)$的像，因而是新的；又由于该映射是一个包含映射，原像是唯一的。

□

我们得到，子集的集合 $\pi_0(L^n_{\mathrm{new}} X) \subseteq \pi_0(L^n X)$ 将函数 $\zeta_X(n) = |\pi_0(L^n X)|$ 的二项式变换范畴化。

推论 2.6. 对于每个 π-有限的 X，都有 $\zeta_X(n) = \overline{|}\pi_0(L^n_{\mathrm{new}} X)|$ 对所有 $n \geq 0$ 均成立。

证明。 由上可知， $\pi_0(L^n X)$ 的每个元素都唯一地由 $\pi_0(L^k X)$ 的一个新的元素沿着唯一的 $[k]$, ！ $[n]$ 诱导而来。因此我们得到，

$$\pi_0(L^n X) \simeq \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k} \times \pi_0(L^k_{\mathrm{new}} X),$$

由此可得

$$\zeta_X(n) = |\pi_0(L^n x)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |L^k_{\mathrm{new}} X|,$$

因此

$$\overline{\zeta}_X(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \zeta_X(n) = |L^n_{\mathrm{new}} X|.$$

□

因此，我们需要证明新的映射数 $\mathbb{T}^n \to X$ 能被ℓ的高次幂整除。现在我们也将这一性质范畴化。由于 X 是一个 π-有限的 p-空间，我们有

$$L^n X = \mathrm{Map}(B\mathbb{Z}^n, X) = \mathrm{Map}(B\mathbb{Z}_p^n, X).$$

由于 $\ell \mid (p-1)$，我们有一个嵌入 $\mathbb{Z}/\ell$，！ $\mathbb{F}_p^\times$，并且 $\mathbb{F}_p^\times$通过 Teichmüller 提升进一步嵌入到 $\mathbb{Z}_p^\times$。因此，群 $(\mathbb{Z}/\ell)^n$ 通过该嵌入以对角矩阵的形式作用于 $L^n X$

$$(\mathbb{Z}/\ell)^n \hookrightarrow (\mathbb{Z}_p^\times)^n \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

我们将此嵌入的像记为 $G_n \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$。

引理 2.7. 对于每个空间 X， G_n 在 $L^n X$ 上的作用保持 $L^n_{\mathrm{new}} X \subseteq L^n X$。

证明. 这直接源于标准投影是 G_n-等变的这一事实。

□

因此，根据轨道-稳定子定理，只需证明 $\pi_0(L^n_{\mathrm{new}} X)$ 的元素不可能有非常大的稳定子 $G \leq G_n$。也就是说，余维 $\dim(G_n/G)$ 有一个关于 n 的下界，且该下界趋于无穷。

ℓ-进连续性

为便于归纳法，我们将证明一个更强的结果：对于每个充分大的$G \leq G_n$，都能为 $\pi_0(L^n X)$中所有被 G固定的元素指定一个特定的“退化指标” $1 \leq i \leq n$，而该指标只取决于 X的截断层级。为此，我们将使用 G_n 对空间$L^n X$ 的作用，并分析其同伦 不动点。注意，由于任意子群 $G \leq G_n$ 都是一个 ℓ-群，且 $L^n X$ 的同伦群都是 p-群，因此我们有一个自然同构

$$\pi_0((L^n X)^{hG}) \xrightarrow{\sim} (\pi_0(L^n X))^G.$$

我们将反复使用这一点。

定义 2.8. 对于 $G \leq G_n$ 和 $d \in \mathbb{N}$，若指标 $1 \leq i \leq n$ 在 G下是 d-退化 的，则称之，其中 G 不包含在任何如下形式的子群中

$$G_{\vec{i}} = \{g \in G_n \mid g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_{d'}} = 1\} \leq G_n,$$

对于任意 $d' \leq d$ 以及一个包含 i的多重指标 $\vec{i} = (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{d'} \leq n)$。

注 2.9。 根据定义，如果 i 在 $G \leq G_n$下是 d-退化的，那么它在该条件下也会是 $(d-1)$-退化的。也就是说，这些条件的强度依次递增。

证明 ζ_X 的 ℓ-进连续性的关键在于以下论断：

引理 2.10. 设 $G \leq G_n$ 是一个子群，在该子群下某个指标 $1 \leq i \leq n$ 是 d-退化的。对于每个 d-有限 p-空间 X，由 $[n \smallsetminus i]$ 诱导的映射，！ $[n]$ 是一个同构

$$(L^{n \smallsetminus i} X)^{hG} \xrightarrow{\sim} (L^n X)^{hG}.$$

证明. 我们通过对 d 和 $\pi_* X$ 的总大小进行归纳来证明这一论断。对于 $d = 0$，该论断显然成立，因此假设 $d \geq 1$。由归纳法，我们可以假设 $\pi_d(X) \neq 0$，并且有一个纤维序列

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow B^{d+1} C_p$$

带有 Y a d-有限的 p-空间，且带有 $|\pi_* Y| < |\pi_* X|$。由于 L^k 和 $(-)^{hG}$ 都是保极限函子，我们得到一个纤维序列的映射：

$$\begin{array}{ccccc} (L^{n\setminus i} X)^{hG} & \longrightarrow & (L^{n\setminus i} Y)^{hG} & \longrightarrow & (L^{n\setminus i} B^{d+1} C_p)^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (L^n X)^{hG} & \longrightarrow & (L^n Y)^{hG} & \longrightarrow & (L^n B^{d+1} C_p)^{hG} \end{array}$$

根据归纳法，中间的垂直映射是同构，因此要证明左侧的垂直映射是同构，只需证明右侧的垂直映射是同构。事实上，只需证明它是连通分支的包含，因为我们可以舍弃右侧水平映射未命中的连通分支。由于右侧的垂直映射有一个截面，它在所有同伦群上都是单射，尤其在 π_0 上也是如此。此外，它是环空间（即空间中的群对象）之间的映射，因此只需证明它在基点所在的连通分支上是同构；换言之，在施加 Ω 之后是同构。由于一切都与 Ω 交换，我们得到相应的映射

$$(L^{n\setminus i} B^d C_p)^{hG} \longrightarrow (L^n B^d C_p)^{hG}.$$

通过归纳法，该映射在次数为 ≥ 1 的所有同伦群上都是同构，并且在 π_0 上也是单射，因为它存在一个收缩。因此，接下来只需证明它在 π_0 上是满射。注意到

$$\pi_0 L^n B^d C_p \simeq H^d(\mathbb{T}^n; \mathbb{F}_p) = \bigwedge^d \mathbb{F}_p\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

因此，该群中的元素是楔积 $x_{\vec{i}} = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_d}$ 的线性组合。$g = (g_1, \ldots, g_n) \in G_n$ 在 $x_{\vec{i}}$ 上的作用由显然的公式给出

$$g x_{\vec{i}} = (g_{i_1} x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (g_{i_d} x_{i_d}) = (g_{i_1} \cdots g_{i_d}) x_{\vec{i}}.$$

因此，$x = \sum c_{\vec{i}} x_{\vec{i}}$ 被 g 固定，当且仅当对每个满足 $c_{\vec{i}} \neq 0$ 的 $\vec{i}$，都有 $g_{i_1} \cdots g_{i_d} = 1$。由于 i 在 G 下是 d-退化的，我们得到，G-不变元素 x 对于所有包含 i 的 $\vec{i}$ 都必须满足 $c_{\vec{i}} = 0$。换言之，它属于.....的像

$$\pi_0(L^{n\setminus i} B^d C_p) \simeq H^d(\mathbb{T}^{n\setminus i}; \mathbb{F}_p) = \bigwedge^d \mathbb{F}_p\{x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n\}.$$

□

为了利用上述结果，我们还需要以下关于子群 $G \leq G_n$ 大小的数值估计，以确保存在 d-退化指标。

引理 2.11. 对于满足 $G \leq G_n$ 且维数$(G_n/G) < \frac{n}{d}$ 的情况，存在一个指标 $1 \leq i \leq n$，它在 G下是d-退化的。

证明. 假设对于所有 $j = 1, \dots n$，指标 i 在 G 下不 d-退化，因此存在相应的 d'-元组 $\vec{i}_j$，满足 $G \subseteq G_{\vec{i}_j}$。因此，

$$G \subseteq G_{\vec{i}_1} \cap \cdots \cap G_{\vec{i}_n}.$$

也就是说，G 的元素满足一个包含所有 n 变量的 n 线性方程组（因为第 j个方程包含第 j个变量）。由于这些线性方程中的每一个都只涉及 $\leq d$ 个变量，因此存在一个由 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 个方程组成的子方程组，这些方程分别涉及两两不相交的变量子集，因而线性无关。因此，该方程组的秩至少为 $\frac{n}{d}$，这意味着 G 的余维至少为 $\frac{n}{d}$。 – □

结合上述结果，我们得到 $\pi_0(L^n_{\mathrm{new}}X)$中 G_n-轨道大小的一个下界。

命题 2.12. 对于每个 d-有限的 p-空间 X，$\pi_0(L^n_{\mathrm{new}}X)$ 中每个 G_n-轨道的大小都能被 $\ell^{\lfloor n/d \rfloor}$整除。

证明. 设 $\gamma \in \pi_0(L^n X)$ 是一个稳定子为 $G_\gamma \leq G_n$ 、余维为 $< \lfloor n/d \rfloor$的元素。根据引理 2.11，存在一个指标 $1 \leq i \leq n$，使得 i 在 d下是-退化的 G_γ。因此，根据引理2.10，我们有

$$(L^{n \smallsetminus i}X)^{hG_\gamma} \xrightarrow{\sim} (L^n X)^{hG_\gamma}.$$

利用 G_γ 是一个 ℓ-群且 $L^k X$ 是一个 p-空间这一事实，我们推得

$$(\pi_0 L^{n \smallsetminus i}X)^{G_\gamma} \xrightarrow{\sim} (\pi_0 L^n X)^{G_\gamma},$$

因此特别地，γ 不是新的。最后，每个元素 $\gamma \in L^n_{\mathrm{new}}X$ 的稳定子 $G_\gamma \leq G_n$ 的余维为 $> \lfloor n/d \rfloor$，所以其轨道的大小必为 $\ell^{\lfloor n/d \rfloor}$ 的倍数。 □

由此　　我们立即得到关于 ζ_X(n 的 ℓ-进连续性论断的定量改进　　).

命题 2.13。对于每个 d-有限 p-空间 X，我们有

$$\ell^{\lfloor n/d \rfloor} \mid \overline{\zeta}_X(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

特别地，函数 ζ_X： $\mathbb{N}$! $\mathbb{Q}_\ell$ 具有一个（唯一的） ℓ-进延拓 ˆ ζ_X： $\mathbb{Z}_\ell$! $\mathbb{Q}_\ell$。

证明。由命题 2.12，$\pi_0(L^n_{\mathrm{new}}X)$ 是由 G_n-轨道组成的不交并，每个轨道的大小都能被$\ell^{\lfloor n/d \rfloor}$整除。因此，同样的结论也适用于$\zeta_X(n) = |\pi_0(\overline{L^n_{\mathrm{new}}X})|$。 □

注 2.14。事实上，由于 ζ_X(n) 的 ℓ-进赋值随 n 至少呈线性 增长，ζ_X 到 $\mathbb{Z}_\ell$ 的延拓甚至是局部解析的。

外推至 -1

ˆ证明函数 ζ_X 存在 ℓ-进延拓 ζ_X： $\mathbb{Z}_\ell$! $\mathbb{Q}_\ell$ 对于每个 π-有限 p- ˆ空间 X之后，剩下要证明 $\zeta_X(-1) = |X|$。由马勒定理结合推论2.6，可得

$$\hat{\zeta}_X(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \overline{\zeta}_X(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |\pi_0(L^n_{\mathrm{new}}X)|.$$

然而，目前尚不清楚如何证明这个整数级数在 ℓ-进意义下收敛到有理数 $|X|$。因此，我们采用间接方法并定义另一个函数:

$$\xi_X(n) = |L^n X| \quad \in \quad \mathbb{Q}.$$

ξ_X 与 ζ_X 之间的关系如下:

P命题 2.15. 对于任意 π-有限空间 X 和 $n \geq 0$，我们有 $\zeta_X(n) = \xi_X(n+1)$。

证明。 对于任意连通的 π-有限空间 X，纤维序列

$$\Omega X \longrightarrow LX \longrightarrow X$$

意味着

$$|LX| = |X| \cdot |\Omega X| = |X| \cdot |X|^{-1} = 1.$$

对于 $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_r$这一连通分支的并，我们有

$$|LX| = |LX_1 \sqcup \cdots \sqcup LX_r| = |LX_1| + \cdots + |LX_r| = |\pi_0 X|.$$

由此可知，对于任意 $n \geq 0$ ，我们有

$$\xi_X(n+1) = |L^{n+1}X| = |L(L^n X)| = |\pi_0(L^n X)| = \zeta_X(n).$$

□

也就是说， ξ_X 的值是将 ζ_X 向上平移一位后得到的，而 $\xi_X(0) = |X|$。因此，要证明 $\zeta_X(-1) = |X|$，只需证明 ξ_X 满足马勒判据。难点在于， ξ_X的逆二项式变换，

$$\overline{\xi}_X(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} |L^k X|,$$

比 ζ_X的逆二项式变换更难分析，因此我们将利用已经证明的关于后者的结果来研究前者。回想一下，我们有 $LX = L_{\text{new}}X \sqcup L_{\text{old}}X$ ，并且显然 $L_{\text{new}}L_{\text{old}} \simeq L_{\text{old}}L_{\text{new}}$，因此得到

$$|L^k X| = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} |L_{\text{old}}^{k-m} L_{\text{new}}^{m} X|.$$

提醒一下， $L_{\text{old}}^k X$ 表示将 L_{old} 作用于 X 后得到的第 k 次迭代，因此这些是 $L^k X$中“非常古老”的元素。于是我们定义另一个辅助函数 $\eta_X(k) = |L_{\text{old}}^k X|$ ，其逆二项式变换为

$$\overline{\eta}_X(k) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \eta_X(m).$$

我们得到

引理 2.16. 对于每个 π-有限空间 X,

$$\overline{\xi}_X(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \overline{\eta}_{(L_{\text{new}}^m X)}(n-m).$$

证明. 展开定义,

$$\overline{\xi}_X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} |L^k X| =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m} |L_{\text{old}}^{k-m} L_{\text{new}}^{m} X| \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} \eta_{L_{\text{new}}^m X}(k-m).$$

利用二项式恒等式

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

我们得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} \eta_{(L_{\text{new}}^m X)}(k-m) =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{n-m}{k-m} \eta_{(L_{\text{new}}^m X)}(k-m) \right).$$

重新索引，使 $k-m$ 变为 k，最终得到,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-m-k} \binom{n-m}{k} \eta_{(L_{\text{new}}^m X)}(k) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n}{m} \overline{\eta}_{(L_{\text{new}}^m X)}(n-m).$$

□

因此，只需给出 $\eta_{(L_{\text{new}}^m X)}(n-m)$ 的 ℓ-进赋值的统一下界，该下界由一个随 $n!$ ∞ 而趋于无穷的函数给出。我们先分析 η_X。

引理 2.17。 对于每个连通的 d-有限空间 X，我们有

$$\eta_X(n) = \prod_{m=1}^{d} |\pi_m(X)|^{-\binom{n-1}{m-1}}.$$

证明。 注意，我们有自然同构

$$\Omega L Y \simeq L\Omega Y \simeq \Omega Y \times \Omega^2 Y$$

对于每个基点空间 Y。利用 $L_{\text{old}}^n X$ 连通这一事实，并对上述结果进行归纳应用，我们计算得出

$$\eta_X(n) = |L_{\text{old}}^n X| = |\Omega L_{\text{old}}^n X|^{-1} = |\Omega L^n X|^{-1} = |L^n \Omega X|^{-1} = \prod_{k=0}^{n} |\Omega^{k+1} X|^{-\binom{n}{k}} =$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\Big(\prod_{m=0}^{\infty}|\pi_m(\Omega^{k+1}X)|^{(-1)^m}\Big)^{-\binom{n}{k}}=\prod_{k=0}^{\infty}\Big(\prod_{m=0}^{\infty}|\pi_{m+k+1}(X)|^{(-1)^m}\Big)^{-\binom{n}{k}}=$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\Big(\prod_{m=k+1}^{\infty}|\pi_m(X)|^{(-1)^{m+k+1}}\Big)^{-\binom{n}{k}}=\prod_{m=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=0}^{m-1}|\pi_m(X)|^{(-1)^{m+k+1}}\Big)^{-\binom{n}{k}}=$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=0}^{m-1}|\pi_m(X)|^{(-1)^{m+k+1}}\Big)^{-\binom{n}{k}}=\prod_{m=1}^{\infty}|\pi_m(X)|^{(-1)^m\left(\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{k}(-1)^k\right)}=$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}|\pi_m(X)|^{-\binom{n-1}{m-1}}=\prod_{m=1}^{d}|\pi_m(X)|^{-\binom{n-1}{m-1}}.$$

在倒数第二个等式中，我们使用了二项式恒等式

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{n}{k}(-1)^k=(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}.$$

□

进一步假设 X 是一个 p-空间，我们得到以下推论：

推论 2.18. 对于每个连通的 d-有限 p-空间 X，都有

$$\eta_X(n)=p^{f(n)},$$

其中 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 是一个次数为 d的（取整数值）多项式。

证明. 根据引理 2.17，我们可以取

$$f(x)=-\sum_{m=0}^{d}c_m\binom{x-1}{m-1}$$

对于 $c_m=\log_p|\pi_m(X)|$。 □

为了分析这类函数的逆二项式变换，我们将使用一个关于多项式的逆二项式变换的简单观察。

引理 2.19。对于每个次数为 d 的多项式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$f(n)$ 的逆二项式变换满足 $f(n)=0$，其中 $n\geq d+1$。

证明。逆二项式变换可通过 $f(n)=(\Delta^n f)(0)$ 计算，其中 Δ 是前向差分算子

$$(\Delta f)(n)=f(n+1)-f(n).$$

对于次数为 d 的多项式 f，其前向差分 Δf 是次数为 $d-1$ 的多项式，因此该论断可由归纳法得出。

□

命题 2.20。 对于每个 d-有限的 p-空间 X，我们有

$$\ell^{\lfloor n/d \rfloor} \mid \overline{\eta}_X(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明。 由推论 2.18，我们有 $\eta_X(n) = p^{f(n)}$ 对于某个次数为 d 的多项式。记 $p = 1 + \ell N$并展开

$$\eta_X(n) = (1+\ell N)^{f(n)} = 1 + \binom{f(n)}{1}\ell N + \binom{f(n)}{2}\ell^2 N^2 + \binom{f(n)}{3}\ell^3 N^3 + \dots$$

由于 $\binom{f(x)}{k}$ 是次数为 dk的多项式，根据引理 2.19，当 $n \geq dk+1$时，其逆二项式变换为零。由二项式变换的线性性可知，对于所有这样的 n，函数$G_X(n)$与上述展开式尾项的逆二项式变换 $G_{X,\overline{k+1}}(n)$ 一致

$$\eta_{X,k+1}(n) := \binom{f(n)}{k+1}\ell^{k+1}N^{k+1} + \binom{f(n)}{k+2}\ell^{k+2}N^{k+2} + \dots,$$

它可被 ℓ^{k+1}整除，由此得到该论断。 □

结合我们对 $\eta_X(n-m)$ 的估计与前一小节中对 $\zeta_X(m)$ 的估计，现在我们可以很好地证明函数 $\zeta_X(n) := |L^n X|$ 的 ℓ-进连续性。

定理 2.21. 对于每个 d-有限的 p-空间 X，函数$\xi_X(n) = |L^n X|$ 的逆二项式变换满足

$$\ell^{\lfloor n/d \rfloor} \mid \overline{\xi}_X(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

因此， ξ_X 在 ℓ-进拓扑下连续，从而 $\hat{\zeta}_X(-1) = \xi_X(0) = |X|$。

证明。 由引理 2.16，我们有

$$\overline{\xi}_X(n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \overline{\eta}_{(L^m_{\mathrm{new}}X)}(n-m).$$

因此，只需证明对每个 $m = 0, \dots, n$，都有

$$\ell^{\lfloor n/d \rfloor} \mid \overline{\eta}_{(L^m_{\mathrm{new}}X)}(n-m).$$

注意到

$$\overline{\eta}_{X \sqcup Y}(k) = \overline{\eta}_X(k) + \overline{\eta}_Y(k).$$

因此,

$$\overline{\eta}_{(L^m_{\mathrm{new}}X)}(n-m) = \sum_{\gamma \in \pi_0(L^m_{\mathrm{new}}X)} \overline{\eta}_{(L^m_\gamma X)}(n-m),$$

其中 $L^m_\gamma X \subseteq L^m X$ 是 γ的连通分支。每个 $L^m_\gamma X$ 都是一个连通的 d-有限 p-空间，因此由命题 2.20 可得

$$\ell^{\lfloor (n-m)/d \rfloor} \mid \overline{\eta}_{(L^m_\gamma X)}(n-m).$$

另一方面，群 $G_n \simeq (\mathbb{Z}/\ell)^n$ 作用于 $\pi_0(L^m_{\mathrm{new}}X)$，并且如果 γ 和 γ' 属于同一轨道，那么

$$\overline{\eta}_{(L^m_\gamma X)}(n-m) = \overline{\eta}_{(L^m_{\gamma'} X)}(n-m).$$

我们还证明了每个轨道的大小都能被 $\ell^{\lfloor m/d \rfloor}$整除。因此，根据命题2.12，$\eta_{(L^m_{\mathrm{new}}X)}(n-m)$ 能被整除

$$\ell^{\lfloor m/d \rfloor} \cdot \ell^{\lfloor (n-m)/d \rfloor} = \ell^{\lfloor m/d \rfloor + \lfloor (n-m)/d \rfloor}$$

and

$$\lfloor m/d \rfloor + \lfloor (n-m)/d \rfloor \geq \lfloor n/d \rfloor.$$

□

3 ζ_X的例子

我们建立函数 ζ_X 的 ℓ-进连续性，并计算其向 $n=-1$ 的外推时，无需显式写出以 X 的同伦不变量表示数 $\zeta_X(n)$ 的闭式公式。在本节中，我们将在一些足够简单的情形下给出这类公式；这些情形也暗示了要在完全一般的情况下建立此类公式有多么困难。

环路空间

正如引言中所述，对于 Eilenberg-MacLane 空间 B^dC_p 这一基本例子，我们有

$$\zeta_{B^dC_p}(n) = |H^d(\mathbb{T}^n; \mathbb{F}_p)| = p^{\binom{n}{d}}.$$

由于 $p \equiv 1$ 模 ℓ，这个函数是 ℓ-进连续的，而它向 $n=-1$ 的外推确实与 ℓ 无关，由下式给出：

$$p^{\binom{-1}{d}} = p^{(-1)^d} = |B^dC_p| \quad \in \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_\ell.$$

更一般地，对于任意环空间而言，情况都相当简单。

例 3.1。对于一个 d-有限环空间 X，我们有 $LX \simeq X \times \Omega X$，因此

$$\zeta_X(n) = \zeta_X(n-1)\zeta_{\Omega X}(n-1).$$

由于 ΩX 是一个（$d-1$）-有限环空间，我们可以归纳地解出上述递归公式，

$$\zeta_X(n) = \prod_{k=0}^{d} |\pi_k X|^{\binom{n}{k}},$$

只需使用二项式恒等式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

换句话说，当 X 是一个环空间时，ζ_X 看不到 X的 Postnikov 不变量，也就是说，它无法将其与 Eilenberg-MacLane 空间的积 [2] $\prod_{k=0}^{d} B^k(\pi_k X)$ 区分开来。

[2]作者：[HRW98], 对于双重环路 π-有限空间， $K(n)$-同调本身无法检测 Postnikov 不变量 ts.

相比之下，对于任意的 π-有限 p-空间 X（它们不是环空间），情况要复杂得多。这是因为 LX 的连通分支不再彼此同构（随着函子 L 不断迭代，这一问题会愈发严重）。因此，函数 ζ_X 不再仅取决于 X的同伦群的大小。我们给出了两个例子族，在其中可以为 ζ_X写出闭式公式，并且展示了 ζ_X 对同伦群结构和 X的 Postnikov 不变量的依赖性。

分类空间

分类空间的 Morava-Euler 示性数 BG 适用于有限（不一定是 p-）群 G，Hopkins-Kuhn-Ravenel 早已在其关于广义特征标理论的著名著作 [HKR00]中研究过。固定一个（隐含的）素数 p，令 $G^{(n)} \subseteq G^n$ 表示所有 n个由 p中的 G-幂阶可交换元素构成的元组集合。群 G 通过（同时）共轭作用于 $G^{(n)}$。在 [HKR00定理 B], 的第一部分中，证明了

$$\chi_n(BG) = |G^{(n)}/\mathrm{conj}| = |[B\mathbb{Z}_p^n, BG]|.$$

此外，利用 G的阿贝尔子群格上的莫比乌斯反演，[HKR00，定理 B] 给出了公式

$$\chi_n(BG) = \frac{1}{|G|}\sum_A c_A[A : A_p]|A_p|^{n+1},$$

其中求和遍及所有阿贝尔子群，$A \leq G$、$A_p \leq A$ 是 p主部（即 p-西洛子群），而 c_A 是由递归关系确定的整数系数

$$\sum_{B\leq A} c_B = 1.$$

特别地，显然 $\chi_n(BG)$ 是 ℓ-进连续的，其向 $n = -1$ 的外推由下式给出：

定义 3.2. 对于每个有限群 G 和素数 p，我们将 BG 的 p-典型同伦基数定义为

$$|BG|_p := \frac{1}{|G|}\sum_A c_A[A : A_p].$$

特别地，当 G 是一个 p-群时，上述 $\chi_n(BG)$ 的公式具有如下形式：

$$\zeta_{BG} := \chi_n(BG) = \frac{1}{|G|}\left(c_1 p^{a_1(n+1)} + \cdots + c_r p^{a_r(n+1)}\right),$$

对于某些 a_1、…、$a_r \in \mathbb{N}$ 和 c_1、…、$c_r \in \mathbb{Z}$。显然还有 $\sum c_i = 1$，因此

$$|BG|_p = \hat{\zeta}_{BG}(-1) = \frac{1}{|G|} = |BG|.$$

根据定理 B。

例 3.3。 有 3 个阶为 8 的阿贝尔群 G：

$$\mathbb{Z}/8 \quad , \quad Z/4 \times \mathbb{Z}/2 \quad , \quad (\mathbb{Z}/2)^3.$$

正如我们已经知道的，对它们中的所有对象，都有

$$\zeta_{BG(n)} = \frac{1}{8} \cdot 8^{n+1}.$$

剩下的（非交换）8 阶群是二面体群 D_4 和四元数群 Q_8。对这两者来说，所有真子群都是阿贝尔群。每种情况下都有 3 个阶为 4 的极大子群，任意两个的交都是中心，其阶为 2。因此，我们得到

$$\zeta_{BD_4}(n) = \zeta_{BQ_8}(n) = \frac{1}{8}(3 \cdot 4^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1}).$$

当 G 不是 p-群时，情况略有不同。首先，如果 G 是幂零的，它就是若干q-群 G_q 的积，其中涉及各种素数 q，于是我们得到 $f_{BG} = f_{BG_p}$。特别地，

$$|BG|_p = |BG_p| = \frac{1}{|G_p|}.$$

因此，从精确的意义上说， $|BG|_p$ 是 $|G|$的 p-部分。

注 3.4. 更一般地，根据 [PS17], 每个幂零 π-有限空间 X 都唯一分解为有限个对象的积

$$X \simeq \prod_{q \text{ prime}} X_q \quad \in \quad \mathcal{S},$$

其中 X_q 是一个 π-有限 q-空间。因此我们有 $\zeta_X = \zeta_{X_p}$（从而也有 $|X|_p = |X_p|$）。

对于一般的有限群 G，数目 $|BG|_p$ 甚至不一定是 p 的幂，但我们仍有如下结论：

命题 3.5. 对于 G 有限群， $|BG|_p$ 是从 G 中随机选取的元素阶与 p互素的概率。此外， $|BG|_p$ 与 $|BG|$具有相同的 p 赋值。

证明. 每个元素 $g \in G$ 都属于某个阿贝尔子群 $A \leq G$。在每个这样的 A 中，阶与 p 互素的元素数为 $[A\colon\ A_p]$。因此，根据莫比乌斯反演，$\sum_A c_A[A\colon\ A_p]$ 恰好是 G中阶与 p 互素的元素数。对于第二部分，我们需要证明，阶与 p 互素的元素集合 $G^{(1)} \subseteq G$ 本身的大小与 p互素。设 $P \triangleleft G$ 是一个通过共轭作用于 $G^{(1)}$的p-西洛子群。根据轨道-稳定子定理，我们有

$$|\mathrm{Fix}_P(G^{(1)})| \equiv |G^{(1)}| \mod p.$$

设定 $H = C_G(P)$，我们得到 $\mathrm{Fix}_P(G^{(1)}) = H^{(1)}$。因此，如果 H小于 G，我们可以用归纳法继续。否则，我们得到 P在 G 中是中心的，因此对于某个阶与 p互素的群 K，有 $G \simeq P \times K$；在这种情况下，论断显然成立。 □

最后，我们给出对称群$G=\Sigma_m$情形下 $\chi_n(BG)$ 和 $|BG|_p$ 的显式公式。前者用生成函数的形式表达最为简洁，生成函数使用所谓的高斯（亦称 q）二项式系数：

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\dots(1-q)}$$

以下内容及其更复杂的版本可见于 [Tam01]。为完整起见，我们给出一个（简单的）直接论证。

命题 3.6。对所有 $n\geq 0$，都有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\chi_n(B\Sigma_m)x^m = \prod_{r=0}^{\infty}(1-x^{p^r})^{-\binom{r+n-1}{r}_p}$$

证明。 由伯恩赛德引理可得

$$|G^{(n)}/\mathrm{conj}| = \frac{1}{|G|}\sum_{\vec{g}\in G^{(n)}}|C_G(\vec{g})|.$$

注意， $|C_G(\vec{g})|$ 是将可交换的 n-元组 $\vec{g}=(g_1,\dots,g_n)$（其元素均为p次幂）扩展为可交换的 $(n+1)$-元组 $(g_1,\dots,g_n,h)$ 的方法数，其中 $h\in G$ 任意。换言之，我们得到

$$\chi_n(BG) = \frac{1}{|G|}|\hom(\mathbb{Z}_p^n\times\mathbb{Z},G)|.$$

根据 [Ges02，习题 5。13], 对每个有限生成群 H，都有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\hom(H\times\mathbb{Z},\Sigma_m)|}{m!}x^m = \prod_{d=1}^{\infty}(1-x^d)^{-c_d(H)},$$

其中 $c_d(H)$ 是 H 的指标为 d 的子群的共轭类数。因此，令 $H=\mathbb{Z}_p^n$，得到[3]

$$\sum_{m=0}^{\infty}\chi_n(B\Sigma_m)x^m = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|\hom(\mathbb{Z}_p^n\times\mathbb{Z},\Sigma_m)|}{m!} = \prod_{r=0}^{\infty}(1-x^{p^r})^{-c_{p^r}(\mathbb{Z}_p^n)}.$$

最后，我们有（参见，例如， [Gru97]）

$$c_{p^r}(\mathbb{Z}_p^n) = \binom{r+n-1}{r}_p.$$

□

例 3.7。 对于 $n=1$，我们得到生成函数 $\prod_{r\geq 0}\frac{1}{1-x^{p^r}}$. 这是通常的分拆函数的 p-典型类比，它统计了将 m 分拆成各部分阶为 p次幂的整数分拆数。这可以看作是对 m 个元素进行置换时可能出现的循环类型数，其中所有循环的长度都与 p 互素；这确实与 $|\Sigma_m^{(1)}/\mathrm{conj}|$一致。

[3]当$\mathbb{Z}_p^n$ 是多个）项 并非恰好是有限生成的，用 $(\mathbb{Z}/p^N)^n$ 替换它，对于 $N\gg 0$ 不会改变前面第一个（任意等式两边的 s，因此我们仍然可以将公式应用于它。

我们还可以给出 $B\Sigma_m$ 的 p典型同伦基数的一个非常简单的公式。

命题 3.8. 对于每个自然数 m 和素数 p，我们有

$$|B\Sigma_m|_p = \prod_{\substack{1\le d\le m,\\ p|d}} \Big(1-\frac{1}{d}\Big).$$

证明。 由命题 3.5， $|B\Sigma_m|_p$ 是一个随机置换的概率，其中置换作用于 m 个元素，其阶与 p互素；等价地说，所有循环的长度都与 p互素。众所周知，这由上面的公式给出（参见 [BG80，定理 2]）。□

对于奇数 p，我们可以利用 ℓ-adic 外推，从命题 $|B\Sigma_m|_p$ 3.6推出上述关于的公式。事实上，不难看出， p-二项式系数 $\binom{a}{b}_p$ 在 ℓ-adic 意义下关于 a连续。实际上，整个表达式也如此

$$\prod_{r=0}^{\infty}(1-x^{p^r})^{-\binom{r+n-1}{r}_p}$$

作为 n的函数。为了在 $n=-1$ 处求值，我们注意到，只有以下情形对应的项非零： $r=0$, 1，此时我们有（关于负自变量的 [FS19] -二项式系数的更多内容，参见 q），

$$\binom{-2}{0}_p = 1 \quad , \quad \binom{-1}{1}_p = -\frac{1}{p}.$$

因此我们得到，

$$\sum_{m=0}^{\infty} |B\Sigma_m|_p\, x^m = \frac{(1-x^p)^{1/p}}{1-x},$$

由此命题3.8 通过标准的泰勒级数展开即可直接得出。

杯幂扩张

如上所述，对于一般的 π-有限 p-空间 X，函数 ζ_X 取决于 X 的 Postnikov 不变量及其同伦群。我们将通过计算一族具有非平凡 Postnikov 不变量的空间上的 ζ_X 来说明这一点。空间 B^dC_p 表示 $\mathbb{F}_p$-上同调，因此运算

$$H^d(-;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{x\mapsto x^{\cup m}} H^{md}(-;\mathbb{F}_p)$$

由某个映射 $P^m\colon B^dC_p \to B^{2d}C_p$ 表示。我们令 $X_{d,\,m}$ 为该映射的同伦纤维，因此有一个纤维序列

$$X_{d,m} \longrightarrow B^dC_p \xrightarrow{P^m} B^{md}C_p.$$

由同伦群的长正合列，我们立即推得 $X_{d,m}$ 是连通的，并且

$$\pi_i(X_{d,m}) \simeq \begin{cases} C_p & i = d, md-1 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

We 首先将问题归约为组合学。令 $s_{d,m}(n)$ 表示元素的数量 ts

$$\omega \in \bigwedge^{d} \mathbb{F}_p\{x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{such that} \quad \omega^{\wedge m} = 0.$$

我们有如下结论:

命题 3.9. 对于所有 $n \geq 0$ 我们有

$$|L^n X_{d,m}| = p^{\binom{n-1}{md-1} - \binom{n-1}{d-1}} s_{d,m}(n).$$

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到一个纤维序列

$$L^n X_{d,m} \longrightarrow L^n B^d C_p \xrightarrow{P^m} L^n B^{md} C_p.$$

将范围限制在 $L^n B^{md} C_p$ 的基点所在的连通分支及其在 P^m 下的原像上，我们得到一个纤维序列

$$L^n X_{d,m} \longrightarrow L_0^d B C_p \xrightarrow{P^m} L^n_{\mathrm{old}} B^{md} C_p$$

其底空间连通。我们注意到，在 π_0 上，映射 P^m 将一个元素

$$\omega \in \bigwedge^{d} \mathbb{F}_p\{x_1, \dots, x_n\} = H^d(\mathbb{T}^n; \mathbb{F}_p) = \pi_0(L^n B^d C_p)$$

映射为其 m 次幂。因此， $|\pi_0(L_0^n B^d C_p)| = s_{d,\ m}(n)$，于是我们得到

$$|L^n X_{d,m}| = |L^n_{\mathrm{old}} B^{md} C_p|^{-1} |L^n_{\mathrm{old}} B^d C_p| s_{d,m}(n) = p^{\binom{n-1}{md-1} - \binom{n-1}{d-1}} s_{d,m}(n).$$

□

对于 $d = 2$ 和 $p \neq 2$，我们可以明确算出 $s_{d,\ m}(n)$ 的值，进而得到 $f_{X_{d,\ m}}(n)$ 的值。

命题 3.10. 对于 $p \neq 2$ 和所有 $m \geq 1$，我们有

$$\zeta_{X_{2,m}}(n) = p^{\binom{n}{2m-1} - n} \sum_{k=0}^{m-1} p^{k(k-1)} \left(\prod_{i=1}^{k} (p^{2i-1} - 1) \right) \binom{n+1}{2k}_p.$$

证明. 对每个 2-形式 ω，都有一个与之对应的反对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$，且 $\omega^m = 0$ 当且仅当 $\mathrm{rk}(A) < 2m$。秩为 $n \times n$ 的反对称矩阵的数量 $2k$ 由下式给出（例如参见 [LLM+10，命题 3.8]）

$$r_k(n) = p^{k(k-1)} \left(\prod_{i=1}^{k} (p^{2i-1} - 1) \right) \binom{n}{2k}_p,$$

and

$$s_{2,m}(n) = r_0(n) + r_2(n) + \cdots + r_{2m-2}(n).$$

因此我们得到

$$|L^n X_{2,m}| = p^{\binom{n-1}{2m-1} - n + 1} \sum_{k=0}^{m-1} r_{2k}(n) = p^{\binom{n-1}{2m-1} - n + 1} \sum_{k=0}^{m-1} p^{k(k-1)} \left(\prod_{i=1}^{k} (p^{2i-1} - 1) \right) \binom{n}{2k}_p.$$

最后，由关系 $\zeta_X(n) = |L^{n+1} X|$ 可得论断。 □

例 3.11。 对于 $m=2$，我们有 $\pi_2(X_{2,2})=\pi_3(X_{2,2})=C_p$，其余同伦群均为零，因此特别有 $|X_{2,2}|=1$。另一方面，

$$\zeta_{X_{2,2}}(n)=\frac{p^{n+1}+p^{2-n}-p-1}{p^2-1}p^{\binom{n}{3}},$$

这确实满足 $\hat{\zeta}_{X_{2,2}}(-1)=1$。

对于更大的 d，要显式确定 $s_{d,m}(n)$，进而确定 $\zeta_{X_{d,m}}(n)$，似乎要困难得多。

注 3.12。 在目前为止所有的显式例子中，函数 $\zeta_X(n)$ 都具有这样的形式：它是若干个 $p^{f(n)}$ 形式的函数在有理数上的线性组合，其中 $f(n)$ 是一个取整数值的有理数系数多项式。这个现象究竟表明了一般规律，还是仅仅反映了我们计算能力的局限，就留给读者判断。尤其是，我们很想知道，当$d>2$时，$\zeta_{X_{d,m}}(n)$（等价地，$s_{d,m}(n)$）是否也具有这种形式。

4 ℓ-进连续分解

到目前为止，我们只讨论了经典欧拉示性数与 Baez 和 Dolan 的同伦基数函数在何种程度上相容（即它们是否存在一个共同扩张）。不过，我们的结果也能为一些启发式理解提供依据，解释为什么即使在形式上只有其中一个定义良好，这两个数“仍希望彼此相同”。正如引言中所提到的，最基本的这类启发式理解涉及有限群 G 的分类空间，其中 BG 上的标准单纯结构给出了发散级数表达式

$$\chi(BG)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(|G|-1)^n.$$

通常会使用某种正则化技术来求得这个发散级数的目标结果 $1/|G|$，例如将幂级数函数解析延拓到点 $t=1$

$$f(t):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(|G|-1)^nt^n=\frac{1}{1+(|G|-1)t}.$$

我们注意到，当 G 是一个 p-群且 $\ell\mid(p-1)$ 时，定义 $\chi(BG)$ 的级数也会 *ℓ-adic* 收敛到 $1/|BG|$，无需进行正则化。此外，这也可以视为广义同伦基数函数的连续性结果。也就是说， BG 作为一个 π-有限 p- 空间，以及它的单纯骨架 $\mathrm{sk}^n(BG)$（它们都是有限空间），都属于 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$，并且我们有

$$|\mathrm{sk}^n(BG)|\xrightarrow{n\to\infty}|BG|\quad\in\quad\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}_\ell.$$

这种表述不仅更符合本文采用的视角，事实上也是一种更一般的连续性现象的特例。

定义 4.1。 给定 $X \in \mathcal{S}^{p\text{-small}}$， X 的一个 ℓ-进连续分解 是一个单纯形图表 $X_\bullet\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}^{p\text{-small}}$，满足 $\varinjlim X_\bullet = X$，并且序列 $x_n = |X_n|$ 可延拓为一个连续函数 $\mathbb{Z}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$，其在 $-1 \in \mathbb{Z}_\ell$ 处的值为 $|X|$。

若通过附加 $X_{-1} := X$ 将 $X_\bullet$ 变为增广单纯形空间，最后一个条件便可巧妙地写成

$$\lim_{n \to -1} x_n = x_{-1}.$$

我们将证明，对于 X 的 ℓ-进连续分解，其部分实现也属于 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$，且其基数在 ℓ-进拓扑下收敛到 $|X|$。此外，我们还将证明一类单纯形分解具有 ℓ-进连续性，其中包括有限 p-群的 Bar 构造。

我们先对单纯形对象的部分实现的基数作一般性观察。

命题 4.2。 设 $X_\bullet\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}^{p\text{-small}}$。第 n 阶部分实现 $\mathrm{sk}^n X$ 属于 $\mathcal{S}^{p\text{-small}}$，其基数为

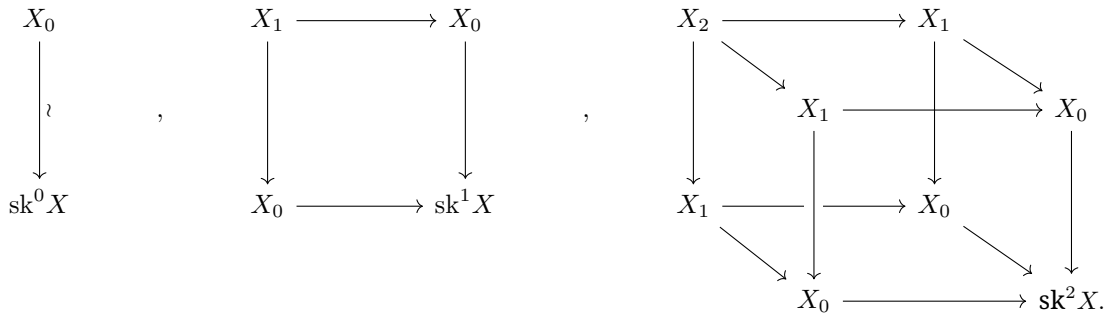
$$|\mathrm{sk}^n X| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overline{x}_k \quad \in \quad \mathbb{Q},$$

其中 $(\overline{x_k})$ 是序列 $x_n = |X_n|$ 的逆二项式变换。

证明。 根据定义，$\mathrm{sk}^n X$ 是将 $X_\bullet$ 沿 $\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n} \hookrightarrow \Delta^{\mathrm{op}}$限制后所得图表的余极限。虽然图表的形状 $\Delta_{\leq n}$ 本身并非有限，但存在一个从由单射 $\mathcal{J}_n \subseteq (\Delta_{\leq n})_{/[n]}$ 张成的全子范畴到它的右共终映射 $[m] \mapsto [n]$（参见 [Lur，引理 1.2.4。17]）。因此，我们可以利用这些有限图表如下计算 $X_\bullet$ 的部分实现

$$\mathrm{sk}^n X = \varinjlim_{\mathcal{J}_n^{\mathrm{op}}} X_\bullet.$$

举例来说， $n = 0$、1、2 这几种情况对应以下余笛卡尔 1 维、2 维和 3 维立方体：



通过反复应用同伦基数的可加性（即容斥原理），我们得到公式

$$|\mathrm{sk}^n X| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k+1} x_k,$$

因此

$$(-1)^n(|\mathrm{sk}^n X| - |\mathrm{sk}^{n-1} X|) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k+1}x_k - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k+1}x_k =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1}\right)x_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x_k = \overline{x}_n.$$

通过重新整理上述表达式即可得到该论断。 □

我们得到关于 ℓ-进连续分解的如下推论：

推论 4.3. 对于一个 $X_\bullet\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to S^{p\text{-small}}$，若它是 ℓ-进连续的 X 分解，则有，

$$|\mathrm{sk}^n X| \xrightarrow{n\to\infty} |X| \quad \in \quad \mathbb{Q}_\ell.$$

因此，数值 $|X|$ 按定义是当 $n \to -1$ 时 $|X_n|$ 的 ℓ-进极限，同时也是当 $n \to \infty$ 时 $|\mathrm{sk}^n X|$ 的 ℓ-进极限，

证明。 由命题 4.2 和马勒定理可得

$$\lim_{n\to\infty} |\mathrm{sk}^n X| = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \overline{x}_n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\overline{x}_n = \lim_{n\to -1} x_n = |X|.$$

□

单纯形分解的一个特殊来源是映射 $f\colon X \to Y$ 的 Check 分解 $\check{C}(f)_\bullet$，它在对象层面由迭代纤维积给出

$$\check{C}(f)_n = \overbrace{X \times_Y X \times_Y \cdots \times_Y X}^{(n+1)\text{ times}}.$$

完成上述所有准备工作后，我们很容易得到：

命题 4.4。 给定一个 π-有限 p-空间的纤维序列，$X \xrightarrow{f} Y \to Z$ 且其连通，$\check{C}(f)_\bullet$ 是 Y 的 ℓ-进连续分解。特别地，

$$\lim_{n\to\infty} |\mathrm{sk}^n \check{C}(f)| \longrightarrow |Y|.$$

证明。 由于 Z 连通，f 在 π_0 上是满射，因此 $\varinjlim \check{C}(f)_\bullet \simeq Y$。另一方面，令 $G = \Omega Z$ 为相应的 π-有限 p-群，则 $Y = X/\!\!/G$。f 的 Check 分解具有如下形式 $\check{C}(f)_n \simeq X \times G^n$，并且由于 G 的所有同伦群都是 p-群，序列

$$x_n := |\check{C}(f)_n| = |X||G|^n$$

延拓为 ℓ-进连续函数到 $\mathbb{Z}_p$ 上，其在 $n = -1$ 处的值为

$$|X||G|^{-1} = |X||Z| = |Y|.$$

□

回到我们用于阐释的示例，对于有限 p-群 G，基点映射 pt! BG 的 Check 分辨率 BG 产生了 G 上的 Bar 构造，这是一个单纯集合 $X_\bullet$，其在度数 n中具有 $|G|^n$ 个单纯形，其余极限为 BG。这重现了如下事实：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(|G|-1)^n$（其中 $(|G|-1)^n$ 表示 非退化 n-单纯形的数量）收敛到 $1/|G|$的 ℓ-进形式，这也正是函数 $|G|^n$的极限 $n!\ -1$。然而，该理论适用于更一般的情形。

例 4.5. 如果 G 是一个阿贝尔 p-群，那么 BG 仍然是一个 π-有限 p-群，并且我们可以迭代使用 Bar 构造，生成一个 d 重单纯集合，其在多重次数 $(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_d)$ 中的单纯形为 $|G|^{n_1 n_2 \cdots n_d}$，且其余极限为 B^dG。取对角线后，得到一个单纯集合 $X_\bullet$，其在次数 n 中的单纯形为 $|G|^{n^d}$，且其余极限仍为 B^dG。我们有，

$$|G|^{n^d} \xrightarrow{n\to -1} |G|^{(-1)^d} = |B^dG|.$$

因此，$X_\bullet$ 是 ℓ-进连续的 B^dG 分解。由此得到 $|\mathrm{sk}^n(B^dG)|\ !\ |B^dG|$，这可以看作是通过对上述单纯结构中每个维度的非退化单纯形数量作无穷交错求和，来计算空间 B^dG 的同伦基数。

注 4.6. 在前面的例子中，单纯集合 $X_\bullet$ 中实现为 B^dG 的非退化单纯形数量，其数量级为 p^{n^d}。这些数的超指数增长使得普通的（阿基米德）正则化技术（例如对幂级数作解析延拓）无法对它们求和。

最后，我们讨论一类更为精细的 ℓ-进连续分解的例子，它们来自适当有限的单纯群的 Bar 构造。回忆一下，单纯群 $G_\bullet$ 的相关 Moore 复形定义为

$$N_nG = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(G_n \xrightarrow{d_i} G_{n-1}),$$

连同其余的 d_0 微分，它是一个（非阿贝尔）群的链复形，其“同调”由 $\pi_n(G)$ 给出。

定义 4.7. 一个 π-有限单纯 p-群是指一个单纯群 $G_\bullet$，使得对所有 n，N_nG 都是有限的 p-群，且当 $n \gg 0$ 时其为零。

π-有限单纯 p-群 $G_\bullet$ 的实现是一个 π-有限 p-群 G。此外，利用由双单纯集合的对角线给出的 Bar 构造 $(BG)_\bullet$，其中 $(BG_n)_m = (G_n)^m$，我们得到 π-有限 p-空间 BG 的一个逐次数有限的单纯模型。

命题 4.8. 设 $G_\bullet$ 是一个 π-有限单纯 p-群，则 *Bar* 构造$(BG)_\bullet$ 是 BG 的一个 ℓ-进连续分解。

证明。考虑序列 $f(n) := \log_p |G_n|$ 和 $f(n) := \log_p |N_n\overline{G}|$。$G_n$ 关于这些 N_kG 的迭代半直积分解（例如，见 [MP01，命题 12.]）表明，序列 $f(n)$ 是序列 $(f(n))$ 的二项式变换。根据假设，存在 $d \geq 0$，使得对于 $n > d$，有 $f(n) = 0$。因此，

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \overline{f}(k).$$

是一个多项式。因此，函数 $|G_n| = p^{f(n)}$ 是 ℓ-进连续的，且满足

$$p^{f(-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} |N_n G|^{(-1)^n} = |G|.$$

经过 Bar 构造，我们得到

$$|(BG)_n| = |G_n|^n = p^{nf(n)},$$

它仍然是 ℓ-进连续的，并具有外推

$$p^{-f(-1)} = |G|^{-1} = |BG|.$$

□

注 4.9。 还有另一种标准的单纯模型，用于构造单纯群 $G_\bullet$ 的分类空间，记作 $(WG)_\bullet$。它与 $(BG)_\bullet$ 不同，特别是具有

$$(\overline{W}G)_n = G_0 \times G_1 \times \cdots \times G_{n-1}.$$

容易验证，对于一个 π-有限单纯 p-群 $G_\bullet$，单纯集合 $(WG)_\bullet$ 也是空间 BG 的ℓ-进连续分解。

参考文献

[Bae03] John Baez。欧拉示性数与同伦基数。在*“Fields Institute* 同伦论及其应用项目”上的讲座，2003年。[Bae05] John Baez。计数之谜：欧拉示性数与同伦基数。在“代数、几何与数学物理中的范畴”上的公开讲座，第 11–16 页，2005年。[BD01] John C Baez 和 James Dolan。从有限集到费曼图。载于 无限数学——*2001* 年及以后，第 29–50 页。Springer，2001年。[Ber18] John D Berman。欧拉示性数与同伦基数。*arXiv* 预印本 *arXiv:1811.07437*，2018年。[BG80] Ethan D Bolker 和 Andrew M Gleason。计数排列。*Journal of Combina-torial Theory, Series A*，29(2):236–242，1980年。[Bro12] Kenneth S Brown。群上同调，第 87 卷。Springer Science & Business Media，2012年。[CSY21] Shachar Carmeli、Tomer M. Schlank 和 Lior Yanovski。双向性与高度。数学进展，385:107763，2021年。[CSY22] Shachar Carmeli、Tomer M. Schlank 和 Lior Yanovski。色同伦论中的双向性。*Inventiones mathematicae*，228(3):1145–1254，2022年。

[DH21] Sanath Devalapurkar 和 Peter Haine。关于 James 分裂与 Hilton-Milnor分裂，以及亚稳定EHP序列。Documenta Mathematica，26:1423–1464，2021年。[FS19] Sam Formichella 和 Armin Straub。带负参数的高斯二项式系数。Annals of Combinatorics，23(3):725–748，2019年。[Ges02] IM Gessel。Richard P. Stanley 所著《枚举组合学》第二卷。Bulletin- American Mathematical Society，39(1):129–136，2002年。[Gru97] Boris Gruber。子格数量的替代公式。Acta Crystallographica Section A: 晶体学基础，53(6):807–808，1997年。[HKR00] Michael Hopkins、Nicholas Kuhn 和 Douglas Ravenel。广义群特征标与复定向上同调理论。Journal of the American So- ciety，13(3):553–594，2000年。[HL13] Michael Hopkins 和 Jacob Lurie。 $K(n)$-局部稳定同伦论中的双向性。预印本，2013年。[HRW98] Michael J Hopkins、Douglas C Ravenel 和 W Stephen Wilson。Morava Hopf代数与空间 $K(n)$等价于有限Postnikov系统。Stable and unstable homotopy，19:137–163，1998年。[Lei 08] Tom Leinster。范畴的欧拉示性数。Documenta Mathematica，13:21– 49，2008年。[LLM+10] Joel Brewster Lewis、Ricky Ini Liu、Alejandro H Morales、Greta Panova、Steven V Sam 和 Yan X Zhang。具有受限元素的矩阵与排列的 q-类比。arXiv 预印本 arXiv:1011.4539，2010年。[Lur] Jacob Lurie。高等代数。[Lur19] Jacob Lurie。椭圆上同调 III：温和上同调。2019年。[Mah58] Kurt Mahler。关于 p-进变量的连续函数的插值级数。1958年。[MP01] A Mutlu 和 Timothy Porter。单纯群的 Moore 复形中的迭代Peiffer配对。Applied Categorical Structures，9(2):111–130，2001年。[PS14] Kate Ponto 和 Michael Shulman。幺半范畴与双范畴中迹的线性性。arXiv 预印本 arXiv:1406.7854，2014年。[PS17] Matan Prasma 和 Tomer M Schlank。关于 ∞-群的 Sylow定理。Topology and its Applications，222:121–138，2017年。[RW80] Douglas C Ravenel 和 W Stephen Wilson。Eilenberg-MacLane 空间的 Morava K-理论与 Conner-Floyd猜想。American Journal of Mathematics，102(4):691–748，1980年。[Tam01] Hirotaka Tamanoi。对称积的广义轨形欧拉示性数与等变 Morava K-理论。Algebraic & Geometric Topology，1(1):115–141，2001年。