arXiv:2303.02612v1 [math.DG] 5 Mar 2023

空间形式中的三调和超曲面

YU FU 和 Dan Yang

Abstract. 本文研究浸入空间形式 $N^{n+1}(c)$ 的三调和超曲面。我们证明，球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中的任意真常平均曲率三调和超曲面都具有常数量曲率；双曲空间 $\mathbb{H}^{n+1}$ 中的任意常平均曲率三调和超曲面都是极小的。此外，我们证明，若主曲率零的重数至多为一，则欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的任意常平均曲率三调和超曲面都是极小的。特别地，我们能够证明欧几里得空间 $\mathbb{R}^6$ 中的每个常平均曲率三调和超曲面都是极小的。这些结果推广了 Montaldo-Oniciuc-Ratto 和 Chen-Guan 的一些近期工作，并对广义陈猜想给出了肯定回答。

1. Introduction

设 $\phi:(M,g)\to(N,\bar{g})$ 是黎曼流形 M与 N之间的光滑映射。Eells 和 Lemaire [8], 提出的 k-调和映射 ϕ，是 k-能量泛函的临界点

$$E_k(\phi)=\frac{1}{2}\int_M \left|(d+d^*)^k\phi\right|^2 v_g.$$

欧拉-拉格朗日方程可表示为 $\tau_k(\phi)\equiv 0$，其中 $\tau_k(\phi)$ 是 k-张力场。 k-调和映射的概念是调和映射的一种自然推广；特别地，对于 $k=2$ 和 $k=3$， E_2 或 E_3 的临界点分别是双调和映射或三调和映射（参见 [24], [25], [11], [12]）。

近年来，双调和映射和双调和子流形得到了广泛研究，参见 [3,10,19] 及其中的参考文献。关于三调和映射和三调和子流形也有许多研究成果（参见 [1,2,11–14,16,17]）。关于空间形式 $N^{n+1}(c)$ 中的三调和超曲面，Maeta [11] 证明，对于 $c\le 0$， $N^{n+1}(c)$ 中任意紧致的常平均曲率三调和超曲面都是极小的。最近，Montaldo-Oniciuc-Ratto [15] 系统地研究了空间形式中的常平均曲率三调和超曲面。作者证明了

定理 1.1. ([15]) 设 M^n 是 $N^{n+1}(c)$ 中的常平均曲率三调和超曲面，满足 $c\le 0$，并假设第二基本形式的平方范数 S 为常数。那么 M^n 是极小的。

特别地， [15]中关于 $n=2$ S 为常数的假设被取消了。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 53C40，58E20；次分类号 53C42。
Key words and phrases. k-调和映射，三调和超曲面，常平均曲率，常数量曲率。

定理 1.2。([15]) 设 M^2 是 $N^3(c)$中的常平均曲率三调和曲面。则当 $c \leq 0$ 时， M^2 是极小的；当 $c > 0$时， M^2 是小超球面的一个开子集。

最近，Chen-Guan 在空间形式 $N^{n+1}(c)$ 中研究了三调和常平均曲率超曲面，并对 $[6,7]$ 中互异主曲率的数量作出了一些假设。

定理 1.3. ([6]) 设 M^n ($n \geq 3$) 是 $N^{n+1}(c)$ 中至多具有三个互异主曲率的常平均曲率真三调和超曲面。那么 M^n 具有常数量曲率。

定理 1.4. ([7]) 设 M^n ($n \geq 4$) 是 $N^{n+1}(c)$ 中具有四个互异主曲率的常平均曲率真三调和超曲面。若零是一个重数至多为一的主曲率，则 M^n 具有常数量曲率。

我们回顾一下双调和子流形相关文献中的 Chen 猜想：欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的任意双调和子流形都是极小的。近年来，一些重要进展在某些几何限制条件下支持了这一猜想（例如，见 $[9,19]$），但一般情形仍未解决。鉴于 Chen 猜想，Maeta $[11]$ 进一步提出了关于 k-调和子流形的广义陈猜想：

猜想：欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的任意 k-调和子流形都是极小的。

本文中，我们能够确定空间形式 $N^{n+1}(c)$中常平均曲率三调和超曲面的几何性质，且不对主曲率的数量作任何限制。我们将证明以下结论：

定理 1.5. 设 M^n 是双曲空间$\mathbb{H}^{n+1}$中的常平均曲率三调和超曲面。则 M^n 是极小的。

此外，限制在 $c > 0$的情形下，我们得到

定理 1.6. 设 M^n 是球面$\mathbb{S}^{n+1}$中的常平均曲率真三调和超曲面。则 M^n 具有常数量曲率。

结合定理 1.6 与 Montaldo-Oniciuc-Ratto 的结果（定理 1.9, [15]）以及 Chen-Guan 的结果（推论 1.7, [7]），我们为 $\mathbb{S}^{n+1}$中的常平均曲率三调和超曲面给出了一个更一般的结果。

推论 1.7. 设 M^n 是球面$\mathbb{S}^{n+1}$中的常平均曲率真三调和超曲面，则以下两者必居其一：

(1) $H^2 = 2$ 和 M^n 是 $S^n(1/\sqrt{3})$ 的一个开子集，或者 (2) $H^2 \in (0, t_0]$ 且 $H^2 = t_0$ 当且仅当 M^n 是 $S^{n-1}(a) \times S^1(\sqrt{1-a^2})$ 的一个开子集，其中 a 由下式给出

$$a^2 = \frac{2(n-1)^2}{n^2H^2 + 2n(n-1) + nH\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}$$

且 t_0 是多项式在 (0, 2) 内唯一的实根

$$f_n = n^4t^3 - 2n^2(n^2 - 5n + 5)t^2 - (n - 1)(2n - 5)(3n - 5)t - (n - 1)(n - 2)^2.$$

我们回顾广义陈猜想（参见 $[4, 5]$），该猜想指出：单位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 中任意具有常平均曲率和常数量曲率的闭超曲面都是等参数的。由于球面中的常平均曲率真三调和超曲面这一类具有常数量曲率，下一个重要问题便是研究这些超曲面是否为等参数的。这个问题在一般情形下仍未解决。读者可参阅 Tang、Yan 等人关于广义陈猜想的近期重要进展 $[22, 23]$。

考虑情形 $c = 0$，我们在关于零主曲率重数的一个假设下得到一个刻画。

定理 1.8. 设 M^n 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的常平均曲率三调和超曲面。若零是一个重数至多为一的主曲率，则 M^n 是极小的。

特别地，我们可以证明

定理 1.9. 欧几里得空间 $\mathbb{R}^6$ 中的任意常平均曲率三调和超曲面都是极小的。

注 1.10. 注意，定理 1.8 和定理 1.9 为广义陈猜想给出了部分肯定的答案。

注 1.11. 在 $[7]$ 中研究空间形式中具有四个不同主曲率的三调和超曲面时，主曲率零的重数至多为一这一假设是必要的。在我们的结果中，仅在 $c = 0$ 和 $n > 5$ 中需要这一条件。

最后，我们指出，对于 $N^{n+1}(c)$ 中的常平均曲率真三调和超曲面，(2.7) 中的两个方程与空间形式中真双调和超曲面的方程非常相似，例如参见 $[9]$。这是合理的，因为三调和性这一几何性质远弱于双调和性。因此，我们预期能够发现三调和超曲面更多的几何特征。有趣的是，我们可以对具有 $c \neq 0$ 的 $N^{n+1}(c)$ 中的常平均曲率三调和超曲面进行完整分类。这将有助于我们研究 $N^{n+1}(c)$ 中的双调和超曲面。

本文组织如下。第 2 节回顾空间形式中三调和超曲面的相关理论背景，并推导出一些有用的引理，这些引理对于我们研究三调和超曲面的几何性质非常重要。第 3 节给出定理1.5和定理1.6的证明。第 4 节完成定理1.8和定理1.9的证明。

2. Preliminaries

设 $N^{n+1}(c)$ 是具有常数截面曲率 c 的（$n+1$）维黎曼空间形式。对于等距浸入 $\phi\colon M^n \to N^{n+1}(c)$，记 ∇ 为 M^n 的列维-奇维塔联络，记 $\widetilde{\nabla}$ 为 $N^{n+1}(c)$ 的列维-奇维塔联络。M^n 的黎曼曲率张量分别为

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z, \\ R(X,Y,Z,W) &= \langle R(X,Y)W, Z\rangle. \end{aligned}$$

高斯公式和魏因加滕公式分别表述为

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y)\xi, \\ \widetilde{\nabla}_X \xi &= -AX. \end{aligned}$$

其中，X、Y、Z、W是 M上的切向量场，ξ是M上的单位法向量场，h是 M的第二基本形式，而 A是形算子。

取 M的一个标准正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 。关于此标架，定义$\nabla_{e_i}e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$，其中 Γ_{ij}^k是联络系数。

记为

$$\begin{aligned} R_{ijkl} =& R(e_i,e_j,e_k,e_l), \quad h_{ij} = h(e_i,e_j), \\ h_{ijk} =& e_k(h_{ij}) - h(\nabla_{e_k}e_i, e_j) - h(e_i, \nabla_{e_k}e_j), \\ =& e_k(h_{ij}) - \sum_l (\Gamma_{ki}^l h_{lj} + \Gamma_{kj}^l h_{il}). \end{aligned}$$

根据高斯曲率张量的定义，我们得到

$$R_{ijkl} = e_i(\Gamma_{jl}^k) - e_j(\Gamma_{il}^k) + \sum_m \Big(\Gamma_{jl}^m\Gamma_{im}^k - \Gamma_{il}^m\Gamma_{jm}^k - (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m)\Gamma_{ml}^k\Big). \tag{2.1}$$

此外，高斯方程和科达齐方程分别为

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{2.2}$$

$$h_{ijk} = h_{ikj}. \tag{2.3}$$

平均曲率函数 H 和第二基本形式的平方范数 S 分别写作

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_{ii} \quad \text{and} \quad S = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2. \tag{2.4}$$

根据高斯方程，数量曲率 R 为

$$R = n(n-1)c + n^2H^2 - S. \tag{2.5}$$

我们回顾关于 N^{n+1}（c）中常平均曲率三调和超曲面的一项基本刻画结果。

命题 2.1。（参见 [15]）常平均曲率超曲面 $\phi\colon M^n \to N^{n+1}(c)$ 是三调和的，若其平均曲率 H 和第二基本形式的平方范数

形式 S 在 M^n 上满足

$$\begin{cases} H(\Delta S + S^2 - ncS - n^2cH^2) = 0, \\ HA\nabla S = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

根据（2.6），显然，极小超曲面在 $N^{n+1}(c)$ 中自动是三调和的。 $N^{n+1}(c)$ 中的三调和超曲面若不是极小的，则称为真三调和超曲面。

下文中，我们将考虑空间形式 $N^{n+1}(c)$ 中的常平均曲率真超曲面 M^n 。于是（2.6）变为

$$\begin{cases} \Delta S + S^2 - ncS - n^2cH^2 = 0, \\ A\nabla S = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

对于 $N^{n+1}(c)$ 中的超曲面 M^n，记其主曲率为 λ_i，其中 $1 \le i \le n$。不同主曲率的数量是局部常数，所有这些点构成 M^n 的一个开且稠密子集。记该集合为 M_A。在 M_A 的任意一个非空连通分支上，该分支是开集，不同主曲率的数量是常数。在该连通分支上，不同主曲率的重数是常数，因此 λ_i 始终光滑，且形算子 A 在局部可对角化（见 $[18,20,21]$）。

记 $\mathcal{N} := \{p \in M : \nabla S(p) \neq 0\}$ 和 $\mathcal{N} \subset M_A$。若 S 为常数，则 $\mathcal{N}$ 为空集。自此，我们假设 S 不是常数，即 $\mathcal{N} \neq \emptyset$。我们将在 $\mathcal{N}$中进行讨论。

由（2.7）的第二个方程可知， ∇S 是一个主方向，对应的主曲率为 0。因此，我们可以选取标准正交标架 $\{e_i\}_{i=1}^n$ ，使得 e_1 平行于 ∇S ，且形算子A 关于 $\{e_i\}$ 可对角化，即 $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$，其中 λ_i 为主曲率，且 $\lambda_1 = 0$。

假设 M^n 有 d 个互异的主曲率 $\mu_1 = 0$、μ_2、$\cdots$、μ_d，其中$d \ge 4$，即

$$\lambda_i = \mu_\alpha \quad \text{when} \quad i \in I_\alpha,$$

其中

$$I_\alpha = \Big\{ \sum_{0\le\beta\le\alpha-1} n_\beta + 1, \cdots, \sum_{0\le\beta\le\alpha} n_\beta \Big\}$$

其中 $n_0 = 0$ 和 $n_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $\sum_{1\le\alpha\le d} n_\alpha = n$，也就是说， n_α 是 μ_α的重数。为方便起见，除非特别说明，我们将使用指标范围 $1 \le \alpha$、β、γ、$\cdots \le d$。

我们整理一个引理以备后用。

引理 2.2。（参见 [7]）联络系数 Γ_{ij}^k 满足：
(1) $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$。 (2) $\Gamma_{ii}^k = {}^{e_k(\lambda_i)}\!/_{\lambda_i-\lambda_k}$ ，对于 $i \in I_\alpha$ 和 $k \notin I_\alpha$。
(3) 若指标满足以下条件之一，则 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ： (3a) i， $j \in I_\alpha$ ，
但 $k \notin I_\alpha$; (3b) i， $j \ge 2$ 且 $k = 1$。

(4) 若指标满足以下条件之一，则 $\Gamma_{ij}^k = 0$：(4a) $j = k$; (4b) $i = j \in I_1$ 且 $k \notin I_1$; (4c) $i,\ k \in I_\alpha,\ i \neq k$ 且 $j \notin I_\alpha$; (4d) $i,\ j \geq 2,\ i \in I_\alpha,$ $j \in I_\beta$，其中 $\alpha \neq \beta$ 且 $k = 1$。(5) 对于 λ_i、λ_j 和 λ_k，$\Gamma_{ji}^k = \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}\Gamma_{ij}^k$ 与 $\Gamma_{ki}^j = \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\Gamma_{ik}^j$ 互不相同。(6) 对于 λ_i、λ_j 和 λ_k，$\Gamma_{ij}^k\Gamma_{ji}^k + \Gamma_{ik}^j\Gamma_{ki}^j + \Gamma_{jk}^i\Gamma_{kj}^i = 0$ 互不相同。

我们首先推导一些关键引理，以研究空间形式中的常平均曲率真三调和超曲面。

引理2.3. 记 $P_\alpha = {}^{e_1(\mu_\alpha)}\mu_\alpha$ 为 $2 \leq \alpha \leq d$，则有

$$e_1(P_\alpha) = P_\alpha^2 + c + \sum_{m \in I_1} \Gamma_{\alpha\alpha}^m \Gamma_{11}^m, \tag{2.8}$$

$$e_j(P_\alpha) = \Gamma_{\alpha\alpha}^j P_\alpha - \sum_{m \in I_1} \Gamma_{\alpha\alpha}^m \Gamma_{jm}^1 \ \text{ for } j \in I_1 \text{ and } j \neq 1. \tag{2.9}$$

证明. 对于 $i \in I_\alpha$ 和 $\alpha \neq 1$，由（2.1）以及引理 2.2 中的（1）、（2）和（4）项可得

$$\begin{aligned}
R_{1i1i} =& e_1(\Gamma_{ii}^1) - e_i(\Gamma_{1i}^1) + \sum_m \left(\Gamma_{ii}^m\Gamma_{1m}^1 - \Gamma_{1i}^m\Gamma_{im}^1 - (\Gamma_{1i}^m - \Gamma_{i1}^m)\Gamma_{mi}^1\right) \\
=& e_1(\Gamma_{ii}^1) + e_i(\Gamma_{11}^i) - \sum_m \left(\Gamma_{ii}^m\Gamma_{11}^m + \Gamma_{1i}^m\Gamma_{im}^1 + (\Gamma_{1i}^m + \Gamma_{im}^1)\Gamma_{mi}^1\right) \\
=& e_1(\Gamma_{ii}^1) - \sum_{m \in I_1} \left(\Gamma_{ii}^m\Gamma_{11}^m + \Gamma_{1i}^m\Gamma_{im}^1 + (\Gamma_{1i}^m + \Gamma_{im}^1)\Gamma_{mi}^1\right) \\
=& e_1(\Gamma_{ii}^1) - (\Gamma_{ii}^1)^2 - \sum_{m \in I_1} \Gamma_{ii}^m\Gamma_{11}^m.
\end{aligned}$$

另一方面，由高斯方程（2.2）可得 $R_{1i1i} = c$。因此，我们得到（2.8）。

对于 $i \in I_\alpha$ 和 $\alpha \neq 1$、$j \in I_1$ 和 $j \neq 1$，由（2.1）和引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}
R_{iji1} &= e_i(\Gamma_{j1}^i) - e_j(\Gamma_{i1}^i) + \sum_m \left(\Gamma_{j1}^m\Gamma_{im}^i - \Gamma_{i1}^m\Gamma_{jm}^i - (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m)\Gamma_{m1}^i\right) \\
&= -e_i(\Gamma_{ji}^1) + e_j(\Gamma_{ii}^1) + \sum_m \left(\Gamma_{jm}^1\Gamma_{ii}^m + \Gamma_{im}^1\Gamma_{jm}^i + (\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{ji}^m)\Gamma_{mi}^1\right) \\
&= e_j(\Gamma_{ii}^1) + \sum_{m \in I_1} \Gamma_{jm}^1\Gamma_{ii}^m - \Gamma_{ii}^j\Gamma_{ii}^1,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

结合 $R_{iji1} = 0$ 可得（2.9）。注意，$R_{iji1} = 0$ 可直接由高斯方程（2.2）推出。至此，证明完成。□

引理2.4. 对于任意 $q \in \mathbb{Z}_+$，我们有

$$f(q) := \sum_{2 \leq \alpha \leq d} n_\alpha \mu_\alpha P_\alpha^q = \begin{cases} 0, & \text{when } q \text{ is odd;} \\ \frac{(q-1)!!}{q!!}(-c)^{\frac{q}{2}} nH, & \text{when } q \text{ is even.} \end{cases} \tag{2.11}$$

证明. 由于情形 $n_1 = 1$ 已在 [7], 中得到，我们只需证明$n_1 > 1$。

考虑到（2.4）第一个表达式中的 H 定义，我们有

$$\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha = nH. \tag{2.12}$$

由于 H 是常数，对（2.12）关于 e_1 求导，得到

$$\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_1(\mu_\alpha) = 0,$$

这等价于

$$\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha = 0. \tag{2.13}$$

对（2.12）关于 e_m 求导，其中 $m \in I_1$ 和 $m \neq 1$ 为变量，得到

$$\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha) = 0. \tag{2.14}$$

对（2.13）关于 e_1 求导，由（2.8）、（2.12）、 $\mu_\alpha\Gamma^m_{\alpha\alpha} = e_m(\mu_\alpha)$ 和（2.14），我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\Big(e_1(\mu_\alpha)P_\alpha + \mu_\alpha e_1(P_\alpha)\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\Big(\mu_\alpha P_\alpha^2 + \mu_\alpha(P_\alpha^2 + c + \sum_{m\in I_1}\Gamma^m_{\alpha\alpha}\Gamma^m_{11})\Big)\\
&= 2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^2 + cnH + \sum_{2\le\alpha\le d}\sum_{m\in I_1} n_\alpha\mu_\alpha\Gamma^m_{\alpha\alpha}\Gamma^m_{11}\\
&= 2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^2 + cnH + \sum_{m\in I_1}\Big(\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha)\Big)\Gamma^m_{11}\\
&= 2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^2 + cnH,
\end{aligned}$$

等价于

$$\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^2 = -\frac{1}{2}cnH. \tag{2.15}$$

方程 (2.13) 和 (2.15) 蕴含 (2.11) 对于 $q = 1$、2 成立。接下来我们将通过归纳法证明它对一般的 q 成立。

对 (2.11) 关于 e_1 求导，得到

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\Big(e_1(\mu_\alpha)P_\alpha^q + q\mu_\alpha P_\alpha^{q-1}e_1(P_\alpha)\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\Big(\mu_\alpha P_\alpha^{q+1} + q\mu_\alpha P_\alpha^{q-1}(P_\alpha^2 + c + \sum_{m\in I_1}\Gamma^m_{\alpha\alpha}\Gamma^m_{11})\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d}\Big((1+q)n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^{q+1} + cqn_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^{q-1}\Big) + q\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha P_\alpha^{q-1}\sum_{m\in I_1} e_m(\mu_\alpha)\Gamma^m_{11}
\end{aligned}$$

$$= (1+q)f(q+1) + cqf(q-1) + q\sum_{m\in I_1}\Big\{\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1}\Big\}\Gamma_{11}^m. \tag{2.16}$$

另一方面，由于 (2.11) 对 $f(q-1)$ 成立，我们对 $f(q-1) = \sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^{q-1}$ 关于 e_j 求导，其中 $j\in I_1$ 和 $j\neq 1$。由 (2.9) 可得

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{2\le\alpha\le d}\Big(n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} + (q-1)n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^{q-2}e_j(P_\alpha)\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d}\Big(n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} + (q-1)n_\alpha\mu_\alpha P_\alpha^{q-2}\big(\Gamma_{\alpha\alpha}^j P_\alpha - \sum_{m\in I_1}\Gamma_{\alpha\alpha}^m\Gamma_{jm}^1\big)\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d}\Big(n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} + (q-1)n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} - (q-1)\sum_{m\in I_1} n_\alpha P_\alpha^{q-2}e_m(\mu_\alpha)\Gamma_{jm}^1\Big)\\
&= \sum_{2\le\alpha\le d}\Big(qn_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} - (q-1)\sum_{m\in I_1} n_\alpha P_\alpha^{q-2}e_m(\mu_\alpha)\Gamma_{jm}^1\Big).
\end{aligned}$$

因此，对任意 $j\in I_1$ 和 $j\neq 1$，以下关系成立

$$q\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} = \sum_{m\in I_1}\Big\{(q-1)\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-2}\Big\}\Gamma_{jm}^1. \tag{2.17}$$

由于 (2.17) 对任意 q均成立，令 $q=2$，则 (2.17) 化简为

$$2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha = \sum_{m\in I_1}\Big\{\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha)\Big\}\Gamma_{jm}^1,$$

结合 (2.14)，可得

$$2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha = 0. \tag{2.18}$$

令 $q=3$ 并利用 (2.18)，则 (2.17) 化简为

$$3\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^2 = \sum_{m\in I_1}\Big\{2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_m(\mu_\alpha)P_\alpha\Big\}\Gamma_{jm}^1 = 0.$$

类似地，我们可以逐步证明

$$q\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha e_j(\mu_\alpha)P_\alpha^{q-1} = 0. \tag{2.19}$$

因此，将 (2.16) 与 (2.19) 结合可得

$$(q+1)f(q+1) + cqf(q-1) = 0. \tag{2.20}$$

当 q 为偶数时，$q-1$ 和 $q+1$ 均为奇数。由 (2.20) 可知，$f(q-1)=0$ 也可得到 $f(q+1)=0$。

当 q 为奇数时，$q-1$ 和 $q+1$ 均为偶数。由（2.20）可得

$$\begin{aligned}
f(q+1) &= -\frac{cq}{q+1}f(q-1)\\
&= -\frac{cq}{q+1}\times\frac{(q-2)!!}{(q-1)!!}(-c)^{(q-1)/2}nH\\
&= \frac{q!!}{(q+1)!!}(-c)^{(q+1)/2}nH,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

这就完成了引理2.4的证明。 □

注 2.5. 在假设零主曲率的重数至多为一这一附加条件下，文献 *[7]* 推导出了引理 2.3 和引理 2.4 的特殊情形。

引理 2.6. 方程 $\Delta S + S^2 - ncS - n^2cH^2 = 0$ 等价于

$$-6\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha P_\alpha + \sum_{m\in I_1}\Gamma_{mm}^1\Big) + \Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)^2$$
$$-(n+2)c\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big) - c\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha\Big)^2 = 0.$$

证明. 由于对于 $2 \le i \le n$， $e_i(S) = 0$ ，由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}S - \nabla_{\nabla_{e_ie_i}}S)\\ &= -e_1e_1S + e_1(S)\sum_{i=2}^{n}\Gamma_{ii}^1\\ &= -e_1e_1S + e_1(S)\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha P_\alpha + \sum_{m\in I_1}\Gamma_{mm}^1\Big).\end{aligned} \tag{2.22}$$

注意到 $S = \sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2$，由 (2.8) 可得

$$e_1(S) = 2\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha e_1(\mu_\alpha) = 2\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha, \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}e_1e_1(S) &= 4\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2c\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha=2}^{d}\sum_{m\in I_1} n_\alpha\mu_\alpha^2\Gamma_{\alpha\alpha}^m\Gamma_{11}^m\\ &= 6\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2c\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 + 2\sum_{m\in I_1}\Big\{\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Gamma_{\alpha\alpha}^m\Big\}\Gamma_{11}^m.\end{aligned} \tag{2.24}$$

对 $m \in I_1$ 和 $m \ne 1$，将 $S = \sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2$ 关于 e_m 求导，得到

$$0 = e_m(S) = 2\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha e_m(\mu_\alpha) = 2\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Gamma_{\alpha\alpha}^m. \tag{2.25}$$

将 (2.24) 与 (2.25) 结合可得

$$e_1e_1(S) = 6\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2c\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2. \tag{2.26}$$

将 (2.23) 和 (2.26) 代入 (2.22)，得到

$$\Delta S = -6\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha P_\alpha + \sum_{m\in I_1}\Gamma_{mm}^1\Big)$$

$$-2c\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha \mu_\alpha^2.$$

因此，证明完成。 □

3. Proof of Theorems 1.5 and 1.6

定理1.5和定理1.6的证明：我们将从假设 $\mathcal{N}=\{p\in M^n:\nabla S(p)\neq 0\}\neq\emptyset$ 出发导出矛盾，从而证明定理1.5和定理1.6。取 $q=1,3,5,\cdots,2d-3$ 代入引理2.4，得到

$$\begin{cases} n_2\mu_2 P_2+n_3\mu_3 P_3+\cdots+n_d\mu_d P_d=0,\\ n_2\mu_2 P_2^3+n_3\mu_3 P_3^3+\cdots+n_d\mu_d P_d^3=0,\\ \quad\vdots\\ n_2\mu_2 P_2^{2d-3}+n_3\mu_3 P_3^{2d-3}+\cdots+n_d\mu_d P_d^{2d-3}=0, \end{cases} \tag{3.1}$$

这是一个具有非零解的 $(d-1)$ 阶方程组。因此，在 $\mathcal{N}$ 上有

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_3 & \cdots & P_d\\ P_2^3 & P_3^3 & \cdots & P_d^3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ P_2^{2d-3} & P_3^{2d-3} & \cdots & P_d^{2d-3} \end{vmatrix} = P_2\cdots P_d\prod_{2\le\alpha\le\beta\le d}(P_\alpha^2-P_\beta^2)=0. \tag{3.2}$$

取 $q=2,4,6,\cdots,2d-2$ 代入引理2.4，得到

$$\begin{cases} n_2\mu_2 P_2^2+n_3\mu_3 P_3^2+\cdots+n_d\mu_d P_d^2=-\frac{1}{2}ncH,\\ n_2\mu_2 P_2^4+n_3\mu_3 P_3^4+\cdots+n_d\mu_d P_d^4=\frac{3}{8}nc^2H,\\ \quad\vdots\\ n_2\mu_2 P_2^{2d-2}+n_3\mu_3 P_3^{2d-2}+\cdots+n_d\mu_d P_d^{2d-2}=\frac{(2d-3)!!}{(2d-2)!!}(-c)^{d-1}nH. \end{cases} \tag{3.3}$$

接下来我们考虑所有可能的情形。

情形1。 $P_2P_3\cdots P_d\neq 0$ 在某个 $p\in\mathcal{N}$ 处。于是由（3.2）可得 $\prod_{2\le\alpha\le\beta\le d}(P_\alpha^2-P_\beta^2)=0$ 在 p 处。不失一般性，我们假设 $P_2^2-P_3^2=0$，即 $P_2=\pm P_3$。现在，方程组（3.1）中的前 $d-2$ 个方程确定了如下新的方程组：

$$\begin{cases} (n_2\mu_2\pm n_3\mu_3)P_3+\cdots+n_d\mu_d P_d=0,\\ (n_2\mu_2\pm n_3\mu_3)P_3^3+\cdots+n_d\mu_d P_d^3=0,\\ \qquad\vdots\\ (n_2\mu_2\pm n_3\mu_3)P_3^{2d-5}+\cdots+n_d\mu_d P_d^{2d-5}=0, \end{cases} \tag{3.4}$$

它有一个非零解。因此我们有

$$\begin{vmatrix} P_3 & P_4 & \cdots & P_d\\ P_3^3 & P_4^3 & \cdots & P_d^3\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ P_3^{2d-5} & P_4^{2d-5} & \cdots & P_d^{2d-5} \end{vmatrix} = P_3\cdots P_d\prod_{3\le\alpha\le\beta\le d}(P_\alpha^2-P_\beta^2)=0.$$

由于 $P_3P_4\cdots P_d \neq 0$，我们有 $\prod_{3\leq\alpha\leq\beta\leq d}(P_\alpha^2 - P_\beta^2) = 0$。不失一般性，假设 $P_3^2 = P_4^2$。以此类推，我们得到$P_2^2 = P_3^2 = \cdots = P_d^2 := P^2$ 在 p处。现在 (3.3) 变为

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}ncH = n_2\mu_2P_2^2 + n_3\mu_3P_3^2 + \cdots + n_d\mu_dP_d^2 = nHP^2, \\ \frac{3}{8}nc^2H = n_2\mu_2P_2^4 + n_3\mu_3P_3^4 + \cdots + n_d\mu_dP_d^4 = nHP^4, \\ \quad\vdots \\ \frac{(2d-3)!!}{(2d-2)!!}(-c)^{d-1}nH = n_2\mu_2P_2^{2d-2} + n_3\mu_3P_3^{2d-2} + \cdots + n_d\mu_dP_d^{2d-2} = nHP^{2d-2}. \end{cases}$$

由于 $nH \neq 0$，上述方程组中的前两个方程推出

$$P^2 = -\frac{1}{2}c \quad \text{and} \quad P^4 = \frac{3}{8}c^2,$$

因此 $c = P = 0$。这导致矛盾，所以该情形可以排除。

情形 2。 $P_\alpha = 0$ 对所有 $\alpha = 2$、$\cdots$、d 均成立，在某个 $p \in \mathcal{N}$处。在此情形下，我们有

$$e_1S = e_1\sum_{2\leq\alpha\leq d} n_\alpha\mu_\alpha^2 = 2\sum_{2\leq\alpha\leq d} n_\alpha\mu_\alpha e_1(\mu_\alpha) = 2\sum_{2\leq\alpha\leq d} n_\alpha\mu_\alpha^2P_\alpha = 0.$$

这与 p 处的 $\nabla S \neq 0$ 矛盾，因此该情形也可以排除。

情形 3。对于任意给定的点 $p \in \mathcal{N}$， P_α 中的某些项为零，而其他项不为零。在此情形下，不失一般性，设对于 $\alpha = 2$、$\cdots$、r有 $P_\alpha = 0$，并且对于 $\alpha = r+1$、$\cdots$、d有 $P_\alpha \neq 0$。于是，（3.1）中的前 $d-r$ 个方程构成一个新的方程组

$$\begin{cases} n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1} + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2} + \cdots + n_d\mu_dP_d = 0, \\ n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1}^3 + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2}^3 + \cdots + n_d\mu_dP_d^3 = 0, \\ \quad\vdots \\ n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1}^{2(d-r)-1} + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2}^{2(d-r)-1} + \cdots + n_d\mu_dP_d^{2(d-r)-1} = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

这是一个有非零解的 $(d-r)$ 阶方程组。因此，系数行列式为零，即 $\prod_{r+1\leq\alpha\leq\beta\leq d}(P_\alpha^2 - P_\beta^2) = 0$。不失一般性，假设 $P_{r+1}^2 = P_{r+2}^2$。以此类推，可以证明 $P_{r+1}^2 = \cdots = P_d^2 \neq 0$。记 $P^2 := P_{r+1}^2 = \cdots = P_d^2$。于是 (3.3) 变为

$$\begin{cases} (n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d)P^2 = -\frac{1}{2}ncH, \\ (n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d)P^4 = \frac{3}{8}nc^2H, \\ (n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d)P^6 = -\frac{5}{16}nc^3H, \\ \quad\vdots \\ (n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d)P^{2d-2} = \frac{(2d-3)!!}{(2d-2)!!}(-c)^{d-1}nH. \end{cases} \tag{3.6}$$

上述方程组意味着 $n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d \neq 0$，因为 $c \neq 0$ 和 $H \neq 0$。由 (3.6) 的前两个方程可得 $P^2 = -\frac{3}{4}c$，而由 (3.6) 的第二个和第三个方程可得 $P^2 = -\frac{5}{6}c$。因此我们有 $P = c = 0$，这就产生了矛盾。

综上，我们有 $\mathcal{N} = \{p \in M : \nabla S(p) \neq 0\}$ 为空，因此S 必为常数。由（2.5）可知，M^n 的数量曲率 R 也为常数。但对于 $c < 0$，（2.7）的第一个方程意味着

$S^2 - ncS - n^2cH^2 = 0$，这就产生了矛盾。至此，定理1.5和定理1.6的证明完成。□

4. Proofs of Theorems 1.8 and 1.9

本节主要研究欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的常平均曲率三调和超曲面。对于任意维数 n，如在 [7] 所讨论的，当有四个互异的主曲率时，我们还需要作出零主曲率的重数至多为一这一假设。

定理 1.8 的证明：假设 $\mathcal{N} = \{p \in M^n : \nabla S(p) \neq 0\} \neq \emptyset$。我们将通过导出一个矛盾来证明定理 1.8。

在引理2.4中取 $q = 1$、2、3、$\cdots$、$d-1$，可得

$$\begin{cases} n_2\mu_2 P_2 + n_3\mu_3 P_3 + \cdots + n_d\mu_d P_d = 0, \\ n_2\mu_2 P_2^2 + n_3\mu_3 P_3^2 + \cdots + n_d\mu_d P_d^2 = 0, \\ \quad \vdots \\ n_2\mu_2 P_2^{d-1} + n_3\mu_3 P_3^{d-1} + \cdots + n_d\mu_d P_d^{d-1} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

这是一个具有非零解的 $(d-1)$ 阶方程组。因此，在 $\mathcal{N}$ 上有

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_3 & \cdots & P_d \\ P_2^2 & P_3^2 & \cdots & P_d^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_2^{d-1} & P_3^{d-1} & \cdots & P_d^{d-1} \end{vmatrix} = P_2 \cdots P_d \prod_{2\leq\alpha\leq\beta\leq d} (P_\alpha - P_\beta) = 0. \tag{4.2}$$

接下来我们考虑三种可能的情形。

情形1. $P_2P_3\cdots P_d \neq 0$ 在某个 $p \in \mathcal{N}$ 处。则由 (4.2) 可得$\prod_{2\leq\alpha\leq\beta\leq d}(P_\alpha - P_\beta) = 0$ 在 p 处。不失一般性，假设 $P_2 - P_3 = 0$。现在，方程组 (4.1) 中前面的 $d-2$ 个方程确定了如下新的方程组：

$$\begin{cases} (n_2\mu_2 + n_3\mu_3)P_3 + \cdots + n_d\mu_d P_d = 0, \\ (n_2\mu_2 + n_3\mu_3)P_3^2 + \cdots + n_d\mu_d P_d^2 = 0, \\ \qquad \vdots \\ (n_2\mu_2 + n_3\mu_3)P_3^{d-2} + \cdots + n_d\mu_d P_d^{d-2} = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

该方程组有非零解。因此我们有

$$\begin{vmatrix} P_3 & P_4 & \cdots & P_d \\ P_3^2 & P_4^2 & \cdots & P_d^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_3^{d-2} & P_4^{d-2} & \cdots & P_d^{d-2} \end{vmatrix} = P_3 \cdots P_d \prod_{3\leq\alpha\leq\beta\leq d} (P_\alpha - P_\beta) = 0.$$

由于 $P_3P_4\cdots P_d \neq 0$，我们有 $\prod_{3\leq\alpha\leq\beta\leq d}(P_\alpha - P_\beta) = 0$。不失一般性，假设 $P_3 = P_4$。类似地，我们得到 $P_3 = P_4 = \cdots = P_d := P$ 在 p 处成立。由于 $nH \neq 0$，上述方程组 (4.3) 的第一个方程推出

that

$$\Big(\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha\Big)P = nHP = 0$$

因此 $P=0$。这是一个矛盾。

情形 2. $P_\alpha = 0$ 对所有 $\alpha = 2$、$\cdots$、d，在某个 $p\in\mathcal{N}$处成立。于是

$$e_1 S = e_1\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha^2 = 2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha e_1(\mu_\alpha) = 2\sum_{2\le\alpha\le d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha = 0,$$

这与 p处的 $\nabla S\neq 0$ 矛盾。

情形 3. 对于任意给定的点 $p\in\mathcal{N}$， P_α 中的某些项为零，其余项不为零。在这种情形下，不失一般性，假设对于 $\alpha=2$、$\cdots$、r， $P_\alpha=0$ 成立；对于 $\alpha=r+1$、$\cdots$、d， $P_\alpha\neq 0$ 成立。于是，(4.1) 中的前 $d-r$ 个方程构成一个新的方程组

$$\begin{cases} n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1} + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2} + \cdots + n_d\mu_d P_d = 0,\\ n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1}^2 + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2}^2 + \cdots + n_d\mu_d P_d^2 = 0,\\ \qquad\vdots\\ n_{r+1}\mu_{r+1}P_{r+1}^{d-r} + n_{r+2}\mu_{r+2}P_{r+2}^{d-r} + \cdots + n_d\mu_d P_d^{d-r} = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

这是一个具有非零解的 $(d-r)$ 阶方程组。因此，系数行列式为零，即 $\prod_{r+1\le\alpha\le\beta\le d}(P_\alpha - P_\beta) = 0$。不失一般性，我们假设 $P_{r+1} = P_{r+2}$。按照上述类似的讨论可得$P_{r+1} = \cdots = P_d \neq 0$。记为 $P := P_{r+1} = \cdots = P_d$。

由（4.4）可得 $n_{r+1}\mu_{r+1} + \cdots + n_d\mu_d = 0$，这是因为 $P\neq 0$。在这种情形下，我们有 $n_2\mu_2 + \cdots n_r\mu_r = nH$。因此，由引理 2.6 可得

$$-6\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha^2 + 2\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 P_\alpha\Big)\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha P_\alpha + \sum_{m\in I_1}\Gamma_{mm}^1\Big) + \Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)^2 = 0,$$

即

$$\begin{aligned} &2\Big(\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha - 3\Big)P^2\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 + 2\Big(\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)P\sum_{m\in I_1}\Gamma_{mm}^1\\ &+\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)^2 = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中我们对 $\alpha=2$，.....，r 使用了 $P_\alpha=0$。

由于我们假设零主曲率的重数为一，即 $I_1=\{1\}$，（4.5）变为

$$2\Big(\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha - 3\Big)P^2\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 + \Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)^2 = 0. \tag{4.6}$$

对等式 (4.6) 两边关于 e_1 求导，由 (2.8) 可得

$$8\Big(\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha - 3\Big)P^3\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2 + 4\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)\Big(\sum_{\alpha=r+1}^{d} n_\alpha\mu_\alpha^2\Big)P = 0. \tag{4.7}$$

将 (4.7) 除以 $4P$，再减去 (4.6)，得到

$$\Big(\sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha \mu_\alpha^2\Big)\Big(\sum_{\alpha=2}^{r} n_\alpha \mu_\alpha^2\Big) = 0. \tag{4.8}$$

由于 $S = \sum_{\alpha=2}^{d} n_\alpha \mu_\alpha^2 \neq 0$，由(4.8)可得 $\sum_{\alpha=2}^{r} n_\alpha \mu_\alpha^2 = 0$，因此对 $\alpha = 2$、$\cdots$、r，有$\mu_\alpha = 0$。这与 $\sum_{\alpha=2}^{r} n_\alpha \mu_\alpha = nH \neq 0$矛盾。□

定理 1.9 的证明：我们将讨论 $\mathbb{R}^6$中的常平均曲率三调和超曲面 M^5这一情形。我们仍将研究 $\mathcal{N} = \{p \in M^5 : \nabla S(p) \neq 0\} \neq \emptyset$，并通过导出矛盾来证明定理 1.9。

当零主曲率的重数为一时，我们可以由定理 1.8 导出矛盾。

根据定理 1.3，我们只需处理零主曲率的重数为二的情形，即 $I_1 = \{1, 2\}$。在这种情形下，M^5 上的主曲率依次为 0、0、λ_3、λ_4、λ_5，其中 $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 5H$。

根据定理 1.8 的证明，当对所有 P_α，$P_\alpha \neq 0$ 或 $P_\alpha = 0$ 时，我们可以推出一个矛盾。现在考虑剩余情形：$P_3 = 0$，$P_4 = P_5 \neq 0$。由 (4.4) 可得 $\lambda_4 + \lambda_5 = 0$ 和 $\lambda_3 = 5H$。为简便起见，记 $\lambda_4 = -\lambda_5 =: \mu$，$P_4 = P_5 =: P$。于是，第二基本形式 S 的平方范数为 $S = 2\mu^2 + 25H^2$。由于 $e_2(S) = 0$，我们有 $e_2(\mu) = 0$，从而 $\Gamma_{44}^2 = \Gamma_{55}^2 = 0$。在这种情形下，由 (2.9) 可推出 $e_2(P) = \Gamma_{44}^2 P - \Gamma_{44}^2 \Gamma_{22}^1 = 0$。此外，$e_1(S) = 4\mu e_1(\mu) = 4\mu^2 P$，因此 $e_2 e_1(S) = 0$。由于 $e_1(S) \neq 0$，对 $i \geq 2$ 和 $\Gamma_{21}^1 = 0$，有 $e_i(S) = 0$，于是我们得到

$$0 = e_1 e_2(S) - e_2 e_1(S) = [e_1, e_2](S) = (\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1) S = \Gamma_{12}^1 e_1(S),$$

这意味着 $\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = 0$。于是（2.8）变为

$$e_1(P) = P^2. \tag{4.9}$$

另一方面，考虑到高斯方程和（2.2），由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned} 0 = R_{1212} =& e_1(\Gamma_{22}^1) - e_2(\Gamma_{12}^1) + \sum_m \Big(\Gamma_{22}^m \Gamma_{1m}^1 - \Gamma_{12}^m \Gamma_{2m}^1 - (\Gamma_{12}^m - \Gamma_{21}^m)\Gamma_{m2}^1\Big) \\ =& e_1(\Gamma_{22}^1) - (\Gamma_{22}^1)^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

基于上述讨论，（4.5）变为

$$-4\mu^2 P^2 + 4\mu^2 P \Gamma_{22}^1 + (2\mu^2 + 25H^2)^2 = 0, \tag{4.11}$$

因此

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{4\mu^2 P^2 - (2\mu^2 + 25H^2)^2}{4\mu^2 P}. \tag{4.12}$$

注意到 $e_1(\mu) = \mu P$，并对（4.11）关于 e_1 求导，由（4.9）和（4.10）可得

$$-4P^2 + 3P\Gamma_{22}^1 + (\Gamma_{22}^1)^2 + 2(2\mu^2 + 25H^2) = 0. \tag{4.13}$$

将（4.12）代入（4.13），并消去 Γ_{22}^1 项，可得

$$16\mu^4P^2\Big(2(2\mu^2+25H^2)-4P^2\Big)+12\mu^2P^2\Big(4\mu^2P^2-(2\mu^2+25H^2)^2\Big)$$
$$+\Big(4\mu^2P^2-(2\mu^2+25H^2)^2\Big)^2=0,$$

即

$$32\mu^4P^2(2\mu^2+25H^2)-20\mu^2P^2(2\mu^2+25H^2)^2+(2\mu^2+25H^2)^4=0. \tag{4.14}$$

由于 $2\mu^2+25H^2\neq 0$, （4.14）变为

$$32\mu^4P^2-20\mu^2P^2(2\mu^2+25H^2)+(2\mu^2+25H^2)^3=0. \tag{4.15}$$

对（4.15）中的 e_1 求导，由（4.9）和（4.10）可得

$$-12\mu^2P^2-500H^2P^2+3(2\mu^2+25H^2)^2=0. \tag{4.16}$$

对（4.16）中的 e_1 求导，得到

$$-12\mu^2P^2-250H^2P^2+6\mu^2(2\mu^2+25H^2)=0. \tag{4.17}$$

消去（4.16）和（4.17）中关于 P^2 的项，得到

$$2\mu^2(12\mu^2+500H^2)=(2\mu^2+25H^2)(12\mu^2+250H^2),$$

也就是说

$$4\mu^2H^2-125H^4=0, \tag{4.18}$$

这意味着 μ 是常数， $S=2\mu^2+25H^2$ 也为常数。这与 $\nabla S(p)\neq 0$ 矛盾。

综上，我们得出 $\mathcal{N}=\{p\in M:\ \nabla S(p)\neq 0\}=\emptyset$ 。根据 (2.6)，我们知道 M^n 是极小的。定理 1.9 的证明至此完成。□

致谢：作者受到国家自然科学基金（编号：11801246）和辽宁省教育厅项目（编号：LJKMZ20221561）的资助

References

[1] V. Branding、S. Montaldo、C. Oniciuc 和 A. Ratto，《高阶能量泛函》，《Adv. Math.》370（2020年），第107236号文章。[2] V.Branding、S. Montaldo、C. Oniciuc 和 A. Ratto，《伪黎曼空间形式中的多调和超曲面》，《Ann. Mat. Pura Appl.》（2022年）。https://doi.org/10.1007/s10231-022- 01263-1[3] B. Y. Chen，《总平均曲率与有限型子流形》，《纯数学丛书》第27卷，第2版。世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克（2015年）。[4] S. P. Chang，《具有常数数量曲率和平均曲率的 $\mathbb{S}^4$ 闭超曲面是等参数的》，《Comm. Anal. Geom.》1(1)（1993年），71C–100。[5] S. P. Chang，《关于具有常数量曲率和平均曲率的$\mathbb{S}^{n+1}$闭超曲面》，《Pacific J. Math.》165(1)（1994年），67–76。[6] H. Chen 和 Z. Guan，《空间形式中至多有3个不同主曲率的三调和常平均曲率超曲面》，《Results Math.》77（2022年）第4期，第155号论文，共17页。[7] H. Chen 和 Z. Guan，《空间形式中的三调和常平均曲率超曲面》，《Manuscript Math.》（2022年）。https://doi.org/10.1007/s00229-022-01409-8[8] J. Eells 和 L. Lemaire，《调和映射选题》，载于《CBMS区域数学会议系列论文集》，美国罗德岛州普罗维登斯，第31卷（1983年）。

[9] Y. Fu、D. Yang 和 X. Zhan, 《空间形式中双调和超曲面的最新进展》, 《当代数学》777（2022年）, 91–101。[10] G. Y. Jiang, 《二调和映射及其一阶和二阶变分公式》, 《中国数学年刊》A辑7(4)（1986年）, 389–402。[11] S. Maeta, 《黎曼流形上的 k二调和映射（常截面曲率情形）》, 《美国数学会会刊》140(5)（2012年）, 1835–1847。[12] S. Maeta, 《 k能量的二阶变分公式与 k调和曲线》, 《大阪数学杂志》49(4)（2012年）, 1035–1063。[13] S. Maeta, 《三调和映射的构造》, 《Houston J. Math.》41(2)（2015年）, 433–444。[14] S. Maeta、N. Nakauchi 和 H. Urakawa, 《浸入非正常数曲率流形的三调和等距浸入》, 《数学月刊》177(4)（2015年）, 551–567。[15] S. Montaldo、C. Oniciuc 和 A. Ratto, 《空间形式中的多调和超曲面》, 《以色列数学杂志》249(1)（2022年）, 343–374。[16] S. Montaldo 和 A. Ratto, 《球面中的 r调和浸入新例》, 《数学分析与应用杂志》458(1)（2018年）, 849–859。[17] N. Nakauchi 和 H. Urakawa, 《欧几里得空间中的多调和映射》, 《数学札记》38(1)（2018年）, 89–100。[18] K. Nomizu, 《对称矩阵可微族的特征根和特征向量》, 《线性与多重线性代数》1（1973年）, 第2期, 159–162。[19] Y. L. Ou 和 B. Y. Chen, 《黎曼几何中的双调和子流形与双调和映射》, 世界科学出版社, 新泽西州哈肯萨克, 2020年。[20] P. J. Ryan, 《超曲面的齐性与若干曲率条件》, 《东北数学杂志》（第2辑）21（1969年）, 363–388。[21] P. J. Ryan, 《具有平行里奇张量的超曲面》, 《大阪数学杂志》8（1971年）, 251–259。[22] Z. Z. Tang、D. Y. Wei 和 W. J. Yan, 《超曲面为等参数超曲面的一个充分条件》, 《东北数学杂志》（第2辑）72（2020年）第4期, 493–505。[23] Z. Z. Tang 和 W. J. Yan, 《关于等参数超曲面的陈氏猜想》, 《中国科学：数学》（2023年）66, 143–162。[24] S. B. Wang, 《 k调和映射的一阶变分公式》, 《J. Nanchang Univ.》13(1)（1989年）。[25] S. B. Wang, 《三调和映射稳定性的一些结果》, 《中国数学年刊》A辑12(4)（1991年）, 459–467。

(Fu) School of Data Science and Artificial Intelligence, Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025, P. R. China

Email address: yufu@dufe.edu.cn

（杨） School of Mathematics and Statistics, Liaoning University, Shenyang, 110036, China

Email address: dlutyangdan@126.com