arXiv:2303.02613v1 [math.OC] 5 Mar 2023

交易中的数据驱动回撤控制与重启机制

Chung-Han Hsieh *

*国立清华大学量化金融系，台湾新竹 30044（电子邮箱：ch.hsieh@mx.nthu.edu.tw）。

摘要：本文将现有的回撤调节控制策略扩展至交易领域，并纳入一种新颖的重启机制。众所周知，回撤调制策略能够以概率为一保证，在任何时刻最大百分比回撤都不超过预先设定的回撤限额。然而，在实际操作中，当回撤接近预设限额时，此类调制策略会变成止损单，从而可能错失后续的盈利机会（如果存在的话）。因此，我们在回撤调节交易系统中加入数据驱动的重启机制，以自动调节交易绩效。我们发现，即使在交易成本不为零的情况下，采用重启机制的策略也可能比不采用重启机制的策略取得更优异的交易绩效。为验证这一发现，本文还使用股票 ETF 和加密货币的历史价格数据开展了若干实证研究。

关键词：控制应用、随机系统、算法交易、金融工程、回撤控制。

1. 引言

自 Markowitz(1952,1959的开创性研究以来，投资组合优化问题通常采用均值-方差 方法求解。也就是说，交易者旨在寻求收益与风险之间的最佳权衡，其中风险通过投资组合收益的均值和方差来衡量。尽管方差被广泛用作金融领域的标准风险 度量指标，但它衡量的更多是离散风险，即将均值的正向和负向偏差视为同等风险；关于这一主题的精彩介绍，请参见Fabozzi 等人 (2007)。

1.1 下行风险

为解决离散风险带来的风险程度相同问题，许多替代性风险度量被提出，以关注下行风险。其中包括风险价值（VaR）；参见 Jorion(2000)；条件风险价值（CVaR）；参见Rockafellar 和 Uryasev (2000)；绝对回撤；参见Magdon-Ismail 和 Atiya (2004)；Hayes (2006)；条件期望回撤（CED），即最大回撤分布的尾部均值；参见Goldberg 和 Mahmoud(2017)；以及用于公理化风险度量的更一般的相干风险；参见Luenberger (2013)；Shapiro 等人(2021)。另见Korn 等人(2022)，其中对各种基于回撤的风险指标进行了实证比较。本文关注一种更具实用性的回撤度量——最大百分比回撤，即财富随时间变化的最大百分比跌幅，并将其作为风险度量。

*本研究部分获中华民国台湾科技部资助，资助编号：MOST 111–2221–E–007– 124–。

1.2 回撤控制

现有文献对不同类型的回撤及其方法进行了广泛研究。例如，连续时间框架下的最优回撤控制问题见Grossman 和 Zhou (1993)；Cvitanicand Karatzas(1994)；Chekhlov 等 (2005)；Malekpour 和 Barmish (2012、2013)。另见Boyd 等(2017)，其研究了离散时间框架下将回撤作为约束的多期投资组合优化问题。关于使用深度强化学习解决实际回撤问题的近期研究，见Wu 等(2022)。

在所有现有论文中，Hsieh 和 Barmish (2017a,b)中的先前研究与本文最为密切相关，其中证明了一项关键结果，即所谓的回撤调节引理。粗略地说，该引理给出了一大类控制策略的充要条件，从而确保在任何时刻都几乎必然能够实现最大百分比回撤保护。然而，Hsieh 和 Barmish (2017a)指出，在实践中，当预先设定的回撤限额临近时，交易策略可能会表现得像止损单，交易也可能因此停止；另请参见Hsieh (2022a)对一类带有止损单的仿射策略的研究。为此，我们通过引入一种新颖的重启机制来扩展回撤调制策略，以消除止损现象。

1.3 论文贡献

本文在现有回撤调制策略的基础上，引入了一种新颖的重启机制。预备知识见第2节。我们针对由一种风险资产和一种无风险资产构成的双资产投资组合，建立了最优回撤控制问题。随后，我们扩展了现有的

回撤调制理论，使无风险资产也明确纳入其中；参见引理 3.1。本文给出了一大类控制策略（称为回撤调制策略）的必要且充分条件。随后，第3节讨论了带重启机制的调制策略。重启的思路很简单：当当前百分比回撤接近预先设定的回撤限额时，我们便采用更新后的策略重新开始交易。我们还结合交易所交易基金和加密货币的历史价格数据给出数值示例，以支持本文的研究发现；参见第4节。

2. 预备知识

现在，我们为后续章节介绍一些有用的预备知识。

2.1 资产交易形式化

固定一个整数 $N > 0.$。对于阶段 $k = 0, 1, ..., N$，令 $S(k) > 0$ 表示阶段 k基础金融资产的价格。相应的每期收益为 $X(k) := \frac{S_{(k+1)-S(k)}}{S(k)}$，并假设收益率有界，即 $X_{\min} \leq X(k) \leq X_{\max}$，其中 $X_{\min}$和 $X_{\max}$ 是支撑集中的点，支撑集记为 $\mathcal{X}$，且满足 $-1 < X_{\min} < 0 < X_{\max}.$。对于货币市场资产，例如债券或银行账户，我们用 $r_f(k)$表示阶段 k的利率。

注 2.1. 请注意，此处考虑的收益率不一定相互独立，其分布可以任意，但有界，界限为 $X_{\min}$ 和 $X_{\max}$。

2.2 账户价值动态

从某个初始账户价值 $V(0) > 0$ 开始，考虑一个由两种资产组成的投资组合，其中一种为风险资产，另一种为利率为 $r_f(k) \in [0, X_{\max}]$（对所有 k 几乎必然成立）的无风险资产。对于阶段 $k = 0, 1, \ldots,$，我们令 $V(k)$ 表示阶段 k 时的账户价值。于是，账户价值动态的演化由以下随机递推描述：

$$V(k+1) = V(k) + u(k)X(k) + (V(k) - u(k))r_f(k).$$

给定预先设定的回撤限额 $d_{\max} \in (0,1)$，我们关注于选择策略 $u(k)$ 所需满足的条件，使得约束 $d(k) \leq d_{\max}$ 对所有 k 以概率为一得到保证，其中 $d(k)$ 表示截至日期 k 的百分比回撤，其定义如下。

定义 2.1。（最大百分比回撤）对于 $k = 0, 1, \ldots, N$，截至日期 k 的百分比回撤，记为 $d(k)$，定义为

$$d(k) := \frac{V_{\max}(k) - V(k)}{V_{\max}(k)}$$

其中 $V_{\max}(k) := \max_{0 \leq i \leq k} V(i)$。于是，最大百分比回撤（记为 d^*）定义为

$$d^* := \max_{0 \leq k \leq N} d(k).$$

注 2.2. 显然，百分比回撤满足 $d(k) \in [0, 1]$，对所有 k 均以概率为一成立。

3. 带重启的回撤调节

根据 Hsieh 和 Barmish(2017a)，其给出了任意交易策略 $u(k$ 的一个充要条件，可确保截至日期 $d(k$ 的百分比回撤不超过给定水平 $d_{\max}$，对所有 k 均以概率为一成立。下面，我们将该结果扩展至包含无风险资产的情形。

引理 3.1.（回撤调节）。给定 $d_{\max} \in (0,1)$。若交易策略 $u(\cdot)$ 能保证预先设定的回撤限额满足 $d(k) \leq d_{\max}$ 对所有 k 都以概率为一成立，当且仅当对于所有 k，条件

$$-\frac{M(k) + r_f(k)}{X_{\max} - r_f(k)} V(k) \leq u(k) \leq \frac{M(k) + r_f(k)}{|X_{\min}| + r_f(k)} V(k)$$

在所有满足以下条件的样本路径上成立

$$M(k) := \frac{d_{\max} - d(k)}{1 - d(k)}.$$

证明。证明思路与 Hsieh and Barmish（2017a）类似。不过，为求完整起见，我们在此给出完整证明。为证明必要性，假设 $d(k) \leq d_{\max}$ 对所有 k 及所有收益序列都成立，则必须证明关于 $u(k)$ 的条件沿所有收益序列成立。固定 k。由于对所有收益序列，$d(k) \leq d_{\max}$ 且 $d(k+1) \leq d_{\max}$，我们断言这必然要求 $u(k)$ 满足所需的不等式。不失一般性，我们证明 $u(k) \geq 0$ 时的右侧不等式，并指出几乎完全相同的证明也适用于 $u(k) < 0$ 的情况。为证明关于 $u(k)$ 的条件对所有收益序列都成立，只需考虑最坏损失 $|X_{\min}|u(k)$ 对应的路径。在这种情况下，我们有$V_{\max}(k+1) = V_{\max}(k)$。因此，

$$\begin{aligned} & d(k+1) \\ &= \frac{V_{\max}(k+1) - V(k+1)}{V_{\max}(k+1)} \\ &= \frac{V_{\max}(k) - V(k+1)}{V_{\max}(k)} \\ &= \frac{V_{\max}(k) - V(k) + u(k)|X_{\min}| - (V(k) - u(k))r_f(k)}{V_{\max}(k)} \\ &= d(k) + \frac{u(k)|X_{\min}| - (V(k) - u(k))r_f(k)}{V_{\max}(k)} \leq d_{\max} \end{aligned}$$

现在将 $V_{\max}(k) = \frac{V_{(k)}}{1-d(k)} > 0$ 代入上述不等式，得到

$$|X_{\min}|u(k) - (V(k) - u(k))r_f(k) \leq M(k)V(k),$$

其中 $M(k) = \frac{d_{\max} - d_{(k)}}{1-d(k)}$。这意味着

$$(|X_{\min}| + r_f(k))u(k) \leq (M(k) + r_f(k))\, V(k).$$

或者等价地，

$$u(k) \leq \frac{M(k) + r_f(k)}{|X_{\min}| + r_f(k)} V(k).$$

为证明充分性，假设所述关于 $u(k)$ 的界对所有收益序列都成立，我们必须证明，对于所有 k 及所有收益序列，$d(k) \leq d_{\max}$。通过归纳法，当 $k = 0$ 时，显然有 $d(0) = 0 \leq d_{\max}$。为完成归纳论证，我们假设对于所有收益序列，$d(k) \leq d_{\max}$，并须证明对于所有收益序列，$d(k+1) \leq d_{\max}$。不失一般性，我们再次给出一个

在 $u(k) \geq 0$ 情形下的证明，并指出对于 $u(k) < 0$，证明几乎完全相同。事实上，注意到

$$d(k+1) = 1 - \frac{V(k+1)}{V_{\max}(k+1)},$$

并且对于所有收益序列，$V_{\max}(k) \leq V_{\max}(k+1)$，我们将论证分为两种情况：若 $V_{\max}(k) < V_{\max}(k+1)$，则 $V_{\max}(k+1) = V(k+1)$，因此有 $d(k+1) = 0 \leq d_{\max}$。另一方面，若 $V_{\max}(k) = V_{\max}(k+1)$，借助账户价值动态，我们有

$$\begin{aligned} d(k+1) &= 1 - \frac{V(k) + u(k)X(k) + (V(k) - u(k))r_f(k)}{V_{\max}(k)} \\ &\leq 1 + \frac{-V(k)(1 + r_f(k)) + u(k)(|X_{\min}| + r_f(k))}{V_{\max}(k)}. \end{aligned}$$

利用 $u(k)$ 的上界，即，

$$u(k) \leq \frac{M(k) + r_f(k)}{|X_{\min}| + r_f(k)} V(k)$$

并且 $V_{\max}(k) = \frac{V(k)}{1 - d(k)}$，由此得到

$$\begin{aligned} d(k+1) &\leq 1 + (-1 + M(k))(1 - d(k)) \\ &= d(k) + M(k)(1 - d(k)). \end{aligned}$$

根据 $M(k) = \frac{d_{\max} - d(k)}{1 - d(k)}$ 的定义，可知 $d(k+1) \leq d_{\max}$，证明完毕。□

3.1 回撤调节策略

与 Hsieh 和 Barmish (2017a)一致，固定预先指定的回撤限额 $d_{\max} \in (0,1)$。借助引理 3.1，可以直接得到一类策略函数 $u(k)$，其表示为由增益 γ参数化的线性时变反馈控制器，从而满足回撤约束。具体而言，我们将 $u(k)$ 表示为反馈形式

$$u(k) := K(k)V(k) \tag{1}$$

其中 $K(k) := \gamma M(k)$，且

$$\gamma \in \Gamma := \left[\frac{-1}{X_{\max} - \max_k r_f(k)}, \frac{1}{|X_{\min}| + \max_k r_f(k)} \right].$$

公式（1）称为回撤调制策略，该策略由两个参数（γ，$d_{\max}$）参数化。

备注3.1。（i）很容易验证，回撤调制策略（1）满足引理 3.1。（ii）为联系回金融学概念，买入并持有的特殊情形在 $K(k) \equiv 1$时获得。注意，$u(k) < 0$ 表示卖空。[1]（iii）除了使用固定的可行集 Γ外，也可以允许使用时变可行集，例如 Γ_k，以反映收益率的时间依赖性。

推论3.1。（最大回撤保护）。采用回撤调制策略（1）时，最大百分比回撤满足 $d^* \leq d_{\max}$。

证明。由于回撤调制策略满足引理 3.1，因此可以保证 $d(k) \leq d_{\max}$ 对所有 k 以概率 1 成立。因此，可得

$$d^* = \max_{0 \leq k \leq N} d(k) \leq d_{\max}. \qquad \square$$

[1] 卖空股票意味着交易者从持有该股票的人那里借入股票并卖出，希望股票价格在不久的将来下跌；参见Luenberger (2013)。

3.2 最优回撤控制问题

得到回撤调制策略（1）后，自然会产生一个问题：如何选择“最优”的 γ. 为此，我们将截至 总收益 终端阶段 N 定义为一个比率

$$R_\gamma(N) := \frac{V(N)}{V(0)}$$

其中，$R_\gamma(\cdot)$ 的下标用于强调其对增益 γ 的依赖。定义 $J(\gamma) := \mathbb{E}[R_\gamma(N)]$。接下来，我们考虑一个基于回撤的多期随机优化问题

$$J^* := \max_{\gamma \in \Gamma} J(\gamma)$$

约束条件为

$$\begin{aligned} V(k+1) &= V(k) + u(k)X(k) + (V(k) - u(k))r_f(k) \\ &= [1 + r_f(k) + \gamma M(k)(X(k) - r_f(k))]V(k). \end{aligned}$$

容易验证

$$\frac{V(N)}{V(0)} = \prod_{k=0}^{N-1} [1 + r_f(k) + \gamma M(k)(X(k) - r_f(k))].$$

因此，我们将问题改写为以下等价形式

$$\begin{aligned} &\max_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}[R_\gamma(N)] \\ &= \max_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{N-1} [1 + r_f(k) + \gamma M(k)(X(k) - r_f(k))] \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

下文中，我们将用 γ^* 表示上述优化问题的最大化解。在实践中，如果认为得到的最优解 γ^* 可能过于激进，一种实用但可能并非最优的方法是引入一个额外的比例，记为 α，用于缩减投资规模；类似的思路可参见 Maclean 等人 (2010)。也就是说，我们可以不使用 γ^*，而改用 $\alpha\gamma^*$ 其中 $\alpha \in (0, 1]$。

注 3.2。（非凸性）。需要注意的是，求解问题（2）颇具挑战，因为调制函数 $M(k)$ 取决于 γ 以及 $X(0)$ ..., ..., $X(k-1)$，这通常会导致问题呈非凸性；例如，参见第4 节中的图4，其中展示了非凸性的特征。因此，通常需要通过蒙特卡洛模拟来求得最优解。

3.3 带重启的调制

如第1节所述，尽管所推导的回撤调制策略能够以几乎必然的方式防止回撤，但可能会导致止损行为。为解决这一问题，我们现在将重启机制引入调制策略。具体而言，设 $\varepsilon \in (0, d_{\max})$ 为预先设定的阈值参数。然后，我们将重新启动交易的阈值设定为

$$d(k) + \varepsilon > d_{\max} \tag{3}$$

如果在某个阶段 $k = k_0$，不等式（3）成立，则通过重新初始化 $d(k_0)$，重启交易：$= 0$ 并在该阶段将调制策略 $K(k)$ 的时变增益函数 $u(k) = K(k)V(k)$ 重置为 $k = k_0$ 如下

$$K(k_0) := \gamma^* \alpha e^{-k_0/N} M(k_0) \tag{4}$$

其中， $\alpha e^{-k_0/N}$ 表示一个遗忘因子，其分数为 $\alpha \in (0,1]$ 前文已提及）。然后我们继续交易，直至下一次重启阶段或终端阶段 N。

注释 3.3。 (i) 方程（4）中的遗忘因子体现了这样一种想法：重启后应缩小交易规模。换句话说，如果交易逐渐接近预先设定的回撤限额 $d_{\max}$，那么重启后的后续交易应更加保守。（ii）请注意，重启后，控制策略满足 $|u(k_0)| \leq |\gamma^*|\alpha d_{\max}$，因为 $M(k) \leq d_{\max}$ 对所有 k都以概率为一成立。（iii）虽然本文未对此进行讨论，但值得指出的是，方程（γ^*）中的最优 4也可以在每次重启时，利用此前 $k_0 - m$ 阶段的信息重新计算，其中 $m > 1$为某个整数；另请参见 Wang 和 Hsieh (2022)，他们提出了类似的思路，通过滑动窗口方法获得数据驱动的对数最优投资组合。

4. 说明性示例

本节提出两个交易示例，以支持我们的理论。第一个示例是在交易所交易基金和无风险资产之间进行交易。第二个示例是在比特币和无风险资产之间进行交易。为简单起见，我们假设日利率为常数 $r_f(k) := 0.01/365$，对所有 k 均成立，这对应于年利率 1%。尽管我们的理论允许使用杠杆，但在下文中，我们额外施加现金融资条件，即对所有 k， $|u(k)| \leq V(k)$，这对应于 $|K^*(k)| \leq 1$.

4.1 使用交易所交易基金和无风险资产进行交易

将 Vanguard Total World Stock Index Fund ETF（代码：VT）[2] 视为风险资产，选取从 2019 年 1 月 2 日至 2020 年 1 月 2 日的一年作为样本内优化期间，并将 2020 年 1 月 2 日至 2022 年 9 月 20 日作为样本外期间，共包含 $N = 684$个交易日；参见图2 ，其中青色轨迹用于样本内优化，蓝色轨迹用于样本外交易测试。需要注意的是，由于新冠疫情，所考虑的价格数据涵盖了 2020 年 2 月 20 日至 2020 年 4 月 7 日期间的 2020年股市崩盘，以及崩盘后的恢复期。因此，我们认为该数据集是对所提出的带重启机制的回撤调制策略进行回测的理想案例。

不失一般性，设初始账户价值为 $V(0) := \$1$。为实施带重启的回撤调制策略，我们设定 $d_{\max} := 0.1$ ，并将重启阈值设为 $\varepsilon := d_{\max}/10$。根据样本内期间收集的数据，相应的可行集为 $\Gamma \approx [-30.79,\ 34.9]$。随后，我们通过蒙特卡洛模拟对优化问题（2）进行数值求解。结果表明，在施加现金融资条件时，任意一个 $\gamma \in (8.5,34.9)$都具有几乎相同的最优值。为保持风险厌恶，我们选取候选值中的下确界

[2] VT 同时投资于海外股票和美国股票，因此可以视为全球股票市场的良好代表

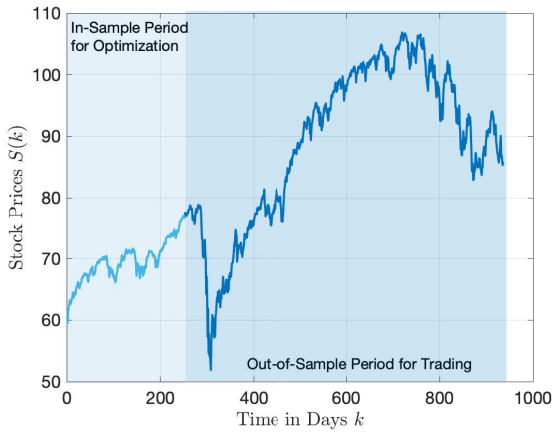


图 1. VT 的股票价格

，即 $\gamma^* := 8.5$。利用这个 γ，我们得到回撤调制策略 $u^*(k) = \gamma^* M(k)V(k)$。
相应的交易绩效如图 2所示，其中绿色圆点表示交易已重启。在同一图中，我们还将其与标准的买入并持有策略[3] 以及不带重启的调节策略进行了比较。可以清楚地看到，带重启的调节策略表现更优。一些关键绩效指标，包括最大回撤、累计收益率以及 N期夏普比率 [4]列于表 1中。

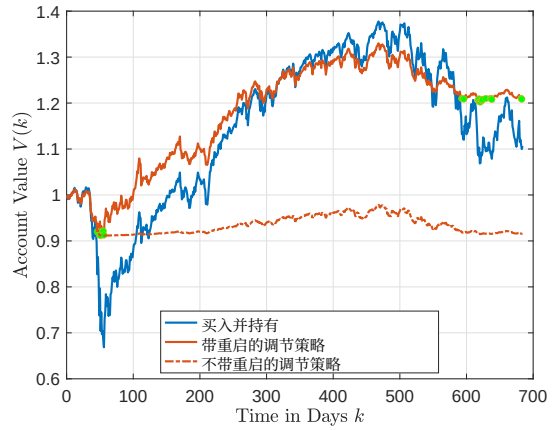


图 2. 有/无重启机制的回撤调节（绿点表示重启）

4.2 使用加密货币和无风险资产进行交易

作为第二个示例，我们考虑一个由加密货币BTC-USD和无风险资产构成的投资组合。BTC- USD资产涵盖与示例 4.1中所述相同的样本内和样本外期间。从2020年1月2日到2022年9月20日，它总共有 $N = 993$ 交易

[3] 这里，我们指持有风险资产 VT，并采用 $K(k) = 1$。[4] 每期夏普比率为 $SR := \frac{\mu - r_f}{\sigma}$ 其中， μ 是每期样本平均收益率， σ 是每期样本标准差，r_f 是每期无风险收益率。

表1. 交易VT和无风险资产的绩效指标

使用 $d_{\max}=0.1$ 和 $\varepsilon=d_{\max}/10$的交易绩效				
交易策略		买入并持有	不带重启调制	带重启的调制
最大百分比回撤 d^*		34.24%	10.00%	10.00%
累计收益率	$\frac{V(N)-V(0)}{V(0)}$	10.64%	−8.422%	20.97%
N期夏普比率 $\sqrt{N}$	$\cdot SR$	0.4082	−1.3375	**1.0462**

天[5]；参见图 3。对应于 γ的可行集为 $\Gamma=[-5.761,\ 7.083]$。

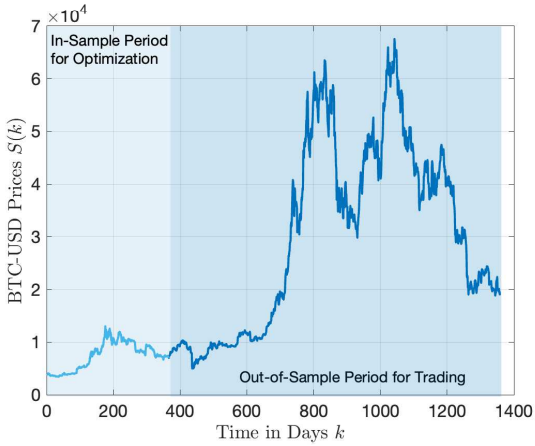


图3. BTC-USD 的价格（样本内和样本外）

取 $d_{\max}:=0.2$ 和重启阈值 $\varepsilon:=d_{\max}/10$。通过求解最优回撤控制问题 (2)，我们得到 $\gamma^*\approx 5.138$；参见图4中的 $J(\gamma)$ 与 $\gamma\in\Gamma$。请注意，对于 $\gamma\in\Gamma$，$J(\gamma)$ 显然不是凹函数。考虑到加密货币的波动特性以及无法预见的估计误差，我们考虑采用由 $\alpha\gamma^*$ 实施、带有 $\alpha=1/2$ 的分数型 γ^*。也就是说，$u^*(k)=K^*(k)V(k)$，其中$K^*(k)=\frac{\gamma^*}{2}M(k)V(k)$。采用带重启和不带重启的回撤调制策略，以及买入并持有策略时的交易绩效如图5所示，其中绿色圆点表示交易已重启。表2总结了部分绩效指标，我们可以看到，带重启的调制策略的夏普比率高于其他所有策略。

交易成本考量。传统上，以加密货币为基础资产时，大多数交易所通常会根据交易量收取 0% 至 1% 的交易手续费。虽然我们并未发展纳入交易成本的回撤调制理论，但在此例中，我们进行了回测，以观察每笔交易收取 0.1% 百分比成本时的影响。[6]取 $d_{\max}=0.2$, $\varepsilon=d_{\max}/10$ 和 $\gamma^*=2.69$，交易绩效如图 6所示。从图中可以看出，即使计入交易成本，所提出的带有重启机制的调制策略仍优于不带重启机制的策略。相应的夏普比率约为 1.521；相比之下，不带重启机制时，夏普比率降至 -0.043.

[5] 值得注意的是，加密货币通常每周七天、每天 24 小时交易。因此，其交易日比第 4.1 节中使用 VT 交易的交易日更长。[6] 这种费用水平在常见的加密货币交易所中很常见，例如 Binance；参见 Hsieh (2022b)。

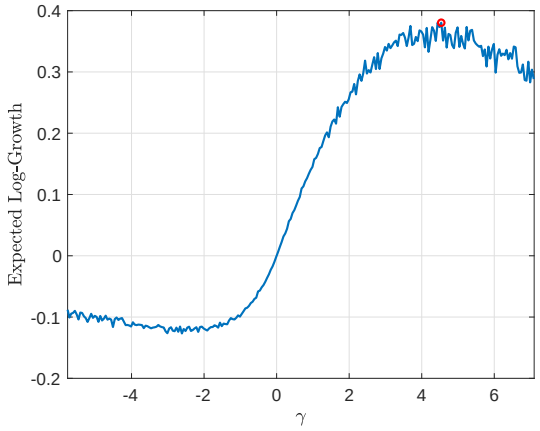


图 4. 寻找最优值： $J(\gamma)$ 与 $\gamma\in\Gamma$

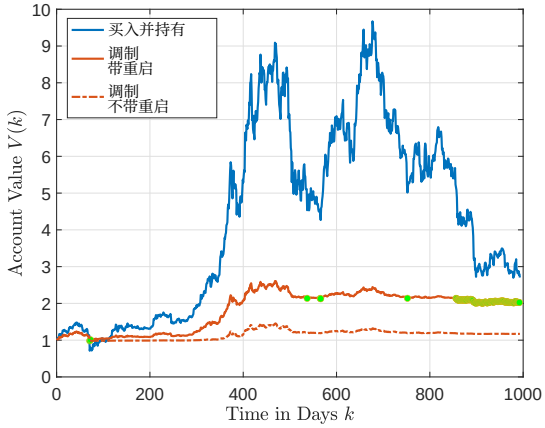


图5. BTC-USD 在 $d_{\max}:=0.2$ 和 $\varepsilon:=d_{\max}/10$ 下的交易绩效。

5. 结论

本文在现有回撤调制策略的基础上，引入了一种新颖的数据驱动的重启机制。我们首先通过证明一个关于包含风险资产和无风险资产的双资产投资组合的引理，推导出一种回撤调制策略。随后，我们加入重启机制，对所推导的调制策略进行了修改。接着，我们利用交易所交易基金和加密货币的历史价格数据，展示了在价格波动期间自动调节的交易绩效。总体而言，我们的带重启的调节策略能够动态控制回撤，并维持利润水平。

一些可能的未来研究方向包括多资产问题，这将在本文后续的期刊版本中加以探讨。另一种可能是考虑消费-投资问题；即，

表2. 交易 BTC-USD 和无风险资产的绩效指标

使用 $d_{\max} = 0.2$ 和 $\varepsilon = d_{\max}/10$的交易绩效

交易策略	买入并持有	不带重启调制	带重启的调制
最大百分比回撤 d^*	72.12%	20.00%	20.18%
累计收益率 $\frac{V(N)-V(0)}{V(0)}$	170.43%	17.41%	101.82%
N期夏普比率 $\sqrt{N}\cdot SR$	1.4424	0.6970	**2.1363**

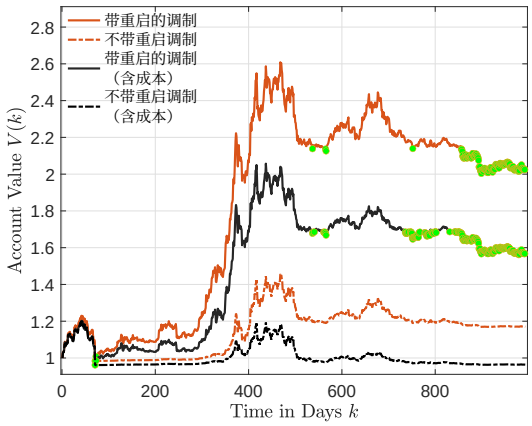


图 6. 计入和不计入交易成本时的交易绩效

$$\sup_{\gamma} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1} U_1(c(k)) + U_2(V(N))\right]$$

其中， U_1 和 U_2 是两个效用函数，且 c（k）表示在时刻 k的消费量。参见Cvitanic andZapatero （2004）。最后，还可以考虑一个更一般的投资组合优化问题，旨在 γ 最大化 $\sup_{\gamma} \mathbb{E}[U$（$V_{\gamma}$（$N$））]其中， U： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$是严格递增且凹的效用函数。一个例子是考虑一般的双曲绝对风险厌恶（HARA）类效用函数；即，

$$U(x) = \frac{1-\theta}{\theta}\left(\frac{ax}{1-\theta} + b\right)^{\theta}$$

对于 a、 $b > 0$ 和 $\theta < 1$。HARA效用函数包-括二次、指数和等弹性效用函数等特殊情形。

致谢

作者感谢Chia-Yin Lee为本文早期稿件编写代码并运行了一些初步数值示例。

参考文献

Boyd, S., Busseti, E., Diamond, S., Kahn, R.N., Koh, K., Nystrup, P., Speth, J.等（2017）。通过凸优化实现多期交易。《优化中的基础与趋势》®，3(1)，1–76。Chekhlov, A., Uryasev, S.和Zabarankin, M.（2005）。投资组合优化中的回撤度量。《理论与应用金融国际期刊》，8(1)，13–58。Cvitanic, J.和Karatzas, I.（1994）。关于“回撤”约束下的投资组合优-化。《数学及其应用IMA文集》，65，35–46。Cvitanic, J. 和 Zapatero, F.（2004）。《金融市场经济学与数学》导论。麻省理工学院出版社。Fabozzi, F.J.、Focardi, S.M.、Kolm, P.N. 和 Pachamanova, D.A.（2007）。《稳健投资组合优化与管理》。约翰·威立父子公司。Goldberg, L.R. 和 Mahmoud, O.（2017）。回撤：从实践到理论，再回到实践。《数学与金融经济学》，11(3)，275–297。Grossman, S.J. 和 Zhou, Z.（1993）。控制回撤的最优投资策略。《数理金融》，3(3)，241–276。Hayes, B.T.（2006）。具有序列相关性的对冲基金最大回撤。《另类投资杂志》，8(4)，26–38。Hsieh, C.H.（2022a）。将仿射反馈股票交易结果推广至包含止损单的情形。《自动化》，136，110051。Hsieh, C.H.（2022b）。关于含交易成本的双线性交易的稳健性。即将发表于《IEEE控制系统快报》。Hsieh, C.H. 和 Barmish, B.R.（2017a）。关于股票交易中的回撤调制反馈控制。IFAC-PapersOnLine，50(1)，952–958。Hsieh, C.H. 和 Barmish, B.R.（2017b）。回撤至关重要时马科维茨式投资策略的低效性。载于 IEEE决策与控制会议（CDC）论文集，3075–3080。Jorion, P.（2000）。风险价值。Korn, O.、M¨oller, P.M. 和 Schwehm, C.（2022）。回撤度量：它们都一样吗？《投资组合管理杂志》，48(5)，104–120。Luenberger, D.G.（2013）。投资科学。牛津大学出版社。Maclean, L.C.、Thorp, E.O. 和 Ziemba, W.T.（2010）。长期资本增长：凯利与分数凯利资本增长准则的优缺点。《定量金融》，10(7)，681–687。Magdon-Ismail, M. 和 Atiya, A.F.（2004）。最大回撤。《风险》杂志，17(10)，99–102。Malekpour, S. 和 Barmish, B.R.（2012）。通过反馈控制进行股票交易时，均值—方差考量有多大用处？载于IEEE决策与控制会议（CDC）论文集，2110–2115。Malekpour, S. 和 Barmish, B.R.（2013）。布朗运动市场中通过线性反馈进行股票交易的回撤公式。载于欧洲控制会议（ECC）论文集，87–92。Markowitz, H.M.（1952）。投资组合选择。《金融杂志》，7，77–91。Markowitz, H.M.（1959）。投资组合选择：有效分散投资，第16卷。约翰·威立，纽约。

Rockafellar, R.T. 和 Uryasev, S.（2000）。条件风险价值优化。《风险杂志》，2，21–42。Shapiro, A.、Dentcheva, D. 和 Ruszczynski, A.（2021）。随机规划讲义：建模与理论。SIAM。Wang, P.T. 和 Hsieh, C.H.（2022）。关于数据驱动的对数最优投资组合：滑动窗口方法。即将发表于 IFAC-PapersOnline。Wu, J.M.T.、Lin, S.H.、Syu, J.H. 和 Wu, M.E.（2022）。用于深度强化学习的嵌入式回撤约束奖励函数。《应用软计算》，125，109150。