arXiv:2303.02619v1 [math.FA] 5 Mar 2023

S_b度量空间上的广义豪斯多夫度量及一些不动点结果

JAYANTA SARKAR、MEGHA PANDEY、TANMOY SOM 和 B.S.CHOUDHURY

Abstract. 本文在 S_b度量空间上引入了一种类似于豪斯多夫度量的度量，并在多值 S_b度量空间上获得了一些基本性质。此外，Nadler（1962）的基本多值压缩映射被推广到 S_b度量空间的框架中，并建立了两个结果。整个研究均由适当的例子加以支持。

1. Introduction

空间的概念化，尤其是度量空间的推广以及对其性质的研究，一直是数学领域中引人入胜的课题。此外，由于不动点理论不仅应用于数学的其他领域，也应用于其他一些学科，因此在这类空间上研究不动点理论一直是数学家们感兴趣的研究方向。例如， b度量空间的概念由 Bakhtin [2], 提出，此后一些研究者在其上发展了一些不动点结果。然而，Czerwick [5] 通过采用不同的压缩条件，以丰富的方式发展了 Banach 压缩原理的推广（参见 [1], [4], [7], [9], [13], [19], [20], [24], 和 [21]）。

许多数学家研究了 S-度量空间，并揭示了许多与不动点的存在性、{ [10], [11], [15], [16], [18], 和 [22]}相关的结果。

受 Bakhtin 在 [2], 中的工作启发，Souayah 和 Mlaiki [23] 推广了b-度量空间理论，该理论现称为 S_b-度量空间，并在完备的 S_b-度量空间中，针对不同类别的压缩映射证明了一些不动点结果。Mlaiki [12] 进一步将 S_b-度量空间理论推广至扩展的 S_b-度量空间。

本文旨在推广 S_b-度量空间上的豪斯多夫度量，并求得 S_b-度量空间上多值算子的不动点。度量空间上的多值映射不动点理论已通过多种方式得到推广。这一方向的早期成果归功于 Nadler [14] ，他将 Banach压缩映射原理 [3] 拓展至集值情形。本文将 Nadler [14] 不动点结果推广至该空间上的多值映射情形。

在整篇论文中，我们用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbb{R}$ 表示实数集。

定义 1.1。（S_b-度量空间） *[23]*。设 $\mathcal{H}$ 为非空集合， $s \geq 1$ 为任意实数。定义映射 S_b: $\mathcal{H}^3 \to [0, \infty)$, 使得对所有 u、 w、 v、 $t \in \mathcal{H}$，满足以下性质

i) $S_b(u, w, v) = 0$ 当且仅当 $u = w = v$; ii) $S_b(u, w, v) \leq s[S_b(u, u, t) + S_b(w, w, t) + S_b(v, v, t)]$.

于是，三元组 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 被称为 S_b-度量空间。

例子:

(i) 设 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 和 $S_b(u, w, v) = s(|u - v| + |w - v|)$。则，对于 $s \in \mathbb{R}$ 且满足 $s \geq 1$, $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 将是一个 S_b-度量空间。(ii) 设 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$， 且 $\|.\|$ 是 $\mathcal{H}$上的一个范数，则对于 $s \in \mathbb{R}$ 且满足 $s \geq 1.$, $S_b(u, w, v) = s(\|w + v - 2u\| + \|w - v\|)$ 将是 $\mathcal{H}$ 上的一个S_b-度量

2010 *Mathematics Subject Classification.* $54H10$、 $54H25$、 $47H10$。*Key words and phrases.* 完备度量空间、豪斯多夫度量空间、压缩映射、 S_b-度量空间、不动点。

(iii) 设 $\mathcal{H}$ 是一个非空集合， d 是 $\mathcal{H}$上的通常度量，则对于 $s \in \mathbb{R}$ 且满足 $s \geq 1$.， $S_b(u,w,v) = s(d(u,v) + d(w,v))$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个 S_b-度量空间

注 1.2. 若对于所有 $u, w \in \mathcal{H}$， $S_b(u,u,w) = S_b(w,w,u)$，则 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 称为对称S_b-度量空间。

本文中， $\mathcal{H}$ 均表示对称 S_b-度量空间。

定义 1.3. [6] [17] 设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个 S_b-度量空间，则对于 $h \in \mathcal{H}$ 和 $\bar{q} > 0$ ，定义开球 $B_{S_b}(h, \bar{q})$ 和闭球 $B_{S_b}[h, \bar{q}]$ ，其中心为 h ，半径为 $\bar{q}$ ，如下：

$B_{S_b}(h, \bar{q}) = \{u \in \mathcal{H} : S_b(h,h,u) < \bar{q}\}$ 和 $B_{S_b}[h, \bar{q}] = \{t \in \mathcal{H} : S_b(h,h,u) \leq \bar{q}\}$ 分别。

定义 1.4. [23] [17] 设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个 S_b-度量空间，且 $\{h_n\}$ 是 $\mathcal{H}$中的一个序列。那么，

i) 若存在 $h \in \mathcal{H}$ ，使得当 $n \to \infty$时 $S_b(h_n, h_n, h) \to 0$ ，则称 $\{h_n\}$ 收敛。记作 $\lim_{n\to\infty} h_n = h$.ii) 若当 $n, m \to \infty$.时 $S_b(h_n, h_n, h_m) \to 0$ ，则称 $\{h_n\}$ 为柯西序列。iii) 若每个柯西序列 $\{h_n\}$ 都收敛到某个点 $h \in \mathcal{H}$，则称 $(\mathcal{H}, S_b)$ 为完备的 S_b-度量空间。

定义 1.5.（ S_b-度量空间中子集的直径）*[23]*。S_b-度量空间 $\mathcal{H}$ 中子集 K 的直径定义如下

$$D_m(K) = \sup\{S_b(h,u,v) : h,u,v \in K\}.$$

我们需要以下概念：

若对于 S_b-度量空间 $\mathcal{H}$ 的任意子集 K ， $D_m(K) < \infty$ ，则称 K 是 $\mathcal{H}$ 的有界子集。

若存在一个序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$，则称点 $x \in K \subseteq \mathcal{H}$ 是 K 的极限点。

S_b-度量空间的闭子集定义为包含其所有极限点的集合。

本文结构安排如下。下一节2 致力于在 S_b-度量空间的情形下发展类似豪斯多夫度量的理论。本文最后一节3证明了两个不动点结果，其中第一个推广了 Nadler 不动点定理 [14] ，另一个则是 Kikkawa 和 Suzuki 的定理 2 的概念化 [8]，随后列出参考文献。

2. Multi-valued S_b-metric spaces

设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 为一个 S_b-度量空间，其中 $s \geq 1$ 且 $\mathcal{N}(X) := \{P: P \text{ 是 } \mathcal{H}\}$ 的非空子集，$\mathcal{CB}(\mathcal{H}) := \{K : K \text{ 是 } \mathcal{H}\}$. 的非空有界闭子集。对于 P, R，定义 $Q \in \mathcal{CB}(\mathcal{H})$

$$D_b(h,R) = \inf\{S_b(h,h,r) : r \in R\}, \tag{2.1}$$

$$N(\epsilon, P, R) = \{h \in \mathcal{H} : D_b(h,P) \leq \epsilon \text{ and } D_b(h,R) \leq \epsilon\}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{M} = \{\epsilon > 0 : P \subset N(\epsilon, R, Q),\ R \subset N(\epsilon, P, Q), \text{ and } Q \subset N(\epsilon, P, R)\}, \tag{2.3}$$

$$H_b(P,Q,R) = \max\left\{ \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R), \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q)\right\}, \max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, P), \sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, Q)\right\}, \max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, P), \sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, R)\right\}\right\}. \tag{2.4}$$

引理 2.1. 假设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个 S_b-度量空间， $H_b : (\mathcal{CB}(\mathcal{H}))^3 \to [0, \infty)$ 是定义于 (2.4) 中的函数，那么对于某个 $k \in \mathbb{R}$ ，满足 $k \geq 1$, H_b 是 S_b-度量 $\mathcal{CB}(\mathcal{H})$，即 $(\mathcal{CB}(\mathcal{H}) H_b, k)$ 是一个 S_b-度量空间。

证明：为证明 H_b 是一个 S_b-度量空间，对于每个 $P, R, Q, M \in \mathcal{CB}(\mathcal{H})$，需要满足以下两个条件：

(a) $H_b(P,R,Q)=0$ 当且仅当 $P=R=Q$,

(b) $H_b(P,R,Q)\le k\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)+H_b(Q,Q,M)\}$.

(a) 的证明。设 $P=R=Q$，则 $H_b(P,R,Q)=0$，因为每个 $\tilde{p}\in P$都满足 $D_b(\tilde{p},R)=0$ 且 $D_b(\tilde{p},Q)=0$。反之，假设 $H_b(P,R,Q)=0$，则由 (2.4) 可得

$$\begin{aligned} & D_b(\tilde{p},R)=0 \quad \text{and} \quad D_b(\tilde{p},Q)=0 \text{ for all } \tilde{p}\in P, \\ \Longrightarrow\ & P\subseteq R \quad \text{and} \quad P\subseteq Q. \end{aligned} \tag{2.5}$$

通过类似的论证，我们得到

$$R\subseteq P \quad \text{and} \quad R\subseteq Q \tag{2.6}$$

$$Q\subseteq P \quad \text{and} \quad Q\subseteq R. \tag{2.7}$$

因此，由（2.5）、（2.6）和（2.7）可得 $P=R=Q$.

（b）的证明。由于 $D_b(h,R)=$下确界$_{r\in R}\{S_b(h,h,r)\}$由（2.1）可知（$\mathcal{H}$, S_b, s）是一个 S_b-度量空间。因此，对任意 $a\in M$, $\tilde{r}\in R$和 $\tilde{p}\in P$，有

$$\begin{aligned} & S_b(\tilde{p},\tilde{p},\tilde{r})\le s\{S_b(\tilde{p},\tilde{p},a)+S_b(\tilde{p},\tilde{p},a)+S_b(\tilde{r},\tilde{r},a)\} \\ \Longrightarrow\ & \inf_{\tilde{r}\in R} S_b(\tilde{p},\tilde{p},\tilde{r})\le s\{2S_b(\tilde{p},\tilde{p},\tilde{r})+\inf_{\tilde{r}\in R} S_b(\tilde{r},\tilde{r},a)\} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le s\{2S_b(\tilde{p},\tilde{p},\tilde{r})+2\inf_{\tilde{r}\in R} S_b(\tilde{r},\tilde{r},a)\} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{S_b(\tilde{p},\tilde{p},a)+D_b(\tilde{r},A)\} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{S_b(\tilde{p},\tilde{p},a)+H_b(R,R,M)\} \text{ by (2.4)} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{\inf_{a\in A} S_b(\tilde{p},\tilde{p},a)+H_b(R,R,M)\} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{D_b(\tilde{p},A)+H_b(R,R,M)\} \\ \Longrightarrow\ & D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)\} \text{ by (2.4)} \\ \Longrightarrow\ & \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},R)\le 2s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)\} \text{ since } \tilde{p} \text{ is arbitrary.} \end{aligned} \tag{2.8}$$

运用类似的论证，我们可以证明

$$\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},Q)\le 2s\{H_b(P,P,M)+H_b(Q,Q,M)\}. \tag{2.9}$$

利用（2.8）和（2.9），可得

$$\begin{aligned} \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},R),\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},Q)\right\} &\le \max\{2s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)\}, \\ &\qquad 2s\{H_b(P,P,M)+H_b(Q,Q,M)\}\} \\ &\le 2s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)\} \\ &\qquad +2s\{H_b(P,P,M)+H_b(Q,Q,M)\} \\ &\le 4s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M)+H_b(Q,Q,M)\}, \\ i.e.,\ \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},R),\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p},Q)\right\} &\le 4s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M) \\ &\qquad +H_b(Q,Q,M)\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

类似地，我们可以证明

$$\begin{aligned} \max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r},P),\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r},Q)\right\} &\le 4s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M) \\ &\qquad +H_b(Q,Q,M)\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \text{and, } \max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q},P),\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q},R)\right\} &\le 4s\{H_b(P,P,M)+H_b(R,R,M) \\ &\qquad +H_b(Q,Q,M)\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

因此，不等式（2.4）、（2.10）、（2.11）和（2.12）完成了（b）的证明。

注 2.　2. 如果（$\mathcal{H}$、S_b、s）是一个 S_b-度量空间，那么（$\mathcal{CB}(\mathcal{H})$ H_b，k）将是一个 S_b-度量，其中 $k = 4s$.

引理 2.3. 设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个 S_b-度量空间，则对任意 $P, R, Q \in \mathcal{CB}(\mathcal{H})$，由 (2.4) 定义的 $H_b(P, R, Q)$ 等价于 $H_b(P, R, Q) = \inf_{\epsilon>0} \mathcal{M}$。

证明：首先假设 $H_b(P,\ R,\ Q)$ 由 (2.4) 定义，则对所有 $\tilde{p} \in P$，有

$$\begin{aligned} & D_b(\tilde{p}, R) \le H_b(P, R, Q) \text{ and } D_b(\tilde{p}, R) \le H_b(P, R, Q) \\ \Longrightarrow\quad & P \subset N(H_b(P, R, Q), R, Q). \end{aligned} \tag{2.13}$$

同理，我们有

$$R \subset N(H_b(P, R, Q), P, Q) \text{ and } Q \subset N(H_b(P, R, Q), P, R). \tag{2.14}$$

因此，由（2.13）和（2.14），可得 $H_b(P, R, Q) \in \mathcal{M}$。
现在，对于任意 $\epsilon \in \mathcal{M}$，有

$$\begin{aligned} & A \subset N(\epsilon, R, Q) \\ \Longrightarrow\quad & D_b(\tilde{p}, R) \le \epsilon \text{ and } D_b(\tilde{p}, Q) \le \epsilon \text{ for all } \tilde{p} \in P \\ \Longrightarrow\quad & \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R) \le \epsilon \text{ and } \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q) \le \epsilon \\ \Longrightarrow\quad & \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R),\ \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q)\right\} \le \epsilon. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Al因此，根据（2.3）中 $\mathcal{M}$ 的定义，可得 $R \subset N(\epsilon, P, Q)$ 和 $Q \subset N(\epsilon, P, R)$, 这意味着 s

$$\max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, P),\ \sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, Q)\right\} \le \epsilon \text{ and} \tag{2.16}$$

$$\max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, P),\ \sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, R)\right\} \le \epsilon. \tag{2.17}$$

因此，利用（2.15）、（2.16）、（2.17）以及 $H_b(P, R, Q) \in \mathcal{M}$，可得 $H_b(P, R, Q) = \inf \mathcal{M}$。
反过来，假设 $H_b(P, R, Q) = \inf \mathcal{M}$，则由（2.3）可得

$$\begin{aligned} & D_b(\tilde{p}, R) \le \epsilon \text{ and } D_b(\tilde{p}, Q) \le \epsilon \text{ for each } \tilde{p} \in P \text{ and for all } \epsilon \in \mathcal{M} \\ \Longrightarrow\quad & D_b(\tilde{p}, R) \le \inf \mathcal{M} = H_b(P, R, Q) \text{ and } D_b(p, Q) \le \inf \mathcal{M} \\ \Longrightarrow\quad & \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R) \le H_b(P, R, Q) \text{ and } \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q) \le H_b(P, R, Q) \\ \Longrightarrow\quad & \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R),\ \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q)\right\} \le H_b(P, R, Q). \end{aligned} \tag{2.18}$$

类似地，我们可以证明

$$\max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, P),\ \sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, Q)\right\} \le H_b(P, R, Q) \text{ and} \tag{2.19}$$

$$\max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, P),\ \sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, R)\right\} \le H_b(P, R, Q). \tag{2.20}$$

由不等式（2.18）、（2.19）和（2.20）可得

$$\begin{aligned} \max\Bigg\{ & \max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, R), \sup_{\tilde{p}\in P} D_b(\tilde{p}, Q)\right\}, \max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, P), \sup_{\tilde{r}\in R} D_b(\tilde{r}, Q)\right\}, \\ & \max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, P), \sup_{\tilde{q}\in Q} D_b(\tilde{q}, R)\right\}\Bigg\} \le H_b(P, R, Q). \end{aligned} \tag{2.21}$$

由（2.3）可知

$$\max\left\{\max\left\{\sup_{\tilde{p}\in P}D_b(\tilde{p},R),\sup_{\tilde{p}\in P}D_b(\tilde{p},Q)\right\},\max\left\{\sup_{\tilde{r}\in R}D_b(\tilde{r},P),\sup_{\tilde{r}\in R}D_b(\tilde{r},Q)\right\},\right.$$
$$\left.\max\left\{\sup_{\tilde{q}\in Q}D_b(\tilde{q},P),\sup_{\tilde{q}\in Q}D_b(\tilde{q},R)\right\}\right\}\in\mathcal{M}. \tag{2.22}$$

因此，2.21和2.22共同完成了引理2.3的证明。

3. 主要结果

定理 3.1。（ S_b-度量空间上 Nadler 不动点定理的推广）。
设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个完备度量空间， $\mathcal{CB}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭有界子集的集合，其度量为 H_b ，并设 $\mathfrak{T}:\mathcal{H}\to\mathcal{CB}(\mathcal{H})$ 是一个满足以下条件的连续多值映射，

$$H_b(\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}g)\leq\alpha S_b(h,h,g)\ for\ all\ h,g\in\mathcal{H}\ and\ \alpha\in\left[0,\frac{1}{s}\right). \tag{3.1}$$

那么， $\mathfrak{T}$ 在 $\mathcal{H}$.中有一个不动点

证明：考虑 $h_0\in\mathcal{H}$ 并选择 $h_1\in\mathfrak{T}h_0$。由于 $\mathfrak{T}h_0$， $\mathfrak{T}h_1\in\mathcal{CB}(\mathcal{H})$，因此根据引理2.3 存在 $h_2\in\mathfrak{T}h_1$ 使得

$$\begin{aligned} & S_b(h_1,h_1,h_2) \leq H_b(\mathfrak{T}h_0,\mathfrak{T}h_0,\mathfrak{T}h_1)+\alpha, \\ \Longrightarrow\ & S_b(h_1,h_1,h_2) \leq \alpha S_b(h_0,h_0,h_1)+\alpha \text{ by (3.1)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

同理，存在 $h_3\in\mathfrak{T}h_2$，使得

$$\begin{aligned} S_b(h_2,h_2,h_3) &\leq H_b(\mathfrak{T}h_1,\mathfrak{T}h_1,\mathfrak{T}h_2)+\alpha^2 \\ &\leq \alpha S_b(h_1,h_1,h_2)+\alpha^2 \\ &\leq \alpha[\alpha S_b(h_0,h_0,h_1)+\alpha]+\alpha^2 \text{ by (3.2)} \\ \Longrightarrow\ S_b(h_2,h_2,h_3) &\leq \alpha^2 S_b(h_0,h_0,h_1)+2\alpha^2. \end{aligned}$$

如此继续下去，我们得到一个序列 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ ，使得 $h_{i+1}\in\mathfrak{T}h_i$ 且$S_b(h_i,h_i,h_{i+1})\leq H_b(\mathfrak{T}h_{i-1},\mathfrak{T}h_{i-1},\mathfrak{T}h_i)+\alpha^i$ 对所有 $i\geq 1$ 都成立。由于

$$\begin{aligned} S_b(h_i,h_i,h_{i+1}) &\leq H_b(\mathfrak{T}h_{i-1},\mathfrak{T}h_{i-1},\mathfrak{T}h_i)+\alpha^i \\ &\leq \alpha S_b(h_{i-1},h_{i-1},h_i)+\alpha^i \\ &\leq \alpha[H_b(\mathfrak{T}h_{i-2},\mathfrak{T}h_{i-2},\mathfrak{T}h_{i-1})+\alpha^{i-1}]+\alpha^i \\ &= \alpha H_b(\mathfrak{T}h_{i-2},\mathfrak{T}h_{i-2},\mathfrak{T}h_{i-1})+2\alpha^i \\ &\leq \alpha^2 S_b(h_{i-2},h_{i-2},h_{i-1})+2\alpha^i \\ &\vdots \\ \Longrightarrow\ S_b(h_i,h_i,h_{i+1}) &\leq \alpha^i S_b(h_0,h_0,h_1)+i\alpha^i \text{ for all } i\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

因此，对于 $m \geq n$，我们推得

$$\begin{aligned}
S_b(h_n,h_n,h_m) &\leq s\left[2S_b(h_n,h_n,h_{n+1}) + S_b(h_{n+1},h_{n+1},h_m)\right] \quad \text{(by Remark 2.2)}\\
&\leq 2sS_b(h_n,h_n,h_{n+1}) + s\left[s\left[2S_b(h_{n+1},h_{n+1},h_{n+2}) + S_b(h_{n+2}+h_{n+2}+h_m)\right]\right]\\
&= 2sS_b(h_n,h_n,h_{n+1}) + 2s^2S_b(h_{n+1},h_{n+1},h_{n+2}) + s^2S_b(h_{n+2},h_{n+2},h_m)\\
&\vdots\\
&\leq 2sS_b(h_n,h_n,h_{n+1}) + \cdots + 2s^{m-n}S_b(h_{m-1},h_{m-1},h_m)\\
&\leq 2\Big[s\left\{\alpha^nS_b(h_0,h_0,h_1) + n\alpha^n\right\} + s^2\{\alpha^{n+1}S_b(h_0,h_0,h_1) + (n+1)\alpha^{n+1}\}\\
&\qquad + \cdots + s^{m-n}\left\{\alpha^{m-1}S_b(h_0,h_0,h_1) + (m-1)\alpha^{m-1}\right\}\Big]\\
&= 2\Big[\{s\alpha^n + \cdots + s^{m-n}\alpha^{m-1}\}S_b(h_0,h_0,h_1) + \{sn\alpha^n + s^2(n+1)\alpha^{n+1}\\
&\qquad + \cdots + s^{m-n}(m-1)\alpha^{m-1}\}\Big]\\
&= \frac{2(s\alpha^n)(1-(s\alpha)^{m-n-1})}{1-s\alpha}S_b(h_0,h_0,h_1) + s\alpha^n\{n + (n+1)s\alpha\\
&\qquad + \cdots + (n+(m-n-1))(s\alpha)^{m-n-1}\}\\
&= \frac{2s\alpha^n(1-(s\alpha)^{m-n-1})}{1-s\alpha}S_b(h_0,h_0,h_1) + s\alpha^n\sum_{i=1}^{m-n-1}(n+i)(s\alpha)^i.
\end{aligned}$$

这意味着

$$S_b(h_n,h_n,h_m) \leq \frac{2s\alpha^n(1-(s\alpha)^{m-n-1})}{1-s\alpha}S_b(h_0,h_0,h_1) + s\alpha^n\sum_{i=1}^{m-n-1}(n+i)(s\alpha)^i. \tag{3.4}$$

由不等式（3.4），可得 $\{h_i\}$ 是一个柯西序列。由于（$\mathcal{H}, S_b, s$）是完备的，$\{h_i\}$收敛到一点 $h \in \mathcal{H}$。因此，序列 $\{\mathfrak{T}h_i\}$ 收敛到 $\mathfrak{T}h$，并且由于 $h_i \in \mathfrak{T}h_{i-1}$对所有 i都成立，可得 $h \in \mathfrak{T}h$。由此得证。

例 3.2. 设 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 满足 $S_b(h,u,w) = s\{|h-w| + |u-w|\}$，其中某个 $s \in \mathbb{R}$ 满足 $s \geq 1$ 且$\mathfrak{T}: \mathcal{H} \to \mathcal{CB}(\mathcal{H})$，使得

$$\mathfrak{T}h = \begin{cases} \left[\dfrac{h}{24s}, \dfrac{3h}{24s} + 1\right], & h \geq 0\\ \{0\}, & h < 0. \end{cases}$$

注意到

$$H_b(\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}u) \leq \frac{1}{4s}S_b(h,h,u) \text{ for every } h,u \in \mathcal{H}$$

并且 $\mathfrak{T}$ 是连续的。因此，$\mathfrak{T}$ 满足定理 3.1的所有条件，因而 $\mathfrak{T}$ 在 $\mathcal{H}$中有一个不动点。实际上，$\mathfrak{T}$的所有不动点的集合为 $\left[0, \dfrac{24s}{24s-3}\right]$.

定理 3.3. 设 $(\mathcal{H}, S_b, s)$ 是一个完备的 S_b-度量空间。定义严格递减函数 $\eta: [0, \frac{1}{s}) \to (\frac{1}{2s+1}, \frac{1}{2s}]$

$$\eta(r) = \frac{1}{s(2+r)},$$

and 设 $\mathfrak{T}: \mathcal{H} \to \mathcal{CB}(\mathcal{H})$ 是一个映射。假设存在某个 $r \in [0,1)$，使得 t

$$\eta(r)D_b(h,\mathfrak{T}h) \leq S_b(h,h,t) \text{ implies } H_b(\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}t) \leq rS_b(h,h,t) \text{ for all } h,t \in \mathcal{H}. \tag{3.5}$$

于是，存在 $z \in \mathcal{H}$，使得 $z \in \mathfrak{T}z$.

证明：取满足 $0 \leq r_1 < r < 1$ 的实数 r_1。那么，对于每个 $u = u_0 \in \mathcal{H}$ 和 $u_1 \in \mathfrak{T}u$，我们有

$$\begin{aligned} \eta(r)D_b(u,\mathfrak{T}u) &\leq \eta(r)S_b(u,u,u_1) \leq S_b(u,u,u_1) \\ \Longrightarrow D_b(u_1,\mathfrak{T}u_1) &\leq H_b(\mathfrak{T}u,\mathfrak{T}u,\mathfrak{T}u_1) \leq rS_b(u,u,u_1) \leq r_1S_b(u,u,u_1) \text{ by (3.5).} \end{aligned}$$

因此，存在 $u_2 \in \mathfrak{T}u_1$，使得 $S_b(u_1,u_1,u_2) \leq r_1S_b(u,u,u_1)$。于是，我们得到一个序列$\{u_n\}$，使得 $u_n \in \mathfrak{T}u_{n-1}$ 以及

$$S_b(u_{n-1},u_{n-1},u_n) \leq r_1S_b(u_{n-2},u_{n-2},u_{n-1}) \leq \cdots \leq r_1^{n-1}S_b(u,u,u_1). \tag{3.6}$$

因此，对于 $m \geq n$，我们有

$$\begin{aligned} S_b(u_n,u_n,u_m) &\leq s[2S_b(u_n,u_n,u_{n+1}) + S_b(u_{n+1},u_{n+1},u_m)] \text{ (by Remark 2.2)} \\ &\leq 2sS_b(u_n,u_n,u_{n+1}) + s\left[s\left[2S_b(u_{n+1},u_{n+1},u_{n+2}) + S_b(u_{n+2}+u_{n+2}+u_m)\right]\right] \\ &= 2sS_b(u_n,u_n,u_{n+1}) + 2s^2S_b(u_{n+1},u_{n+1},u_{n+2}) + s^2S_b(u_{n+2},u_{n+2},u_m) \\ &\vdots \\ &\leq 2sS_b(u_n,u_n,u_{n+1}) + \cdots + 2s^{m-n}S_b(u_{m-1},u_{m-1},u_m) \\ &\leq 2sr_1^nS_b(u,u,u_1) + 2s^2r_1^{n+1}S_b(u,u,u_1) + \cdots + 2s^{m-n}r_1^{m-1}S_b(u,u,u_1) \text{ by (3.6)} \\ &= 2sr_1^n[1 + sr_1 + (sr_1)^2 + \cdots + (sr_1)^{m-n-1}]S_b(u,u,u_1) \\ &= \frac{2sr_1^n(1-(sr_1)^{m-n})}{1-sr_1}S_b(u,u,u_1). \end{aligned}$$

这意味着

$$S_b(u_n,u_n,u_m) \leq \frac{2sr_1^n(1-(sr_1)^{m-n})}{1-sr_1}S_b(u,u,u_1). \tag{3.7}$$

由（3.7），可知 $\{u_n\}$ 是一个柯西序列。由于 $\mathcal{H}$ 是一个完备的 S_b-度量空间，$\{u_n\}$ 收敛于某个点 $z \in \mathcal{H}$。

接下来我们证明

$$D_b(z,\mathfrak{T}h) \leq rS_b(z,z,h) \text{ for each } h \in \mathcal{H}/\{z\}.$$

由于 $u_n \to z$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$S_b(u_n,u_n,z) \leq \frac{1}{2s(1+4s)}S_b(h,h,z) \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } n \geq k. \tag{3.8}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} \eta(r)D_b(u_n,\mathfrak{T}u_n) &\leq D_b(u_n,\mathfrak{T}u_n) \leq S_b(u_n,u_n,u_{n+1}) \\ &\leq s[2S_b(u_n,u_n,z) + S_b(u_{n+1},u_{n+1},z)] \\ &\leq 2s[S_b(u_n,u_n,z) + S_b(u_{n+1},u_{n+1},z)] \\ &\leq \frac{4s}{2s(1+4s)}S_b(h,h,z) \text{ by (3.8)} \\ &= \frac{1}{2s}S_b(h,h,z) - \frac{1}{2s(1+4s)}S_b(h,h,z) \\ &\leq \frac{1}{2s}S_b(h,h,z) - S_b(u_n,u_n,z) \text{ by (3.8)} \\ &\leq S_b(u_n,u_n,h) \\ \Longrightarrow \eta(r)D_b(u_n,\mathfrak{T}u_n) &\leq S_b(u_n,u_n,h). \end{aligned}$$

因此，根据假设可得 $H_b(\mathfrak{T}u_n,\mathfrak{T}u_n,\mathfrak{T}h) \leq rS_b(u_n,u_n,h)$。这意味着对于 $n \in \mathbb{N}$ 且满足 $n \geq k$，有$D_b(u_{n+1},\mathfrak{T}h) \leq rS_b(u_n,u_n,h)$。令 $n \to \infty$，我们得到

$$D_b(z,\mathfrak{T}h) \leq rS_b(z,z,h) \text{ for every } h \in \mathcal{H}/\{z\}. \tag{3.9}$$

接下来我们证明

$$H_b(\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}h,\mathfrak{T}z) \leq rS_b(h,h,z) \text{ for every } h \in \mathcal{H}.$$

若 $h = z$，则显然成立。因此，考虑 $h \neq z$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在$y_n \in \mathfrak{T}h$ 使得

$$S_b(z, z, y_n) \leq D_b(z, \mathfrak{T}h) + \frac{1}{ns} S_b(h, h, z). \tag{3.10}$$

我们有

$$\begin{aligned} D_b(x, \mathfrak{T}h) &\leq S_b(h, h, y_n) \\ &\leq s[2S_b(h, h, z) + S_b(z, z, y_n)] \\ &\leq 2sS_b(h, h, z) + sD_b(z, \mathfrak{T}h) + \frac{1}{n} S_b(h, h, z) \text{ by (3.10)} \\ &\leq 2sS_b(h, h, z) + srS_b(h, h, z) + \frac{1}{n} S_b(h, h, z) \text{ by (3.9)} \\ \implies D_b(h, \mathfrak{T}h) &\leq \left(2s + sr + \frac{1}{n}\right) S_b(h, h, z) \text{ for each } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{s}(2 + r)D_b(h, \mathfrak{T}h) \leq S_b(h, h, z)$。由 (3.5)，我们有 $H_b(\mathfrak{T}h, \mathfrak{T}h, \mathfrak{T}h) \leq rS_b(h, h, z)$。由于

$$D_b(z, \mathfrak{T}z) = \lim_{n\to\infty} D_b(u_{n+1}, \mathfrak{T}z) \leq \lim_{n\to\infty} H_b(\mathfrak{T}u_n, \mathfrak{T}u_n, \mathfrak{T}z) \leq \lim_{n\to\infty} rS_b(u_n, u_n, z) = 0$$

且 $\mathfrak{T}z \in \mathcal{CB}(\mathcal{H})$，我们得到 $z \in \mathfrak{T}z$. 证明完毕。

例 3.4。设 $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 满足 $S_b(h, u, w) = s\{|h - w| + |u - w|\}$，对于 $s \in \mathbb{R}$ 和 $s \geq 1$，是定义在 $\mathcal{H}$上的S_b-度量。考虑 $\mathfrak{T}$： $\mathcal{H} \to \mathcal{CB}(\mathcal{H})$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的集值映射，满足

$$\mathfrak{T}h = \begin{cases} \left[\frac{h-1}{48s} - 1, \frac{3(h-1)}{48s} + 2\right], & h \geq 0 \\ \{0\}, & h < 0. \end{cases}$$

接下来，注意到对所有 $h, u \in \mathcal{H}$, $H_b(\mathfrak{T}h, \mathfrak{T}h, \mathfrak{T}u) \leq \frac{1}{8s} S_b(h, h, u)$。因此，它满足定理 3.3 的条件。所以， T 有一个不动点。实际上， T的所有不动点组成的集合为 $\left[0, \frac{96s+3}{48s-3}\right]$。

注： 注意，利用定理 3.3 可得存在 $r \in \left[0, \frac{1}{s}\right)$ 使得，

$$H_b(\mathfrak{T}h, \mathfrak{T}h, \mathfrak{T}t) \leq rS_b(h, h, t) \text{ for all } h, t \in \mathcal{H}$$

这意味着 $\mathfrak{T}$ 在 $\mathcal{H}$中有一个不动点。这表明定理 3.1 是定理 3.3的推广。

4. Conclusion

我们推广了 S_b 度量空间上的豪斯多夫度量，以获得多值算子的不动点。本文将 Banach压缩映射原理推广到了集值情形。在第 2.2 节中，我们定义了 S_b 度量空间上的豪斯多夫度量，并给出了它的性质。在第 2.3 节中，我们证明了两个不动点结果。第一个是定理 3.1，它是 Nadler 不动点定理的推广。第二个是定理3.3，它是文献 [8] 中定理的推广。

未来，我们可以尝试将著名的不动点结果推广到 S_b度量空间的情形。此外，还可以尝试构造满足定理 3.1 所给条件的迭代函数系统集合，并研究这些迭代函数系统生成的分形。

Acknowledgements

第一作者的研究工作获得了印度 CSIR 的经费支持，资助编号：09/1217(13093)/2022- EMR-I。

本研究获得人力资源发展部奖学金资助，该奖学金授予第二作者，资助形式为其在印度理工学院（巴纳拉斯印度教大学）瓦拉纳西分校担任助教。

Conflict of Interest

作者声明，本文不存在利益冲突。

References

[1] H. Aydi、M. Bota、E. Karapınar和S. Mitrovi´c。关于b-度量空间中集值拟压缩映射的不动点定理。 *Fixed Point Theory and Applications*，2012(1):1–8，2012。[2] I. Bakhtin。几乎度量空间中的压缩映射，funct. *Funct. Ana. Gos. Ped. Inst. Unianowsk*，30 26: –37，1989。[3] S. Banach。抽象集合上的运算及其在积分方程中的应用。,( ): –181，1922。[4] M. Bota、A. Molnar和C. Varga。关于 b-度量空间中的Ekeland变分原理。 *Fixed Point Theory*，12 2 21( ): –28，2011。[5] S. Czerwik。

b *Acta mathematica et informatica universitatis ostravien-* -度量空间中的压

sis 1 1 5

缩映射。,( ): –11，1993。[6] N. Dedovic、G. Kishore、D. Prasad和J. Vujakovic。偏序sb-度量空间中的Suzuki型不动点结果及其应用。 *Novi Sad J. Math*，49(2):123–138，2019。[7] A. Dubey、R. Shukla和R. Dubey。

b *Asian journal of mathematics* -度量空间中的一

and applications 2014 2014

些不动点结果。„。[8] M. Kikkawa和T. Suzuki。完备度量空间中带常数的广义压缩映射的三个不动点定理。 *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*，69(9):2942–2949，2008。[9] M. Kir和H. Kiziltunc。关于b-度量空间中一些著名的不动点定理。 *Turkish journal of*

analysis and number theory 1 1 13 16, 2013 ,( ): –。[10] N.

Mlaiki。复S-度量空间中的公共不动点。 *Adv. Fixed Point Theory*，4(4):509–524，2014。[11] N. Mlaiki。在S-度量空间上的 ψ-压缩映射。 *Mathematical Sciences Letters*，4(1):9，2015。[12] N. Mlaiki。扩展 S_b-度量空间。 *J. Math. Anal*，9:124–135，2018。[13] A. Mukheimer。在有序偏b-度量空间中的 α-ψ-ϕ-压缩映射。 *J. Nonlinear Sci. Appl*，7:168–179，2014。[14] S. Nadler等。多值压缩映射。 *Pacific Journal of Mathematics*，30(2):475–488，1969。[15] K. Prudhvi。S-度量空间中的不动点结果，univer. *J. Comput. Math*，3:19–21，2015。[16] S. Sedghi和N. Shobe。S-度量空间中的一个公共唯一随机不动点定理。 *Journal of prime*

research in Mathematics 7 25 34, 2011 : –。[17] S.

Sedghi、N. Shobkolaei、M. Shahraki和T. Doˇsenovi´c。s-度量空间中四个映射的公共不动点。*Mathematical Sciences*，12(2):137–143，2018。[18] S. Sedghi和N. Van Dung。S-度量空间上的不动点定理。 *Matematički Vesnik* 255 113 124, ,( ): –。[19] W.

2014

Shatanawi。满足-maps的压缩映射在-metric空间中的不动点理论。 *Fixed point theory*

and Applications 2010 1 9, 2010 : –。[20] W.

Shatanawi和A. Pitea。拟偏度量空间中的一些耦合不动点定理。 *Fixed point*

theory and applications 2013 1 1 15, 2013 ,( ): –。[21] S.

Shukla。偏 b-度量空间及不动点定理。 *Mediterranean Journal of Mathematics*，11(2):703–711，2014。[22] A. Singh和N. Hooda。S-度量空间中的耦合不动点定理。 *International Journal of Mathematics*

and Statistics Invention 2 4 33 39, 2014 ,( ): –。[23] N.

Souayah和N. Mlaiki。

S_b 16 131 139, -度量空间中的一

2016

个不动点定理。 *J. Math. Computer Sci*: –。[24] C. Vetro、S. Chauhan、E. Karapınar和W. Shatanawi。满足广义

φ *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 38 3 1085 1105, -弱压缩条件的弱

2015

相容映射的不动点。,( ): –。

Sb-度量空间上的广义豪斯多夫度量及一些不动点结果 10Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi, India 221005*Email address*: jayantasarkar.rs.mat20@itbhu.ac.inDepartment of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi, India 221005*Email address*: meghapandey1071996@gmail.comDepartment of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi, India 221005*Email address*: tsom.apm@iitbhu.ac.in Department of Mathematics, Indian Institute of Engineering Science and Technology, Shibpur Howrah,711103, India*Email address*: binayak@math.iiests.ac.in