规范 Skyrmion 的几何

Josh CORK a 和 *Derek HARLAND* b

a) 计算与数学科学学院，莱斯特大学，*University Road*，莱斯特，英国电子邮件：*josh.cork@leicester.ac.uk*网址：
https://le.ac.uk/people/josh-cork

b) 数学学院，利兹大学，*Woodhouse Lane*，利兹，英国电子邮件：
d.g.harland@leeds.ac.uk

收稿日期：2023年3月12日，最终定稿日期：2023年9月14日；在线发表于2023年10月1日
https://doi.org/10.3842/SIGMA.2023.071

arXiv:2303.02623v2 [math.DG] 1 Oct 2023

摘要。 Manton 的一项研究表明，Skyrmion 可以视为黎曼流形之间的映射，并通过极小化能量泛函来刻画；其中拓扑非平凡的全局极小值恰好是等距变换。我们将这一能量泛函推广到规范 Skyrmion，适用于一大类空间流形和三维目标流形，其中目标流形配备了一个等距的 G-作用。我们证明，能量有一个由映射次数的等变版本给出的下界，描述相应的 BPS 方程，并讨论和分类 $G = \mathrm{U}(1)$ 与 $G = \mathrm{SU}(2)$情形下的解。

关键词： 斯格明子；拓扑孤子；BPS 方程

*2020*年数学主题分类：53C07;70S15; 53C43

1 引言

核物理中的 Skyrme 模型最初在 [29]中被引入，作为一种非线性 σ 模型，其中 π介子场由一个映射 $\phi\colon\ \mathbb{R}^3 \to S^3$ 表示，并受到在无穷远处为常值的约束。在这一框架下，重子被认定为该理论中的拓扑孤子，称为 skyrmion，而重子数则由一个拓扑不变量表示，即映射 ϕ的度。此后不久，当该模型被证明是在色荷数趋于无穷大极限下量子色动力学的有效模型时，这一认定获得了坚实的基础 [32]。尽管相对简单，多年来该模型已被证明能够成功再现原子核的许多真实性质 [23]。Skyrme 模型的一个重要特征是其拓扑能量界 [18]，该界表明，映射 ϕ 的能量有一个由其度的倍数给出的下界。

尽管最初是针对映射 $\phi\colon\ \mathbb{R}^3 \to S^3$描述的，Manton 在 [22] 中展示了如何为任意黎曼三维流形之间的映射构建 Skyrme 模型。这个几何化 Skyrme 模型仍然满足一个拓扑能量界。达到该界且能量最小的映射 $\phi\colon\ M \to N$ 要么是常值映射，要么是等距变换 [22]。因此，几何化 Skyrme 模型简洁地解释了为什么非常值映射 $\phi\colon\ \mathbb{R}^3 \to S^3$ 的能量总是严格大于其拓扑能量界。

Skyrme 场 $\phi\colon\ \mathbb{R}^3 \to S^3$ 可以与规范场 [4, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 21,25, 26, 27]耦合。关于规范 Skyrme 模型的大量研究旨在模拟核子与电磁场之间的相互作用；在这种情况下，规范群 U(1) 是最自然的选择，不过也有人研究了其他规范群。

当前对规范 Skyrmion 的理解存在一个重要空白，即缺乏一种类似于 Manton 处理普通 Skyrmion 时所采用的一般几何框架。特别是，尽管关于规范 Skyrme 能量的拓扑界已有所了解，但据我们所知，目前还没有对相应 BPS 方程的解的存在性或不存在性进行系统研究。

本文为《拓扑孤子作为粒子》特刊的一篇投稿。特刊全集见
https://www.emis.de/journals/SIGMA/topological-solitons.html

本文旨在弥补文献中的这两处空白。正如我们将看到的，规范几何化 Skyrme 模型比其未规范化的对应模型丰富得多，除等距变换和常值映射之外，还存在许多其他解。尽管问题如此复杂，我们仍能够对规范群的重要选择下的解进行分类：参见定理 4.1 和 5.2。

本文其余部分的简要安排如下。在第 2 节中，我们讨论等变微分形式和等变拓扑度，它们是规范化 Skyrme 能量及其拓扑能量界所必需的几何要素。在第 3 节中，我们运用第 2 节回顾的思想，写出规范 Skyrmion 的能量泛函、拓扑能量界以及相应的 BPS 方程。第 4、5 和6 节致力于研究规范 Skyrme 模型，以及在规范结构群为 $G = \mathrm{U}(1)$ 和 $G = \mathrm{SU}(2)$ 的情形下对 BPS 方程解的分析。我们根据 G 在 N 上的作用的主轨道空间结构来划分分析内容。我们考虑三种主轨道情形：$\mathrm{U}(1) \cong S^1$、$\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \cong S^2$ 和 $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$；然而，我们仅在前两种情形下分析 BPS 方程的解，而在第三种情形下则论证我们的 BPS 形式体系并不适用。尽管这并非本文的研究动机，但值得指出的是，从物理角度看，这三种情形分别对应于电磁学、同位旋对称性和弱相互作用对称性的规范化。

2 等变微分形式

在本节和下一节中，我们将 Skyrme 场和 Skyrme 能量推广到规范理论的情形。其广义几何背景如下。我们考虑两个黎曼三维流形 $(M,\ g_M)$ 和 $(N,\ g_N)$。设 G 为一个李群，它以等距方式作用于 $(N,\ g_N)$，并考虑 G 上的主丛 $P \to M$。规范 Skyrme 场由一对 $(\phi,\ A)$ 组成，其中 ϕ 是伴随丛 $P \times_G N$ 的光滑截面，而 A 是 P 上的联络。由于 ϕ 并非从 M 到 N 的简单函数，我们无法像通常那样利用（德拉姆）上同调定义其度。相反，我们将利用 N 的等变上同调。

Atiyah–Bott 在经典论文中首次强调了规范理论中等变上同调的重要性 [5]。它在拓扑孤子文献中的出现并不常见；值得注意的例外包括关于杨–米尔斯–希格斯涡旋的论文 [13, 24, 28]，以及关于描述磁性 Skyrmion 的规范化σ模型的论文 [31]。上述所有例子都聚焦于二维场论，与本文对三维情形的关注形成对比。因此，有必要回顾这一主题。本节旨在描述 Cartan 的等变上同调模型，以及它如何导出拓扑度。这些内容并非新成果，但将其纳入是为了确立约定并使讨论自洽完整。关于更一般的处理，参见例如 [6, 8]。

2.1 等变上同调

N 的等变上同调的Cartan模型建立在 N 上的等变微分形式之上。这些形式是 G 不变的 $S^*\mathfrak{g}^* \otimes \Omega^* N$ 中的元素。这里，$S^*\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}^*$ 中的对称张量代数，G 在其上以余伴随方式作用。等价地，等变微分形式是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\Omega^* N$ 的 G 等变多项式函数。若 $Q \in S^p\mathfrak{g}^*$ 且 $\alpha \in \Omega^q N$，我们定义 $\deg(Q \otimes \alpha) = 2p + q$。这赋予等变微分形式代数一个分次。

同样，给定任意带有 G 作用的向量丛 $E \to N$，一个取值于 E 的等变微分形式，是 G-不变元素，属于 $S^*\mathfrak{g}^* \otimes \Omega^*(N,\ E)$。这类形式的一个重要例子是线性同态 $\nu\colon \mathfrak{g} \to \Gamma(TN)$，它生成了 G 在 N 上的作用，

也就是说， $\nu(X)$ 是与 G 的作用相关联的 Killing 向量场。映射 ν 是一个取值于 TN 的等变二形式；它是等变的，因为

$$\mathcal{L}_{\nu(X)}\nu(Y) = [\nu(X), \nu(Y)] = \nu([X, Y]),$$

且由于它属于 $S^1\mathfrak{g}^* \otimes \Gamma(TN)$，因此是一个二形式。

等变微分形式 β: $\mathfrak{g} \to \Omega^* N$ 的微分定义为

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\beta(X) = \mathrm{d}(\beta(X)) - \iota_{\nu(X)}\beta(X) \qquad \text{for all } X \in \mathfrak{g}, \tag{2.1}$$

其中 d: $\Omega^* N \to \Omega^* N$ 是通常的微分，而 $\iota_{\nu(X)}$ 是关于 Killing 向量场 $\nu(X)$的收缩。可以很快验证，$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$ 使度增加一，并且平方为 0。$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$的上同调同构于$H^*_G(N, \mathbb{R})$的拓扑等变上同调，也称为 Borel 上同调；它由普通上同调 $H^*(EG \times_G N, \mathbb{R})$定义，其中 $EG \to BG$ 是分类空间 BG上的万能丛。

2.2 等变拉回

现在我们说明如何利用截面 ϕ （属于 $P \times_G N$ ）和联络 A （定义在 P上），拉回 N 上的等变形式。我们为主丛 P 选取一个局部平凡化，并在 M 上取局部坐标 x^λ ，在 N上取局部坐标 y^μ 。于是， $P \times_G N$ 的一个截面可由函数 $\phi^\mu(x)$表示，指标记为 $\mu = 1, \ldots, \dim N$。我们为 $\mathfrak{g}$选取一组基 I_a。于是，联络可由实 1-形式 $A^a(x)$表示，其中 $a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$。该联络的曲率由二形式表示

$$F^a = \mathrm{d}A^a + \tfrac{1}{2} f^a_{bc} A^b \wedge A^c,$$

其中 f^a_{bc}是由 $[I_b, I_c] = f^a_{bc} I_a$定义的 $\mathfrak{g}$的结构常数。曲率满足 Bianchi 恒等式

$$\mathrm{d}F^a + f^a_{bc} A^b \wedge F^c = 0. \tag{2.2}$$

G 对 N 的左作用诱导出李代数同态

$$\nu\colon\ \mathfrak{g} \longrightarrow \Gamma(TN), \qquad X \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \exp(-tX) \cdot y. \tag{2.3}$$

略微滥用一下记号，与 $I_a \in \mathfrak{g}$ 相关联的向量场记作 $\nu(I_a) = I_a = I^\mu_a(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} \in \Gamma(TN)$。于是

$$I^\mu_a \partial_\mu I^\lambda_b - I^\mu_b \partial_\mu I^\lambda_a = f^c_{ab} I^\lambda_c, \tag{2.4}$$

因为 ν 是一个同态。

对于等变微分形式 β： $\mathfrak{g} \to \Omega^q N$，我们定义系数 $\beta_{a_1 \ldots a_p;\ \mu_1 \ldots \mu_q}$，使得

$$\beta(X) = \frac{1}{p!q!} X^{a_1} \cdots X^{a_p} \beta_{a_1 \ldots a_p; \mu_1 \ldots \mu_q} \mathrm{d}y^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{\mu_q}, \qquad X = X^a I_a \in \mathfrak{g}.$$

系数$\beta_{a_1 \ldots a_p;\ \mu_1 \ldots \mu_q}$ 被选为关于 a_i 完全对称，并关于 μ_j完全反对称。 β 是等变的条件转化为

$$\begin{aligned} 0 = {} & I^\nu_b \partial_\nu \beta_{a_1 a_2 \ldots a_p; \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q} + \beta_{a_1 a_2 \ldots a_p; \nu \mu_2 \ldots \mu_q} \partial_{\mu_1} I^\nu_b + \beta_{a_1 a_2 \ldots a_p; \mu_1 \nu \ldots \mu_q} \partial_{\mu_2} I^\nu_b + \cdots \\ & + f^c_{a_1 b} \beta_{c a_2 \ldots a_p; \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q} + f^c_{a_2 b} \beta_{a_1 c \ldots a_p; \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_q} + \cdots . \end{aligned} \tag{2.5}$$

我们将 ϕ 的协变微分定义为

$$\mathrm{d}^A\phi = \mathrm{d}^A\phi^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} = (\mathrm{d}\phi^\mu(x) - A^a(x) I_a^\mu(\phi(x))) \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \tag{2.6}$$

这是 $T^*M \otimes \phi^* TN$ 的一个截面，从更整体的角度看可理解为 $\phi^{*A}(I)$，其中 I 是与 TN 上的恒等映射相关联的 $T^*N \otimes TN$ 的截面。等变微分形式 β 的拉回定义如下：

$$\phi^{*A}\beta = \frac{1}{p!q!} \beta_{a_1 \dots a_p ; \mu_1 \dots \mu_q}(\phi(x)) F^{a_1} \wedge \dots \wedge F^{a_p} \wedge \mathrm{d}^A\phi^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}^A\phi^{\mu_q}. \tag{2.7}$$

这是定义在 M上的微分形式。它的度与 β的度相同，即 $2p+q$，因此等变拉回保持分次。我们将在下文的命题2.1 中看到，它还与微分 d 和 $\mathrm{d}_\mathfrak{g}$相交织。

需要确认我们对拉回的定义 (2.7) 是规范不变的。无穷小局部规范变换由 $\mathfrak{g}$ 值函数 $\lambda = \lambda^a(x) I_a$, $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ 给出。它们在 (ϕ, A) 上诱导的规范变换为 $\phi \mapsto \exp(-t\lambda) \cdot \phi$, $A \mapsto \exp(-t\lambda) \cdot A := \exp(-t\lambda)(\mathrm{d}\exp(t\lambda) + A\exp(t\lambda))$。相应的无穷小作用为

$$\dot{\phi}^\mu(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \exp(-t\lambda) \cdot \phi = \lambda^a(x) I_a^\mu(\phi(x)), \tag{2.8}$$

$$\dot{A}^a(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \exp(-t\lambda) \cdot A^a = \mathrm{d}\lambda^a(x) + f^a_{bc} A^b(x) \lambda^c(x). \tag{2.9}$$

于是我们得到以下结论。

命题 2.1. 方程 (2.7) 给出的等变拉回是规范不变的，并且满足 $\phi^{*A}\mathrm{d}_\mathfrak{g}\beta = \mathrm{d}\phi^{*A}\beta$.

Pr嗬。 为简洁起见，我们只考虑 $p = q = 1$ 的情形。该 n

$$\phi^{*A}\beta = \beta_{a;\mu}(\phi(x)) F^a(x) \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu(x).$$

规范变换对 $\mathrm{d}^A\phi$ 的作用由 (2.8) 和 (2.9) 利用 (2.4) 计算如下：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{d}^A\phi^\mu} &= \mathrm{d}\dot{\phi}^\mu - \dot{A}^a I_a^\mu - A^a \dot{\phi}^\nu \partial_\nu I_a^\mu \\
&= \mathrm{d}(\lambda^a I_a^\mu) - (\mathrm{d}\lambda^a + f^a_{bc} A^b \lambda^c) I_a^\mu - A^a \lambda^b I_b^\nu \partial_\nu I_a^\mu \\
&= \mathrm{d}\lambda^a I_a^\mu + \lambda^a \mathrm{d}\phi^\nu \partial_\nu I_a^\mu - \mathrm{d}\lambda^a I_a^\mu - A^b \lambda^c (f^a_{bc} I_a^\mu + I_c^\nu \partial_\nu I_b^\mu) \\
&= \lambda^a \mathrm{d}\phi^\nu \partial_\nu I_a^\mu - A^b \lambda^c I_b^\nu \partial_\nu I_c^\mu \\
&= \lambda^a \mathrm{d}^A\phi^\nu \partial_\nu I_a^\mu.
\end{aligned}$$

此外，规范变换对 F 的作用由 (2.9) 计算得出：

$$\dot{F}^a = f^a_{bc} F^b \lambda^c.$$

因此，对 $\phi^{*A}\beta$ 的作用为

$$\begin{aligned}
\dot{\phi^{*A}\beta} &= \dot{\phi}^\nu \partial_\nu \beta_{a;\mu} F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu + \beta_{a;\mu} \dot{F}^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu + \beta_{a;\mu} F^a \wedge \dot{\mathrm{d}^A\phi^\mu} \\
&= \lambda^b I_b^\nu \partial_\nu \beta_{a;\mu} F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu + \beta_{a;\mu} f^a_{bc} F^b \lambda^c \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu + \beta_{a;\mu} F^a \wedge \lambda^b \mathrm{d}^A\phi^\nu \partial_\nu I_b^\mu \\
&= \lambda^b (I_b^\nu \partial_\nu \beta_{a;\mu} + f^c_{ab} \beta_{c;\mu} + \partial_\mu I_b^\nu \beta_{a;\nu}) F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu = 0
\end{aligned}$$

由（2.5）可知， $\phi^{*A}\beta$ 是规范不变的。

接下来我们计算外微分。根据定义（2.1），

$$\phi^{*A}\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\beta = \partial_\nu \beta_{a;\mu} F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\nu \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu - \beta_{a;\mu} I^\mu_b F^a \wedge F^b.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi^{*A}\beta &= \mathrm{d}\phi^\nu \partial_\nu \beta_{a;\mu} \wedge F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu + \beta_{a;\mu}\mathrm{d}F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu \\
&\quad - \beta_{a;\mu} F^a \wedge \mathrm{d}A^b I^\mu_b + \beta_{a;\mu} F^a \wedge A^b \wedge \mathrm{d}\phi^\nu \partial_\nu I^\mu_b \\
&= (\mathrm{d}^A\phi^\nu + A^b I^\nu_b)\partial_\nu \beta_{a;\mu} \wedge F^a \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu - \beta_{a;\mu} f^a_{bc} A^b \wedge F^c \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu \\
&\quad - \beta_{a;\mu} F^a \wedge (F^b - \tfrac{1}{2} f^b_{cd} A^c \wedge A^d) I^\mu_b + \beta_{a;\mu} F^a \wedge A^b \wedge (\mathrm{d}^A\phi^\nu + A^c I^\nu_c)\partial_\nu I^\mu_b \\
&= \phi^{*A}\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\beta + \beta_{a;\mu} F^a \wedge A^b \wedge A^c (\tfrac{1}{2} f^d_{bc} I^\mu_d + I^\nu_c \partial_\nu I^\mu_b) \\
&\quad + F^a \wedge A^b \wedge \mathrm{d}^A\phi^\mu (I^\nu_b \partial_\nu \beta_{a;\mu} + f^c_{ab}\beta_{c;\mu} + \beta_{a;\nu}\partial_\mu I^\nu_b) \\
&= \phi^{*A}\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\beta,
\end{aligned}$$

根据（2.2）、（2.4）和（2.5）。 ■

尽管我们对等变拉回的定义完全是局部的，但这一概念也可以从完全全局的角度来描述。简而言之，联络 A 在 P 上确定了一个映射 Ψ^A，它从 N 上的等变微分形式代数映射到 $P \times_G N$ [8]上的微分形式代数。这个映射称为陈–韦伊同态（在特殊情形下，若 N 是一个点且 $G = \mathrm{SU}(n)$ 的作用是平凡的，它将多项式 $\mathrm{tr}(X^n)$ 映射为陈–韦伊形式 $\mathrm{tr}(F \wedge \cdots \wedge F)$）。一般而言，截面 $\phi\colon M \to P \times_N G$ 对 N 上的等变微分形式 β 的等变拉回由 $\phi^{*A}\beta = \phi^*\Psi^A(\beta)$ 给出。关于这一点的更多细节，请参阅 [8]。

2.3 等变拓扑度

现在我们可以定义截面 ϕ 的等变度。为简单起见，我们假设 M 和 N 是紧致的三维流形，并且 $H^3_G(N,\ \mathbb{R})$ 是一维的，由以下元素生成

$$X \mapsto V_N + \mu(X).$$

这里，V_N 是 G-不变的 3-形式，定义在 N 上，而 μ 是一个等变线性映射 $\mathfrak{g} \to \Omega^1 N$。此形式必须是 $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$-闭的，因此必须满足

$$\mathrm{d}\mu(X) = \iota_{\nu(X)} V_N \qquad \text{and} \tag{2.10}$$

$$\iota_{\nu(X)}\mu(X) = 0 \qquad \text{for all } X \in \mathfrak{g}. \tag{2.11}$$

第一个条件（2.10）类似于辛几何中余矩映射的定义，只是在这里，辛形式的作用由体积形式取代。因此，我们将称这样的映射 μ 为与作用 $\nu\colon\ \mathfrak{g} \to \Gamma(TN)$ 相关联的动量映射。第二个条件（2.11）是对动量映射的一项重要约束，在辛几何中没有对应条件；等变性确保 $\iota_{\nu(X)}\mu(X)$ 为常数，但不能确保该常数为零。正如我们稍后将要探讨的，即使对于简单而自然的例子，也不存在满足（2.11）的非平凡动量映射，因此无法定义适当的拓扑度。

方程（2.10）和（2.11）此前已在同伦动量映射这一更一般的框架下得到研究 [12]，，且对 N 的维数或形式的度均无约束。文献 [12]，建立了存在性和唯一性结果，其中值得注意的是，在三维情形下，对于紧致且半单的 G，存在性的一个充分条件是 G-作用具有不动点。

G-不变的 3-形式 V_N 在 $H^3_G(N,\mathbb{R})$ 中定义了一个非平凡类，前提是 $\int_N V_N \neq 0$（除约束（2.10）和（2.11）之外）。例如，可以选择 V_N 作为与 G-不变度量 g_N相关联的体积形式。假设这些条件均得到满足，我们将截面 ϕ 的 $P\times_G N$ 的等变拓扑度定义为

$$\deg_G(\phi)=\frac{\int_M \phi^{*A}(V_N+\mu)}{\int_N V_N}. \tag{2.12}$$

与通常的度数一样，我们可以通过对 $P\to M$、A 和 ϕ 施加适当的边界条件，去掉 M 的紧致性假设。

在适当的情况下，拓扑度 $\deg_G(\phi)$ 是一个整数。我们使用等变同调简要说明原因。N 的等变同调群 $H^G_*(N,\mathbb{Z})$ 定义为 $EG\times_G N$ 的普通同调，其中 $EG\to BG$ 是分类空间 BG 上的万有 G-丛。存在一个自然映射 $N\to N\times_G EG$，因此有 $H_*(N,\mathbb{Z})\to H^G_*(N,\mathbb{Z})$。我们将 N 的基本类在 $H^G_3(N,\mathbb{Z})$ 中的像记为 $[N]$，并假设它生成 $H^G_3(N,\mathbb{Z})$。上同调中的对偶映射是 $H^*_G(N,\mathbb{R})\to H^*(N,\mathbb{R})$，由 $[\beta(X)]\mapsto[\beta(0)]$ 给出，其中 β 是一个等变闭形式。根据假设，该映射是一个同构，~因此，如果 $X(V_N+\tilde{\mu})$ 和 $X(\int_N V_N=\int_N \tilde{V}_N)$ 是满足 $\mathfrak{g}$ 的两个等变闭微分形式，那么它们的差必属于 $\mathrm{d}V_N$ 的像。这意味着（根据命题 2.1），(2.12) 与 μ 和 的选取无关。

根据定义，丛 $P\to M$ 可以通过映射$j\colon M\to BG$对 $EG\to BG$ 作拉回而得到。因此存在自然映射 $P\to EG$和 $P\times_G N\to EG\times_G N$。所以截面$\phi\to P\times_G N$确定了一个映射 $M\to EG\times_G N$，进而确定映射 $\phi_{*A}\colon H_3(M,\mathbb{Z})\to H^G_3(N,\mathbb{Z})$，它与 $\phi^{*A}\colon H^3_G(N,\mathbb{R})\to H^3(M,\mathbb{R})$ 对偶。根据假设，基本类$[M]\in H_3(M,\mathbb{Z})$ 在此映射下的像等于某个整数 n乘以 $n\,[N]$。于是，$\int_M \phi^{*A}(V_N+\mu)$ 等于 $n[N]$ 与 $[V_N+\mu]$的配对，而这又等于 $n\int_N V_N$。

3 规范 Skyrmion 的 BPS 方程

现在，我们将运用上一节回顾的几何要素，描述适用于一大类黎曼三维流形 (M,g_M) 和 (N,g_N) 的规范化版本 Skyrme 模型，并推导其 BPS 方程。为了说明我们模型的动机，我们将从一个新颖的视角回顾 Manton的几何化斯格明模型 [22]。

3.1 未规范化的 Skyrme 模型

设 (M,g_M) 和 (N,g_N) 为两个黎曼三维流形。N上的霍奇星算子是一个映射$\star_N\colon \Lambda^1N\to\Lambda^2N$。这对应于 $TN\otimes\Lambda^2N$的截面 Σ，其定义为

$$g_N(u,\Sigma(v,w))=V_N(u,v,w)\qquad \text{for all } u,v,w\in TN, \tag{3.1}$$

N,g_N上的体积形式为 V_N。映射 $\phi\colon M\to N$ 的 Skyrme 能量定义为

$$E[\phi]=\int_M g_N(\mathrm{d}\phi\wedge\star_M\mathrm{d}\phi)+g_N(\phi^*\Sigma\wedge\star_M\phi^*\Sigma). \tag{3.2}$$

这等价于 Manton 引入的能量 [22]。在此背景下，映射 ϕ 称为 Skyrme 场。注意，$\mathrm{d}\phi$ 和 $\phi^*\Sigma$ 分别是 $\Lambda^1M\otimes\phi^*TN$ 和 $\Lambda^2M\otimes\phi^*TN$的截面，而我们的能量表达式使用了 TN上的度量 g_N。ϕ 的拓扑度为

$$\deg(\phi)=\frac{1}{\mathrm{Vol}(N)}\int_M \phi^*V_N. \tag{3.3}$$

斯格明子是 Skyrme 能量（3.2）的临界点，这些临界点按其拓扑度分类。能量（3.2）有一个与度（3.3）成正比的下界。为推导这个能量界，考虑恒等式

$$\begin{aligned} &g_N((\mathrm{d}\phi - \star_M \phi^*\Sigma) \wedge (\star_M \mathrm{d}\phi - \phi^*\Sigma)) \\ &\quad = g_N(\mathrm{d}\phi \wedge \star_M \mathrm{d}\phi) + g_N(\phi^*\Sigma \wedge \star_M \phi^*\Sigma) - 2g_N(\mathrm{d}\phi \wedge \phi^*\Sigma). \end{aligned} \tag{3.4}$$

取一个标准正交标架 E_a作为 TN的标架，并取一个对偶标架 e^a作为 $\Lambda^1 N$的标架，我们可以将（3.4）中的最后一项写成

$$-2g_N(E_a, E_b)\phi^* e^a \wedge \phi^*(\star_N e^b) = -2\phi^*(e^a \wedge \star_N e^a) = -6\phi^* V_N. \tag{3.5}$$

因此，由于（3.4）非负，可得拓扑能量界

$$E[\phi] \geq 6\mathrm{Vol}(N)|\deg \phi|, \tag{3.6}$$

当且仅当以下条件成立时，等号成立

$$\star_M \mathrm{d}\phi = \phi^*\Sigma. \tag{3.7}$$

若此方程有解，则这些解是在度固定的映射空间内 Skyrme 能量（3.2）的全局极小值。方程（3.7）等价于拉回 ϕ^* 作用于 1-形式时与霍奇星算子可交换，即下图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1 N & \xrightarrow{\phi^*} & \Lambda^1 M \\ {\scriptstyle \star_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \star_M} \\ \Lambda^2 N & \xrightarrow{\phi^*} & \Lambda^2 M \end{array} \tag{3.8}$$

可交换。由于映射 $\star$ 是同构，这只有在映射的秩ϕ^*： $\Lambda^1 N \to \Lambda^1 M$与 ϕ^*: $\Lambda^2 N \to \Lambda^2 M$相等时才成立。若 ϕ^*： $\Lambda^1 N \to \Lambda^1 N$的秩为 2（分别为 1），那么 ϕ^*: $\Lambda^2 N \to \Lambda^2 N$ 的秩为 1（分别为 0），因为若 $u \in \Lambda^1 N$ 满足 $\phi^* u = 0$，则有$\phi^*(u \wedge v) = 0$对所有 $v \in \Lambda^1 N$均成立。因此只剩下两种情况：映射的秩要么都为零，要么都满秩。前一种情况对应于映射 ϕ 为常数映射。后一种情况等价于 ϕ是微分同胚；在这种情况下，（3.8）可交换当且仅当 ϕ 是等距映射。

这一结果是对 Manton 结果的重新表述 [22]。方程（3.7）等价于 Manton 的方程 $\lambda_1 = \lambda_2\lambda_3$， $\lambda_2 = \lambda_3\lambda_1$， $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$ 它们将应变张量的特征值 λ_i^2 联系起来 $g_M^{-1} \circ \phi^* g_N$。这些方程的解仅有 $\lambda_i = 0$ 对应于 ϕ为常数的情形，或 $\lambda_i = 1$ 对应于 ϕ 等距映射的情形。此结果的一个重要推论是，非恒定的普通 Skyrmion ϕ: $\mathbb{R}^3 \to S^3$ 无法达到拓扑下界（3.6），因为 $\mathbb{R}^3$ 与 S^3之间不存在等距映射。

3.2 规范 Skyrme 能量泛函

现在假设 $(N,\ g_N)$ 具有由 ν 生成的等距作用： $\mathfrak{g} \to \Gamma(TN)$，并令$P \to M$ 为一个 G-主丛。考虑截面 ϕ of $P \times_G N$ 和联络 A on P 的以下能量泛函：

$$\begin{aligned} E[\phi, A] = \int_M & c_1|\mathrm{d}^A\phi|^2 + c_2|\phi^{*A}\Sigma|^2 + c_3|\phi^{*A}\nu|^2 + c_4|\phi^{*A}\mu^\sharp|^2 \\ & + \langle c_5\phi^{*A}\nu + c_6\phi^{*A}\mu^\sharp, \phi^{*A}\Sigma\rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

这里 $c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}$是常数， $\Sigma \in \Omega^2(N, TN)$ 是二形式（在 (3.1) 中定义），表示 N上的霍奇星算子，与普通 Skyrme 能量 (3.2) 中的情况相同，而 $\mu^\sharp$: $\mathfrak{g} \to \Gamma(TN)$

是与动量映射 μ （由条件 (2.10) 和 (2.11) 定义）通过度量 g_N 对偶的向量场，即

$$g_N(\mu^\sharp(X), v) = \mu(X)(v) \qquad \text{for all } X \in \mathfrak{g},\ v \in TN.$$

此外，i 内积 $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ 在（3.9）中使用的内积按通常方式由度量 g_M 和 g_N a 定义 s

$$\langle \alpha, \beta \rangle = g_N(\alpha \wedge \star_M \beta), \qquad |\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle. \tag{3.10}$$

尽管显然比普通 Skyrme 能量（3.2）复杂得多，能量泛函（3.9）仍具备一些重要的自然特征，在精神上类似于（3.2）。首先，它尊重显然的对称性；根据命题 2.1，它是规范不变的，并且按构造对 g_M 和 g_N 的保定向等距变换不变量。它还具有普通 Skyrme 能量（3.2）的一个特征，即所有项关于导数均为二次或四次；二次项为 $|\mathrm{d}^A\phi|^2$，而其他各项都是导数的四次项，因为它们是通过拉回等变 2-形式 Σ、 ν和 $\mu^\sharp$，然后利用（3.10）对它们进行配对而构成的。

细心的读者可能会想知道，为什么我们没有在（ $\langle \phi^{*A}\nu,\ \phi^{*A}\mu^\sharp \rangle$（3.9）中考虑如下形式的项：如果我们的动机是考虑由等变 2-形式 Σ， ν 和 $\mu^\sharp$ 组合而成的所有四次项，那么这里确实应该有这一项。然而，请记住， μ 的定义之一部分是方程（2.11），它要求 $V_N + \mu$ 为等变闭的。很容易证明，这个条件 $\iota_{\nu(X)}\mu\ (X) = 0$ 对所有 $X \in \mathfrak{g}$ 都成立，这意味着 $\langle \phi^{*A}\nu,\ \phi^{*A}\mu^\sharp \rangle = 0$ 恒等成立。对于不具有拓扑度的理论，这样的项或许有意义；但由于本文旨在描述 BPS 规范 Skyrmion，我们纳入条件（ 2.11 ），因此能量中没有这样的项。

泛函（3.9）中似乎未显式出现的一个自然项是杨–米尔斯项，即正比于 $|F|^2_{\mathfrak{g}}$ 的项，其中 F 是 A 的曲率。在（ 3.9 ）中，适当组合 $|\phi^{*A}\nu|^2$ 和 $|\phi^{*A}\mu^\sharp|^2$（二者都是关于 F 的二次项）即可重现杨–米尔斯项。不过需要注意的是，杨–米尔斯项可能还伴随着 F 与 ϕ 之间额外的非平凡耦合。下面我们将通过一个例子具体说明这一点。

现在我们将说明泛函（3.9）如何推广此前研究的规范 Skyrmion 能量泛函。具体而言，我们考虑 $N =$ 配备了 $S^3 \cong$ 上的 SU(2) 圆度量，并且 $G =$ SU(2) 通过伴随作用于自身。在这种情况下，我们将看到，能量（3.9）可以化简为 [15] 中引入的能量形式。另请参见 [12, 第 8 节。2]。

对于所有 $g \in$ SU(2) 和 $X \in \mathfrak{su}(2)$，SU(2) 在自身上的左作用和右作用诱导出两个李代数同态 $\nu_{L,R}\colon \mathfrak{su}(2) \to \Gamma(T\mathrm{SU}(2))$,

$$\nu_L(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \exp(-tX)g, \qquad \nu_R(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g\exp(tX).$$

伴随作用由下式描述

$$\nu = \nu_L + \nu_R.$$

左不变和右不变的 Maurer–Cartan 1-形式 $\theta_{L,R} \in \mathfrak{su}(2) \otimes \Gamma(\Lambda^1\mathrm{SU}(2))$ 定义为$\theta_L = g^{-1}\mathrm{d}g$, $\theta_R = (\mathrm{d}g)\ g^{-1}$ ，并满足结构方程

$$\mathrm{d}\theta_L + \theta_L \wedge \theta_L = 0, \qquad \mathrm{d}\theta_R - \theta_R \wedge \theta_R = 0. \tag{3.11}$$

它们与 $\nu_{L,R}$ 的缩并满足

$$\iota_{\nu_R(X)}\theta_L = -\iota_{\nu_L(X)}\theta_R = X, \qquad \iota_{\nu_L(X)}\theta_L = -g^{-1}Xg, \qquad \iota_{\nu_R(X)}\theta_R = gXg^{-1} \tag{3.12}$$

对所有 $X \in \mathfrak{su}(2)$、 $g \in$SU(2) 均成立。

SU(2) 上的圆度量是双不变的，其形式为

$$g_N = -\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\theta_L\theta_L) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\theta_R\theta_R).$$

相应的体积形式为

$$V_N = -\tfrac{1}{12}\mathrm{tr}(\theta_L\wedge\theta_L\wedge\theta_L) = -\tfrac{1}{12}\mathrm{tr}(\theta_R\wedge\theta_R\wedge\theta_R).$$

于是，由（3.12）和结构方程（3.11）

$$\iota_{\nu(X)}V_N = \tfrac{1}{4}\mathrm{tr}(X(\theta_R\wedge\theta_R - \theta_L\wedge\theta_L)) = \mathrm{d}\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}(X(\theta_R+\theta_L)).$$

因此，动量映射可表示为 $\mu(X) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(X(\theta_L+\theta_R))$。根据（3.12），这满足（2.11），从而可以定义适当良定的拓扑度。事实上，正如我们稍后将要探讨的，这并非伴随作用下最一般的动量映射选择；不过，就本例的说明目的而言，这一选择已足够。

对偶 $\mu^\sharp$ 为

$$\mu^\sharp(X) = \tfrac{1}{2}(\nu_L(X) - \nu_R(X)), \tag{3.13}$$

因为

$$\begin{aligned} g_N(\cdot,\nu_L(X)-\nu_R(X)) &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\theta_L(\iota_{\nu_L(X)} - \iota_{\nu_R(X)})\theta_L) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(g\theta_L g^{-1}X + X\theta_L) = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(X(\theta_R+\theta_L)). \end{aligned}$$

Σ、ν、$\mu^\sharp$ 是取值于 TSU(2) 的。为了写出它们的拉回，将 TSU(2) 与平凡丛 $\mathfrak{su}(2)\times$SU(2) 识别起来会很方便。任何取值于 TSU(2) 的形式都可以通过与 Maurer–Cartan 形式 θ_L：TSU(2) $\to \mathfrak{su}$(2) 复合，转换为取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的形式。因此，$\nu(X)$ 和 $\mu^\sharp(X)$ 变为取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的函数

$$\iota_{\nu(X)}\theta_L = X - g^{-1}Xg, \qquad \iota_{\mu^\sharp(X)}\theta_L = -\tfrac{1}{2}(X + g^{-1}Xg)$$

取值于 $g\in$SU(2)。同理，Σ 变为

$$\iota_\Sigma\theta_L = \tfrac{1}{2}\theta_L\wedge\theta_L,$$

因为

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\ (\iota_{\Sigma(u,v)}\theta_L\, X) = g_N(\Sigma(u,v),\nu_R(X)) = V_N(u,v,\nu_R(X)) = -\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}([\theta_L(u),\theta_L(v)]X)$$

对于所有 u、$v\in T_g$SU(2) 和 $X\in\mathfrak{su}(2)$。

最后，I 上的 TSU(2) $\otimes\Lambda^1$SU(2) 的典范截面对应于取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的 1-形式 θ_L。于是，给定一个映射 U: $M\to$SU(2)（它表示 ϕ）以及一个 $\mathfrak{su}(2)$ 联络 A，等变拉回由以下取值于 $\mathfrak{su}(2)$ 的形式给出

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^A\phi = \phi^{*A}(I) = L^A := U^{-1}(\mathrm{d}U + [A,U]), \\ &\phi^{*A}(\Sigma) = \tfrac{1}{2}\big(L^A\wedge L^A\big), \\ &\phi^{*A}(\nu) = F - U^{-1}FU, \\ &\phi^{*A}(\mu^\sharp) = -\tfrac{1}{2}\big(F + U^{-1}FU\big). \end{aligned}$$

综上，能量泛函（3.9）变为

$$\begin{aligned} E[U,A] = \int_M\ & c_1\big|L^A\big|^2 + \tfrac{c_2}{4}\big|L^A\wedge L^A\big|^2 + \tfrac{1}{2}(4c_3+c_4)|F|^2 + \tfrac{1}{2}(c_4-4c_3)\big\langle F, U^{-1}FU\big\rangle \\ &+ \tfrac{1}{4}\big\langle(2c_5-c_6)F - (2c_5+c_6)U^{-1}FU, L^A\wedge L^A\big\rangle, \end{aligned} \tag{3.14}$$

这等价于 [15]中引入的能量。如果 $c_4 = 4c_3$，那么 F中的二次项就是通常的杨–米尔斯项。

3.3 能量界与 BPS 方程

本节讨论如何利用等变拓扑度（3.9）来界定能量（2.12）。为此，将（ $\phi^{*A}(V_N+\mu)$ 中（2.12）的被积函数用配对（3.10）表示会很有用。根据定义（方程（3.1）和（2.10））， 我们可以仿照（3.5）中的论证证明

$$V_N+\mu=\tfrac{1}{3}g_N\big(I\wedge\big(\Sigma+3\mu^\sharp\big)\big)$$

（其中 $I\in\Gamma(TM\otimes T^*M)$ 是恒等映射）。将其拉回后，我们因此得到

$$\phi^{*A}(V_N+\mu)=\tfrac{1}{3}\big\langle\star_M\mathrm{d}^A\phi,\phi^{*A}\big(\Sigma+3\mu^\sharp\big)\big\rangle. \tag{3.15}$$

一般而言， [15], SU(2) 规范 Skyrme 能量的能量界（3.14）已被推导出来。那里给出的论证并未明确依赖 SU(2) 结构——它们只要求能量和荷可以表示为二次型，正如我们在此所做的那样——因此可立即应用于我们的能量。使用 [15], 中概述的方法，可以利用（3.15）证明，若参数 c_i 满足适当的约束，使得 E 为正，则有以下一般界[1]

$$E[\phi,A]\geq 6\sqrt{\frac{c_1\big(c_3\big(4c_2c_4-c_6^2\big)-c_4c_5^2\big)}{4c_3(9c_2+c_4-3c_6)-9c_5^2}}\,\mathrm{Vol}(N)|\deg_G(\phi)|.$$

这一一般界的缺点在于，相关的 BPS 方程并不明确。一般而言，预期会有多个 BPS 方程，在这种情况下，找到非平凡解的可能性不大。因此，我们希望对参数 c_i 施加约束，使 BPS 方程的数量较少；具体而言，只有一组或两组方程。为了达到这一点，很容易看出，这要求（3.9）的能量密度具有以下形式

$$\begin{aligned}\mathcal{E}=\kappa\big|\lambda\star_M\mathrm{d}^A\phi\mp\phi^{*A}\big(\Sigma+3\mu^\sharp\big)\big|^2+\big|\phi^{*A}(\alpha\Sigma+\beta\mu^\sharp+\gamma\nu)\big|^2\\ \pm 2\kappa\lambda\big\langle\star_M\mathrm{d}^A\phi,\phi^{*A}\big(\Sigma+3\mu^\sharp\big)\big\rangle,\end{aligned} \tag{3.16}$$

对于某些常数 α， β， γ， κ， $\lambda\in\mathbb{R}$， κ， $\lambda>0$ 它们应与系数 c_1，……， c_6相关。通过重新定向并重新缩放（M， g_M），我们可以固定上面的符号，并选择 $\lambda=1$。我们还可以通过固定能量尺度来固定 $\kappa=1$ 。因此，由（3.15）和（3.16）可得拓扑能量界

$$E[\phi,A]\geq 6\,\mathrm{Vol}(N)|\deg_G(\phi)|, \tag{3.17}$$

当且仅当满足 BPS 方程时，该界可取到

$$\star_M\mathrm{d}^A\phi-\phi^{*A}\big(\Sigma+3\mu^\sharp\big)=0, \tag{3.18}$$

$$\phi^{*A}\big(\alpha\Sigma+\beta\mu^\sharp+\gamma\nu\big)=0, \tag{3.19}$$

两者均成立。比较（3.9）和（3.16）中的系数可知，要使这些步骤成立，能量中的参数必须与这些方程及能量界中的参数满足以下关系

$$\begin{aligned}&c_1=1, &&c_2=1+\alpha^2, &&c_3=\gamma^2,\\ &c_4=9+\beta^2, &&c_5=2\alpha\gamma, &&c_6=2(3+\alpha\beta).\end{aligned} \tag{3.20}$$

这些指定定义了 M 上的一种尺度选择，并将能量（3.9）的参数表示为三个自由参数 α， β， $\gamma\in\mathbb{R}$的形式（相差一个常数因子）。在这种情况下，BPS

[1]这等同于 [15] 在以下情形下给出的界： $N=$在 SU(2) 下作如下识别

$$c_1=x_1,\qquad c_2=x_2,\qquad c_3=\tfrac{x_5}{4},\qquad c_4=\tfrac{x_6}{2},\qquad c_5=-\tfrac{x_4}{2},\qquad c_6=\tfrac{x_3}{2},$$

能量表达式中相差一个整体常数因子。

界（3.17）成立，并由满足 BPS 方程（3.18）和（3.19）的构型取到。这些参数的取值对于理解方程（3.18）和（3.19）可能存在的解起着关键作用。

3.4 关于 $\phi^{*A}\mu^\sharp$的必要条件

在为泛函（3.9）建立拓扑能量界，并得到 BPS 方程（3.18）和（3.19）之后，自然会想知道解是否存在，以及在何种情况下存在。虽然我们尚无法在一般情形下完整回答这个问题，但已能对特定选择的 N 和 G的解进行分类。本节将讨论一些可用于求解（3.18）和（3.19）的一般思路，其精神与我们在未规范化情形中所用的论证相似。

与（3.7）类似，将第一个 BPS 方程（3.18）的左侧视为三个映射 $\Lambda^1 N \to \Lambda^2 M$之和是有益的。由于存在第三项 $3\phi^{*A}\mu^\sharp$，我们没有先验理由只考虑 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩为零或满秩的情形；事实上，正如稍后将看到的，还存在一些有趣的解，它们出现在其他情形中，而这些情形在未规范化方程中是不可能出现的。不过，如下文所示，相关映射可能具有的秩受到 $\mathrm{d}^A\phi$的秩的约束。这将使我们能够严格限制（3.18）的可能解。

首先考虑当 $\mathrm{d}^A\phi$ 满秩的情形。这意味着映射 $\phi^{*A}\colon\ \Lambda^1 N \to \Lambda^1 M$ 可逆，因此我们可以将（3.18）等价地写为

$$\star_M(v) = \phi^{*A} \star_N \left(\left(\phi^{*A}\right)^{-1}(v)\right) + 3\phi^{*A}(\mu^\sharp)\left(\left(\phi^{*A}\right)^{-1}(v)\right) \tag{3.21}$$

对所有 $v \in \Lambda^1 M$均成立。这里，$3\phi^{*A}(\mu^\sharp)$ 对 $(\phi^{*A})^{-1}(v)$ 的作用由 TN与 $\Lambda^1 N$之间的配对给出。我们的目标是将（3.21）视为一个确定度量 g_M的方程。就其目前形式而言，（3.21）确定的是一个映射 $\star_M\colon\ \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$，而不是度量张量。线性映射 $\Lambda^1_p M \to \Lambda^2_p M$ 空间的维数为 9，而度量张量空间的维数为 6，因此并非每个线性映射 $\Lambda^1_p M \to \Lambda^2_p M$ 都能成为某个度量的霍奇星算子。能够成为霍奇星算子的映射，也就是（3.21）的解，受到以下引理的约束。

Lem定义 3.1. 黎曼度量 $\star_M\colon\ \Lambda^1_p M \to \Lambda^2_p M$ 的霍奇星算子 g_M *satisfi* *es*

$$\operatorname{tr}\left(\iota_V \circ \star_M\colon \Lambda^1_p M \to \Lambda^1_p M\right) = 0 \qquad \textit{for all } V \in T_p M. \tag{3.22}$$

此外，映射 $g_M \mapsto \star_M$ 是从 $T_p M$ 上黎曼度量空间到满足 $\star$ 的所有映射集合的一个开子集的同胚 (3.22)。

证明。 对于第一部分，我们可以选取 e^i 的一个基 $\Lambda^1_p M$，它相对于 g_M 是定向正交归一的。在这个基下，$\star_M e^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}e^j \wedge e^k$，因此令 $-E_i$ 表示 $T_p M$ 的对偶基，我们有

$$\sum_j \iota_{E_j} \star_M e^j = \sum_{j,k,l} \iota_{E_j} \tfrac{1}{2}\epsilon_{jkl} e^k \wedge e^l = \sum_{j,k,l} \left(\delta^{jk}e^l - \delta^{jl}e^k\right)\epsilon_{jkl} = 0,$$

如所需。

对于第二部分，我们注意到 $g_M \mapsto \star_M$ 显然是连续的，而且满足 (3.22) 的映射空间与度量张量空间维数相同，即为 6。因此，只需给出一个连续的左逆映射 $\star \mapsto (g_M)_\star$，它作用于 $g_M \mapsto \star_M$。一个合适的映射可用对偶基 e^i 和 E_i表示为：

$$(g_M)_\star(V,W) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \star e^j(V,E_i) \star e^i(E_j,W) \qquad \text{for all } V,W \in T_p M. \tag{3.23}$$

这显然与基的选择无关。也很容易验证，若$\star = \star_M$，则 $(g_M)_\star = g_M$。■

现在考虑 $\mathrm{d}^A\phi$ 不是满秩的情形。这些情形受到以下引理的约束。

引理 3.2。若 秩$\big(\mathrm{d}^A\phi\big) < 3$，则 秩$\big(\phi^{*A} \star_N\big) =$最大值$\big\{$秩$\big(\mathrm{d}^A\phi\big) - 1,\ 0\big\}$。

证明。设 $u \in \Lambda^1 N$满足 $\phi^{*A}u = 0$。则对于所有 $v \in \Lambda^1 N$，$\phi^{*A}(u \wedge v) = 0$。因此，由于 $\star$ 是一个同构，当 ϕ^{*A} 的秩为 0 或 1 时结论成立。在秩为 2 的情形下，目前我们只能得到 $\dim\ker\ \phi^{*A}\star_N \geq 2$。然而，根据定义，在这种情况下存在非零的$e^1$，$e^2 \in \Lambda^1 N$使得 $\phi^{*A}e^1$、$\phi^{*A}e^2$线性无关，因此 $e^1 \wedge e^2$ 是一个不在 $\phi^{*A}\star_N$的核中的非零向量。■

在特殊情况下，当 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩为 2 时，我们有以下更强的约束。

引理 3.3. 若 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩为 2，则 $\star_M\phi^{*A} + \phi^{*A}\star_N\colon\ \ \Lambda^1 N \to \Lambda^2 M$ 满秩。

证明。首先，我们证明 $\mathrm{d}^A\phi$ 与 $\phi^{*A}\star_N$的核仅在零向量处相交。为此，令 $u \in \Lambda^1 N$并假设 $\phi^{*A}u = \phi^{*A}\star_N u = 0$。现在，存在 v，$w \in \Lambda^1 N$使得 $\star_N u = v \wedge w$。于是 $\phi^{*A}v \wedge \phi^{*A}w = 0$，因此我们可以找到 $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$，使得 $a\phi^{*A}v + b\phi^{*A}w = 0$。那么$av + bw$和 u 是 $\ker\big(\phi^{*A}\big)$中的两个线性无关向量，这与 $\mathrm{rk}\big(\phi^{*A}\big) = 2$的假设矛盾。

现在令 $f^1, f^2 \in \Lambda^1 N$ 为 $\ker\big(\phi^{*A} \star_N\big)$的一组基。那么 $\phi^{*A}f^1$, $\phi^{*A}f^2$ 线性无关，因此构成 ϕ^{*A} 的像空间的一组基，因为 $\ker\ \big(\phi^{*A}\big) \cap \ker\big(\phi^{*A} \star_N\big) = \{0\}$。于是得到三元组

$$\star_M\phi^{*A}f^1, \qquad \star_M\phi^{*A}f^2, \qquad \phi^{*A}\big(f^1 \wedge f^2\big)$$

线性无关：$\phi^{*A}\big(f^1 \wedge f^2\big)$ 非零，因为 $\phi^{*A}f^1$, $\phi^{*A}f^2$ 线性无关，并且根据霍奇星算子的定义，$\phi^{*A}\big(f^1 \wedge f^2\big)$ 与 $\star_M\phi^{*A}f^1$, $\star_M\phi^{*A}f^2$ 均正交。现在令$f^3 = \star_N\big(f^1 \wedge f^2\big)$。由于 $\phi^{*A}f^1$, $\phi^{*A}f^2$ 是 $\mathrm{im}\big(\phi^{*A}\big)$的一组基，$\phi^{*A}f^3$ 是 $\phi^{*A}f^1$ 和 $\phi^{*A}f^2$ 的线性组合。因此，

$$\begin{aligned}
\big(\star_M\phi^{*A} + \phi^{*A}\star_N\big)f^1 &= \star_M\phi^{*A}f^1,\\
\big(\star_M\phi^{*A} + \phi^{*A}\star_N\big)f^2 &= \star_M\phi^{*A}f^2,\\
\big(\star_M\phi^{*A} + \phi^{*A}\star_N\big)f^3 &= \star_M\phi^{*A}f^3 + \phi^{*A}\big(f^1 \wedge f^2\big),
\end{aligned}$$

线性无关。因此，$\star_M\phi^{*A} + \phi^{*A}\star_N$的秩为 3，即为满秩。 ■

将这些结果全部放回方程（3.18）的背景下，我们可以将本节的结果总结如下。

命题 3.4。设 $(\phi,\ A)$ 是 (3.18) 的一个解，并设 n 为 $\mathrm{d}^A\phi$的秩。则

1. 若 $n = 0$ 或 1，则 $\phi^{*A}\mu^\sharp$ 的秩为 n，且 $\ker\phi^{*A}\mu^\sharp = \ker\mathrm{d}^A\phi$。
2. 若 $n = 2$，则 $\phi^{*A}\mu^\sharp$ 为满秩。3. 若 $n = 3$，则该线性映射

$$\iota_V \circ \big(\phi^{*A}\mu^\sharp\big) \circ \big(\phi^{*A}\big)^{-1}\colon\ \Lambda^1 M \to \Lambda^1 M$$

对所有 $V \in TM$ 都是无迹的。这里我们将 $\phi^{*A}\mu^\sharp \in \Lambda^2 M \otimes TN$视为一个映射 $\Lambda^1 N \to \Lambda^2 M$。

证明。 前两种情形可由引理 3.2 和 3.3 以及（3.18）的一致性立即得出。对于最后一种情形，我们应用引理 3.1。由于映射 $\star_M$和 $\phi^{*A}\circ\star_N\circ(\phi^{*A})^{-1}$ 是由度量定义的，因此必然满足条件（3.22），所以（3.18）的一致性要求满足所述条件。 ■

这些必要条件可以帮助我们排除可能的解，或对解的可能性加以限制。特别是在满秩情形下，该约束使我们能够像引理 g_M 的证明中那样，从（3.1 ）和（3.23）中恢复一个度量3.21。稍后我们将通过一些具体例子再来讨论这些内容。

4 主轨道解 S^1

现在我们来关注方程（3.18）和（3.19）的解。对 G 及其在 N 上的作用采取不同选择，会得到不同的解。本节从最简单的情形开始讨论解：结构群 $G=\mathsf{U}(1)$ 在 N上的作用是非平凡的。这意味着目标流形 N 可以看作是以曲面 C 为底空间、典型纤维为 S^1 的纤维化。

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow \\ & & C. \end{array}$$

S^1 纤维可能会在 C 中某些点上方退化。

4.1 N上的不变度量

我们先更详细地描述 N 的几何。U(1) 的李代数 $\mathfrak{u}(1)$ 与 $\mathbb{R}$ 同构，并由 $1\in\mathbb{R}$ 生成。为简洁起见，我们将记为 $\nu=\nu(1)$、 $\mu=\mu(1)$、$\mu^\sharp=\mu^\sharp(1)$，它们分别生成 Killing 向量场和动量映射。由于 μ 和 g_N 都是 U(1)-等变的，因此有 $[\nu,\mu^\sharp]=0$。所以，我们可以在 N 上选取局部坐标 $(\theta,\ x,\ y)$，使得

$$\nu=\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad\text{and}\qquad\mu^\sharp=\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.1}$$

U(1)-不变度量可写成如下形式

$$g_N=f(x,y)(\mathrm{d}\theta+\omega)^2+g_C, \tag{4.2}$$

其中，1-形式 ω 和 2-张量 g_C 满足 $\omega(\partial_\theta)=0$，且 $g_C(\partial_\theta,\ \cdot)=0$。不变性要求 1-形式 ω 和对称张量 g_C 满足

$$\mathcal{L}_{\partial_\theta}\omega=0,\qquad\mathcal{L}_{\partial_\theta}g_C=0.$$

此外，由于 $g_N(\mu^\sharp,\ \nu)=\mu(\nu)=0$ 根据（2.11），必有 $\omega(\partial_y)=0$。因此

$$\omega=\omega_x(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

注意，由 (2.11) 和 (4.1)，$\mu=\mu_x\,\mathrm{d}x+\mu_y\,\mathrm{d}y=g_N(\partial_x,\partial_y)\,\mathrm{d}x+g_N(\partial_y,\partial_y)\,\mathrm{d}y$。因此，由 (4.2) 可得

$$g_N=f(x,y)^2(\mathrm{d}\theta+\omega)^2+\frac{\mu^2}{\mu_y}+h(x,y)\,\mathrm{d}x^2$$

对于某个函数 $h(x,y)$。与此度量相关联的体积形式为

$$V_N = \sqrt{fh\mu_y}\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

因此， $\iota_\nu V_N = \sqrt{fh\mu_y\mathrm{d}x}\wedge\mathrm{d}y$，根据（2.10），这必定等于 $\mathrm{d}\mu_\circ$。因此，

$$f(x,y) = \frac{(\partial_x\mu_y - \partial_y\mu_x)^2}{h\mu_y}.$$

总之， N 上的度量具有如下形式

$$g_N = \frac{(\partial_x\mu_y - \partial_y\mu_x)^2}{h\mu_y}(\mathrm{d}\theta+\omega)^2 + h\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{\mu_y}\mu^2. \tag{4.3}$$

4.2 BPS 方程的解

（(3.18)）的解。在此情形下分析 BPS 方程时，我们将首先考察（ϕ， A）的所有可能解（3.18）。如第3.4节所述，考察 $\mathrm{d}^A\phi$的可能秩很有帮助。

在零秩情形下，$\mathrm{d}^A\phi = 0$，而（3.18）意味着 $F=0$，因此该解等价于无规范模型中的常数解。

现在我们来论证，在秩为 1 或 2 的情况下不存在解。当 $\mathrm{rk}\big(\mathrm{d}^A\phi\big) = 1$时，由引理 3.2 可得 $\phi^{*A}\Sigma = 0$，因此可将 (3.18) 重排为

$$\mathrm{d}^A\phi = 3\star_M F\otimes\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.4}$$

这意味着 $0 = \phi^{*A}\mathrm{d}\theta := \mathrm{d}\theta - A$ （根据 d^A 在 (2.6) 中的定义）。因此 $F = \mathrm{d}A = \mathrm{d}^2\theta = 0$，由 (4.4) 可知 $\mathrm{rk}(\mathrm{d}^A\phi) = 0$，这就产生了矛盾。当 $\mathrm{rk}(\mathrm{d}^A\phi) = 2$时，命题 3.4 告诉我们 $\phi^{*A}\mu^\sharp$ 的秩为 3。但 $\phi^{*A}\mu^\sharp = F\otimes\frac{\partial}{\partial y}$ 的秩至多为 1，因此这种情况下，(3.18) 也无解。

剩下需要考虑的是 $\mathrm{d}^A\phi$ 满秩的情况。因此，$\mathrm{d}^A\phi$ 是一个线性同构$TM\to TN$。于是存在唯一的向量场 V，定义在 M 上，使得

$$\mathrm{d}^A\phi(V) = \mu^\sharp = \tfrac{\partial}{\partial y}.$$

利用命题 3.4(3)，因此我们要求

$$\iota_V F = 0.$$

将 ϕ 用我们在 N 上的局部坐标写作 $\phi=(\theta,x,y)$，我们有

$$\phi^{*A}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta - A, \qquad \phi^{*A}\mathrm{d}x = \mathrm{d}x, \qquad \phi^{*A}\mathrm{d}y = \mathrm{d}y.$$

由此可得

$$\iota_V(\mathrm{d}\theta - A) = \mathrm{d}\theta\big(\mu^\sharp\big) = \mathrm{d}\theta(\partial_y) = 0.$$

因此，

$$\mathcal{L}_V(\mathrm{d}\theta - A) = \mathrm{d}\iota_V(\mathrm{d}\theta - A) - \iota_V F = 0.$$

因此，$\mathrm{d}\theta - A$ 在由 V生成的流下是不变量。

现在我们的目标是求解度量的 (3.18) g_M （如式 (3.21) 及引理 3.1 的证明中所示）。为此，我们固定一种方便的规范。具体而言，我们首先选择一种规范，使得 $\iota_V A = 0$。

于是，由于 $\iota_V F = 0$，可得 $\mathcal{L}_V A = 0$。因此，该规范选择在满足 $\mathcal{L}_V \lambda = 0$ 的规范变换 $A \mapsto A + \mathrm{d}\lambda$ 下得以保持。我们可以利用这种规范自由度，将 A 的两个剩余分量之一设为零。不失一般性，因此我们可以选择一种规范，使得 $A = A_x \mathrm{d}x$。

在此规范下 $\phi^{*A} V_N = (\partial_x \mu_y - \partial_y \mu_x) \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$。由于 $\mathrm{d}^A \phi$ 具有满秩，因此该量非零，所以 θ、x以及 y是在 M上的一组良好的局部坐标。在这些坐标下 $V = \frac{\partial}{\partial y}$。度量（4.3）在 N上的拉回为

$$\phi^{*A} g_N = \frac{(\partial_x \mu_y - \partial_y \mu_x)^2}{h \mu_y} (\mathrm{d}\theta + (\omega_x - A_x)\mathrm{d}x)^2 + h\, \mathrm{d}x^2 + \frac{\mu^2}{\mu_y}.$$

对 3.18）求解 g_M 即可得到

$$g_M = \left(1 + 3 \frac{F_{\theta x} \mu_y}{(\partial_x \mu_y - \partial_y \mu_x)}\right) \left(\frac{(\partial_x \mu_y - \partial_y \mu_x)^2}{h \mu_y} (\mathrm{d}\theta + \omega - A)^2 + h\, \mathrm{d}x^2 \right) + \frac{\mu^2}{\mu_y}. \tag{4.5}$$

方程 (3.19)的解。 现在我们讨论第二个 BPS 方程（3.19）。显然，当 $\alpha = \beta = \gamma = 0$时，这些方程得到满足。正如我们将看到的，一般而言，这是与方程（3.18）的解相容的唯一非平凡情形。

设 $\alpha = 0$ 和 β不同时为 0， γ 。由于 ν 和 $\mu^\sharp$ 线性无关，方程（3.19）遂意味着 $F = 0$。这与上一小节中找到的方程（3.18）的解相容，但它们其实只是无规范 Skyrme 模型的解，即 ϕ 在局部上是等距映射，或是（协变）常数。

当 $\alpha \neq 0$时，再次利用 ν和 $\mu^\sharp$的线性无关性，(3.19) 表明 $\phi^{*A}\Sigma$ 的秩为 1 或 0。然而，正如上文所见，当 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩为 1 或 2 时，(3.18) 不相容，因此根据引理 3.2，唯一的可能性是平凡解，其中 $F = 0$ 且 $\mathrm{d}^A\phi = 0$。

总而言之，我们证明了以下结论。

定理 4.1。 若 $G = \mathrm{U}(1)$ 在 N上的作用非平凡，则 *BPS* 方程 (3.18) 和 (3.19)仅当 $F \neq 0$ 时才有解。当 $\alpha = \beta = \gamma = 0$时，这些解（局部地）由恒等映射 $\phi\colon M = N \to N$、一个满足$\iota_\nu A = \iota_{\mu^\sharp} A = \mathcal{L}_{\mu^\sharp} A = 0$的联络 A以及一个由下式给出的度量 g_M 构成：

$$g_M = g_\mu + (1 + 3 \star_N (F \wedge \mu)) g_C,$$

其中 $g_\mu = \mu^2 / \mu(\mu^\sharp)$ 和 $g_C = \phi^{*A} g_N - g_\mu$。

该定理只说明 ϕ 在局部是恒等映射；它在整体上甚至未必是一个双射（例如， N 可能是 M 被一个离散群作用后的商空间）。然而，若 $\phi\colon N \to N$在整体上就是恒等映射，那么其拓扑度为 1。这是因为

$$\int_N \phi^{*A}(V_N + \mu) = \int_N \left(V_N - A \iota_\nu V_N + \mathrm{d}A \wedge \mu\right) = \int_N \left(V_N + \mathrm{d}(A \wedge \mu)\right) = \int_N V_N.$$

4.3 例子

考虑 U(1) 在 $N = \mathrm{SU}(2)$ 上的伴随作用。我们将 SU(2) 与 S^3 等同，并选取坐标 $(\theta,\ x,\ y) \in (0,\ 2\pi) \times \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right) \times (0,\ 4\pi)$，使得

$$\phi = \left(\sin x \cos \tfrac{y}{2}, \cos x \cos\theta, \cos x \sin\theta, \sin x \sin \tfrac{y}{2}\right)$$

以及 $\nu = \frac{\partial}{\partial \theta}$。在这些坐标下， S^3 上的圆度量为

$$g_N = \cos^2(x)\, \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}x^2 + \tfrac{1}{4} \sin^2(x)\, \mathrm{d}y^2.$$

于是 $V_N = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，以及 $\iota_\nu V_N = \mathrm{d}\mu$，其中 $\mu = \frac{1}{4}\sin^2(x)\,\mathrm{d}y$。这种 μ的选择导出 $\mu^\sharp = \frac{\partial}{\partial y}$，与我们先前的约定一致。

When $\alpha=\beta=\gamma=0$，能量函数（3.9）以及 BPS 系数（3.20）由下式给出

$$E = \int_M \left(\left|L^A\right|^2 + \left|L^A\wedge L^A - \tfrac{3}{4}U^{-1}\{\mathrm{i}\sigma_3, U\}F\right|^2\right),$$

其中 $L^A = U^{-1}\left(\mathrm{d}U + \mathrm{i}_2 A[\sigma_3, U]\right)$, $U = \phi_4 - \mathrm{i}\sum_{j=1}^3\phi_j\sigma_j$和 σ_j是泡利矩阵。这表明该模型包含杨–米尔斯项，但该项的系数取决于 U。

根据上述讨论，（3.18）的解由恒等映射 $\phi\colon S^3\to S^3$和规范场 $A = A(x,\theta)\mathrm{d}x$给出。度量 M 应选为（ 4.5 ）中的形式，在此处具体为

$$g_M = \left(1+\tfrac{3}{2}\partial_\theta A_x\tan x\right)\left(\cos^2(x)\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}x^2\right) + \tfrac{1}{4}\sin^2(x)\,\mathrm{d}y^2.$$

5 主轨道为 S^2的解

现在我们考察具有 $G = \mathrm{SU}(2)$ 的情形。本节中，我们考虑 N 中典型点的稳定子为 U(1) 的情况。此时，SU(2) 作用的主轨道为 $S^2\cong\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$，而 N是该流形的紧化

$$\mathcal{I}\times S^2,$$

其中 $\mathcal{I}$ 是一个区间。我们首先更详细地描述 N 的几何。

5.1 $\times S^2$的几何

我们将 S^2 建模为李代数 $\mathfrak{su}(2)$中单位长度元素的集合。更精确地说，我们为 $X,Y\in\mathfrak{su}(2)$选取内积$(X,Y) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)$，并选取由泡利矩阵 $-\mathrm{i}\sigma_j$定义的正交归一基。那么， S^2 是满足$(x, x) = 1$的 $x = -\mathrm{i}x^j\sigma_j\in\mathfrak{su}(2)$的集合。 S^2 上的度量由 $\mathfrak{su}(2)$上的度量诱导，可写为

$$g_{S^2} = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x^j\,\mathrm{d}x^j.$$

相应的面积 2-形式为

$$\omega_{S^2} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}(x\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x) = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,x^i\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k.$$

$g\in\mathrm{SU}(2)$的作用为 $g\cdot x = gxg^{-1}$。在 $\mathcal{I}$上选取合适的坐标 ξ 后， N 上在此作用下不变的最一般度量可写为

$$g_N = h_1(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi^2 + h_2(\xi)^2\,g_{S^2}, \tag{5.1}$$

其中 $h_i\colon\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}_{>0}$ 是光滑函数。相应的体积形式为

$$V_N = h_1(\xi)h_2(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi\wedge\omega_{S^2}. \tag{5.2}$$

表示度量霍奇星算子的截面 Σ 在 $\Lambda^2N\otimes TN$ 中由下式给出（5.1）

$$\Sigma = \star_N\mathrm{d}\xi\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} + \star_N\mathrm{d}x = \frac{h_2(\xi)^2}{h_1(\xi)}\,\omega_{S^2}\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} + h_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\wedge x\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

在这个方程中，我们将 S^2 的切向量表示为满足条件 $(X,\ x) = 0$ 的 $\mathfrak{su}(2)$ 矩阵 X 。等价地，我们将 $-\mathrm{i}\sigma_j$ 与 $\partial/\partial x^j$ 视为相同。

由（2.3），描述伴随作用的线性映射 $\nu\colon\ \mathfrak{su}(2)\to\Gamma(TN)$ 为

$$\nu(X)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\exp(-tX)x\exp(tX)=[x,X]. \tag{5.4}$$

由此可得

$$\iota_{\nu(X)}V_N=-\tfrac{1}{2}h_1(\xi)h_2(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{tr}\big(x\,\mathrm{d}x\,[x,X]\big)=2h_1(\xi)h_2(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi\wedge(\mathrm{d}x,X),$$

其中，第二个等号用到了恒等式 $x^2=-1$ 和 $x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\,x$。最后，为了确定动量映射 $\mu\colon\ \mathfrak{g}\to\Omega^1(N)$，我们先假设该映射具有 SU(2)-等变性，并写出其最一般的形式。即

$$\mu(X)(\xi,x)=\eta_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,(X,x)+\eta_2(\xi)\,(\mathrm{d}x,X)+\eta_3(\xi)\,\big(\mathrm{d}x,[X,x]\big), \tag{5.5}$$

其中 $\eta_1,\eta_2,\eta_3\colon\ \mathcal{I}\to\mathbb{R}$ 均为光滑函数。施加约束 $\mathrm{d}\mu(X)=\iota_{\nu(X)}V_N$ 后可得

$$2h_1(\xi)h_2(\xi)^2=\eta_2'(\xi)-\eta_1(\xi),\qquad \eta_3(\xi)=0. \tag{5.6}$$

容易验证，这些对 μ 的约束也允许 $\iota_{\nu(X)}\mu(X)=0$，因此在此情形下，所有条件均得到满足，等变拓扑度（2.12）由此成为该模型的良定义不变量。

利用度量 g_N，于是可得

$$\mu^\sharp(X)=\frac{\eta_1(\xi)}{h_1(\xi)^2}\,(X,x)\,\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\eta_2(\xi)}{h_2(\xi)^2}\,\big(X-(X,x)x\big). \tag{5.7}$$

总之，度量和动量映射取决于四个函数 η_1、η_2、h_1、h_2。它们须满足一个约束（5.6），并且还可以通过选择坐标 ξ 进一步确定。例如，我们可以选择一组坐标，使得 $h_1(\xi)=1$，并将（5.6）作为 h_2 的定义，用两个函数 η_1、η_2 来表示，且满足 $\eta_2'-\eta_1>0$。因此，N 上的度量与动量映射 μ 合起来提供了两个函数自由度，由此可以确定 BPS 方程中的其他对象。

从 $\mathcal{I}=(0,\ T)$ 得到紧流形 N（无边界）有两种自然方式：我们可以将 $(0,\ x)$ 与 $(T,\ x)$ 等同，从而得到 $N=S^1\times S^2$；也可以将球面 $\{0\}\times S^2$ 和 $\{T\}\times S^2$ 收缩为点，从而得到 $N=S^3$。第一种情况下，我们要求 η_1、η_2、h_1、h_2 延拓为 $\xi\in\mathbb{R}$ 的周期函数，使得 g_{S^2} 和 μ 能够光滑地延拓到紧化空间。第二种情况下，在满足 $h_1(\xi)=1$ 的坐标下，我们要求当 ξ 趋近于 0 或 T 时，$h_2(\xi)\ \eta_1'(\xi)\ \eta_2(\xi)\to 0$。无论哪种情况，$\int_{\mathcal{I}}\eta_2'\,\mathrm{d}\xi=0$，因此

$$\int_{\mathcal{I}}\eta_1\,\mathrm{d}\xi=-\int_{\mathcal{I}}2h_1h_2^2\,\mathrm{d}\xi=-\,\mathrm{Vol}(N)/2\pi<0. \tag{5.8}$$

特别地，η_1 不为零。

注 5.1. 在 $h_1(\xi)=1, h_2(\xi)=\sin\xi$ 的情形下，(N,g_N) 是圆三维球面 $S^3\equiv\mathrm{SU}(2)$。利用微分同胚 $U\colon(0,\pi)\times S^2\to\mathrm{SU}(2)$，其定义为

$$U(\xi,x)=\cos\xi+\sin\xi\,x,$$

通过设定，我们可以使动量映射 (5.5) 与先前在 (3.13) 中确定的选择一致

$$\eta_1(\xi)=-1,\qquad \eta_2(\xi)=-\tfrac{1}{2}\sin 2\xi.$$

容易验证这些函数满足 (5.6)。

在描述了 N 的几何之后，我们现在确定 BPS 方程 (3.19) 和 (3.18) 的一些自然解。回忆一下，局部地，ϕ 是一个函数 $M\to N$。利用我们的模型，将 N 视为 $\mathcal{I}$ 与 $S^2\subset\mathfrak{su}(2)$ 的乘积，这对应于一对函数 $\xi\colon\ M\to\mathcal{I}$ 和 $\Phi\colon\ M\to\mathfrak{su}(2)$，使得 $\Phi^2=-1$。整体上，我们可以将 Φ 视为 $\mathrm{End}(E)$ 的一个截面，其中 $E\to M$ 是向量丛 $P\times_{\mathrm{SU}(2)}\mathbb{C}^2$。于是存在一个自然分裂 $E=L\oplus L^*$，其中 L 和 L^* 分别是与 Φ 的特征值 i 和 $-\mathrm{i}$ 相关联的特征丛。

5.2 狄拉克磁单极子

我们所确定的最简单解是其中 Φ为协变常数的情形，这意味着 $\mathrm{d}^A\Phi = 0$。在这种情况下，$\mathrm{d}^A\phi = \mathrm{d}\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}$ 的秩为 1，因此由引理 3.2，$\Phi^{*A}\Sigma = 0$。我们选择一个局部规范，使得 Φ 为常数。由于 Φ 是平行的，联络 A 限制为 a 上的一个联络 i L，并且我们可以写成 $A = \Phi\, a$ 以及 $F = \Phi\mathrm{d}a$。于是，由 (5.4) 和 (5.7)，

$$\phi^{*A}\nu = [\Phi, F] = 0 \qquad \text{and}$$
$$\phi^{*A}\mu^\sharp = \frac{\eta_1(\xi)}{h_1(\xi)^2}\,(F,\Phi)\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta_2(\xi)}{h_2(\xi)^2}\,\big(F - (F,\Phi)\Phi\big) = \frac{\eta_1(\xi)}{h_1(\xi)^2}\,\mathrm{d}a\otimes\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

BPS 方程（3.18）和（3.19）可简单写为

$$\beta\frac{\eta_1(\xi)}{h_1(\xi)^2}\,\mathrm{d}a\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} = 0,$$
$$\star_M\frac{h_1(\xi)^2\mathrm{d}\xi}{3\eta_1(\xi)}\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} = \mathrm{d}a\otimes\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

为了得到非平凡解，我们选择 $\beta = 0$。这样，第一个方程便自动成立。在 $\eta_1(\xi) = -\frac{h_1(\xi)^2}{3}$ 坐标下，第二个方程就是阿贝尔磁单极子的 BPS 方程 $\star_M\mathrm{d}\xi = -\mathrm{d}a$。最著名的解是狄拉克磁单极，此时 a 是 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 上的度为 1 的线丛的一个联络，且 $\xi = \frac{1}{2r}$。其他流形上也可以找到具有点状奇点的类似解（M，g_M）（例如，参见 [9]）。

5.3 来自旋量丛的解

对于下一类解，我们选取一个黎曼曲面 C，其局部全纯坐标为 z，度量为 $g_C = \Omega(z,\ z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}$。令 $S\to C$ 为 C的一个旋量丛，它是一个秩为 2 的向量丛。令 Φ: $S\to S$ 由体积形式 $\omega_C = \mathrm{i}\,2\Omega\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}$的 Clifford 乘法给出。$\Phi$ 的特征子空间给出两个子丛 $S^\pm$，使得 $S = S^-\oplus S^+$ 且 $\Phi s = \pm\mathrm{i}s$，其中 $s\in S^\pm$。

TC 上的 Levi-Civita 联络诱导出 S上的一个自然联络 ∇^{LC}。S 上还存在另一个自然联络 ∇^A，定义如下:

$$\nabla^A_V s = \nabla^{\mathrm{LC}}_V s + \tfrac{1}{2}V\cdot s \qquad \text{for all } s\in\Gamma(S),\ V\in\Gamma(TC) \tag{5.9}$$

（这个联络此前曾出现在容许实Killing旋量 [7]的黎曼流形分类中。）此联络的曲率可用 Gauss 曲率 K 表示为:

$$F^A = \tfrac{1}{2}(1-K)\omega_C\otimes\Phi. \tag{5.10}$$

通过直接计算很容易验证这个恒等式。首先，Levi-Civita 联络与 Chern联络重合，因此可表示为 $\nabla^{\mathrm{LC}}\frac{\partial}{\partial z} = (\partial\ln\Omega)\otimes\frac{\partial}{\partial z}$。因此，

$$\nabla^{\mathrm{LC}}\left(\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\big(\partial-\bar{\partial}\big)\ln\Omega\otimes\frac{\partial}{\partial z}.$$

我们选择一种 Clifford代数 的表示，使得

$$\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\mapsto\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Then

$$\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\mapsto-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^{\dagger}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}.$$

我们注意到，与 $\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z$ 的 Clifford 乘法与和 $2\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}$ 的 Clifford 乘法相同，因为二者通过音乐同构相关。因此，

$$\omega_C\cdot s=\frac{\mathrm{i}}{4}\left[\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z,\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\overline{z}\right]\cdot s=\mathrm{i}\left[\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}},\Omega^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot s$$

对于所有 $s\in S$，因此

$$\Phi=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

在此表示下，Levi-Civita 联络的形式为

$$\nabla^{\mathrm{LC}}=\mathrm{d}+\begin{pmatrix}-\mathrm{i}a&0\\0&\mathrm{i}a\end{pmatrix}.$$

对于 1-形式 a。于是

$$\left[\nabla^{\mathrm{LC}},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]=2\mathrm{i}a\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

与我们之前的计算进行比较，可推得 $\mathrm{i}a=\frac{1}{4}(\partial-\bar{\partial})\ln\Omega$。因此，$\nabla^A$ 在此规范下的联络矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(\bar{\partial}-\partial)\ln\Omega&-\frac{1}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\overline{z}\\\frac{1}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z&\frac{1}{4}(\partial-\bar{\partial})\ln\Omega\end{pmatrix}.$$

其曲率为

$$F=\mathrm{d}A+A\wedge A=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{2}\rho-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_C&0\\0&-\frac{\mathrm{i}}{2}\rho+\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_C\end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

其中 $\rho=-\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\ln\Omega=K\omega_C$ 是 Ricci 形式。至此，方程（5.10）的证明完成。这个显式计算还表明

$$\mathrm{d}^A\Phi=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\overline{z}\\-\mathrm{i}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z&0\end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

由此可得

$$\Phi^{*A}g_{S^2}=-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\big(\mathrm{d}^A\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi\big)=\Omega\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z}=g_C,$$
$$\Phi^{*A}\omega_{S^2}=-\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\big(\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi\wedge\mathrm{d}^A\Phi\big)=\tfrac{\mathrm{i}}{2}\Omega\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=\omega_C.$$

回到 BPS 方程，我们选取 $M=\mathcal{I}\times C$，并令 $E=S$ 为 C 的旋量丛，再通过显然的投影将其拉回到 $\mathcal{I}$。截面 Φ 和联络 A 即为上文定义的截面和联络（但拉回到 $\mathcal{I}\times C$）。函数 ξ: $\mathcal{I}\times C\to\mathcal{I}$ 就是投影到第一个因子的投影。

由方程（5.10）（或者等价地，由方程（5.11）和（5.12））可得

$$\phi^{*A}\nu=\big[\Phi,F^A\big]=0.$$

我们将假设 $\alpha = \beta = 0$，则（3.19）得到满足。转而考虑（3.18），我们在 N 上选取坐标 ξ，使得 $h_1 = 1$，并由（5.3）得到

$$\phi^{*A}\Sigma = h_2^2\,\omega_C\frac{\partial}{\partial\xi} + \mathrm{d}\xi\wedge\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi. \tag{5.14}$$

另一方面，由（5.10），以及（Φ,Φ）$= 1$这一事实，我们得到

$$\phi^{*A}\mu^\sharp = \tfrac{1}{2}\eta_1(1-K)\omega_C\frac{\partial}{\partial\xi}. \tag{5.15}$$

我们为 M 上的度量作如下拟设

$$g_M = \mathrm{d}\xi^2 + f(\xi)g_C,$$

因此 $\star_M\mathrm{d}\xi = f(\xi)\omega_C$且

$$\star_M\mathrm{d}^A\Phi = \star_M\begin{pmatrix}0 & -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\bar{z}\\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\bar{z}\\ -\frac{1}{2}\Omega^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z & 0\end{pmatrix} = \mathrm{d}\xi\wedge\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi.$$

So

$$\star_M\mathrm{d}^A\phi = f(\xi)\omega_C + \mathrm{d}\xi\wedge\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi.$$

结合（5.14）和（5.15），可知（3.18）（或等价地，（3.21））的解为

$$g_M = \mathrm{d}\xi^2 + \big(h_2(\xi)^2 + \tfrac{3}{2}\eta_1(\xi)(1-K)\big)g_C. \tag{5.16}$$

这可能是黎曼度量，也可能不是，取决于 g_C 的系数的符号。注意，g_M 一般来说并非 N 上度量的拉回。后者由下式给出

$$\phi^{*A}g_N = \mathrm{d}\xi^2 + h_2(\xi)^2 g_C.$$

由于 η_1 是一个处处不为零的函数，因此仅当 K 为常数且等于 1 时 $g_M = \phi^{*A}g_N$，而 g_C 是单位半径球面上的度量。在这种情况下，A 是平坦的，并且 ϕ 满足无规范 Skyrme 模型的 BPS 方程。

现在我们考察这些解的整体拓扑。设 C 是紧致的，并且 N是紧致的。回顾我们所选择的 $h_1(\xi) = 1$，（5.8）给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M) &= \int_{\mathcal{I}\times C}\big(h_2(\xi)^2 + \tfrac{3}{2}\eta_1(\xi)(1-K)\big)\,\mathrm{d}\xi\wedge\omega_C\\ &= \int_{\mathcal{I}\times C}\big(h_2(\xi)^2 - 3h_2(\xi)^2(1-K)\big)\,\mathrm{d}\xi\wedge\omega_C\\ &= \int_{\mathcal{I}} h_2(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi\big(6\pi\chi(C) - 2\,\mathrm{Area}(C)\big).\end{aligned}$$

如果（5.16）是一个黎曼度量，那么该积分必须为正。因此，只有当欧拉示性数满足 M 并且 N 紧致且为黎曼的情况下，这一构造才给出解，即 $\chi(C) > 0$，也就是说，当 C 是一个球面时。这意味着 M 和 N 同胚于 $S^1\times S^2$ 或 S^3（或者是这些空间之一的商空间）。

有趣的是，M 与 N 不一定同胚。为说明这一点，考虑 g_N是 $N = S^3$上的圆度量的情形。回想 $h_2(\xi) =\sin(\xi)$，并且我们可以取 $\eta_1(\xi) = -1$。如果 K 的高斯曲率 $C = S^2$ 大于 1，那么度量（5.16）可延拓到 $S^1\times S^2$，而它显然不同胚于 S^3。

继续讨论整体拓扑，假设 M 和 N 是紧致的，我们来考察解的拓扑度（2.12）。 N 的体积为

$$\mathrm{Vol}(N) = 4\pi \int_{\mathcal{I}} h_2(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi.$$

我们需要将其与 $\phi^{*A}(V_N + \mu)$ 在 M上的积分进行比较。由（5.5），可得

$$\phi^{*A} V_N = h_2(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi \wedge \omega_C \qquad \text{and} \qquad \phi^{*A}\mu \;= \tfrac{1}{2}(1-K)\eta_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \wedge \omega_C.$$

由于 $\eta_1 = \eta_2' - 2h_2(\xi)^2$,

$$\int_M \phi^{*A}\mu = \int_{\mathcal{I}} \left(\tfrac{1}{2}\eta_2' - h_2(\xi)^2\right) \mathrm{d}\xi \int_C (1-K)\omega_C = \int_{\mathcal{I}} h_2(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi \left(2\pi\chi(C) - \int_C \omega_C\right),$$

这里用到了前面讨论过的 η_2 的边界条件。因此,

$$\int_M \phi^{*A}(V_N + \mu) = 2\pi\chi(C) \int_{\mathcal{I}} h_2(\xi)^2 \,\mathrm{d}\xi = \frac{\chi(C)}{2}\,\mathrm{Vol}(N).$$

因此，这些解的拓扑度是 C 的欧拉示性数的一半，或者等价地，是 C 的亏格减一。注意，只有当 $C = S^2$ 时，这个值才为正；这与只有在这种情况下 g_M 才是黎曼的这一事实一致。

5.4 扭曲旋量解

现在我们考虑对上文所讨论的旋量解做一个小的变动。对于水平向量 $V \in TC$，我们令 ∇^A_V 由同一公式（5.9）给出，但令

$$\nabla_{\partial_\xi} s = B\Phi \cdot s \qquad \text{for all } s \in \Gamma(S)$$

其中某个常数为 $B \in \mathbb{R}$。换言之， A 与联络（5.9）的拉回相差一个 1-形式 $B\Phi\mathrm{d}\xi$。经过计算可知，$\mathrm{d}^A\Phi$ 仍由（5.13）给出，但 F现在由下式给出

$$F = \tfrac{1}{2}(1-K)\omega_C \otimes \Phi - B\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}^A\Phi.$$

我们得到

$$\phi^{*A}\nu = -2B\,\mathrm{d}\xi \wedge \Phi\,\mathrm{d}^A\Phi,$$
$$\phi^{*A}\mu^\sharp = \frac{\eta_1}{2}(1-K)\omega_C\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{B\eta_2}{h_2^2}\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}^A\Phi,$$

而 $\phi^{*A}\Sigma$与（5.14）相比保持不变。因此，BPS 方程（3.19）等价于

$$\alpha h_2(\xi)^2 + \tfrac{1}{2}\beta\eta_1(\xi)(1-K) = 0,$$
$$2\gamma B - \alpha = 0,$$
$$B\beta\eta_2(\xi) = 0.$$

我们假设 $h_1(\xi) = 1$, $\eta_2(\xi) = 0$ and $\gamma \neq 0$。于是第三个方程得以满足，而第二个方程的解为 $B = \frac{\alpha}{2\gamma}$。如果 $\alpha \neq 0$，那么第一个方程意味着$h_2(\xi)^2 = \beta\eta_1(\xi)(K-1)/2\alpha$。由于 $h_2 \neq 0$ 这意味着 $\beta \neq 0$。注意， β 只有在 C 的高斯曲率 K 为常数时才可能非零（因为 C 上的坐标与 $\alpha h_2(\xi)^2$ 无关）。

由于我们假设 $\eta_2 = 0$， $\phi^{*A}\mu^\sharp$ 由与前一次计算相同的公式（5.15）给出，而 BPS 方程（3.18）再次可通过选取度量（5.16）求解。

5.5 球对称解

对于下一族解，我们选取 $M = \mathcal{I} \times S^2$，并令 $\phi\colon\ M \to N$ 为恒等映射。特别地，$\xi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ 是恒等映射，且 $\Phi(x) = x$。我们的联络 A 将具有球对称性，并取如下形式

$$A = \tfrac{1}{2}(f(\xi) - 1)x \,\mathrm{d}x. \tag{5.17}$$

Then

$$F = \tfrac{1}{4}\big(f^2 - 1\big)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}f'\,\mathrm{d}\xi \wedge x\,\mathrm{d}x \qquad \text{and} \qquad \mathrm{d}^A\Phi = f\,\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\Phi^{*A}\omega_{S^2} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\big(\Phi\,\mathrm{d}^A\Phi \wedge \mathrm{d}^A\Phi\big) = f^2\omega_{S^2}.$$

因此，根据（5.2）、（5.3）和（5.5），

$$\begin{aligned}
\phi^{*A}\Sigma &= \frac{h_2^2 f^2}{h_1}\,\omega_{S^2} \otimes \frac{\partial}{\partial\xi} + h_1 f\,\mathrm{d}\xi \wedge x\,\mathrm{d}x,\\
\phi^{*A}\mu^\sharp &= \frac{\eta_1\big(f^2-1\big)}{2h_1^2}\omega_{S^2} \otimes \frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\eta_2 f'}{2h_2^2}\,\mathrm{d}\xi \wedge x\,\mathrm{d}x,\\
\phi^{*A}\nu &= \tfrac{1}{2}f'\,\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

BPS 方程（3.19）等价于

$$2\alpha h_1 h_2^2 f^2 + \beta\eta_1\big(f^2-1\big) = 0, \tag{5.18}$$
$$2\alpha h_1 h_2^2 f + \beta\eta_2 f' = 0, \tag{5.19}$$
$$\gamma f' = 0.$$

如果 $\gamma \neq 0$，则这些方程意味着 f 为常数。此外，如果 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta = 0$，那么 $f = 0$。这两个解都对应于旋量解的一个特殊情形。如果 $\alpha = \gamma = 0$ 且 $\beta \neq 0$，则它们意味着 $f^2 = 1$，从而意味着 $F = 0$。因此，我们转而考虑 $\gamma = 0$且 α、$\beta \neq 0$的情形。在这种情况下，需要将两个方程（5.18）和（5.19）与（5.6）联立求解。这三个方程意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{f f'}{f^2-1} - \frac{\eta_1}{\eta_2} = 0,\\
&\frac{\beta f'}{\alpha f} - \frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{\eta_2'}{\eta_2} = 0.
\end{aligned}$$

我们选择 坐标 ξ 在 N 上，使得 $\eta_2/\eta_1 = \xi$。那么这两个方程的解为

$$f(\xi) = \sqrt{1 + C_1\,\xi^2}, \qquad \eta_2(\xi) = C_2\,\xi f(\xi)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$$

常数 C_1 和 C_2。完整的系统（5.6）、（5.18）和（5.19）由此可解得

$$\begin{aligned}
&\eta_1(\xi) = C_2\,f(\xi)^{-\frac{\beta}{\alpha}},\\
&h_1(\xi)h_2(\xi)^2 = -\frac{\beta}{2\alpha}C_1C_2\,\xi^2 f(\xi)^{-\frac{\beta}{\alpha}-2}.
\end{aligned}$$

至此，解已完成。值得注意的是，这些方程并未约束度量函数h_1、 h_2，而只约束组合 $h_1h_2^2$。我们还要指出一个重要的解：若 $C_1=1$，$C_2=-1$，$\beta=2\alpha$ 且 $h_1=1/(1+\xi^2)$，则（5.16）和（5.5）为

$$\mu=-\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}(X,x)-\frac{\xi}{1+\xi^2}(X,\mathrm{d}x)\qquad\text{and}\qquad g_N=\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\right)^2+\frac{\xi^2}{1+\xi^2}g_{S^2}.$$

将坐标变换为 $\tilde{\xi}=$ 反正切ξ 可知，这些分别是 S^3的动量映射和度量。我们仍需解（3.18）。利用（3.19）（仍取 $\gamma=0$ 和 $\alpha\neq 0$），这等价于$\star_M\mathrm{d}^A\phi=\left(1-3\frac{\alpha}{\beta}\right)\phi^{*A}\Sigma$其形式为

$$\star_M\,\mathrm{d}\xi=\left(1-\frac{3\alpha}{\beta}\right)\frac{h_2^2f^2}{h_1}\,\omega_{S^2},$$
$$\star_M\,\mathrm{d}x=\left(1-\frac{3\alpha}{\beta}\right)h_1\mathrm{d}\xi\wedge x\,\mathrm{d}x.$$

假设 $\frac{3\alpha}{\beta}\neq 1$，我们可以通过选取下式来求解这些方程：

$$g_M=\left(1-\frac{3\alpha}{\beta}\right)^2\left(h_1(\xi)^2\mathrm{d}\xi^2+f(\xi)^2h_2(\xi)^2g_{S^2}\right).$$

为了后续使用，我们指出，这些球面解可以用旋量语言重新表述。由 $X\mapsto x\mathrm{d}x(X)$ 给出的映射 $T_xS^2\to\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ 满足 Clifford 代数关系$(x\mathrm{d}x(X))^2=(xX)^2=-|X|^2\mathrm{Id}$，其中我们将 x 和 X 视为满足$(x,\ x)=1$、$(x,\ X)=0$ 的 $\mathfrak{su}(2)$ 矩阵。因此，平凡丛 $S=S^2\times\mathbb{C}^2$ 与旋量丛同构，并且对任意 $s\in\mathbb{C}^2$ 均有 $x\,\mathrm{d}x(X)s=X\cdot s$。自同态 Φ 对应于乘以面积 2-形式 ω_{S^2}，因此其特征丛就是手征旋量丛 $S^\pm$。联络 $\mathrm{d}-\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x$ 使 Φ 平行，因此限制后在丛 $S^\pm$ 上给出一个阿贝尔联络。由于其曲率为常数，它必定是 S^2 的 Levi-Civita 联络。因此，当 $f(\xi)=0$ 时，联络（5.17）与 $C=S^2$ 的旋量联络（5.9）一致。

5.6 辛解

对于最后一族解，设 C 是一个二维流形，$L\to C$ 是一个厄米线丛。设 a 是 L 上的一个 U(1)联络，其曲率 $\mathrm{d}a$ 处处不为零。那么 $\omega_C:=-2\mathrm{d}a$ 在 C 上确定一个辛结构。

设 J_ξ 是 C 上依赖于 $\xi\in\mathcal{I}$ 的一族相容拟复结构。这意味着，对于每个 $\xi\in\mathcal{I}$ 和 $p\in C$，$J_{\xi,\,p}\colon T_pC\to T_pC$ 满足 $J_{\xi,\,p}^2=-1$，并且 $g_{C,\,\xi}(u,\ v):=\omega_C(u,\ J_\xi v)$ 是 C 上的一族黎曼度量。于是 J_ξ 确定一族子丛 $\Lambda^{1,\,0}_\xi C\subset\mathbb{C}\otimes\Lambda^1C$。设 w_ξ 是 $\Lambda^{1,\,0}_\xi C\otimes L^2$ 的一族截面，并将其归一化，使得 $2\mathrm{i}w_\xi\wedge\bar{w}_\xi=\omega_C$。这里，$\bar{w}_\xi$ 表示相对于 L^2 上厄米度量的 w 的对偶，并且是 $\Lambda^{0,\,1}_\xi\otimes L^{-2}$ 的一个截面。

我们选择 $M=\mathcal{I}\times C$, $\xi\colon\mathcal{I}\to\mathcal{I}$ 为恒等函数，$E=L^*\oplus L$，并且

$$A=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}a & -\bar{w}_\xi\\ w_\xi & \mathrm{i}a\end{pmatrix},\qquad\Phi=\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

我们假设 $\alpha=\gamma=\eta_2=0$，并且 $\beta\neq 0$。那么，BPS 方程（3.19）等价于

$$0=\beta\,\phi^{*A}\mu^\sharp=\beta(\mathrm{d}a+\mathrm{i}w_\xi\wedge\bar{w}_\xi)\otimes\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

根据构造，我们对 a 和 w_ξ 的选择自动满足这一点。由于现在有 $\phi^{*A}\mu^\sharp = 0$，方程（3.18）等价于 $\star_M \phi^{*A} = \phi^{*A}\star_N$，其解为 $g_M = \phi^{*A} g_N$。直接计算可得

$$g_M = h_1(\xi)^2 \mathrm{d}\xi^2 + 4h_2(\xi)^2 w_\xi \bar{w}_\xi = h_1(\xi)^2 \mathrm{d}\xi^2 + h_2(\xi)^2 g_{C,\xi}.$$

只有当 w_ξ 处处非零时，这才是黎曼度量。这意味着 L^2 同构于 $T^{1,0}_\xi C$ 并且 $2a$ 是定义在 $T^{1,0}C$ 上的联络。如果 C 是紧致的，这还意味着

$$\chi(C) = c_1\big(T^{1,0}C\big) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_C 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}a = +\frac{1}{2\pi}\int_C \omega_C > 0,$$

因此 C 必定是一个二维球面。

5.7 BPS 解的分类

在给出了方程 (3.18) 和 (3.19) 的若干解之后，我们现在可以陈述并证明一个对解进行分类的定理。

定理5.2。 设 $G = \mathrm{SU}(2)$ 且设 $N = \mathcal{I}\times\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$，度量和动量映射由 (5.1) 和 (5.5)给出。假设 $\eta_1(\xi)$ 处处非零，并且 α， β， γ 不全为零。那么，*BPS* 方程 (3.18) 和 (3.19) 的任意解都是上文描述的解之一，即狄拉克磁单极解、旋量解、扭曲旋量解、球面解或辛解。

在证明定理之前，我们先讨论其假设。假设 η_1 不处处为零，其依据是下文（5.8）中的观察：若 N 是紧致的， η_1 便不为零。此外，假设 α、 β、 γ 不全为零也是合理的，否则 BPS 方程（3.19）将是平凡的。

证明。 我们首先固定一个使 Φ 为常数的规范。具体而言，我们取

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}a & -\bar{w} \\ w & \mathrm{i}a \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

在此规范下，我们得到

$$\mathrm{d}^A\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathrm{i}\bar{w} \\ -2\mathrm{i}w & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} w\wedge\bar{w} - \mathrm{i}\mathrm{d}a & -\mathrm{d}^a\bar{w} \\ \mathrm{d}^a w & \mathrm{i}\mathrm{d}a - w\wedge\bar{w} \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

其中我们引入了 $\mathrm{d}^a w = \mathrm{d}w + 2\mathrm{i}a\wedge w$ 以及 $\mathrm{d}^a\bar{w} = \mathrm{d}\bar{w} - 2\mathrm{i}a\wedge\bar{w}$。BPS 方程（3.18）和（3.19）的形式为

$$\alpha\frac{h_2^2}{h_1}2\mathrm{i}w\wedge\bar{w} + \beta\frac{\eta_1}{h_1^2}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}w\wedge\bar{w}) = 0, \tag{5.22}$$

$$2\alpha h_1 \mathrm{d}\xi\wedge w + \left(\beta\frac{\eta_2}{h_2^2} + 2\mathrm{i}\gamma\right)\mathrm{d}^a w = 0, \tag{5.23}$$

$$\frac{h_2^2}{h_1}2\mathrm{i}w\wedge\bar{w} + 3\frac{\eta_1}{h_1^2}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}w\wedge\bar{w}) = \star_M \mathrm{d}\xi,$$

$$2h_1\mathrm{d}\xi\wedge w + 3\frac{\eta_2}{h_2^2}\mathrm{d}^a w = -2\mathrm{i}\star_M w. \tag{5.24}$$

注意到（5.24）意味着

$$2\star_M|w|^2 = w\wedge\star_M\bar{w} + \bar{w}\wedge\star_M w = \frac{3\mathrm{i}\eta_2}{2h_2^2}\,\mathrm{d}(w\wedge\bar{w}) + 2\mathrm{i}h_1\,\mathrm{d}\xi\wedge w\wedge\bar{w}. \tag{5.25}$$

W我们将根据 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩，分别求解两种情形下的方程 ϕ.

首先考虑 $\mathrm{d}^A\phi$ 的秩小于 3 的情形。我们将证明，在这种情况下，所有解都满足 $w=0$。这意味着这些解是狄拉克磁单极子，正如第 5.2 节所述。

由于 $\mathrm{d}^A\phi$ 不满秩，$\phi^{*A}V_N=0$。这意味着

$$\mathrm{d}\xi\wedge w\wedge\bar{w}=0. \tag{5.26}$$

若 $\beta\eta_2\neq0$ 或 $\gamma\neq0$，则（5.23）意味着

$$\mathrm{d}^a w = -\frac{2\alpha h_1 h_2^2}{\beta\eta_2+2\mathrm{i}\gamma h_2^2}\,\mathrm{d}\xi\wedge w. \tag{5.27}$$

将其代入（5.24）得

$$\star_M w = \mathrm{i}h_1\left(1-\frac{3\alpha\eta_2}{\beta\eta_2+2\mathrm{i}\gamma h_2^2}\right)\mathrm{d}\xi\wedge w.$$

由此以及（5.26），可得 $\bar{w}\wedge\star_M w=0$，从而 $|w|^2=0$.

另一方面，若 $\gamma=0$ 且 $\beta\eta_2=0$，则 $\beta=0$ 或 $\eta_2=0$。在前一种情况下，必有 $\alpha\neq0$，由（5.22）可知 $w\wedge\bar{w}=0$，再由（5.25）可知 $|w|^2=0$。在后一种情况下，若 $\eta_2=0$，则由（5.25）和（5.26）立即可得 $|w|^2=0$。

现在考虑 $\mathrm{d}^A\phi$ 满秩的情况。此时，$\mathrm{d}\xi$、w、$\bar{w}$ 构成 M 上 $^-$复化余切丛的一个标架。令 V、W、W 为 TM 的对偶标架。于是 $\iota_V\mathrm{d}\xi=\iota_W w=\iota_{\bar{W}}\bar{w}=1$，且 $\iota_W\mathrm{d}\xi=\iota_V w=\iota_W\bar{w}=0$。由于 V 处处不为零，它在 M 上生成一个流。令 C 为 M 对该流取商所得的空间，它与 ξ 的一个水平集同胚，因此是一个二维流形。存在一个自然投影 $M\to C$。将其与映射 $\xi\colon M\to\mathcal{I}$ 结合，可得到一个映射

$$M\longrightarrow\mathcal{I}\times C,$$

事实上，这是一个微分同胚。在此微分同胚下，V 被视为从 $\mathcal{I}$出发的切向量 $\partial/\partial\xi$，今后我们将其记作 $V=\partial/\partial\xi$。

考虑 BPS 方程（3.19）。每一项都是 $\Lambda^2M\otimes\phi^*TN$ 的截面，或者等价地说，是从 Λ^1N 到 Λ^2M 的映射。由于 $\mathrm{d}^A\phi$具有满秩，我们可以对 ϕ^{*A}求逆，从而得到 $\left(\phi^{*A}\right)^{-1}$：$\Lambda^1M\to\Lambda^1N$。正如第 3.4节所述，将（3.19）中的每一项与 $\left(\phi^{*A}\right)^{-1}$复合，会得到方程（3.21），其中每一项都是 $\Lambda^1M\to\Lambda^2M$ 的映射。正如命题 3.4所述，涉及动量映射的项必须是无迹的，我们将看到，这一事实会限制解。

首先，我们将约束明确写出。由（5.5）和（5.21），可得

$$\phi^{*A}\mu^\sharp = \frac{\eta_1}{h_1^2}(\mathrm{d}a+\mathrm{i}w\wedge\bar{w})\otimes\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\eta_2}{h_2^2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{d}^a\bar{w}\\ \mathrm{d}^a w & 0\end{pmatrix}.$$

在此方程中，我们将 S^2 处的切空间 Φ 与正交于 Φ的矩阵空间对应起来。由（5.21）可得，

$$\mathrm{d}^A\phi(W)=\begin{pmatrix}0&0\\-2\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\qquad\text{and}\qquad\mathrm{d}^A\phi(\bar{W})=\begin{pmatrix}0&-2\mathrm{i}\\0&0\end{pmatrix},$$

而 $\mathrm{d}^A\phi(\partial/\partial\xi) = \partial/\partial\xi$。因此，

$$\left(\phi^{*A}\mu^\sharp\right)\circ\left(\phi^{*A}\right)^{-1} = \frac{\eta_1}{h_1^2}(\mathrm{d}a + \mathrm{i}w\wedge\bar{w})\otimes\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\mathrm{i}\eta_2}{2h_2^2}\left(\mathrm{d}^a w\otimes W - \mathrm{d}^a\bar{w}\otimes\bar{W}\right).$$

命题 3.4 第 (3) 项中的无迹约束为

$$0 = \frac{\eta_1}{h_1^2}\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d}a + \frac{\mathrm{i}\eta_2}{2h_2^2}\left(\iota_W\mathrm{d}^a w - \iota_{\overline{W}}\mathrm{d}^a\overline{w}\right), \tag{5.28}$$

其中我们利用了 $\iota_{\partial\xi}w = \iota_{\partial\xi}\bar{w} = 0$ 这一事实。

现在我们假设 $\beta\eta_2$ 和 γ 中至少有一个非零（我们将在证明$\beta\eta_2 = \gamma = 0$ 末尾回到这一情形）。那么 (5.23) 表明 $\mathrm{d}^a w$ 由 (5.27) 给出。将其代入约束 (5.28) 得到

$$0 = \frac{\eta_1}{h_1^2}\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d}a + \frac{4\alpha\gamma\eta_2 h_1 h_2^2}{(\beta\eta_2)^2 + (2\gamma h_2^2)^2}\mathrm{d}\xi.$$

将其与 $\partial/\partial\xi$ 收缩可知 $\alpha\gamma\eta_2 = 0$，进而得到 $\eta_1\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d}a = 0$。于是我们处于以下三种情形之一：要么 $\alpha = 0$，要么 $\gamma = 0$，要么 $\eta_2 = 0$。我们依次讨论这些情形。

若 $\alpha = 0$，则由 (5.27) 得 $\mathrm{d}^a w = 0$。回想 $\iota_{\partial_\xi}w = 0$。我们可以选取一个规范，使得 $\iota_{\partial_\xi}a = 0$ 也成立。此外，

$$\mathcal{L}_{\partial_\xi}a = (\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_{\partial_\xi})a = 0 \qquad \text{and}$$
$$\mathcal{L}_{\partial_\xi}w = (\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_{\partial_\xi})w = \iota_{\partial_\xi}(\mathrm{d}^a w - 2\mathrm{i}a\wedge w) = 0.$$

那么，由于它们沿 $\frac{\partial}{\partial\xi}$ 的李导数和内积均为零，a 和 w 都是定义在 C 上并拉回到 M 的 1-形式。

现在考虑 C 上的度量 $g_C = \Phi^{*A}g_{S^2} = 4w\bar{w}$。一个标准正交标架由 $e^1 = w + \bar{w}$、$e^2 = \mathrm{i}(\bar{w} - w)$ 给出。于是，$\mathrm{d}^a w = 0$ 意味着

$$\mathrm{d}e^1 - 2a\wedge e^2 = 0, \qquad \mathrm{d}e^2 + 2a\wedge e^1 = 0. \tag{5.29}$$

方程（5.29）表明，度量相容联络 $\nabla e^1 := 2a\otimes e^2$，$\nabla e^2 := -2a\otimes e^1$ 无挠，因此它必定是 g_C 的 Levi-Civita 联络。此外，

$$TC \longrightarrow \mathrm{End}(E), \qquad X \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\iota_X\bar{w} \\ \iota_X w & 0 \end{pmatrix}$$

满足 Clifford 代数关系 $X\cdot X = -g_C(X,\ X)\,\mathrm{Id}$，因此（$L^*\oplus L$）同构于 C 的旋量丛。那么，拟设（5.20）恰好就是第5.3节中考虑的旋量拟设。

若 $\gamma = 0$，则 $\mathrm{d}^a w$ 由式（5.27）给出

$$\mathrm{d}^a w = -\frac{2\alpha h_1 h_2^2}{\beta\eta_2}\mathrm{d}\xi\wedge w. \tag{5.30}$$

同样，我们选择一种规范，使得 $\iota_{\partial_\xi}a = 0$，并得到 $\mathcal{L}_{\partial_\xi}a = 0$。另一方面，式（5.30）蕴含

$$\mathcal{L}_{\partial_\xi}w = (\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d} + \mathrm{d}\iota_{\partial_\xi})w = -\frac{2\alpha h_1 h_2^2}{\beta\eta_2}w,$$

其中我们使用了 $\iota_{\partial_\xi}a = 0$。该方程意味着 $w = f(\xi)w_0$，其中 w_0满足 $\mathcal{L}_{\partial_\xi}w_0 = \iota_{\partial_\xi}w_0 = 0$ 并且 f 满足微分方程（5.19）。

由（5.22），可得

$$\mathrm{d}a = -\mathrm{i}\left(1 + \frac{2\alpha h_1 h_2^2}{\beta\eta_1}\right) f^2\, w_0 \wedge \bar{w}_0.$$

由于 $\mathcal{L}_{\partial_\xi}\mathrm{d}a = \mathcal{L}_{\partial_\xi} w_0 \wedge \bar{w}_0 = 0$，实函数 $\left(1 + \frac{2\alpha h_1 h_2^2}{\beta\eta_1}\right) f^2$ 必须为常数。不失一般性，我们可以选择 f，w_0 使该常数为 1。于是 $\mathrm{d}^a w_0 = 0$，因此，按照上文的推理，a 必须是度量 $g_C = 4w_0\bar{w}_0$的 Levi-Civita 联络。由于 $\mathrm{d}a = -\mathrm{i}w_0 \wedge \bar{w}_0$，该度量的标量曲率为 $K = 1$，也就是说，它是 S^2上的圆度量。映射

$$TM \longrightarrow \mathrm{End}(E), \qquad V \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\bar{w}_0(V) \\ w_0(V) & 0 \end{pmatrix}$$

满足 Clifford 代数关系，因此 E 是 S^2 的旋量丛，我们处于第 5.5 节末尾所述的情形。

若 $\eta_2 = 0$，则 $\mathrm{d}^a w$ 由（5.27）给出

$$\mathrm{d}^a w = \mathrm{i}\frac{\alpha h_1}{\gamma}\mathrm{d}\xi \wedge w. \tag{5.31}$$

我们选择坐标 ξ，使得 $h_1(\xi) = 1$，并选择一个满足 $\iota_{\partial_\xi} a = \alpha/2\gamma$ 的规范。于是再次有 $\mathcal{L}_{\partial_\xi} a = 0$，同时

$$\mathcal{L}_{\partial_\xi} w = (\mathrm{d}\iota_{\partial\xi} + \iota_{\partial\xi}\mathrm{d})w = \iota_{\partial_\xi}(\mathrm{d}^a w - 2\mathrm{i}a \wedge w) = 0.$$

联络 $a_0 = a - (\alpha/2\gamma)\,\mathrm{d}\xi$ 满足 $\iota_{\partial_\xi} a_0 = 0$，$\mathcal{L}_{\partial_\xi} a_0 = 0$ 且 $\mathrm{d}^{a_0} w = 0$，因此按照上面的推理，它必定是度量 $g_C = 4w\bar{w}$的 Levi-Civita 联络。现在我们处于第5.4节所述的情形。

因此，$\mathrm{d}^A\phi$ 具有满秩且 $\beta\eta_2$、γ 中至少有一个非零的解，正是第5.3、5.4 和5.5节所描述的那些解。现在考虑 $\beta\eta_2 = \gamma = 0$ 且 $\mathrm{d}^A\phi$具有满秩的情形。在此情况下，（5.23）意味着 $\alpha = 0$，因为根据假设 $\mathrm{d}\xi \wedge w \neq 0$。于是 $\beta \neq 0$，因为我们假设 α、β、γ 并非全为零，因此 $\eta_2 = 0$。

由于 $\eta_1 \neq 0$，（5.22）意味着 $\mathrm{d}a = -\mathrm{i}w \wedge \bar{w}$。这反过来意味着 $\iota_{\partial_\xi}\mathrm{d}a = 0$。在 $\iota_{\partial_\xi} a = 0$的规范下进行计算，可得 $\mathcal{L}_{\partial_\xi} a = 0$。因此，$a$是 C上的线丛上的联络的拉回。其曲率不为零，因为 $\mathrm{d}^A\phi$ 具有满秩，因此 $\mathrm{i}\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}a = \mathrm{d}\xi \wedge w \wedge \bar{w} \neq 0$。

简单计算表明 $2\mathrm{i}w \wedge \bar{w} = \Phi^{*A}\omega_{S^2} =: \omega_C$ 并且 $\Phi^{*A} g_{S^2} = 4w\bar{w} =: g_C$。由此可知，$w$ 是关于由度量 g_C在 C上定义的复结构的 (1,0)-形式。注意，这个度量及其复结构可能依赖于 ξ，因为 $\mathcal{L}_{\partial_\xi} w$ 可能不为零。然而，面积形式满足 $\mathcal{L}_{\partial_\xi}\omega_C = -2\mathcal{L}_{\partial_\xi}\mathrm{d}a = 0$。我们现在恰好处于第5.6节所考察的情形。因此，在 $\beta\eta_2 = \gamma = 0$情况下的满秩解，就是该节中的辛解。■

6 主轨道 S^3

在本节的最后，我们简要考虑 $G = \mathrm{SU}(2)$ 作用于 N 且具有主轨道 S^3的情形。换言之，我们考虑 $N =$SU(2) 通过左乘作用于自身。无需深入探讨细节，本节的基本结论是，在这种情况下，BPS 方程（3.18）和（3.19）完全不适用，因为量（2.12）并非定义良好的拓扑荷。从宏观角度看，这是合理的，因为等变上同调 $H^3_{\mathrm{SU}(2)}\left(S^3,\ \mathbb{R}\right) = 0$ 是平凡的。从更具体的角度看，这里出现的问题

在于不存在满足约束（ μ 2.11）的动量映射。因此，出于这个原因，我们不在这种情形下寻求方程（3.18）和（3.19）的解。

我们现在简要讨论为何不存在 μ 满足（2.11）的对象。SU(2) 在（SU(2)$^{g_{\mathrm{SU}(2)}}$）上的作用为等距变换这一条件，迫使$g_{\mathrm{SU}(2)}$ 成为左不变形式。因此，体积形式的形式为

$$V_{\mathrm{SU}(2)} = -\frac{K}{12}\mathrm{tr}(\theta_L \wedge \theta_L \wedge \theta_L) = -\frac{K}{12}\mathrm{tr}(\theta_R \wedge \theta_R \wedge \theta_R)$$

对于某个 $K > 0$，其中$\theta_{L,\ R}$ 是第3.2节讨论的左不变和右不变 Maurer–Cartan 形式。由（3.12），对应于 SU(2) 在自身上的左作用的向量场 ν_L 与 $V_{\mathrm{SU}(2)}$ 收缩后得到

$$\iota_{\nu_L(X)} V_{\mathrm{SU}(2)} = \tfrac{K}{4}\mathrm{tr}(X\,\theta_R \wedge \theta_R) = \mathrm{d}\tfrac{K}{4}\mathrm{tr}(X\,\theta_R),$$

最后一行中，我们使用了结构方程（3.11）。容易看出，满足 $\mathrm{d}\mu(X) = \iota_{\nu_L\ (X)}\ V_{\mathrm{SU}(2)}$ 的唯一左等变选择因此为

$$\mu(X) = \tfrac{K}{4}\mathrm{tr}(X\,\theta_R).$$

另一方面，利用（3.12），可得

$$\iota_{\nu_L(X)}\mu(X) = -\tfrac{K}{4}\mathrm{tr}(X^2) = \tfrac{K}{2}|X|^2 \neq 0,$$

因此，不存在 μ 同时满足（2.10）和（2.11）的对象。尽管在这种情况下，我们已证明拓扑荷无法实现为等变拓扑度，但值得指出的是，也可以采用另一种拓扑描述方式，即考虑普通拓扑度（3.3）与 Chern–Simons 泛函之差；研究电弱 *Skyrmion* 的学者采用的正是这一约定（参见例如 [16, 17]）。本文关注的是适用于拓扑荷由等变度（3.18）和（3.19）给出的理论的 BPS 方程（2.12），因此，关于适用于电弱 Skyrmion 的可能 BPS 方程的分析将留待未来研究。

7 结论性 टिप्पणी

我们描述了一个关于任意空间和三维目标流形上的规范 Skyrmion 的几何框架，将 Manton 先前关于 [22] 普通（未规范化）Skyrmion 的工作推广到了规范理论的情形。特别是，我们研究了规范 Skyrmion 的一些 BPS 方程（3.18）和（3.19），并对 U(1) 和 SU(2) 规范化情形下所有相关的解进行了分类。我们的结果表明，不同于只有在为常数或等距变换时才满足 BPS 条件的普通 Skyrmion，我们可以找到丰富多样的 BPS 解，其中许多既不是常数，也不是等距变换。

现在，我们讨论一些需要进一步研究的领域。首先，我们的表述有一个局限，即它明确地限于三维，因此无法直接推广到其他维数并保持存在 BPS 解。如果希望改变目标流形的维数（例如，为了描述规范 Hopfion），这将自动改变形式的次数 Σ和 μ，从而使我们的 BPS 方程（3.18）和（3.19）失去意义。因此，沿这些方向开展任何类似的研究，都需要对我们所描述的内容作出一些修改。

我们所采用表述的第二个局限是，我们将关注范围限制在一个特定的等变上同调类，即与 N 的体积形式相关联的类 $[V_N + \mu] \in H^3_G(N,\ \mathbb{R})$。其他类也值得研究。一个具体例子是电弱 Skyrmion，它与 SU(2) 在自身上的左作用相关。如上所述，在这种

情形下 $H^3_{\mathrm{SU}(2)}(\mathrm{SU}(2)\ \mathbb{R})\ =0$ 但 $\mathbb{R}^3$ 上的 Skyrmion 仍可能具有非平凡的拓扑性质 [16, 17]。另一个例子是 SU(2) 磁单极子，其中 SU(2) 在 $N=\mathfrak{su}(2)$ 上按伴随方式作用。在这种情形下，拓扑度由 $\mathrm{tr}\big(F\wedge \mathrm{d}^A\phi\big)$的积分给出，它是等变形式 $X\mapsto \mathrm{tr}(X\mathrm{d}x)$ 的拉回。该形式在 $\mathfrak{su}(2)\cong\mathbb{R}^3$ 的等变上同调中代表一个平凡类，但它在边界为 $B^3\subset\mathbb{R}^3$ 的球的相对等变上同调中定义了一个非平凡类 S^2。

尽管我们一直着重讨论拓扑能量界，但上同调在规范理论中的另一个重要用途，是构造拓扑拉格朗日量。正如四维杨–米尔斯理论的拓扑荷密度 $\mathrm{tr}(F\wedge F)$ 可用于定义三维陈–西蒙斯拉格朗日量一样，其他 n 维拓扑荷密度也可用于定义 $(n-1)$ 维拉格朗日量。论文 [30] 旨在对以这种方式产生的规范化σ模型拉格朗日量进行分类。本文所回顾的等变上同调可用于系统地对这类拉格朗日量进行分类。

最后，本文着重于将普通的 Skyrme 能量（3.2）推广到规范理论；这种能量仅由两项组成——狄利克雷项 $|\mathrm{d}\phi|^2$ 和斯格明子项 $|\phi^*\Sigma|^2$ ——它们分别关于导数呈二次和四次，并且具有常数耦合。多年来，人们提出了各种不同的 Skyrme 能量，其中包含不一定遵守这一约束的附加项，例如加入更高阶或更低阶的项，或包含场依赖耦合（参见，例如 [2, 3, 19, 20]）。在物理上更现实的模型中，尤其值得关注的是加入能够赋予π介子质量的势能项 [1], ；最近已有一些工作开始研究具有质量π介子的规范 Skyrmion [21]。如果能以与本文所述方法类似的思路，在几何框架内考察所有这些广义斯格明子模型，将会很有意义。

致谢

作者谨此感谢 Nuno Rom˜ao 在本研究初期阶段进行的有益讨论。

参考文献

[1] Adam C., Nappi C.R., 《含π介子质量的斯格明子模型》, *Phys. Lett. B* **233** (1984年), 109–115。[2] Adam C., Oles K., Wereszczynski A., 《介电斯格明子模型》, *Phys. Lett. B* **807** 2020 135560, ( ), 6 2005 00018 页码, arXiv: . .[3] Adam C., Sanchez-Guillen J., Wereszczynski A., 《一种斯格明子型重子物质模型》, *Phys. Lett. B* **691** 2010 105 110, 1001 4544 ( ), – arXiv: . .[4] Arthur K., Tchrakian D.H., 《 $\mathbb{R}^3$上的 O(4)σ模型的 SO(3)规范孤子》, *Phys. Lett. B* **378** (1996), 187–193, arXiv:hep-th/9601053。[5] Atiyah M.F., Bott R., 《黎曼曲面上的杨–米尔斯方程》, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **308** 1983 523 615 ( ), – 。

[6] Atiyah M.F., Bott R., 《动量映射与等变上同调》, *Topology* **23** (1984年), 1–28。[7] B¨ar C., 《实Killing旋量与整体性》, *Comm. Math. Phys.* **154** (1993), 509–521。[8] Berline N., Getzler E., Vergne M., 《热核与狄拉克算子》, *Grundlehren Text Ed.*, Springer, 柏林, 2004年。[9] Biswas I., Hurtubise J., 《萨萨基三流形上的磁单极子》, *Comm. Math. Phys.* **339** (2015年), 1083–1100, arXiv:1412.4050。[10] Brihaye Y., Hartmann B., Tchrakian D.H., 《SO(3)规范 Skyrme 模型中的磁单极子与磁电单极子》, *J. Math. Phys.* **42** 2001 3270 3281, 0010152 ( ), – arXiv:hep-th/ 。[11] Callan Jr. C.G., Witten E., 《磁单极子催化斯格明子衰变》, *Nuclear Phys. B* **239** (1984年), 161–176。

[12] Callies M., Fr´egier Y., Rogers C.L., Zambon M., 《同伦矩映射》, *Adv. Math.* **303**(2016年), 954–1043, arXiv:1304.2051。[13] Cieliebak K., Gaio A.R., Mundet i Riera I., Salamon D.A., 《辛涡旋方程与哈密顿群作用的不变量》, *J. Symplectic Geom.* **1** (2002年), 543–645, arXiv:math.SG/0111176。[14]Cork J., 《来自热子的Skyrmion》, *J. High Energy Phys.* **2018** (2018年), 第11期, 137, 43页, arXiv:1810.04143。[15] Cork J., Harland D., Winyard T., 《一种低束缚能规范 Skyrmion 模型》, *J. Phys. A* **55** (2022年), 015204, 37页, arXiv:2109.06886。[16] Criado J.C., Khoze V.V., Spannowsky M., 《希格斯玻色子促成电弱 Skyrmion 的涌现》, *J. High Energy Phys.* **2021** (2021年), 第3期, 162, 23页, arXiv:2012.07694。[17] D'Hoker E., Farhi E., 《在标准电弱理论中解耦费米子》, *Nuclear Phys. B* **248** (1984年), 77–89。[18] Faddeev L.D., 《关于多维孤子的一些评论》, *Lett. Math. Phys.* **1** (1976年), 289–293。[19] Gudnason S.B., Nitta M., 《重子环面：广义 Skyrme 模型中的环面重子》,

Phys. Rev. D ( ), 页

91 2015 045018, 9 1410 8407
码, arXiv: . .[20] Harland D., 《含有质量π介子的 Skyrme 模型与 Faddeev 模型的拓扑能量界》,

Phys. ( ), –

Lett. B **728** 2014 518 523, 1311 2403
arXiv: . .[21] Livramento L.R., Radu E., Shnir Y., 《规范化 Skyrme–Maxwell 模型中的孤子》, *SIGMA* **19** (2023年), 042, 17页, arXiv:2301.12848。[22] Manton N.S., 《Skyrmion 的几何》, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987年), 469–478。[23] Manton N.S., 《Skyrmion：原子核理论》, 世界科学出版社, 伦敦, 2022年。[24] Mundet i Riera I., 《辛纤维丛的杨–米尔斯–希格斯理论》, 博士论文, 马德里自治大学, 1999年, math.SG/9912150。[25] Navarro-L´erida F., Radu E., Tchrakian D.H., 《关于 $SO(2)$规范 Skyrmion 在 $2+1$和 $3+1$维中的拓扑荷》, *Phys. Lett. B* **791** (2019年), 287–292, arXiv:1811.09535。[26] Piette B.M.A.G., Tchrakian D.H., 《U(1) 规范化 Skyrme 模型中的静态解》, *Phys. Rev. D* **62** (2000年), 025020, 10页, arXiv:hep-th/9709189。[27] Radu E., Tchrakian D.H., 《旋转的 U(1) 规范化 Skyrmion》, *Phys. Lett. B* **632** (2006年), 109–113, arXiv:hep- th/0509014。[28] Rom

Comm. Math. Phys. ao

379 2020 723 772, 1807 00712
N.M., Speight J.M., 《BPS 涡旋-反涡旋对空间的几何》, ( ), – arXiv: . .[29] Skyrme T.H.R., 《介子与重子的统一场论》, *Nuclear Phys.* **31** (1962年), 556–569。[30] Tchrakian D.H., 《关于 Skyrme–陈–西蒙斯密度的若干方面》, *J. Phys. A* **55**(2022年), 245401, 19页, arXiv:2111.13097。[31] Walton E., 《薄膜上磁性 Skyrmion 的几何》, *J. Geom. Phys.* **156** (2020 103802, 20 1908 08428), 页码, arXiv: . .[32] Witten E., 《 $1/N$ 展开中的重子》, *Nuclear Phys. B* **160** (1979年), 57–115。